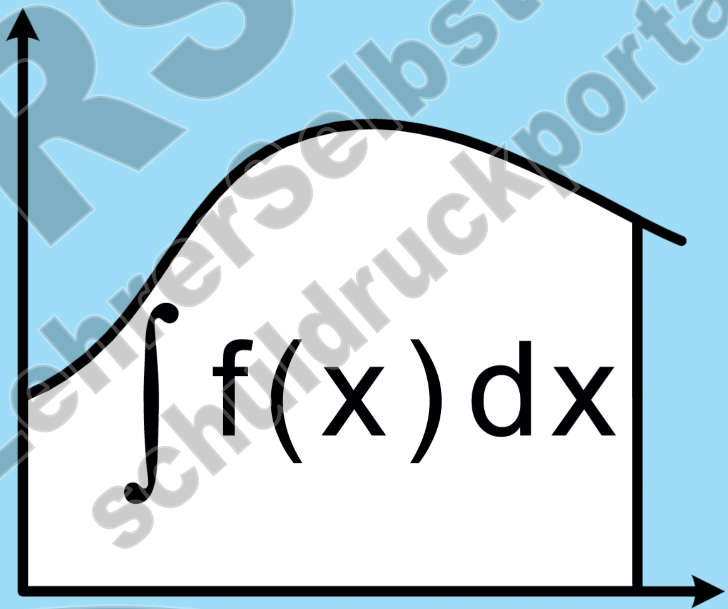
Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-030-251

LehrerS...
Sok... z (Germany) 2014
w... erlag...
...w.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn...
selbstorganisi... lernen

Kapite...

Rand- und Flächeninhalts... n

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun[g]

We[iter]führun[g d]er Integral[rec]hnung

Gesa[...]nung selbstorganisiert erlernen [...]2-030-251)
St[...]

[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[any])
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

[Ur]sula Pirkl

Integral[rec]hnung selbst[or]ganisiert er[ler]nen

LEHRER SELBST [VER]LAG
[...]51

tand: 17.03.2015

Lehre
Sok de GmbH, Koblenz (Germany) 2013
ww bstVerlag.de

D druck.de

Vorwort

Die Basis für die Entwicklung des vorliegenden Arbeitshefts zum Thema Integralrechnung bilden meine langjährigen Erfahrungen im Unterricht an Oberstufen von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Vor allem die heterogene Zusammensetzung in Klassen mit Schülerinnen und Schülern, die in ihrem Bildungsgang zuvor die unterschiedlichsten Schulformen besucht haben, stellen hohe und vielschichtige Herausforderun[illegible] die Gestaltung von Unterricht. Das bildungs[illegible]ische Ziel, das Erreichen der Allgemeinen Hochsch[illegible]ife für Schülerinnen und Schüler unabhängig von ih[illegible]isher erreichten Kompetenz zu ermögli[illegible]setzt [illegible] dass die Schülerinnen und Sch[illegible] dort [illegible] den, wo sie sich befinden. Mein[illegible] Jahre hinweg entwickelten Arbeit[illegible] die [illegible]menbereiche der Oberstufe [illegible]uf ausge[illegible] diesen Bedürfnissen zu ent[illegible]zielte[illegible]isse meiner Schülerinnen u[illegible]ndesabitur Hessen bestätigen, dass der [illegible] Weg erfolg[illegible] ist. Es ist [illegible]lant, [illegible] zu weiteren T[illegible] der Oberstu[illegible] Arb[illegible]fte herausz[illegible].

[illegible] mir imm[illegible] wieder aufgefa[illegible], dass viele [illegible] Schüler m[illegible] Komplexität [illegible] der Integr[illegible]ung Schwie[illegible] ten [illegible], und selbst bei einfa[illegible] Flächenbere[illegible] Problemen stande[illegible] wurde von mir [illegible] neuen [illegible]sucht, die[illegible] Zugang zu die[illegible] Thema erleicht[illegible]. Als Ergebnis [illegible]eses, auch von Kollegen und Kolleginnen erprobte Unterrichtskon[illegible]pt entstanden, mit dem in der Regel sogar Schülerinnen und Schüler erfolgreich einen Weg zum Thema Integralrechnung finden, die von sich selbst behaupten, Mathematik nicht zu verstehen. Durch den [illegible] besteht die Möglichk[illegible] Verfa[illegible]

[illegible] der Forderung nach selbstorganisi[illegible] (SOL) Rechnung getragen und die Zielset[illegible] der Kompetenzerweiterung erlangt.

Eigene Erfahrung mit dem Einsatz der Unterlagen zeigen, dass sich häufig bereits schon bei der Bearbeitung der ersten Sei[illegible] Erfolgserlebnisse einstellen, [illegible]llung zum Fach Math[illegible]ssen. Letztendlich [illegible]ülerinnen und Schü[illegible] Kolleginnen und en[illegible], die nicht von mir [illegible], den Anstoß gegeben, zum Thema [illegible]ng dieses Arbeitsheft in gebundener Form [illegible]ben.

Ursula Ri[illegible]

Komment[illegible] Schül[illegible] Schülern:

Es hat [illegible] macht, mit Ihren [illegible]lagen [illegible] habe alles [illegible], w[illegible] man sich das Thema in ganz kle[illegible]hritt[illegible] selbst erarbeiten konnte und [illegible] sogar die Auf[illegible] im Schulbuch [illegible]ne Pro[illegible] lösen ko[illegible]

„Ich wa[illegible] schlecht [illegible] Mathematik und hatte in [illegible]elstufe oft e[illegible] Fünf. Seit ich mit [illegible] Unterlagen a[illegible], erkenne ich S[illegible]kturen, kann im[illegible] wieder zurückblättern und nachlesen, [illegible] Mathematik und schreibe gute Not[illegible]“

Zi[illegible]ppe

Die Unterlagen beinhalten für die Abiturprüfung in Hessen grundlegende Themen aus dem Bereich der Integralrechung für Grund- und Leistungskurs und können in der gymnasialen Oberstufe sowie an Fachoberschulen und Einrichtungen, in denen die Allgemeine Hochschulreife erworben werden kann, eingesetzt werden. Das Konzept des selbstorganisierten Lernens ermöglicht auch angehenden Studentinnen und Studenten zur Vorbereitung auf einen Studiengang, der Mathematik beinhaltet, ihre Kenntnisse zum Thema Integralrechnung aufzuarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik [illegible] der Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vorzüg[illegible]ignet, da die Unterlagen die Bedürfnisse Ziel[illegible]ngsproblem in Mathematik“ voll abdeckt.

Meth[illegible] didaktische Anmerk[illegible]

Die Unterlag[illegible]uf ausgerichtet, dass die Schülerinnen und[illegible]ehend eigenständig und individuell in Lern[illegible] Hause die einzelnen Themen erarbeiten [illegible]lzeiten auch nacharbeiten können. Über [illegible] kann der zeitliche Rahmen so gesteuert [illegible] 20 Stunden für den Abschnitt Einführung in [illegible]chnung nicht überschritten werden. Als Le[illegible]lichen mir die Unte[illegible] mittlerweile die [illegible] auf den Unterricht [illegible]gestalten, dass ich [illegible] die Rolle eines [illegible]chs wahrnehmen [illegible]end leistungsstar[illegible]erinnen und Sch[illegible]men in der Regel völlig selbstständig erarbeiten, kann ich bei Bedarf individuelle Unterstützung anbieten. Zu Beginn der Stunden erfolgt eine inhaltsorientierte, fachliche Einführung bzw. die gemeinsame Wiederholung zur Festigung der bisher gewonnenen Erkenntnisse und somit die Erweiterung der Kompetenz des Einzelnen.

Die Unterlagen sind so gestaltet, dass Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse vollständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben werden, sodass keine unübersichtlichen losen Blättersammlungen entstehen und alle Informationen ohne Suchaktionen schnell nachgesc... gen werden können. Die vollständigen Lösungen we... als Download zur Verfügung gestellt. Da die Unterlag... ergänzend zum Schulbuch eingesetzt w... sind a... Stellen, an denen beispielsweise weit... Vertiefungen durch Übungsaufgaben gewünscht sin... eingefügt, dass Verweise der L... rinn... Le... auf Aufgaben im Schulbuch ... ch notie... können. Weiteren Anregu... und ...besse... wünschen werden gerne auf U... prüft.

Anme...ngen zu de... nzelnen Ka...teln

...ührun... die Integralrechn...: Kap...

Der Teil Einführung in die Integralrechnung stellt ein in sich geschlossenes Unterrichtskonz... dar. Die einzelnen Kapitel bauen aufeinander auf und sollten daher in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. In Kapitel 1 bis 3 werden anhand der Betrachtung von Flächenstücken bei linearen F... des Begriffes In... funktion ... ordin... d... ...Entkopplung vom Regelwerk für ...nung die oben beschriebene Reduktion ...exität bewirkt.

...n Kapitel 4 erfolgt unter Verwendung der nun bereits bekannten Stammfunktion ein einfach nachvollziehbarer und anschaulicher ... Integral. Die formale Herleit... = x² über Grenzwert... ändnis nicht notwe... sprungen werden. A... nalen Charakter d... sind option... können zur Binne... in heterogenen Lerngruppen herange...

...eichen Betrachtungen an Geraden koste... inn der Unterrichtsreihe etwas mehr Zeit a... ne direkte Einstieg über die Grenzwert... b... er- oder Untersumme. Das gleicht sich jedoch wieder aus, da die Sch... nen und ... üler die Rechenregeln für die Integralre... als ...gänzung zu den Regeln für d... gang m... nfunktion sehen, Begriffe klar ... nen ... Ende von Kapitel 5 ohne Probl... in ... sind, die vorgegebenen S...dardau... ächenberechnung selbstständig ...sen.

Anwe... der In...ralrechnung Kapitel ...10

In... schnitt Anwendu... der Integralre...ung findet sich ... Samml... Arbeitsblätte... Einführung ...rrelevante St...dardthemen ... Integralrech... Die Aufgab...tellung in Ka...l 6 knüpft dabei an das Beispiel z... Berechnung ... Arbeit aus den Vorbemerkung..., wobei die ...tung von Flächen im Sa...enhang ei... Aufgabenstellung für weitere Beisp... erläutert w...

Weiterführ... Intergralrechnung: Kapitel ... bis 15

Die Regel für die lineare Substitution wird zunächst für den Grundkurs intuitiv an Beispielen plausibel gemacht. Als erweiternde Betrachtung erfolgt an einem Beispiel auch die Erarbeitung des ausführlichen Substitutionsverfahrens bei der linearen Substitution. Die Ausführungen zur e-Funktion setzten die Kenntnis von Ableitungsregeln bei der e-Funktion voraus und können daher erst nach der Einführung in die e-Funktionen bearbeitet werden.

Eine Behandlung des Substitutionsverfahrens auch für nicht lineare innere Funktionen und die partielle In... dürfte dem Leistungskurs vorbehalten sein ...bereitung auf das Studium dienen. In beiden ... die jeweiligen Integrationsverfahren ...dfunktionen mithilfe von Beispielen ... Auf komplizierte Verfahren, die trickr... verlangen oder die mehreren Stufen be... beide Integrationsverfahren benötigen, ...angen. Die Reihenfolge von Kapitel 12 u... eliebig.

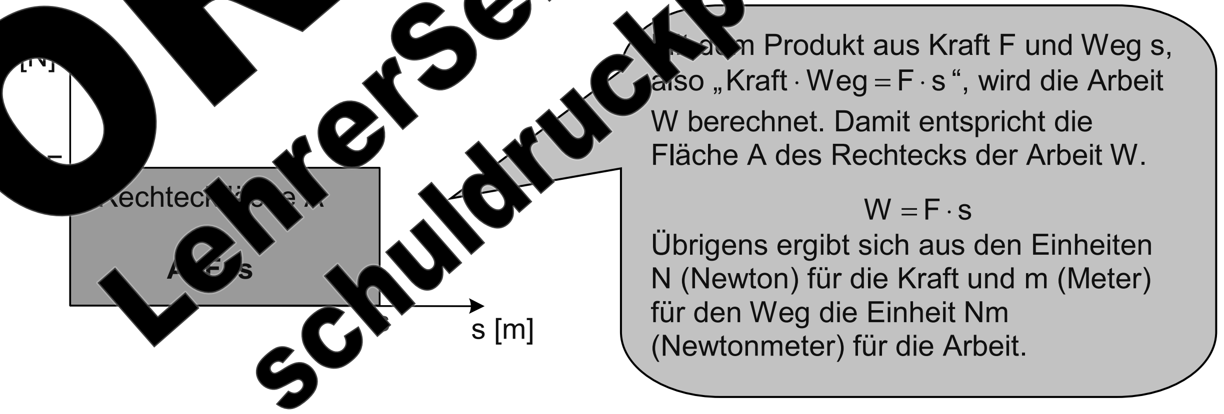
Integrationsverfah... ionen und die logarithmische Integration ... und 15 kann erst nach der Behandlung de... en Ableitungsregeln erfolgen.

Vorbetrachtungen

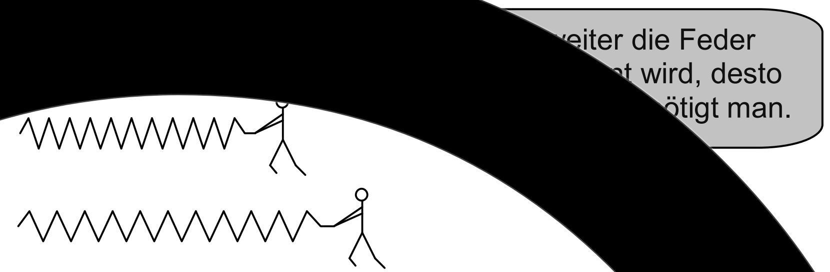
Wie Sie sicherlich bereits aus dem Physikunterricht der Klasse 11 ... könne... chen zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse eine inhaltliche Bede...ng ...n. Dies soll nun am Beispiel der Berechnung der Arbeit noch einmal kurz darge...ellt wer...

1. Arbeit bei konstanter Kraft

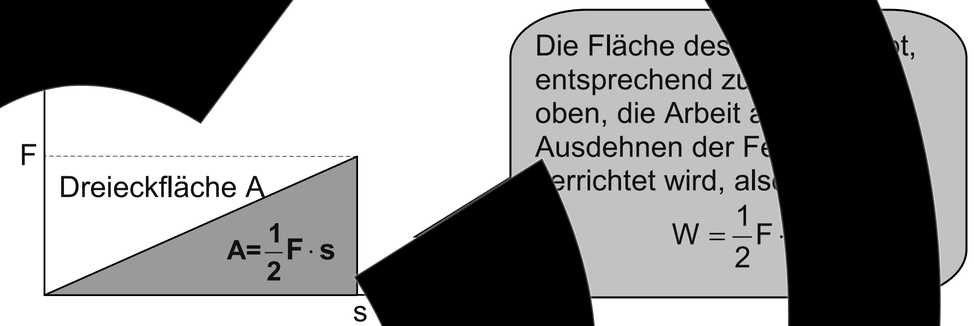
Diesen Sach... lt k... man in einem F,s-Diag...m wie folg... rstellen:



2. Arbeit bei zunehmender Kraft



Bei einer F... F,s-Diagramm wie folgt au...



VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

3. Arbeit bei sich beliebig ändernder Kraft

In diesem Fall könnte ein F,s-Diagramm so aussehen:

Zielsetzung

Mi … rbeitet werden, mit der man … ann, die in einem Koordinatensy … n können und die keine … r als Begrenzung haben.

Bevor jedoch die … in Angriff genommen wird, s … t noch für das Verständnis d … de mathematische Vorraussetz … holt werden.

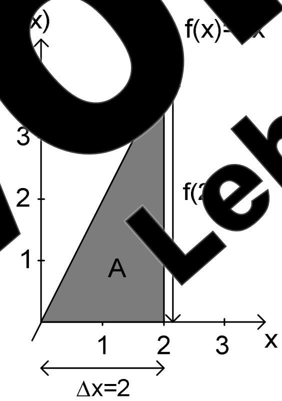
4. Mathematische Voraussetzungen

Abweichend von Ihrem Schulbuch werden in diesem Arbeitspap … zur … och keine Flächen betrachtet, bei denen die Begrenzung durch eine Kur … schrie … . … e notwendigen Erkenntnisse werden hier zunächst anhand von Fläche … beite … e man auch mit den Formeln für Rechtecke, Dreiecke und Trapeze, also ele … targe … che … etrachtungen, berechnen kann. Das hat den Vorteil, dass viele Ergebnisse … ts … nnten Meth … n überprüft werden können und somit das Verständnis für d … neu … lernen … en Verfah … Flächenberechnung erleichtert wird.

Wiederholung von Flächenberechnun … im Koo … natensystem

a) Dreiecke im Koordi … nsystem

Im folgenden K … ordina … ystem … ein Dreieck … eingezeichn … , d … s eine Seite auf der x-Achse lieg … auf der … A … e liegend … Sei … wird als G … seite g gewählt und hat wie bei einem … eigun … dreieck … Länge Δ … mit Δx = … (Längeneinheiten). Die Höhe des Drei … ier dem Funkti … wert der Ger … (x) = 2x an der Stelle x = 2 also f(2) … 4 LE.



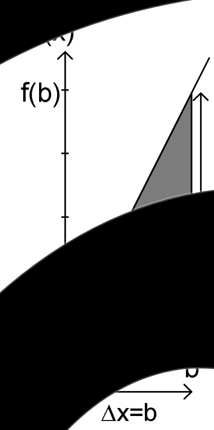
Da hier … Beschriftung mit Zahlenwerten vorgegeben ist, ergi … s … für die Fläche:

Fläche des Dreiecks A:

$$A=\frac{g\cdot h}{2}=\frac{\Delta x\cdot f(x)}{2}=\frac{2\cdot f(2)}{2}=\frac{2\cdot 4}{2}=4\,\text{FE}$$

(FE bedeutet Flächeneinheiten)

… oordinatensystem, dessen Achsen nicht mehr …



… man für f(b) den Wert 2b einsetzt, inde … Satz ergänzen:

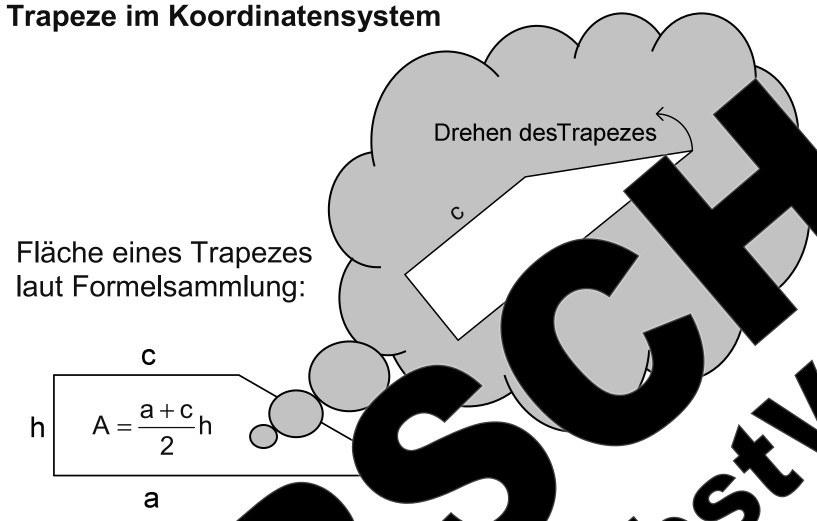
f(b) ist der Fu … der Stelle x = ____ und dieser wird berec … n b in die ____ eingezeichneten Geraden einsetzt.

Fläche des Dreiecks A:

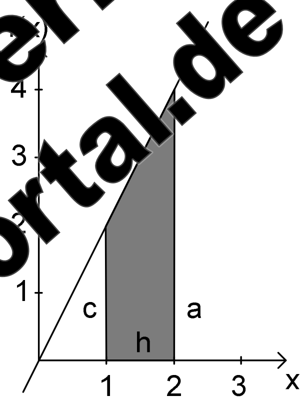
$$A=\frac{g\cdot h}{\ldots}\;\ldots\;\frac{\ldots x\cdot f(x)}{2}=\frac{b\cdot f(b)}{2}=\ldots$$

Anmerkung: Wenn Sie für b nun den … ten Wert 2 einse … en Sie wie oben für die Fläche den Wert 4 FE.

b) Trapeze im Koordinatensystem



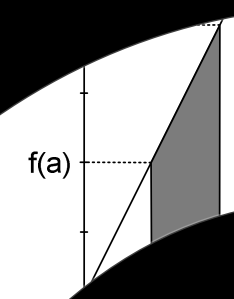
…m 90° ge… …rapez im Koordi… …stem.



…igen … Rechnun… …ss der Fläche… …halt des Trapezes im abgebildeten …rdinatensystem eine… …rag von A … hat.

…für Rech…ung:

Überträgt man die Überlegungen für das Dreieck im nicht mit Zahlen skalierten Koordinatensyst… …ibt sich die folgende Abbildung:



…f, durch entsprechende … für die Fläche des Trapezes im Koo… …e Formel …) Δx

ergibt.

…egründung:

Kapitel 1: Rand- und Flächeninhaltsfunktion

In diesem Kapitel werden anhand aufeinander aufbauender Aufga… …legen… …ammenhänge hinsichtlich der neuen Methode, Flächen zu berechnen, erarbeitet. … …Sie daher keine Aufgabe. Sollten Sie sich hinsichtlich Ihrer Lösung nicht si… sein, … …eil Kontrollergebnisse angegeben und Sie finden zum Vergleichen Ergebnisse im… …ng.

Neue Bezeichnungen und Schreibweisen

Auf den nun folgenden Seiten wird der Be… …andfunkti… …rwendet u… …en nicht nur mit dem Buchstaben A sondern in der Schreibwei… …$_0$(b) ang… …Verdeutli… …ie sich die Bedeutung.

- **Randfunktion:**

  Die Randfunktion stellt je… … Begrenzung d… in den Abbildu… …dargestellten Flächen dar.

- **Flächenanga…**

  Bis… …für d… …äche nur der … …uchstabe A … …det. Im Folgenden wird diese Sc… …bwei… …gänz… …eispielsweise bedeutet A_0(4… [sp…ch: A von Null bis vier] in der Aufgabe 1. … …ass die … …che bei x = 0 lin… … der y-Achs… … sogenannten **unteren Grenze,** beginnt un… …hts an … senkrechten …rade x = 4 … …ogenannten **oberen Grenze,** endet. Erläutern …ie, … …eutung die Angabe A_0(b) h…:

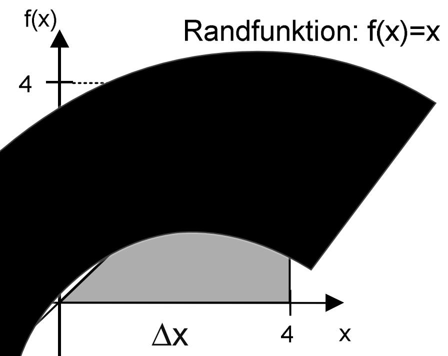
____

____

1. Der Begriff der Fläch… …funktion

A…

…targeometrischen Mitteln, also mit der … bekannten Formel für die Fläc… …timmen Sie dazu die Zahlenwerte … von Δx und f(4) mithilfe der Angabe zur Ra… …Abbildung.



Formel Dreiecksfläche:

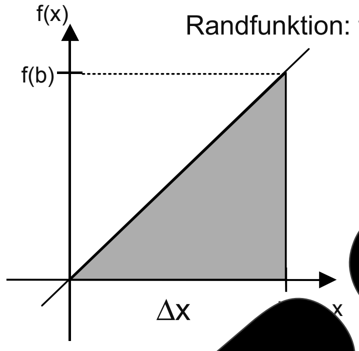
Grundseite: ____________

Höhe: h ____________

Fläc… …schen … $A_0(4)$ = …

b) Berechnen der Fläche $A_0(b)$, also der Fläche zwischen x = 0 und x = b

Für den rechten Wert der Flächenbegrenzung wird nun anstatt [illegible] 4 wie in Aufgabenteil a) die Variable x = b verwendet. Bestimmen Sie nun [illegible] zum Aufgabenteil a) die Längen Δx sowie f(b) und geben Sie [illegible] Fläche [illegible] bis b also $A_0(b)$ an.



$A_0(b) = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{f(b) \cdot \Delta x}{2}$

Δx = ________

h = f(b) = ________

Fläche zwischen 0 und b: $A_0(b)$ = ________

c) Da [illegible] Wert b [illegible] beliebig auf der x-Achse liegt, soll nun für eine weitere Verallgemeinerung in der Formel für den Flächeninhalt $A_0(b) = \frac{1}{2}b^2$ das b durch ein x ersetzt werden.

Aus $A_0(b) = \frac{1}{2}b^2$ wird daher: $A_0(x) = \frac{1}{2}x^2$

Der Sinn für dieses Ersetzen von b durch x besteht darin, dass man nun für die Berechnung der Fläche eine [illegible] x abhängig ist. Mit dieser Funktion wird die Fläc[illegible]en Wert für x berechnet.

[illegible] Randfunktion f(x)

d) Erläutern Sie durch einen Vergleich mit dem Ergebni[illegible]il a), welche Bedeutung der Zahlenwert hat, der sich durch Einsetzen von 4 in die [illegible] $\frac{1}{2}x^2$ ergibt.

$A_0(4)$=___________________________

____

e) [illegible] Sie die Ableitungsfunktion [illegible] Flächeninhaltsfunktion und [illegible]chen Sie das Ergebnis mit der [illegible]funktion. Was stellen Sie fest?

$A_0'(x)$ = _____

Vergleich: ___________________________

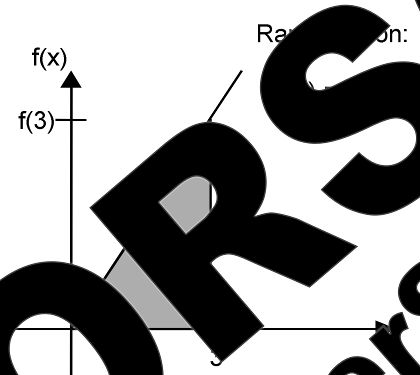
Aufgabe 1.2

Als Randfunktion wird nun die Funktion f(x) = 2x gewählt. Mit [illegible]funktion [illegible] die entsprechenden Schritte wie in Aufgabe 1.1 durchgeführt werd[illegible] Sie darauf, dass sich der jeweilige Funktionswert und damit f(x) nun ändert.

a) Berechnen Sie den Zahlenwert der markierten Dreie[illegible]fläche. [illegible] Sie jedoch zunächst, warum sich als Formel für die Dreiecksfläch[illegible] $A_0(3) = \frac{1}{2} f(3) \cdot \Delta x$ ergibt:

____

____



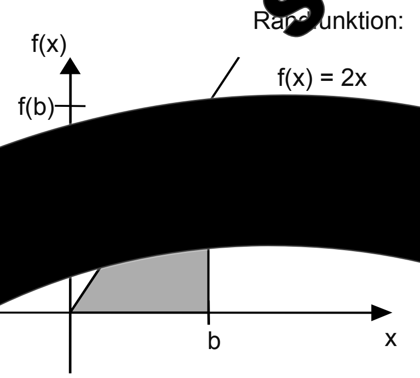
$A_0(3) = \frac{1}{2} f(3) \cdot \Delta x$

Δx = ________

f(3) = ________

Fläche zwischen 0 und 3: $A_0(3)$ = ________

b) Wie in Aufgabe 1.1 wird nun der feste Zahlenwert 3 auf der x-Achse durch einen variablen Wert b ersetzt. Berechnen Sie nun mithilfe von Δx und f(b) die Fläche zwischen 0 und b also $A_0(b)$. (Kontrollergebnis: $A_0(b) = b^2$)



$A_0(b) = \frac{1}{2} f(b) \cdot \Delta x$

Δx = ________

f(b) = ________

Fläche zwischen 0 und b: $A_0(b)$ = ________

c) Um auch hi[illegible]hängige Flächeninhaltsfunktion [illegible]lten, soll nun wie in Aufg[illegible]n x ersetzt werden. Tausche[illegible] Aufgabe 1.1 c) im [illegible] b durch die Variable x aus.

Fläche zwischen 0 und einer beliebigen Stelle x: $A_0(x)$ = ________

$A_0(x)$ bezeichnet man auch hier als **Fläch[illegible]funktion** zur Ra[illegible](x).

d) Bestimmen Sie die Fläche zwischen 0 und der Stelle x = 3 mithilfe der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem im Aufgabenteil a) berechneten Wert.

$A_0(3)$ = ______________________

Vergleich: ______________________

e) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Randfunktion. Was stellen Sie fest?

…(x) = ______________________

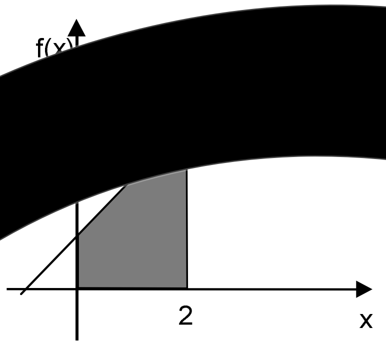
…gleich: ______________________

Au[illegible]ab[illegible]

Als [illegible]dfu[illegible] nun di[illegible] ion f(x) = x+[illegible] wählt. Wie Sie aus der Abbildung erkennen, kann[illegible] n nun nicht mehr mit [illegible] einfachen F[illegible] für die Dreiecksfläche arbeiten, sondern muss [illegible] zu [illegible] rechnende Fläch[illegible] Trapez be[illegible] ein. Ermitteln Sie dabei mithilfe der Randfunktion und de[illegible] en in der bbildung die no[illegible] igen Zahlenwerte. Tragen Sie fehlende Angaben und Beze[illegible] ungen in der [illegible] bildung ei[illegible] (K[illegible]ntrollergebnis: $A_0(2)=4$)

a)

Formel Trapezfläche:



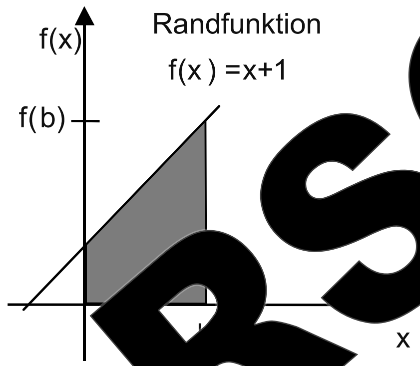
____

Länge[illegible] ______________________

Länge Seite c: ______________________

Fläche: $A_0(2)$ = ______________________

b) Wie in den vorangegangenen Aufgaben 1.1 und 1.2 soll au[illegible] hier, an[illegible] mit [illegible]n vorgegebenen Zahlenwert als rechte Grenze, mit einer va[illegible] Grenz[illegible] eitet und damit die Fläche zwischen 0 und b, also $A_0(b)$ bestimmt werden. [illegible] daher die Schritte von Aufgabenteil a) entsprechend geändert durch. (Ko[illegible]rollerge[illegible]s: [illegible]5b²+b)



For[illegible] ______________________

Trapez[illegible] = ______________________

Länge S[illegible] a = ______________________

[illegible]e Seite c: c = ______________________

Fläche[illegible] $A_0(b)$ = ______________________

c) [illegible]itteln[illegible] nun wieder [illegible] [illegible]altsfunktion [illegible](x) über den Aus[illegible]ch Variab[illegible]rch die Variable x.

[illegible](x) = ______________________

Bestimme[illegible] die Fläche zw[illegible]schen x = 0 und de[illegible] Stelle x = 2 mi[illegible]hilfe der Flächeninhaltsfunktio[illegible]d vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil a).

$A_0(2)$ = ______________________

e) Be[illegible]

[illegible]st?

____

2. Zusammen[illegible]

a) [illegible] von Dreiecken und Trapezen im [illegible]system berechnet. [illegible]zw. vier Seiten begrenzt. Diese Beg[illegible]eisen jeweils [illegible]schreiben Sie, welche Begrenzungen [illegible]herigen [illegible]en dargestel[illegible] Flächen jeweils links und rechts sowie ob[illegible]n haben, indem [illegible] die folgenden Sätze ergänzen.

Alle Flächen haben als linke Begrenzung di[illegible] Achse.

Alle Flächen haben als rechte Begr[illegible] ______________________

Alle Flächen werden am oberen Rand durch die ______________________ ...renz...

Alle Flächen werden am unteren Rand durch die ___-Achse beg...zt.

Information

In späteren Kapiteln werden für die linke un... Beg...ung folgen... Bezeichnungen verwendet:

- Die **linke Begrenzung** einer ... wird als ...**re Grenze** bez...net.
- Die **rechte Begrenzung** ein... ...läche wi... als ...**ere Gren**...e bezeichnet.

b) In allen Beispielen der vora... Aufgaben wurd... als Randfunkt... eine lineare Funktion f(x) verwe... Formulieren S... anhand Ihre... ...gebnisse Z... ...enhänge zwischen der **Flächeninha... ...on A_0(...** ...er **Ra...funktion f(x)**, ind... S... den folgenden Satz vervollständig...

Wenn di... ...lächen... ...sfunktion beka... is... erhält ma... ...andfunktion, indem man die

Flä...inhalts...tion ______________________.

...en... Ran... ...ktion bekan... ..., erhält ma... die Flächeninhaltsfunktion, indem man die

...dfunktion ______________________________________.

Sie haben sic... ...ich erkannt, dass man aus der Randfunktion die Flächeninhaltsfunktion prinzipiell mit Hilfe einer Umkehrung der Ableitung ermitteln kann. Jedoch fällt es Ihnen schwer, für diese Rechnung einen passenden Begriff zu finden. Vielleicht ist Ihnen dabei spontan ... ...wärts Ableiten“ in den Sinn gekom... ... den rechnerischen Ablauf zu ... ...t zulässig. Sie sehen, ...inzuführen. Lesen Sie dazu die folgende Definition.

c) Der Begriff „**Integri**...

M...

...es Funkt... ...rms einer Flächeninhaltsfunktion aus de... ...erm einer Randfunktion wird als **Integrieren** bezeichnet.

Übungen

Ü1.1 Bestimmen Sie zu der gegebenen Flächeninhaltsfunktion A_0... ...gehö... ...funktion f(x):

a) $A_0(x) = 2x - 2$ ⇒ f(x)=____________________

b) $A_0(x) = x^2 - 5$ ⇒ f(x)=____________________

c) $A_0(x) = 0{,}5x^2 + x$ ⇒ f(...____________________

d) $A_0(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ⇒ f...____________________

e) $A_0(x) = 0{,}7x^2 - 0{,}1$... ⇒ f(x)...____________________

f) $A_0(x) = ax^2 + $...$ + c$ ⇒ ...____________________

g) $A_0(x)$...$x^2 +$...$ + c$ ⇒ ...(x)=____________________

A_0... $^2 + \frac{...}{3}$...r ⇒ ...____________________

Ü... B... ...n Sie zu d... ...gebenen Ra... ...ktion f(x) die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$.

...) $f(x) = 2$ ⇒ $A_0(x)$= ____________________

b) $f(x) = 0{,}2$... ⇒ $A_0(x)$= ____________________

c) $f(x) = x + 2$ ⇒ $A_0(x)$= ____________________

d) $f(x) = 2x + 1$ ... $A_0(x)$= ____________________

...

... ⇒ A_0(... ____________________

...) $f(x) = 2rx + 4s$ ⇒ $A_0(x)$= ____________________

h) $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$ ⇒ $A_0(x)$= ____________________

Ü1.3 Berechnen von Flächen

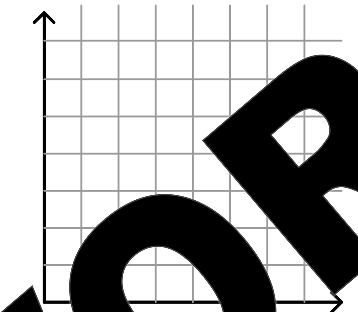
a) Skizzieren Sie die angegebenen Geraden in den jeweils vorgege... n Koor... emen. Wählen Sie dabei sinnvolle Skalierungen.

b) Markieren Sie jeweils für die angegebene rechte bzw. ob... e Gren... die ... chnende Fläche farbig.

c) Berechnen Sie die Fläche mithilfe der Flächeninh... sfunkt... (x).

d) Berechnen Sie zur Kontrolle die markierte Fläche ... n m... elementa... metrischer Betrachtungen (Rechteck, Dreieck bzw. T... und ... leiche Sie die E... se.

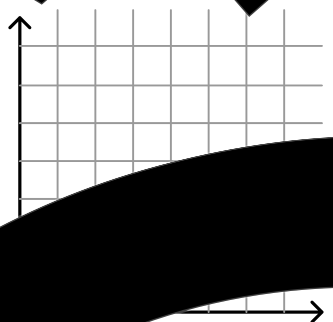
Randfunktion f(x) = 2 re... te bz... here G... ze x = 2



Kontrollrechnung über elementar... metrische Betrachtung:

$A_{Rechte...}$= ______________

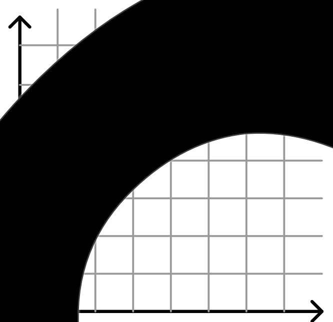
...funktion g(...) = 2... re... Grenze x = 3



$A_0(3)$ = ________________

...llrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

Randfunktion h(x) = 0,25x rechte Grenze x = 2

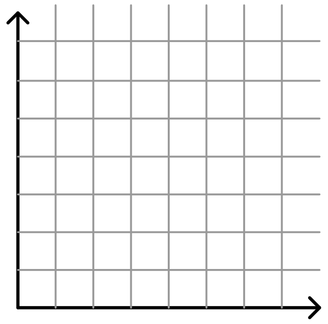


...) = ________________

Kontrollrechnung über elementargeome... chtung:

$A_{Dreieck}$=________________

Randfunktion k(x) = 0,25x rechte Grenze x = 3

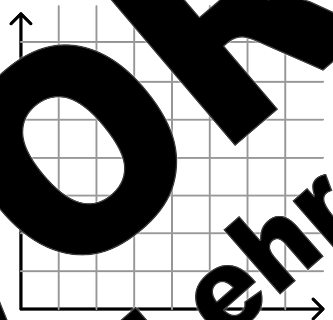


A_0(___) = ________________

Kontrollrec... ü... ent... geometrische Betrachtung:

A_D... ________________

Randfunkti... x+2 ...te Gren... =

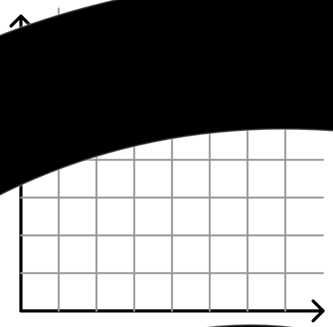


A... = ________________

...ontrollrech... über elementargeometrische Betrachtung:

A_{Trapez} ________________

Randfunktion n(x) = x+2 rechte Grenze x = 2,5



____

Kont... entargeometrische Betrachtung:

A_{Trapez}= ________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnu…

selbstorganisi… …ernen

Kapit…

Von der Flächeninhaltsf…
…tammfunktion

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun…

We… …führun… …er Integral…chnung

Gesa… …hung selbstorganisiert erlernen …2-030-251)

St…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de

…www.f-druck.de

Ü1.4 Beschreiben Sie unter Verwendung der Ausdrücke
– Randfunktion
– senkrechte Gerade
– x-Achse
– y-Achse
– rechte bzw. obere Grenze
– linke bzw. untere Grenze
– unterer Rand
– oberer Rand
wie die in Aufgabe Ü1.3 berechneten Fläch… …enzt…

____

____

____

____

____

____

Ü1.5 F…ul… …Sie, w…he neuen E…k…tnisse S… …nsichtlich der Berechnung von Flächen in Au…be …nnen h…n. Verwenden S… …Ihrer Erklärung den Begriff „Integrieren“.

____

____

____

____

____

Ü… …e Rechnung sich hint… …“ verbirgt.

____

____

Kapitel 2: Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunkti…

In der nun folgenden Aufgabe soll die Berechnung von Flächen, di… …ht an … …chse beginnen, untersucht werden.

1. Flächen, die nicht an der y-Achse beginnen

Aufgabe 2.1

Gegeben ist die Randfunktion $f(x) = x+1$

a) Bestimmen Sie die Flächeninhal… …ktion $A_0(x)$ s… …die weite… …gegebenen Flächen. Berechnen Sie für die Randfunk… …f mithil… …r Flächeninhal… …unktion $A_0(x)$ … folgenden Flächen:

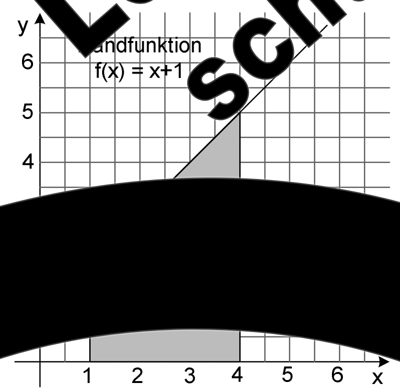
$A_0(x)$ = ____________

$A_0(1)$ = ____________

$A_0(4)$ = ____________

b) …hilfe d… …rgebnisse a… …ufgabe a) sol… …un die in den folgenden Aufgaben i) bis iv) grau … Flächen be…chnet werden.

i) Erläutern … …en dargeste… …Ansatz, die Rechenschritte und das Ergebnis.



Grenzen für die Fläche:

linke Grenze: a = _____

rechte Grenze: b = _____

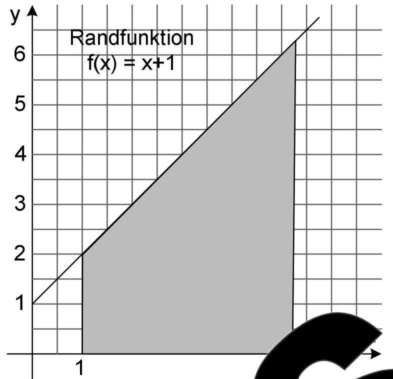
Erläuteru…

(1) $A_1(4) = A_0(4) – A_0(1)$ (1)____________

(2) $A_1(4) = 12 – 1{,}5$ (2)____________

(3) $A_1(4) = 10{,}5$ FE

ii) Erläutern Sie den dargestellten Ansatz, die Rechenschritte und das E nis



Grenzen für die läche:

linke Gren e: ____

rechte Gre b = ____

Erläuterung:

(1) $A_1(x) =$ (1) (1) ______________________

____

____

) $A_1(x)$ $x^2 + x - 1{,}5$ (2) ______________________

____

(3) $A_1'(x) = x+$ (3) ______________________

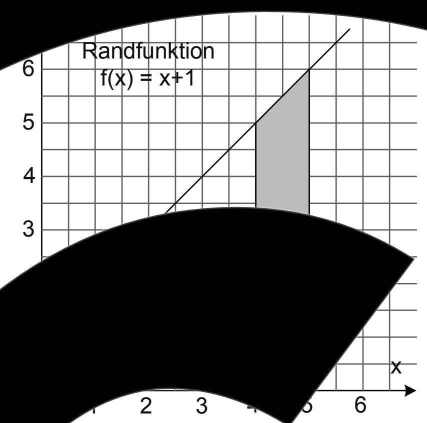
____

iii) Berechn (5) entsprechend zu den Zeilen (1) bis (3) dieser

äche:

link

rechte Grenz

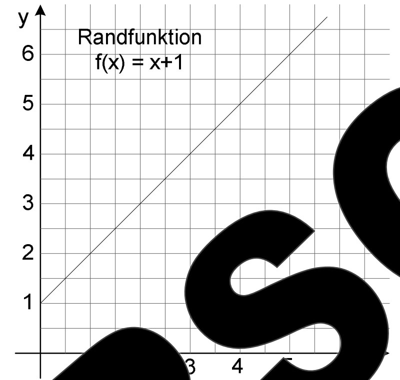


$A_4(5) = A\_(\_\_) - A\_(\_$

$A_4(5) =$ ______________________

$A_4(5) =$ ______________________

iv) Übertragen Sie die Überlegungen zur Berechnung de Fläche auf allgemeinen Fall, bei dem die obere Grenze den beliebigen We mt u ren Sie eine beliebige passende Fläche.



$A_4($ A ( )

$_4(x) =$ ______________________

Für erste Ableitung on $A_4(x)$ gilt :

= ______________________

Au

a) ergleich Sie die Fläche altsfunktion (x), $A_1(x)$ und $A_4(x)$, indem Sie den folgenden z ver tändigen:

Die Summanden ____________ sind in allen drei Flächeninhaltsfunktionen

orhande Die ächeninh ktionen unterscheiden sich durch ______________

____

b) Vergleichen Sie die erste Ableitung der Flächeninhaltsfunktionen $A_0'(x)$, $A_1'(x)$ und $A_4'(x)$. Was stellen Si

____

e 2.3

Bilden Sie für die Funktion g(x)=2x+3 die folgenden tionen: $A_0(x)$, $A_2(x)$ und $A_3(x)$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich $A_2(x)$ bzw. $A_3(x)$ nten –10 bzw. –18 von $A_0(x)$ unterscheiden.

Aufgabe 2.4

Gegeben ist die Randfunktion f(x) = 2x +3.

a) Erläutern Sie die einzelnen Schritte der folgenden Rechn… bzw. …stlegungen:

(1) $A_0(x) = x^2 + 3x$ (1) ______________________

(2) $A_a(x) = A_0(x) - A_0(a)$ (2) ______________________

(3) $A_a(x) = x^2 + 3x - (a^2 + …$ (3) ______________________

(4) c = … + 3a … (4) ______________________

(5) $A_a(x) = x^2 + 3x + …$ (5) ______________________

(6) $A_a'(x) = 2…$ (6) ______________________

… Sie, bezogen auf die Wahl der linken … Unterschied zwischen den …heninhaltsfunktionen $A_0(x)$ und $A_a(x)$, indem Sie … Sätze vervollständigen:

Die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ wird durch Integration der ______________________ f(x) berechnet … c. Wenn man eine Fläche … Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ … an der linken bzw. unteren Grenz… also an der … weitere Flächeninhaltsfunktionen für Flächen, die d… Randfunktion …enzt werden, aber nicht an der unteren Grenze x = 0 beginnen, u… sich von … nur durch eine ____________________.

2. Verallgemeinerungen, Definitionen und Begriffe

Wir haben in den vorangegangenen Aufgaben folgendes festg…

- Zu jeder Randfunktion kann man durch Integration …terschi… …inhaltsfunktionen ermitteln, die sich jedoch nur durch eine Konstante …tersc… .
- Wenn man eine beliebige Flächeninhaltsfu… …et, …tfällt die Konstante c und man erhält die Randfunktion, welche den oberen … Fl… darstellt.

Aus diesem Zusammenhang wird nu… …r wichti… Begri… "Stammf…ktion" abgel…et:

Da f(x) durch Ab…iten aus $A_a(x)$ ent…teht bzw. abstamm… b…eichnet ma… …e Flächeninhalt…ktion $A_a(x)$ a… als **Stamm…n F(x)** zur R…ndfunktion f(x).

…: … differ…zierbare F…ti… **F(x)**, für d… **F…x) = f(x)** gilt, wird als **Stammfunktion** vo… …) bezeichnet.

Eine Stammfunkti… wird mit dem … Namen der R…funktion gehö… …en großen …chstaben bezei… Bsp.: Die Stamm…ktion von …(x) …ird mit G(x) bezeichnet.

Erläutern Si… … unter dem Begriff Stammfunktion versteht.

____

____

____

Geben Sie an, wie man aus der Randfunktion f(x) die Fläche… …n $A_0(x)$ erhält.

____

____

…e an, wie man aus der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ eine allge… …mfunktion F(x) …ndfunktion f(x) erhält.

____

____

3. Ergänzende Betrachtungen zur Konstanten c

Verdeutlichen Sie sich das nebenstehende Ablaufdiagramm und bearbeiten Sie dazu die folgende[illegible] Aufgaben:

a) Beg[illegible] war[illegible] an zu den beiden Stammfunkt[illegible] G(x) eindeutig die zugehörige Ra[illegible]nktion [illegible] berechnen kann, jedoch aus der R[illegible]funktion g(x) nur die allgemeine bzw. ein[illegible] bestimm[illegible] Stammfunktion ermitteln kann.

____

____

____

____

b) Man berechne[illegible] f(x) = ax + b die Stammfunktion. Begründen Sie, waru[illegible] F(x) = 0,5ax² + bx angibt sondern noch eine [illegible] c ergibt.

____

____

c) Für den Fall c = 0 lautet eine Stammfunktion G(x) = 4x² + 5x. [illegible]x den Wert 10 in diese Funktion ei[illegible]an G(10) = 450. Interpretieren [illegible]cksichtigung, dass für A[illegible]² + 5x, die anschauliche Be[illegible]s Wertes.

____

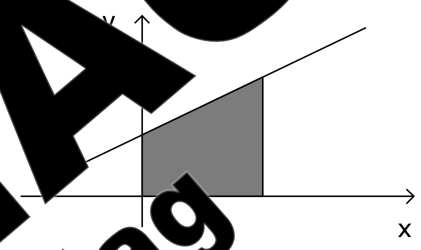
____

[illegible]n Sie den Merksatz:

[illegible]n man einen positiven Zahlenwert b i[illegible]mfunktion der [illegible] = nx² + mx einsetzt, beginnt die zu[illegible]läche an der ___

Übungen

Ü2.1 In der Abbildung nebenan ist die Funktion h(x) = 0,5x + 1 skizziert. In die unten angegebenen Stammfunktionen wird der Wert 2 eingesetzt. Entscheiden Sie, mit welcher d[illegible] angegebenen Stammfunktionen die markierte Fläche berechnet wird:

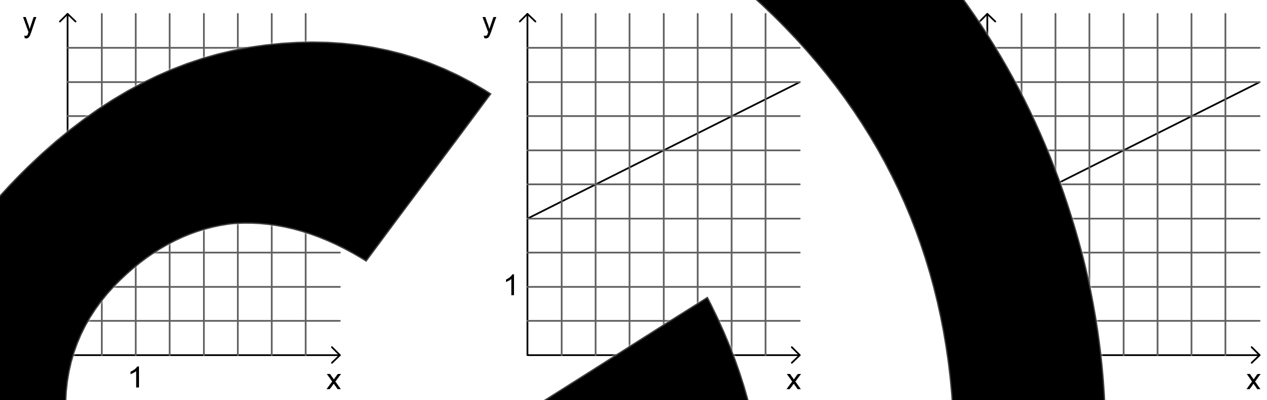


❍ $H(x) = 0{,}25x^2 + x + 1$
❍ $H(x) = 0{,}25x^2 + x$
❍ $H(x) = 0{,}25x^2 + x - 1$

Ü2.2 Berechnen Sie zur gege[illegible]Randfu[illegible] eine St[illegible]funktion F(x):

a) $f(x) = x + 2$ F(x) = ______________
b) $f(x) = 3$[illegible] F(x) = ______________
c) [illegible]x – [illegible] F[illegible] ______________
d) $f(x) = -$[illegible] F(x) = ______________
e) f[illegible] F(x) = ______________
f) $f(x) = 2x + 5$ F[illegible] ______________
g) $f(x) = -10x$ F(x) = ______________
h) $f(x) = 0{,}25x + 0{,}5$ F(x) = ______________
i) f(x) = [illegible] ______________

[illegible]dfunktion $f(x) = 0{,}5x + 2$ ergibt si[illegible]funktion $F(x) = 0{,}25x^2 + 2x$. Setzt man in die Stammfunktion für x einen Wert b e[illegible]ine Fläche. Skizzieren Sie diese Fläche ohne Rechnung für die jeweils gegebenen W[illegible] Diagrammen unten.



b = 1 [illegible] = 3

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn g
selbstorganisi rt len en

Kapit

Berechnung von Fläc
Stammfunktio

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun[illegible]

We[illegible]führun[illegible]er Integral[illegible]hnung

Kapitel 3: Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion

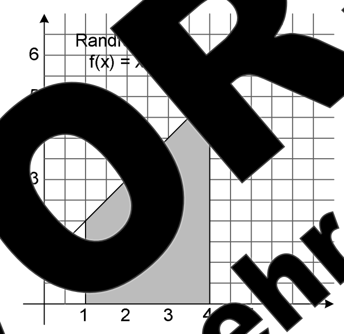
Bisher wurden die Flächen zwischen einer Geraden und der x-Ach[illegible]fe der [illegible]inhaltsfunktion $A_a(x)$ berechnet. Nun soll das Verfahren verallgemeinert werden, in[illegible] d[illegible]mfunktion zur Berechnung von Flächen herangezogen wird.

1. Grundlegende Betrachtung zur Flächenbere[illegible]n[illegible] Sta[illegible]mfunkti[illegible]n

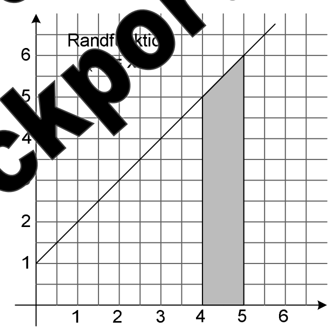
Zunächst soll im folgenden Beispiel ge[illegible]rden, [illegible]man mit einer S[illegible]unktion eine Fläche berechnen kann und wie die Konstan[illegible] in die Rech[illegible] einfließt. E[illegible]n bzw. ergänzen Sie dazu die Angaben unten.

Rückblick:

Im Kapitel 2 wurden für d[illegible]n $f(x) = x + 1$ m[illegible]lfe der Fläche[illegible]ltsfunktion $A_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ di[illegible]nden Fläche[illegible]erechnet:



$A_1(4)$ [illegible] 10,5 [illegible]E



$A_4(5)$ = 5,5 FE

Nun sollen diese Flächen [illegible] Anwendung der Stammfunktion erneut berechnet und die bereits bekannten Ergebnisse als Vergleich herangezogen werden.

F(x) = [illegible] — Ermitteln der allgemeinen Stammfunktion mit Konstante c aus der Flächeninhaltsfunktion

[illegible] + c = 0 + 0 + c = c — [illegible] der Stammfunktion für x = ____

F(1) = $A_0(1)$ + c = 0,5 + 1+ c = 1,5 + c — Bere[illegible]mfunktion für x = ____

F(4) = [illegible] ____ + c — Berechnen d[illegible]tion für x = ____

[illegible] + c = [illegible]5 + c = __________ — Berechnen der St[illegible] für x = ____

Berechnen Sie nun die folgenden Differenzen (beachten Sie, dass bei der Su… ion vo… mmen Klammern gesetzt werden müssen) und vergleichen Sie die Ergebniss… mit den … ückl… oben dargestellten Flächen.

a) F(4) – F(1) =

b) F(5) – F(4) =

c) Vergleich:

Die über die Bildung … Differenzen F… – F(1) und … – F(4) bere… Zahlenwerte sind

____________________ mit den Zah… für die … berechneten Fläche.

Fol… ng aus … Ve… leich:

… F(4) – F(1) … man für die Randfunktion f(x) die Fläche zwischen

__________ und mit d… Differenz F(5) … berechnet man für die Randfunktion f(x) die

… zwische…

d) Was stellen Si… … b) bezüglich der Konstanten fest?

____

____

Folgerung aus der Feststellung:

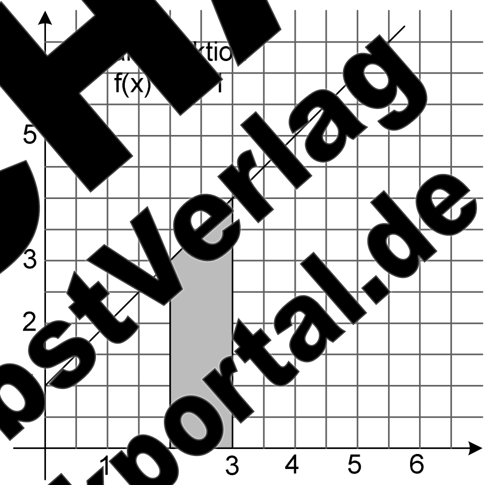
Merke

Die … iner Stammfunktion F(x). Da d… bei der B… chen jeweils gegebener linker bzw… d rechter … keine Rolle spielt, kann man sie bei … gen.

2. Vereinbarungen zur Schreibweise

Bei der Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion soll di… Schreibweise vereinbart werden:

Für die Randfunktion f(x) = x + 1 gilt bei … Berechnung der Fläche zwischen der … eren Grenze x = 2 und der oberen Grenze … 3.



…gabe, … he Fläche …echne… d, in der … Schreibweis… für … lächeninhalts-funktion.

$$A_2(3) = \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3 = (\frac{1}{2}\cdot 3^2+3)-(\frac{1}{2}\cdot 2^2+2) = 7{,}5 - 4 = 3{,}5\,FE$$

Zuerst wird 3 als … Grenze in die … ktion … F(3)

Danach wird 2 als untere Grenze in die Stammfunktion eingesetzt, d.h. F(2) wird berechnet.

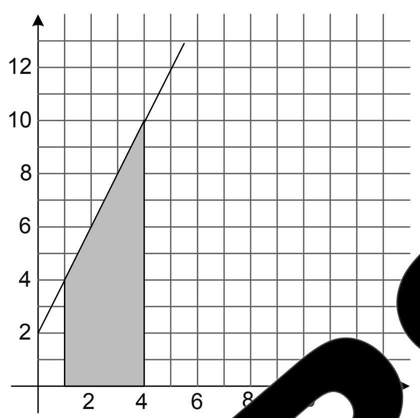
Allgemein…

… unktion verläuft im Intervall [a;b] oberhalb der x-Achse … t mit der … n x = a als untere Grenze und der Geraden x = b als obe… owie der … se die Fläche $A_a(b)$ ein. Man schreibt:

$$A_a(b) = [\ldots) – F(a)$$

3. Beispiel für die Berechnung einer Fläche mithilfe der Stammfunkt...n:

Gegeben ist die Funktion f(x) = 2x + 2. Zu berechnen ist die Fläche A..., ... die Fläche zwischen der unteren Grenze x = 1 und der oberen Grenze x = 4.



Randfunktion: f... = 2x + 2

Stammfunktio...: F(x) = x^2 + ...x + c

$A ... = \left[x^2 + 2x\right]_1^4$

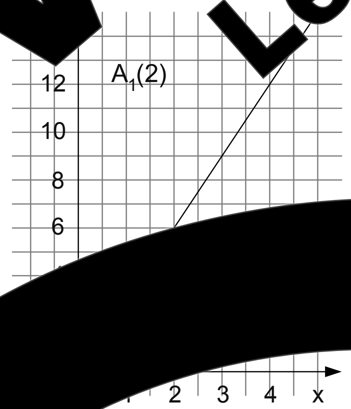
$= 4^2 + 2 ... - (1^2 + 2 \cdot 1)$

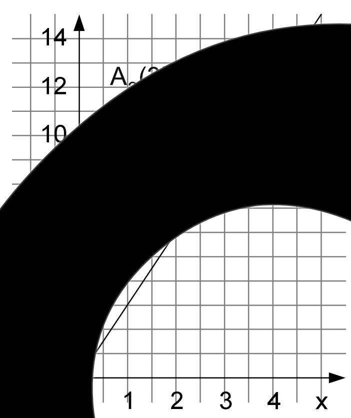
$... 3 = 21$ FE

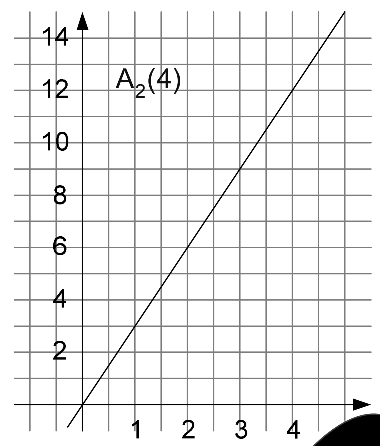
Übungen

Ü3.1 Berec...n von F...en

a) ...eg... ist di... andfunktion f(... = 3x. Mark...en ...e in den folgenden Koordinatensystemen, ...tspr... ...n Beispiel oben, jeweils di... Fläche $A_1(2)$, $A_2(3)$ und $A_2(4)$ und berechnen Sie ...eils die Maßzahl in der Einheit FE.







b) Berechnen Sie jeweils ...(2), $A_2(3)$ und A...(4) für die folg... ...en Funktionen:

i) f(x) ...x + 2 ... Ergebnisse zur Kontrolle: ... FE, 12 FE, 28 FE

ii) f(x) ... 2 FE, 2 FE, 4 FE

... $\frac{...}{2}$ ... 1,75 FE, 2,25 FE, 5 FE

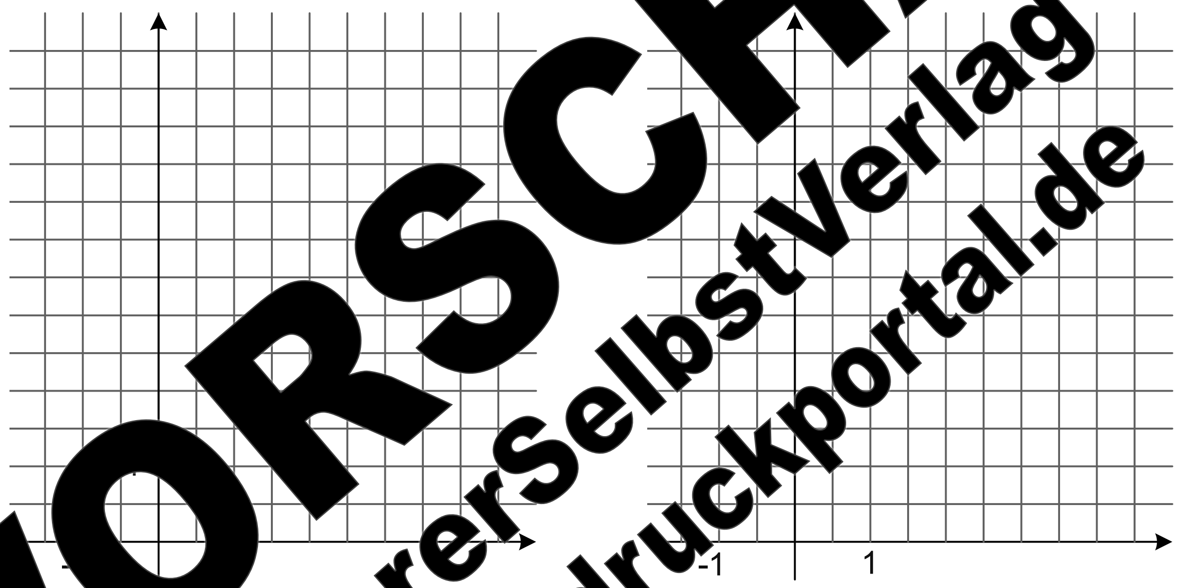
R... für Re...ungen:

zu i) zu ii) zu iii)

4. Berechnung von Flächen links und rechts der y-Achse mithilfe de... Stamm... tion

Gegeben sind die beiden Funktionen f(x) = 2x + 2 und g(x) = x + 1,5.

a) Zeichnen Sie die Funktion jeweils in eines der gegeben... ordin... steme ein.



b) ...itteln ... die Stamm... ionen

...) = 2x + 2 ... folgt: F... x² + 2x + c

Für g(x) = x +1,5 folgt: G(x) = ______________

c) Zeichnen Sie für die Funktion f(x) die untere Grenze x = –1 und die obere Grenze x = 2 deutlich als senkrechte Geraden ein.
Zeichnen ... Grenze x = –1 und die obere Grenze x = 4 eb...

...tion und überprüfen Sie die ..., indem Sie jeweils die Flächen ... Dreiecke auch über ...ntargeometrische Betrachtungen bestimm...

Berechnung für die Randfunktion f(x):

$A_{-1}(0) = [F(x)]_{-1}^{0} = [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]_{-1}^{0} =$ ______________

eleme... : $A_{Dreieck} = \frac{g \cdot h}{2} =$ ______________

...$[F(x)]_{-1}^{2} = [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]_{-1}^{2} =$ ______________

...ntargeometrisch zum Vergleich: $A_{Drei...}$

Berechnung für die Randfunktion g(x):

$A_{-1}(0) = [G(x)]_{-1}^{0} = [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]_{-1}^{0} =$ ______________

elementargeometrisch zum Vergleich: $A_{Trapez} = \frac{(a + ...}{2}$... = ______________

$A_{-1}(4) = [G(x)]_{-1}^{4} = [$______________ = ______________

elementargeometrisch... ...m Vergleic... $= \frac{(a + c)}{...} \cdot h$ ______________

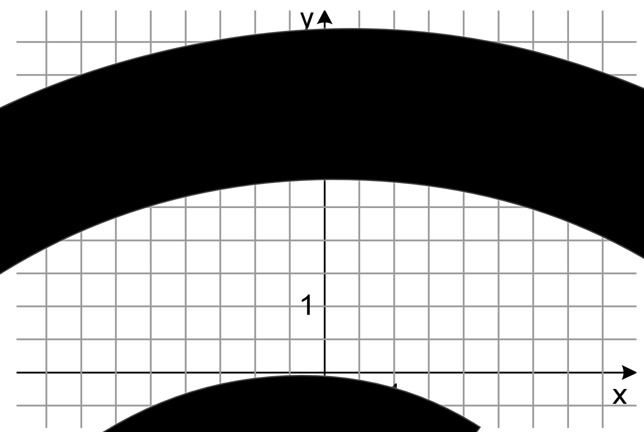
e) Vergleich... ...e a... Ergeb... ...nd ergä... ...Sie den folge... ...en Satz:

Bei Verwe... ...mfunktion ... Berechnung ... Fläche zwischen der ...tion... der x-Achse ... es keine Ro... ______________
____

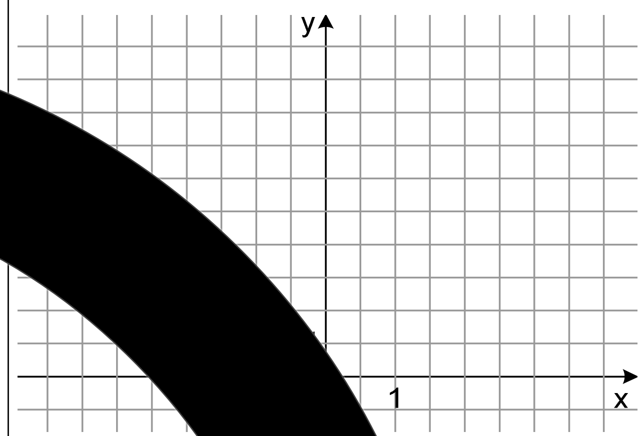
Üb... ...en

...ichnen Sie die f... ...nden Gerad... ...nd berechnen Sie mithilfe der entsprechenden ...mmfunktio... ...en jeweils die F... zwischen der unteren Grenze a = 2 und der oberen Grenze b = 3 sowie zw... ...chen a = –... und b = 1. Markieren Sie jeweils die zu bestimmenden Flächen.

a) f(x) = x + 2



b) f(x) = 2x + 5

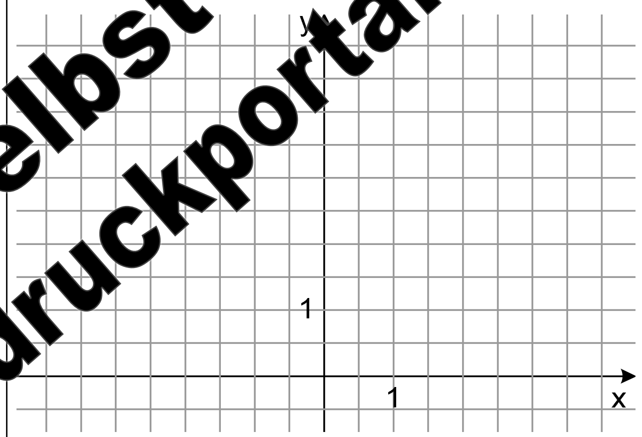


Stammfunktion: F ______________

c) f(x) = 0,25x + 0,5

Stammfunktion: F(x) = ____________________

f(x) = 3



Stammfunktion: F(x) = ____________________

5. Berechnung von Flächen unterhalb der x-Achse mithilfe der Stammfu... n

Zeichnen Sie die Funktion f(x) = –2x – 2 in das Koordinatensys... u... rechnen Sie mithilfe der Stammfunktion die Fläche zwischen der unteren Grenz... a = –3 ... d... Grenze b = 1. Interpretieren Sie das Ergebnis mithilfe von entsprech... geo... chen Betrachtungen und ergänzen Sie den Merksatz.

f(x) = –2... 2

F(x) = ____________________

...(1) = [F(x)]... =

...ation:

____

____

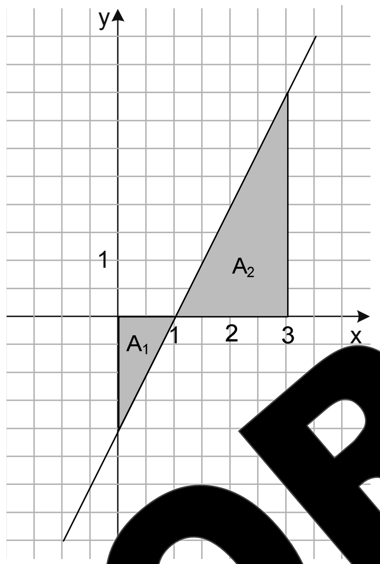
____

____

...n unterhalb der x-Achse sind ____________________. M... net die Flächen ...rhalb und oberhalb der x-Achse daher ge... t und addiert di... er Ergebnisse.

Beispiel für die Schreibweise bei der Berechnung von Flächen unterhalb ... oberh... der x-Achse:

Zu berechnen ist die Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion ... im Intervall [0;3].



$f(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad F(x)$ ... $2x +$ ...

Flächenberech...ng:

... A_1 unter de... x-A...e liegt, ist ... Wert für d... Fläche negativ. Daher wird m... Betragsstrich... gerec...

... $= |A_0(1)| = \left|\left[x^2 ... 2x\right]_0 ...\right| = |1 - 2 - 0 ...| ... = 1$ FE

2. Fl...: $A_2 = A_1(3)$ ... $\left[... - 2x\right]_1^3 =$ ... $(1-2) = 3 + 1 = 4$ FE

... oberhalb der x-Achse liegt, ... der Wert für die Fläche positiv. Daher benötigt man keine Betragsstriche.

Ges...: $A_1 + A_2 = 1 + 4 = 5$ FE

Übungen

Ü3.3 Berech... ...den Sie, warum es sinnvoll ist, die ...

... Grenzen a = – 1 und b ... ...gebnis: A= 10 FE)

... $-\frac{1}{3}x - 1$ Grenzen a = – 3 und b = 6 ... ...is: A= 13,5 FE)

Begründung:

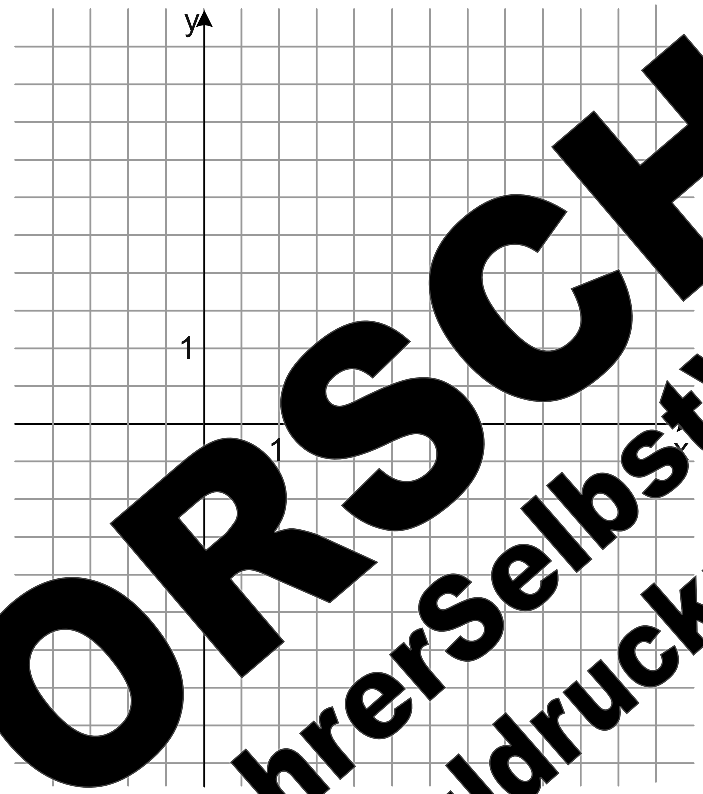
____

____

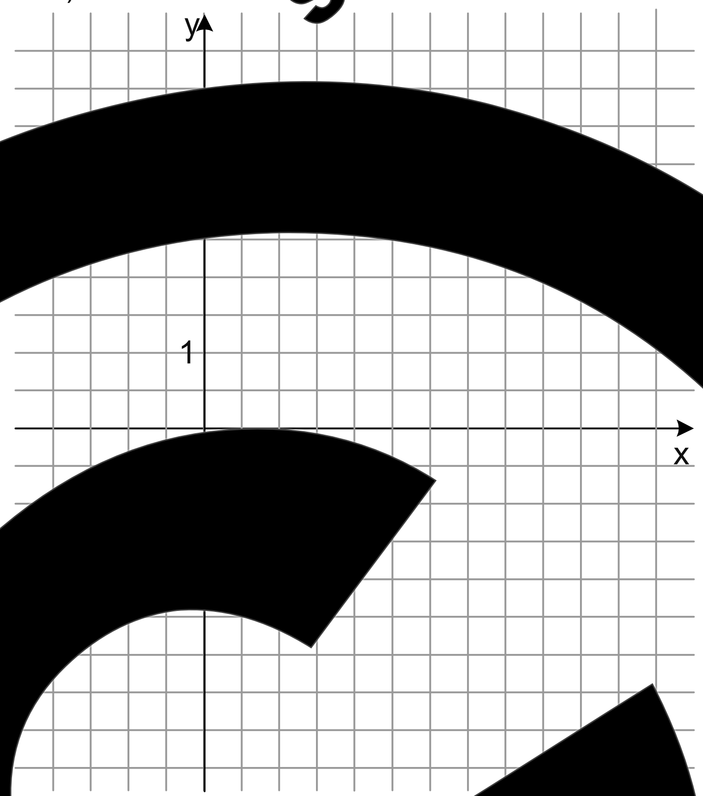
____

...r Rechnungen auf der Folgeseite

zu a)

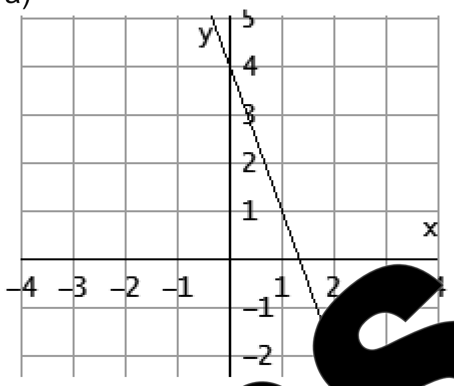


zu b)

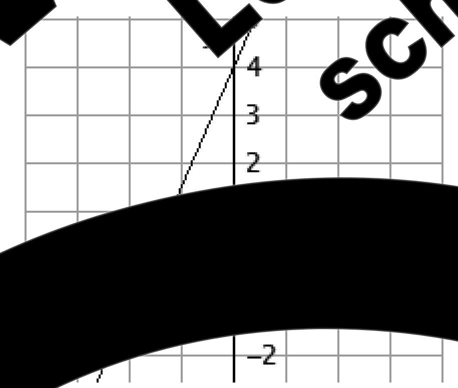


Ü3.4 Markieren Sie in allen Abbildungen jeweils das Dreieck, welches die G... mit d... beiden Koordinatenachsen einschließt. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks z...chst ... elementargeometrisch und dann mithilfe der Stammfunktion.

a)

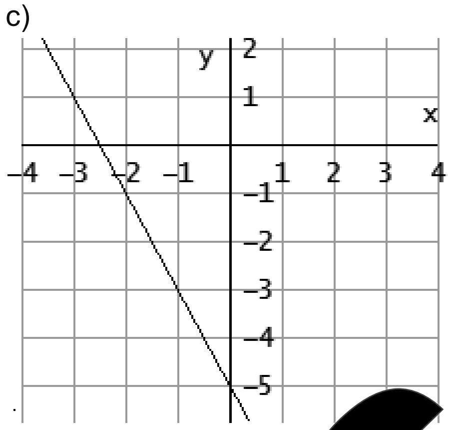


a(x) = – 3x ...

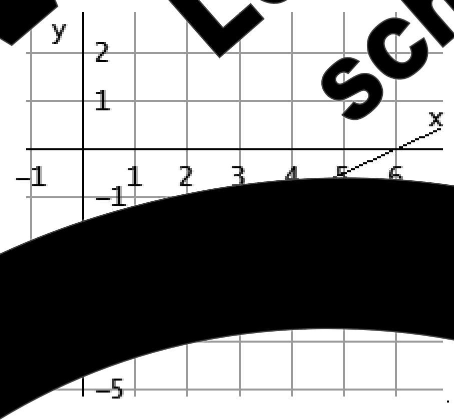


b(x) = 2,5x + 4

c)



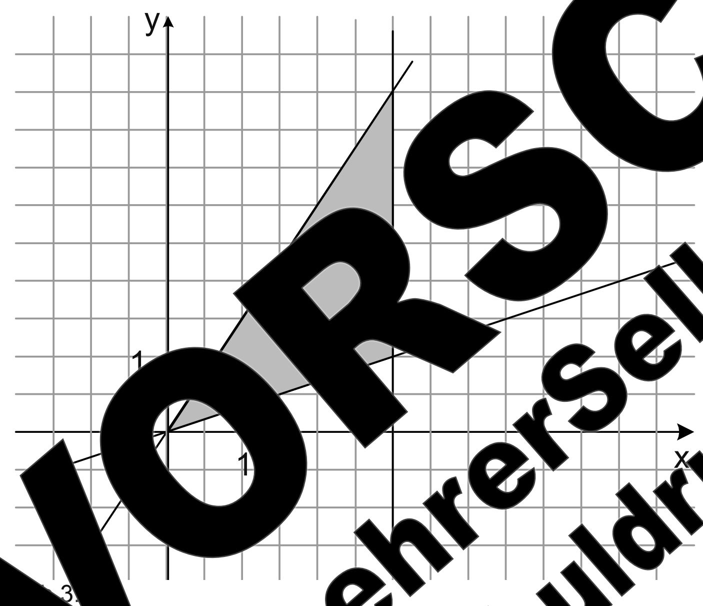
c(x) = – 2x – 5



d(x) = 0,5 x – 3

6. Berechnung von Flächen zwischen zwei Funktionen

In der Abbildung ist eine dreieckige Fläche durch die obere Funktion f[illegible] untere Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x$ sowie durch die senkrechte Gerade x = 3 begrenzt. [illegible] Fläch[illegible] markierten Dreiecks soll nun mit drei unterschiedlichen Methoden berech[illegible] werd[illegible] (Kontrollergebnis: 5,25 FE)



[illegible]schriften S[illegible] zu[illegible]chst die [illegible]eraden mit [illegible] zugehörigen Funktions[illegible]zeichnungen [illegible] bere[illegible] Sie die Sta[illegible]unktionen.

F(x) =

G(x) =

a) B[illegible]mmen Sie d[illegible] Fläche des [illegible] den drei Geraden begrenzten Dreiecks mithilfe von herkömmlichen elementargeo[illegible]schen Mitteln und einem möglichst geringen Rechenaufwand.

[illegible]äutern Sie die geometrische Bedeutung des folg[illegible] und führen Sie dann die Berechnung durch.

$$A_{Dreieck} = [F(x)]_0^3 - [G(x)]_0^3$$

Erläuterung:

[illegible]ng:
$= [F(x)]_0^3 - [G(x)]_0^3 =$

c) Im Folgenden wird eine weitere Möglichkeit für die Flächenberechnung a[illegible]endet[illegible]er wird zunächst die Differenz h(x) zwischen den beiden Randfunktion[illegible]bildet. [illegible]enz zwischen den beiden Randfunktionen wird als Differenzenfunk[illegible]zeich[illegible] Die Berechnung der Differenzenfunktion erfolgt über den Ansatz:

h(x) = obere Funktion – untere Fun[illegible]
h(x) = f(x) – g(x)

Nach dem Einsetzen der beiden Funktion[illegible]me in [illegible] Ansatz [illegible]erden die fo[illegible]en Rechenschritte durchgeführt. Erläutern[illegible] Bede[illegible]:

$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{7}{[illegible]}x$

$H(x) = \frac{7}{12}x^2 + c$

A_D [illegible]$]_0^3 =$ [illegible]$x^2]_0 = \frac{[illegible]\cdot 9}{12}$

A[illegible]$= 5{,}2$[illegible]

[illegible] drei Wege habe[illegible] Ergebnis 5,2[illegible]E geliefert. Begründen Sie, warum es bei [illegible]endung der Sta[illegible]funktion [illegible]er ist, den Weg von Aufgabenteil c) zu verwenden.

[illegible] oben angegebenen Funktionen g(x)

k(x) = untere Funktion – obere[illegible]
k(x) = g(x) – f(x)

[illegible]d des Ergebnisses, welcher Fehler auf[illegible]

Ergänzen Sie zu einem Merksatz:

Berechnung der Fläche zwischen zwei Funktionen ob... lb... Achse

Man bildet die Differenzenfunkt... (x) üb...

h(x) = ________________ Funktion – ________________ Funktion

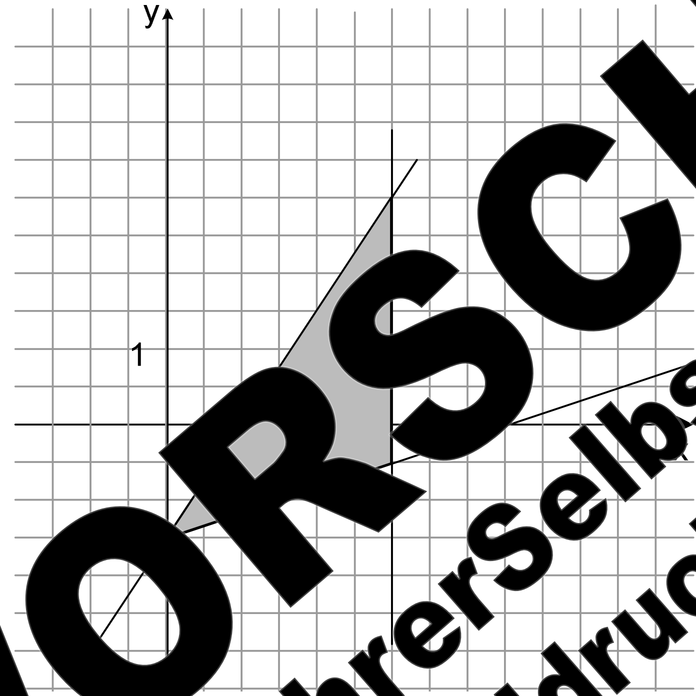
und berechnet die Flä... der ...mfunktion H(x).

Übungen

Ü3.5 Gegeben sind die Funktionen ... und g(x) = x + ... sowie die Ger... = 2. Zeichnen Sie die Geraden und ...en Sie die Fl...e, welche v...en drei Ger...n eingeschlossen wird. berechnen Sie die...ach...ithilf... Stammfu... Ermitteln Si... dazu zunächst eine geeignete Differe...funk... h(x).

7. Berechnung von Flächen zwischen zwei Geraden unterhalb ...d obe... der ...chse

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionen $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ und ... $\frac{3}{2}$ s... ...ie Gerade x = 3.



...b. 3.7

Be... ...n Sie die Geraden zun...t mit den zugehörigen ...unk...sbezeichnungen und ...echnen Sie di... Differenze...n...n h(x).

h(... = ...bere Fkt. – ...tere Fkt.

h(x) = ________________

h(... ________________

h(x) = ________________

h(x) = ________________

Vergleichen Sie ... Fläche ... ...standenen Dreiecks mit der Fläche in Abb. 3.6. Beschreiben Sie, wie di... Fläche in Abb. 3.7 aus der Fläche in Abb. 3.6 hervorgeht und begründen Sie damit, warum die beiden Flächen gleich groß sind.

____

____

____

...nen Sie mit der Differenzenfu... ...e Fläche für Abb. 3.7 und begründen Sie anhand der Rechnung, wa... ...g der beiden Randfunktionen keine Rolle bei der Flächenberechnung über di... ...spielt.

H(x) = ________________

$A_0(3)$ = ________________

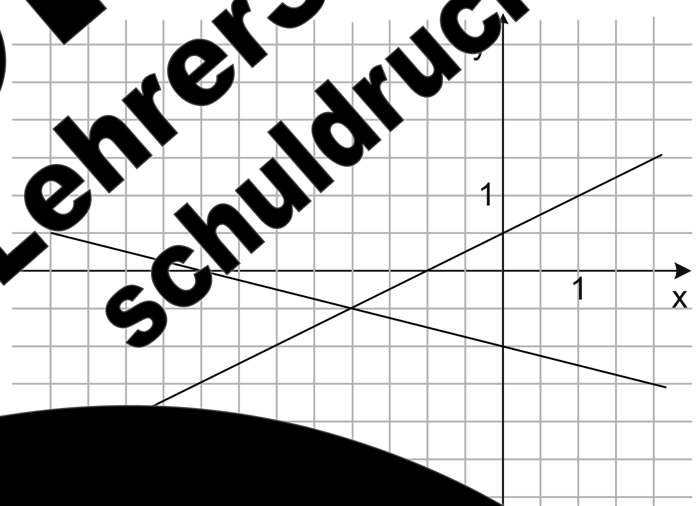
Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Fläche zwischen zwei linearen Funkti... n

Wenn man die Fläche zwischen zwei Funktionen mithilfe ... Differ... enfunktion h(x) berechnet, spielt es ___________ Rolle, ob die F... vollst... oder- od... unterhalb oder teilweise ober- oder unterhalb de... _-Achse ver... n.

8. Berechnung von Flä... ischen ... ch schn... Gerad...

Gegeben sind die be... $f(x) = -\frac{1}{4}$ ... und $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Markieren Sie zwischen den Gren... un... 0 die Fläche... chen den be... Geraden.



..., dass man die Fl... en f(x) und g(x) mithilfe der ...nfunktion h(x) ermitteln kann. Erla... in der folgenden Rechnung ...ie Fläche das falsche Ergebnis 0FE erhält:

$$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x - 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$A_{-4}(0) = [\ldots - \left(-\frac{3 \cdot 16}{8} + \frac{3 \cdot 4}{2}\right) = 0 - (-6 + \ldots$$

____

____

____

____

b) Wie Sie sicher erkannt haben, wurde bei der Rechnung von Aufga... nicht b... ksichtigt, dass die beiden Funktionen links und rechts vom Schnittpunkt ihre P... nen h... chtlich der oberen und unteren Funktion tauschen. Eine Möglichkeit d... forderte... tig zu berechnen, wird im Folgenden dargestellt. Erläutern und e... Sie die ... elnen Rechenschritte.

(1) Ansatz: $A_{-4}(0) = A_{-4}(-2) + A_{-2}(0)$ (1) ___________________

____

(2) Intervall [–4;–2]:

$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ (2) ___________________

$A_{-4}(-2) = [H(x)]_{-4}^{-2} = [\ \_\_\_\_\_\_\ ]_{-4}$ ___________________

$= \ldots + \frac{3}{2} \ldots - \left(\ldots + \ldots \right)$

$= 3 \ldots$

Da f(x) und g(x) die Position untere und obere ... nktion tauschen, gilt hier nun: h(x) = g(x) – f(x) = – (f(x) – g(x)). ... h. ... an muss die Differenzenfunktion ... cht neu berechnen, sondern nur alle Vorzeichen von h(x) umdrehen.

(3) Inter... [–2;0]:

$\ldots = -\left(-\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ (3) ___________________

$A_{-2}(0) = [H(x)]_{-2}^{0} = [\ \_\_\_\_\_\_\ ]_{-2}^{0}$ ___________________

$= 0 - \left(\_\_\_\_\_\_\ \_\_\_\_\_\_\right)$

$= -\left(-\frac{3}{2}\right) = 1{,}5\,FE$

(4) ___________________

____

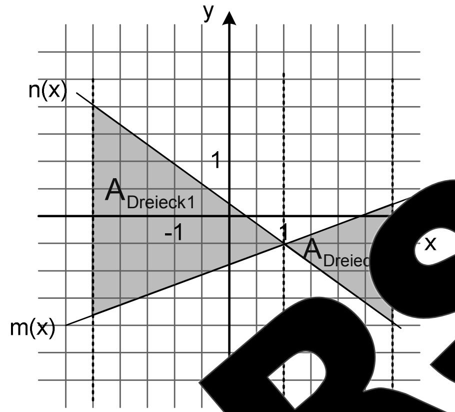
Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Fläche zwischen zwei sich schneidend... ... unktionen

D... zwei sich schneidenden Fun... sich unabhängig ... züglich der x- und y-Achse mithilfe ___________ ... (x) berechnen. An jedem Schnittpunkt m... ... e neue ___________ hinzufügen und immer darauf achten, dass i... ... rvall für h(x) gilt: h(x) = ___________ Funktion – ___________ Funk... ... e Rechnung bedeutet dies, dass man beim Wechs... ... lls bei h(x) bzw. ... einfach alle Vorzeichen ___________

Ü3.6 Die markierten Flächen sollen berechnet werden. Zeichnen Sie da… en no… n Stellen mithilfe von senkrechten Geraden Grenzen ein, und geben Sie jewe… de… atz für die Flächenberechnung wie im Beispiel an:

Beispiel:

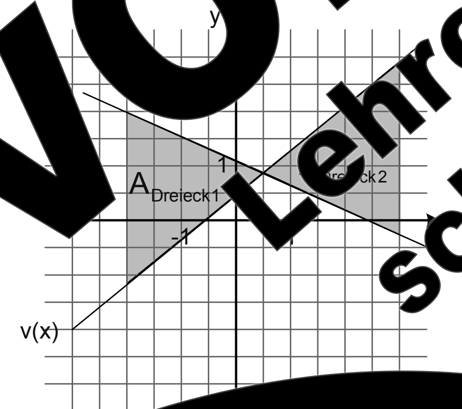


$h(x) = \ldots - m(\ldots$

$A \ldots = [H(\ldots]_{\ldots 2,5}$

$A_{\ldots ck2} = [-H(x)]^3 \ldots$

a)

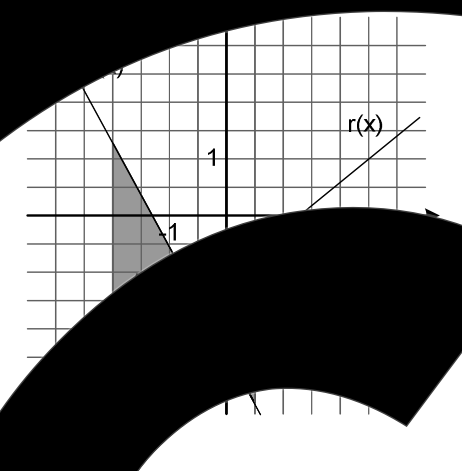


$h(x) = \ldots v(x)$

$A_{Dreieck1} = [\_\_\_\_]$

$A_{Dreieck2} = [\_\_\_\_]$

b)



$h(x) = r(x) - \ldots$

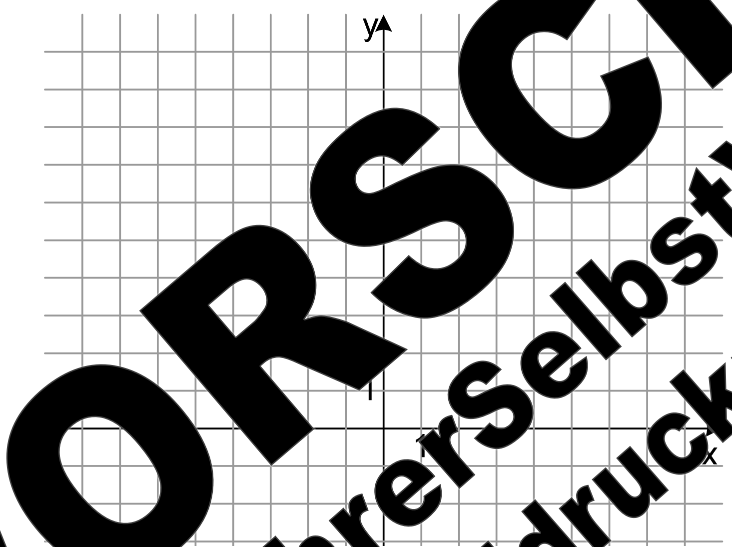
$A_{D1} = [\_\_\_\_]$

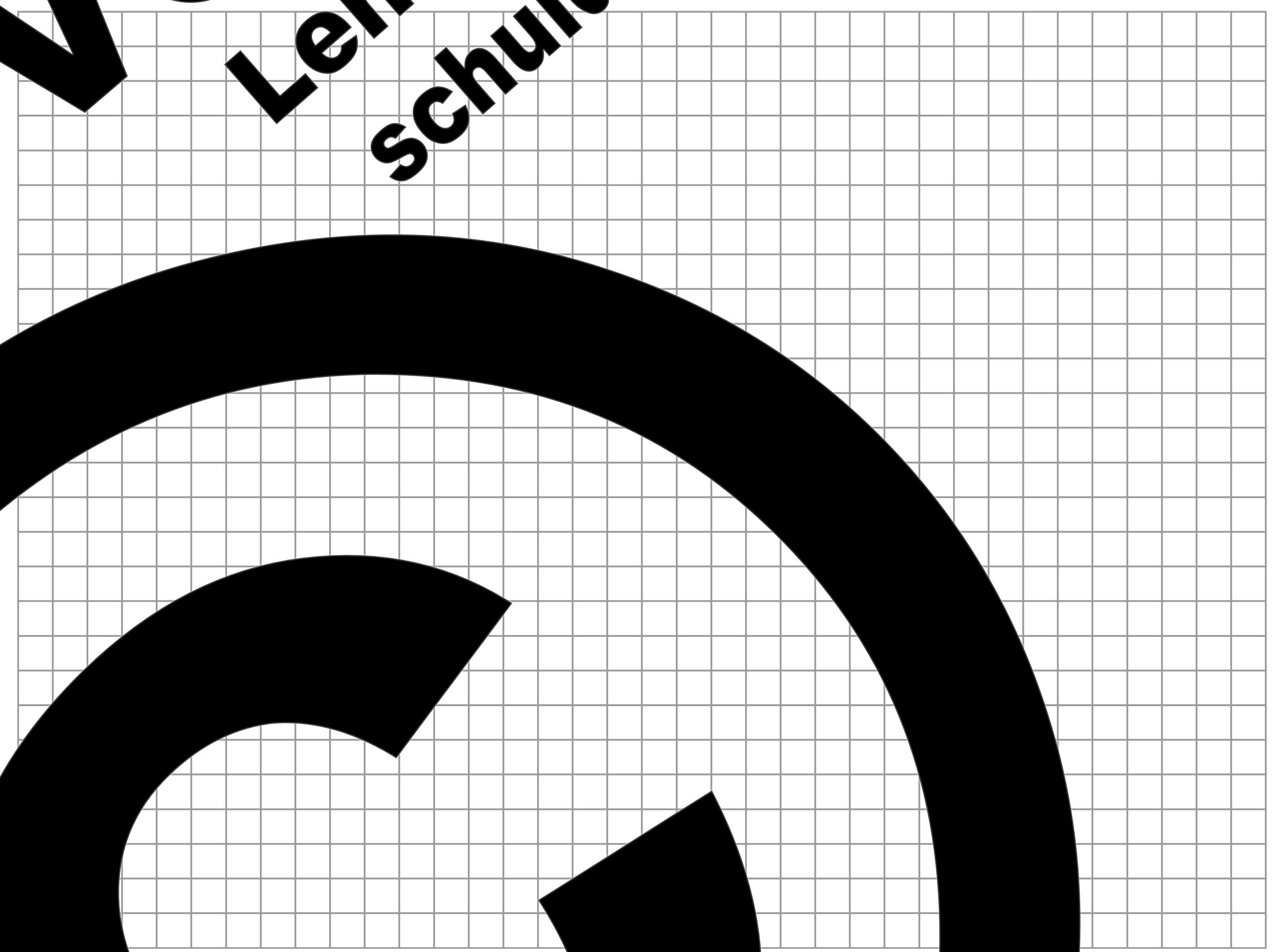
$A_{D2} = [\_\_\_\_]$

Zusatzaufgaben zum Festigen und Wiederholen

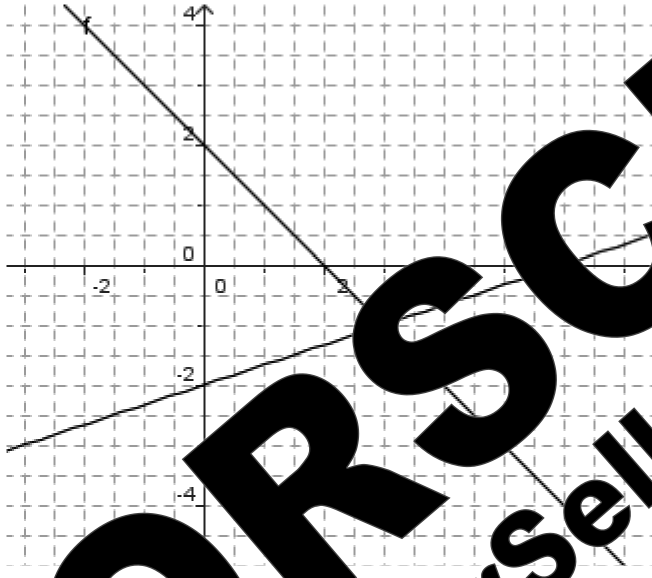
Übungen

Ü3.7 Zeigen Sie unter Verwendung der Differenzenfun… dass … läche, welche von den Geraden $f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$, $g(x) = -\frac{3}{2}x + 6$ und x = … gren… wird, die Maßzahl $A = 30{,}625$ FE ergibt.

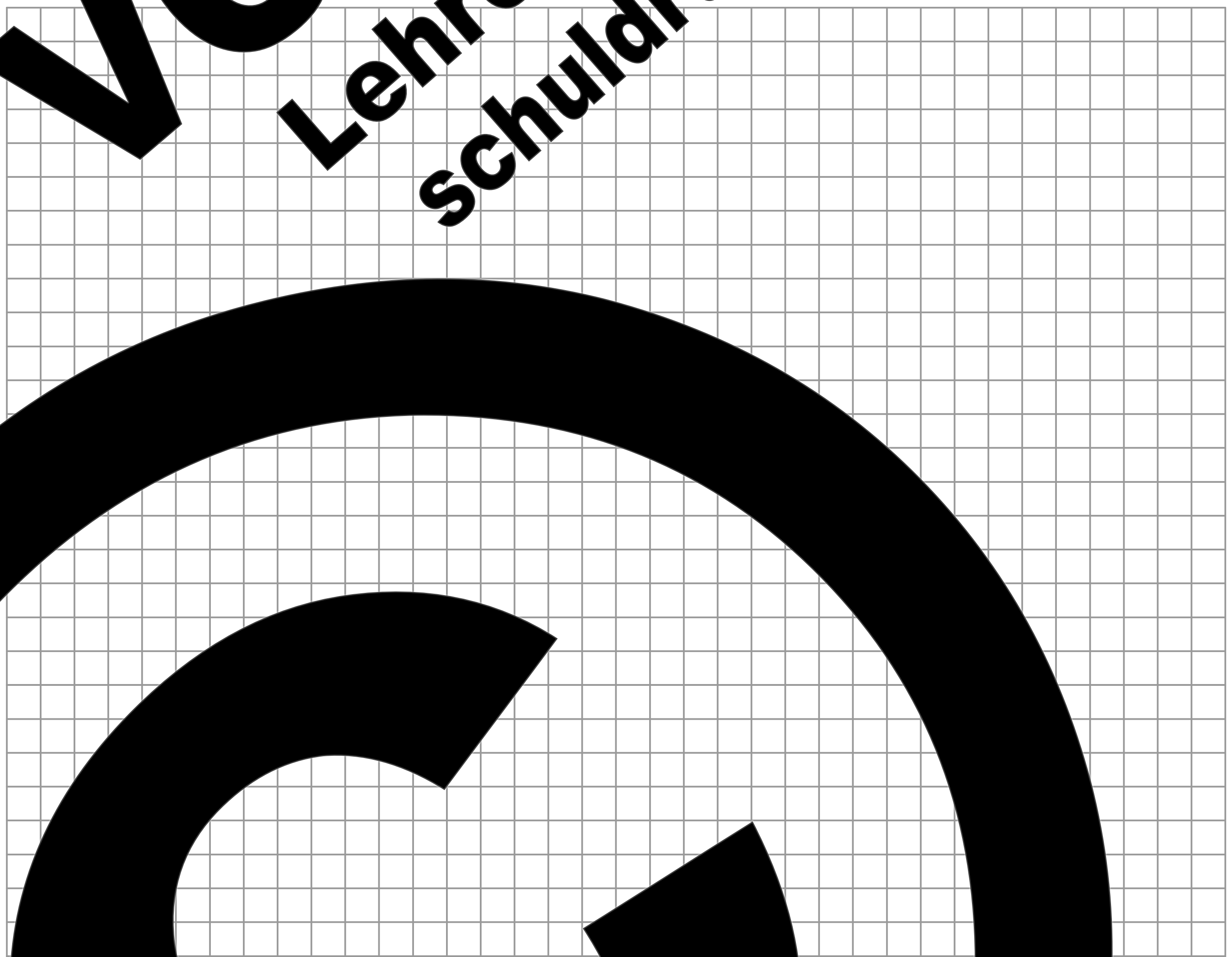




Ü3.8 Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Geraden u(x) = … und w … 1 … 2 zwischen der unteren Grenze a = 0 und der oberen Grenze b = …

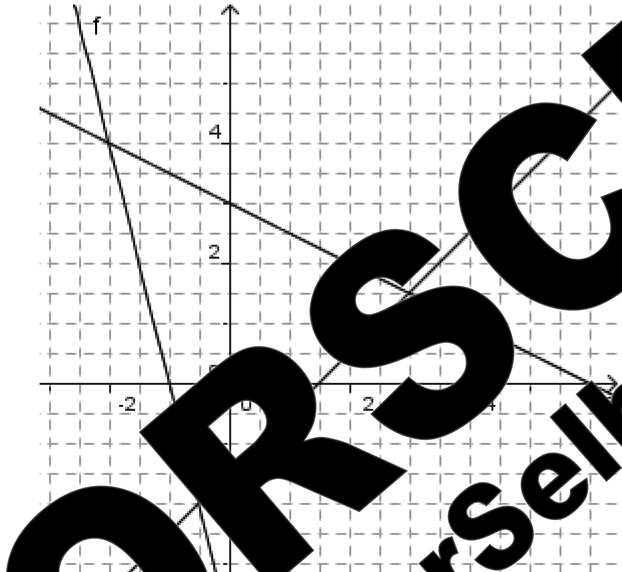


(Erg…is A = … E)



Ü3.9 Berechnung unregelmäßiger Dreiecke im Koordinatensystem …thilfe vo… …mmf… …ionen

Gegeben sind die Geraden $f(x) = -4x - 4$, $g(x) = -\frac{1}{…}x + 3$ … i(x … 1,5

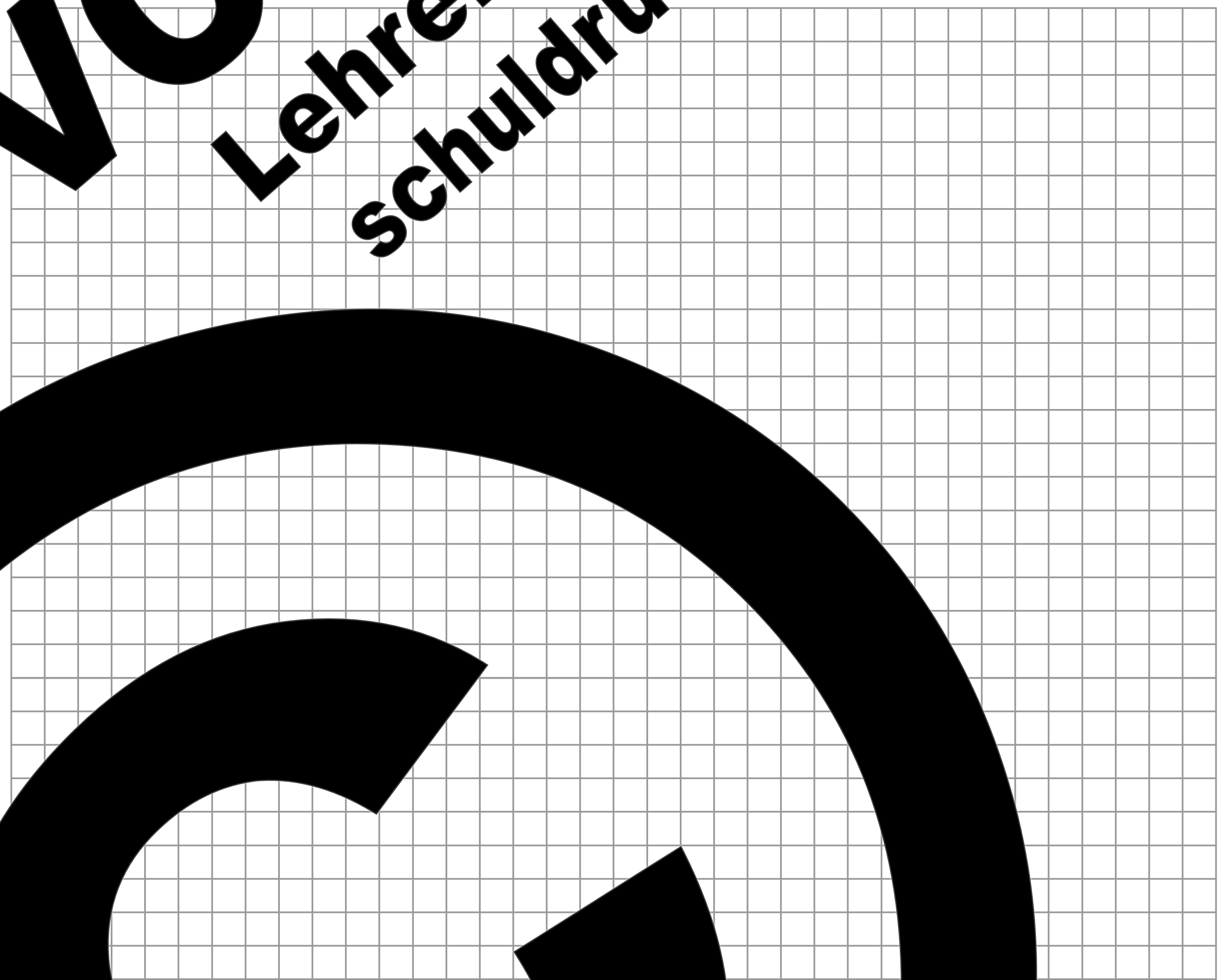


Be… …en S… …ie Fläche mithilfe der M… …ler …mmfunktion.

…fen:

- Die Koordi… …te… …er Eckpunkte können hier aus … A…bildung a…gelesen werde…
- Te… … … die Fläch… d…ch Einzeichnen v… …eeigneten …enkr…chten Geraden so in zwei Teilflä… …ein, dass die Methode der Stamm… … …on anwendbar ist.

(E… …s: A = 13,125 FE)



VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Ü3.10 Zeichnen Sie die Geraden $u(x) = -\frac{1}{3}x - 2$, $v(x) = x + 2$ sowie $w(x) = -x$ u... rechn... Sie die Fläche des von den drei Geraden begrenzten Dreiecks. (Ergeb... 8 FE)

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Flächen unter Kurv...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnung

We[...]führun[...]er Integral[...]nung

Gesa[...]ung selbstorganisiert erlernen [...]2-030-251)

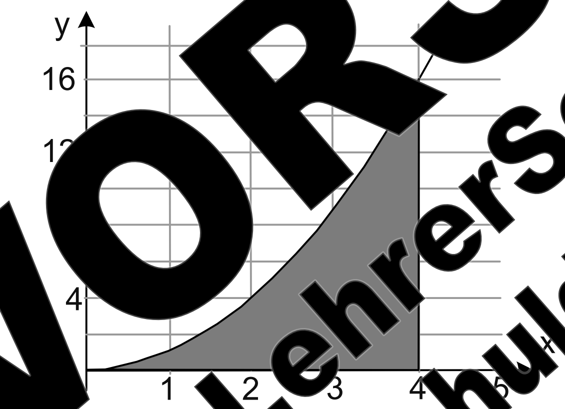
[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[...]
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

Kapitel 4: Flächen unter Kurven

Nachdem Sie gelernt haben, dass man bei Geraden als Randfunkt[...] der [...]funktion die Fläche berechnen kann, die zwischen einer Gerade g(x) und der x-A[...] [...]wei senkrechten Geraden liegt, welche die untere Grenze x = a und die ob[...]renze [...], sollen diese Kenntnisse nun für nicht lineare Randfunktionen, d.h. Kurve[...] weite[...]rden. Dafür wird zunächst die möglichst einfache Randfunktion $f(x) = x^2$ betrachtet.

1. Formulieren einer Hypothese

In der Abbildung ist die Rand[...]on [...]x^2 da[...]stellt. Fo[...]ren Sie unte[...]wendung Ihrer Kenntnisse hinsichtlich de[...]usammenh[...]chen [...]funktion und Stam[...]funktion eine Hypothese über die Bere[...]u markierten F[...]che.



A[...]. 4.1

Hypo[...]e:

[...]s den Überleg[...]en zur Berechnung von Flächen unter Gerade[...]nn man für die markierte Fläche unter der [...]n $f(x) = x^2$ die folgende Vermutung über e[...]ammfunktion ableiten:

Stammfunktion von f(x): $F(x) =$ __________

2. Berechnen der Fläche unter Annahme der Hypothese

Bere[...] der Fläche zwischen der Randfunktion f(x), der [...]enze b = 4 aufgrund Ihrer Hypothese mit der

[...]inhalt von a = 0 bis b = 4: $A_0(4)$

$A_0(4) =$ ____________________

Vermut[...] $A_0(4) =$ ______FE

[...]s zur Gültigkeit der Hypothese

[...]e Gültigkeit der oben erstellten Hypothese [...]ersuchen, geht m[...] vor: Die [...]chte Fläche wird zunächst durch treppe[...]eordnete Rechte[...]alken oder [...]eze angenähert. Liegen die Rechte[...]dfunktion, so be[...]an die Summe

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

aller Rechteckflächen als Obersumme O. Liegen die Rechteckflächen unterhal[illegible] Rand[illegible]tion, so bezeichnet man die Summe aller Rechteckflächen als Untersumm[illegible] Berech[illegible] Si[illegible] in Aufgabe a) und b) die Fläche der jeweils abgebildeten Rechtecke bz[illegible]gabe c) [illegible]läche der eingezeichneten Trapeze sowie die Summe aller Rechteck- und Trap[illegible]fläch[illegible]

a) Annäherung der Fläche über die Bildung der Obersu[illegible] O m[illegible]ken

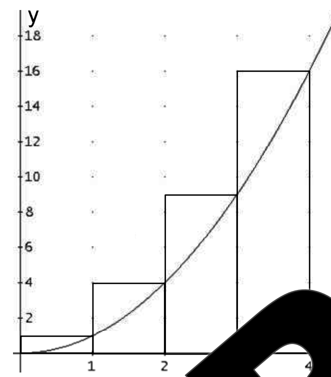


Abb.4.3.1

Berechnu[illegible]flächen:

$O_0(1) =$ ______________________

$O_1(2$[illegible] ______________________

$O_2(3) =$ ______________________

$O_3($[illegible] ______________________

Su[illegible] O = ______________

St[illegible] S[illegible]: "ide[illegible]ch zur" od[illegible]leiner als di[illegible] [illegible]er "größer als die" :

Die g[illegible]aue Fläche unter de[illegible] ist ______________________ über die [illegible]me O berechne[illegible]fläche.

b) Annäherung der Fläche über die Bildung der Untersumme U mit Balken

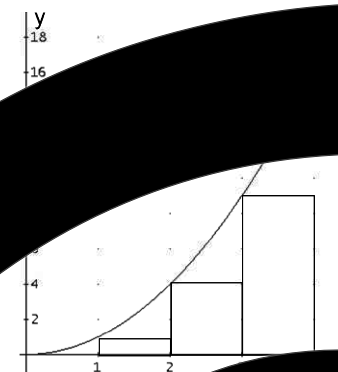


Abb.4.3.2

Berechnung der Rechteckflächen:

[illegible] ______________________

[illegible] ______________________

$U_2(3) =$ ______________________

$U_3(4) =$ ______________________

Summe: U = ______________

[illegible] Sie entsprechend zur Obersumme: Die genaue Fläche unter d[illegible]

______________________ über [illegible]ersumme U bere[illegible]he.

Da die Obersumme einen zu großen Wert und die Untersumme eine[illegible]kleine[illegible]ert für die markierte Fläche liefert, soll ein Näherungswert für die ges[illegible] Fläch[illegible]elwertbildung bestimmt werden:

$A_{Mittel} =$

Formulieren Sie ein vorläufiges Ergebnis hi[illegible]ltigkeit der Hy[illegible]othese und der Vermutung hinsichtlich des über die Stammfu[illegible] bere[illegible]eten Fläche[illegible]lts:

____

____

c) Zur Ober- u[illegible]ersumme alt[illegible]ative Annä[illegible]ng der Fl[illegible]e mithilfe von 4 Tra[illegible]en

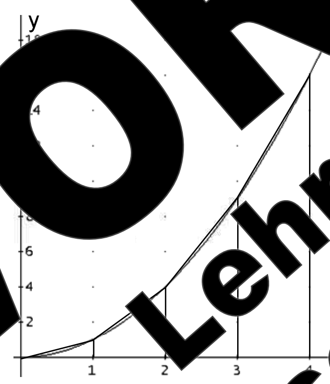


Abb.4.3.3

[illegible]erechnung d[illegible]rapezflächen:

T[illegible](1) = ______________________

$T_1(2) =$ ______________________

$T_2(3) =$ ______________________

$T_3(4) =$ ______________________

Summe: T = ______________

Ent[illegible]ob die Summe der Trapezflächen größer oder kleiner [illegible]Achse.

[illegible] ________ als die Trapezfläche.

[illegible]ergleichen Sie das Ergebnis mit der Ob[illegible]nberechnung.

Vergleich: ____

4. Verbess[illegible]

Di[illegible] und Untersumme bzw. dem Trape[illegible]erechnete [illegible]läche kommt dem mit der Stammfunkt[illegible]en Wert schon [illegible]d man ka[illegible]nehmen, dass die Hypothese richtig ist. I[illegible] Abschnitt soll die [illegible]ng verbessert werden. Dazu wird für die Berechnung der Fläc[illegible] der [illegible]nktion $f(x) = x^2$, der x-Achse, der unteren Grenze a = 0 und der o[illegible]ze b = 3 nur [illegible]die Betrachtung der Obersummen weiter ver[illegible]

a) Hypothese zur Fläche $A_0(3)$ für die Randfunktion $f(x) = x^2$

Geben Sie anhand der Hypothese zur Flächenberechnung mit d funkt e Vermutung für die Maßzahl der folgenden gesuchten Fläche an:

$A_0(3) =$ ____

b) Beschreiben des Näherungsverfahrens

Beschreiben Sie das Näherungsverfah anhand der A ungen 4.4. bis 4.4.4.

____

____

____

____

c) Näh ngs hre

a e hr aufw dig ist, per Ha die Fläche ei ielzahl von Balken zu berechnen, kann n e me beispi weise mit de omputerprogramm Geogebra berechnen. en vi ildungen ie Anzahl er n durch den Wert n angegeben, und der Z enwert O gibt jew e von Geog ermittelte Obersumme an.

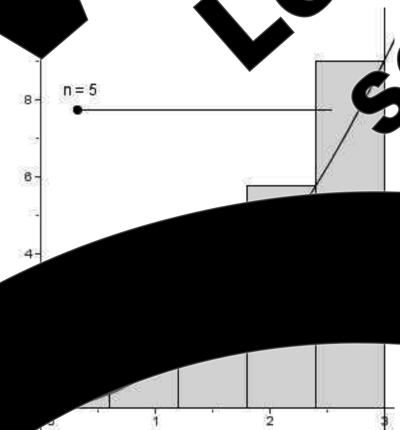


Abb.4.4.1

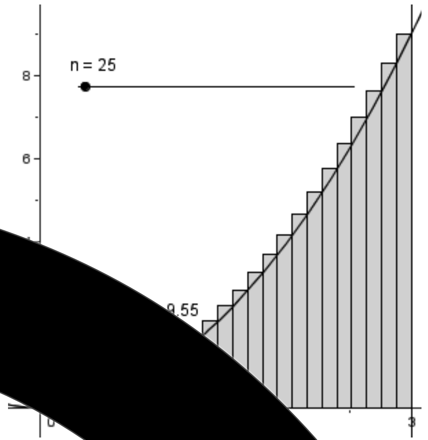
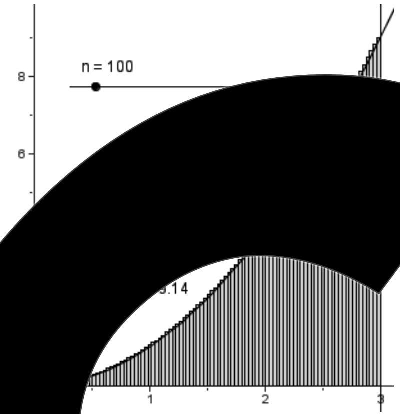
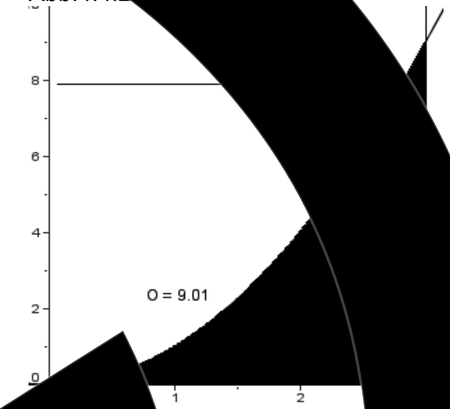


Abb.4.4.2



4.3



Notieren Sie den Wert für die Obersumme zu der jeweiligen Anzahl Balke

n = 5: O = ___________FE

n = 25: O = ___________FE

n = 100: O = ___________FE

n = 1000: O = ___________FE

Vergleichen Sie die Werte für die ersumm O mit dem verm eten Wert für e Fläche $A_0(3)$ und begründen Sie, waru en d aus en kann das die oben not ermutung über den genauen Inhalt d läche $A_0(3)$

Vergleich: ____

Begründu ____

____

____

____

sammenfassung:

ür die Berechn der Fläc $A_0(x)$ gilt bei der Parabel $f(x) = x^2$: $A_0(x) = \frac{1}{3}x^3$

Damit hat die Randfunktion $f(x) = x^2$ die Stammfunktion: $F(x) =$ ______________

ionen für Randfunktionen der

rmulieren Sie aufgrund Ihrer Kenntnis bei Stam eraden und der Stammfunktion von $f(x) = x^2$ sowie den Ableitungsregeln der Differe e Regel, die angibt, wie man bei einer Funktion $f(x) = ax^n$ die Stammfunktion F(x) be

x^n gilt: $F(x) =$ ______________

Worten:

____

____

____

6. Erweiternde und vertiefende Betrachtungen zur Ermittlung der Stammfun… von … $= x^2$

Die Betrachtungen in Abschnitt 4 sind Plausibilitätsbetrachtungen fü… …igkeit e… …ypothese zur Flächenberechnung bei Flächen mit nicht linearen Randfunktione… …den soll, vor allem im Leistungskurs, die Gültigkeit dieser Hypothese zumindest… die Ra… $(x) = x^2$ ausführlich bewiesen werden. In allen gängigen Schulbüchern… …n die… …eweis ebenfalls nachgeschlagen werden.

a) Erstellen einer Abbildung für die Obersu… …ei n Ba… und Festleg… …Bezeichnungen

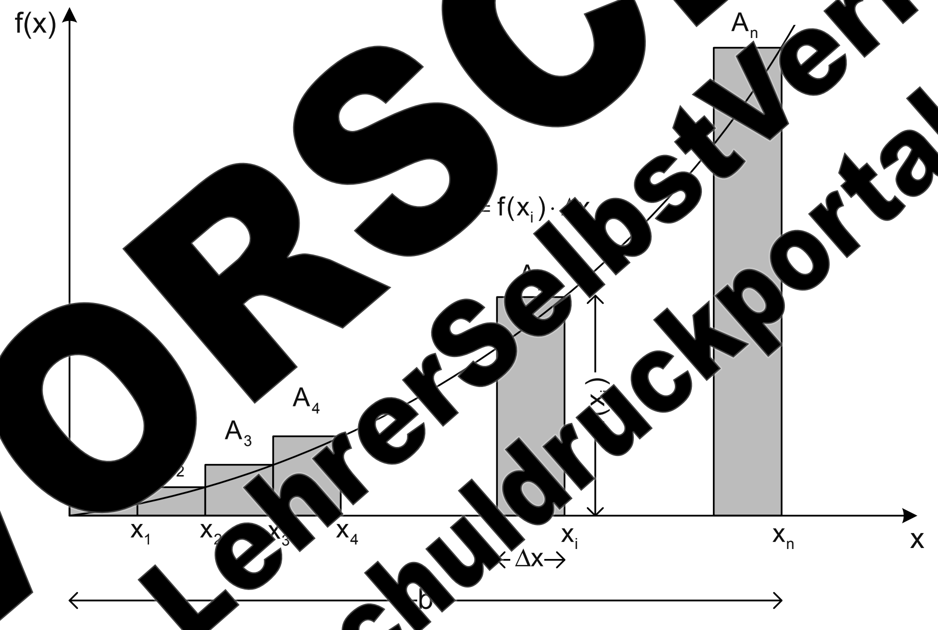


Abb.4.6

b) Bezeichnungen: n: Anzahl aller Balken
b: Gesamtbreite über alle Balken
… Breite eines Balkens
…he des i-ten Balkens

c) Festlegen der Grenzen: untere Grenze $a = 0$
obere Grenze $b = x_n$

d) Bestimm…
Be… …ite eines Balkens gilt: $\Delta x = \frac{b}{n}$ und … $i \cdot \frac{b}{n}$

e) Erläutern Sie die in den Zeilen (1) bis (8) erfolgten Rechnungen und …rmun… …chritte.

(1) $O_0(b) = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$

(2) $O_0(b) = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \ldots (x_n)\cdot\Delta x$

(3) $O_0(b) = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{\ldots})]\Delta x$

(4) $O_0(b) = \left[f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right) + f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right) + f(\ldots b \ldots) + \ldots n\cdot\frac{b}{n})\right]\frac{b}{n}$

(5) $O_0(b) = \left[1\cdot\frac{b^2}{n^2} + 4\cdot\frac{b^2}{n^2} + 9 \ldots + n^{\ldots}\right]\frac{b}{n}$

(6) $O_0(b) = \frac{b^2}{\ldots}[1 \ldots b = \frac{b}{n^3}\, n(1+n)(2 \ldots 1)$

(7) $\ldots = b \ldots n^3 + 2 \ldots = \frac{b^3}{6}\cdot 2 \ldots = \frac{b^3}{6}\left(2 \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$

(8) $\ldots(b) = \ldots \frac{b^3}{\ldots}\left(2 + \frac{3}{n} + \ldots\right) \ldots \cdot 2 = \frac{1}{3}b^3 \ldots A_0(x) = \frac{1}{3}x^3$

…it dieser Formel wird die …umme der Quadratzahlen von 1 b… …berechnet. Ka… …n i… Tafelwerk …chgeschlagen.

E… …gen zu den ei…zelnen Zeilen:

(1) ______________________________

(2) ______________________________

(3) ______________________________

(5) ______________________________

(6) ______________________________

(8) ______________________________

7. Der Begriff Integral

Im Rahmen der Flächenberechnungen für Geraden und für die Para... ...präse... für Kurven wurde bisher der Begriff "Stammfunktion" verwendet. Bei der Parabel ... ...nte ... der Betrachtung von Geraden gewonnene Regel zur Bestimmu... ...er Stam... ...über das Integrieren der Randfunktion bestätigt werden, indem man di... ...che d... die Bildung der Obersumme angenähert hat. Die Näherung an die wa... Fläc... Ku... ist dabei durch ein Erhöhen der Anzahl der Balken erreicht worden. Hier ... ...ge... ...s festgestellt...

Ergänzen Sie: Je größer die Anzahl der Bal... ...de, des... ____________ wurden die Balken und desto ____________ ...en sich ... Balken dem wa...ren Kurvenve...uf angepasst. Je ____________ B...en verwend... ...n, desto bes... ...er ist die Annäh...ng der ____________ an d... ...re ...e zwischen Kur... und x-Achse.

Nachdem für den Re... ...i der Ermittl... ...er Stammfu... bereits der Begriff „Integrieren" ...ende... ...de, so... nun de... ...atische Begri... **Integral**" definiert werden. Verdeutli... ...h da... ...chrittweise ...ende Tabelle.

Erläuterung	Formelmäßige Darstellung
Die ...mmfunk... für f(x) = ... wurde ...rch ...s Aufsummieren ... Recht... ...alken hergeleitet. Wird die Anz... der ... sehr groß, gilt für n:	$n \to \infty$
Die Fläche eines beliebigen Balkens A_i wird mithilfe der Rechteckformel A = $\boxed{\text{Länge}}$ · $\boxed{\text{Breite}}$ dann wie nebenan berechnet.	$A_i = \boxed{\text{Höhe des i-ten Balkens}} \cdot \boxed{\text{Breite des i-ten Balkens}}$ $A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$
W... ...der Mathematik (übrigens ...er Summenbildung im Programm ...) mit dem Summensymbol $\sum$.	(sprich: ... ...is n für …)
Werden zwischen der unteren Grenze 0 und der oberen Grenz... ...viele dieser Rechtec... aufsummie... ...t die Fläc...	$A_0(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta$...

...druck entsp... der Summe aus ...ch vielen Balken der Obersumme, wobei jeder ...n fast die Breite Null hat. Berechnet wird damit ...e Näherung für die Fläche zwischen Randfun... ...d x-Achse.

Wenn die Anzahl der Balken sehr groß wird, also n gegen ∞ läuft, dann wird die Breite der Balken immer kleiner (vgl. Abb. 4.4.1 bis 4.4.3) und nähert sich der Breite Null (vgl. Abb.4.4.4). Damit geht auch Δx gegen Null. Man gibt im Grenzfall die Breite des Balkens dann nicht mehr mit Δx an, sondern man schreibt **dx**.	Für Δx→... schreib... ...im Grenzfall **dx.**
Um die Summe aus sehr vielen extrem... schmalen Balken vom Grenzfall für n → ... zu unterscheiden, schreibt man ...tatt d... Symbols für die Summenbild...g $\sum$ das Symbol $\int$ als **Integralsymbo**... das Integralsymbol ... ...es S fü... Summe symboli...en.	$A ... = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} f ... \int f(x)dx$ sprich: ...tegral f(x) dx

Wende... ...se S...ibweise auf un... ...rsprünglich... ...ug...benstellung und alle bisher erwo... ...ntnis... ...ne Fläche zw... ...n einer Kur... und der x-Achse zu berechnen, an, folgt:

...etra...ungen bei Geraden

Aus der Betrachtung bei den Gerade... ...wissen wir, dass ...n die Randfunk... ...rieren mu...s, u... ...e Stam... ...ion zu ...halten. Mit d... Stammfunktion F(x) kann man Fläche zwischen einer Ge...den und der x-Achse bere...en.

$A_0(b) = [F(x)]_0^b = F(b) - F(0) = F(b)$

Betrachtungen bei Kurven

Aus Betrachtungen zur Grenzwertbildung bei den Balken der Obersumme wissen wir, dass die Fläche zwischen Kurve und x-Achse dem Integral entspricht.

$A_0(b) = \int f(x)dx$

...trachtungen

Der ... ...hnung des Integrals durch ... ...funktion von f(x)...

$A_0(b) = \int_0^b f(x)dx = [F(x)]_0^b = F$...

Man er... ...einer Funktion f(x) und der x... ...ntervall [a,b] über ...s Integral der Funktion f(x).

...s erfolgt über die Stammfunktion du... ...eren von f(x). (Hauptsatz der Integralrechnung)

$$A_a(b) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

8. Beispiel für die Anwendung der Integralschreibweise bei der Berechnung ... Fläch...

Berechnung der Fläche $A_1(2)$ zwischen Randfunktion und x-Achse i... [1;2], ... zwischen der unteren Grenze a = 1 und der oberen Grenze b = 2 mithilfe der In... ...g.

Randfunktion: $f(x) = x^2$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

...fo
Man... ...et ... er Stammf...ion zu... ...te Kon...ante **c** n... a...
Inte... ...onskonsta... ...ten.

Fläche: $A ... \int^{2} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right] ... = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot ... \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Hint... ...em In... ...l-zeic... ...ersche... ...r F... ...ionste... ... Ra... ... ...ltipliziert ... dx.

Die Stammf...kt...n wird **ohne** In...ra...ons-konst...n in eckig... Kl...ern einschli... ...t der Integrat... ...grenzen ang...eben.

...setzen der Grenzen in die Stammfunktion. Es wird immer „obere Grenze“ minus „untere Grenze“ gerechnet.

Übungen

Ü4.1 Berechnen Sie, wie im Beispiel, für die Funktion $f(x) = x^2$ die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse in den gegebenen Intervallen.
a) [2;4]

Ü4.2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$.

a) Ermitteln Sie im Intervall [0;3] einen Nährungswert für die Fläche mithilfe der Trapezmethode. Zeichnen Sie dazu die Funktion f(x) im angegebenen Intervall und teilen Sie die Fläche in drei Trapeze ein.

b) Ermitteln Sie eine Stammfunktion.

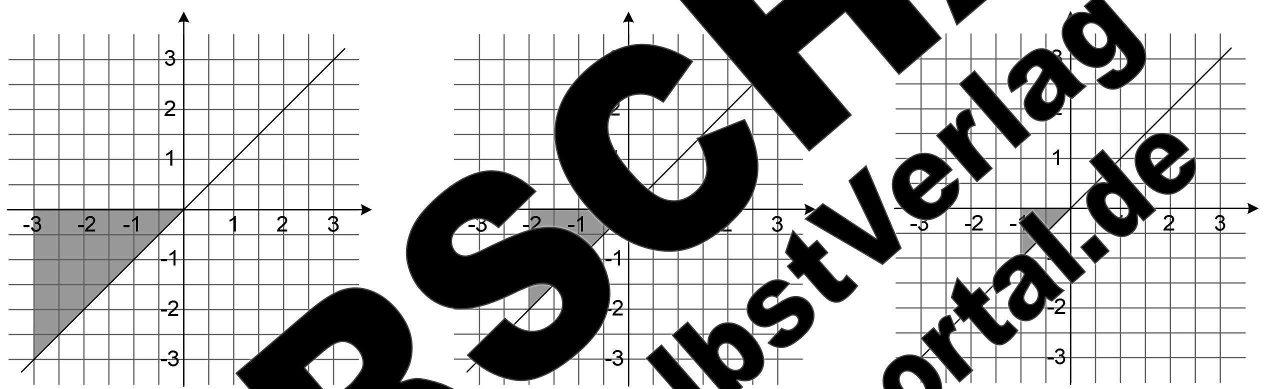
c) Berechnen Sie die Fläche im Int... [0;3] mithilfe der Integralrechnu... ...nd vergleichen Sie den Wert mit de... Näherung aus Aufgab... ...).

d) Berechnen Sie die F... ...he i... ...ervall [2;4] mithilfe der Inte... ...

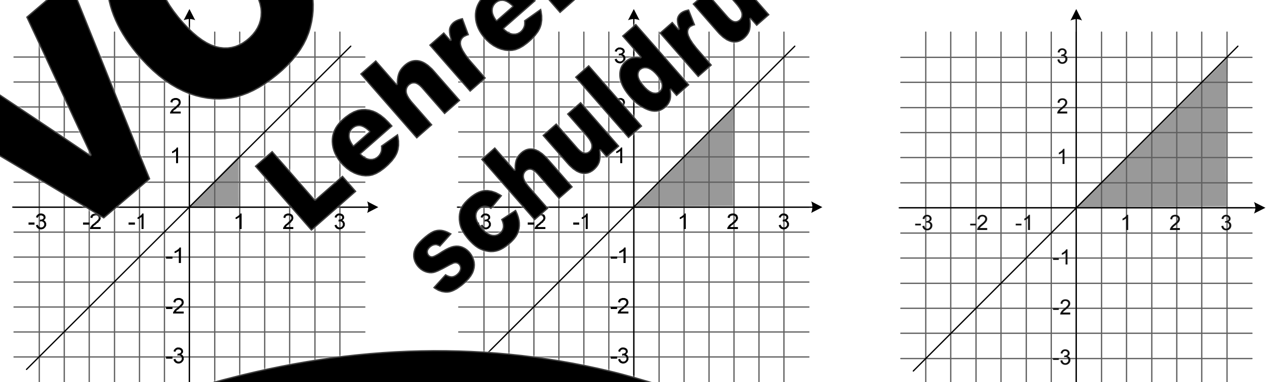
9. Erweiternde Betrachtungen zum funktionalen Charakter der Stammfunkti

Aufgabe 4.9.1

Berechnen Sie für die lineare Funktion f(x) = x die folgende … lächen … reiecksformel, also ohne Anwendung der Integralrechung, auf elementargeo … ische … eg.



$A_{-3}(0) =$ … F $A_{-2}(0) = \frac{\cdot}{2} =$ ____FE $A_{-1}(0) = \frac{\cdot}{2} =$ ____FE



$A_0(3) = \frac{\cdot}{2} =$ ____FE

…gabe 4.9.2

Wie bei den Betrachtungen zu Geraden im Kapitel 3 festgestellt … bei der Berechnung von Flächen die Integrationskonstante bei der Stamm… chlässigen. Damit verwenden wir hi… n von f(x) = x.

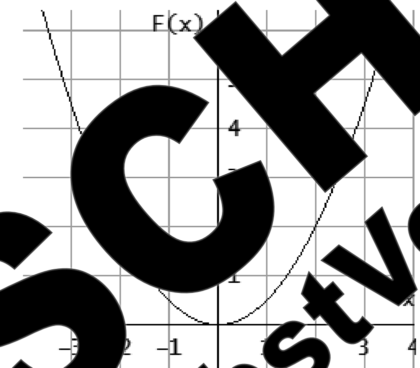
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Füll… mmfunk… (x) die folgende Wertetabelle aus.

	–3	–2	–1	1	2	
(x)						

Aufgabe 4.9.3

Die Abbildung zeigt den Graphen der Stammfunktion F(x). Erg… im a… deten Koordinatensystem die Wertepaare aus der Wertetabelle in Au… 4… dem Sie entsprechende Punkte markieren.



Aufgabe 4.9…

Vergl… Sie … nter A… gabe 4.9… b… chneten W… die Flächen mit der Wertetabelle bzw… Di… mm eingetra… Koordinaten… Sie für die Stammfunktion jeweils den pa… nden … eins… en.

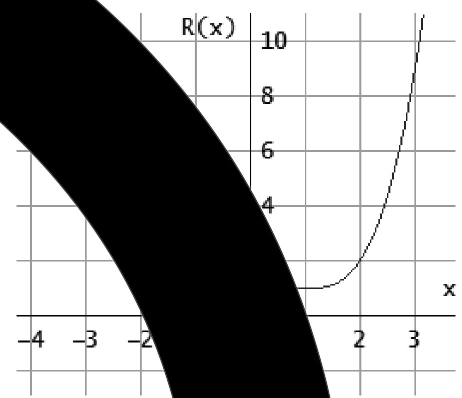
$A_{-3}(0)$ = F(___) $A_0(3)$ = F(___)

$A_{-2}(0)$ = F(___) $A_0(2)$ = F(___)

$A_{-1}(0)$ = F(___) $A_0(1)$ = F(___)

Ergänzen Sie aufgrund des V… eichs die folgenden Aussagen: Die in Aufgabe 4.9.1 berechneten Flächen entsprechen den … ktionswerten der ________________________. Setzt man in die Stammfunktion einen Wert b für x ein, berechnet man eine Fläche, die an der ___-Achse beginnt und an de…

…rationale Funktion r(x) verläuft … ten Quadranten vollständig oberhalb der x-Achse. Der Graph der Stammfunktion R(x) mit c = 0 ist im Diagramm nebenan dargestellt. Ermitteln Sie mithilfe des Graphen die Maßzahl für folgende Flächen.



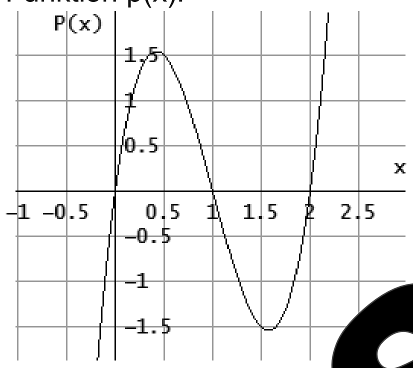
$A_0(1)$ …

… (___) = ______FE

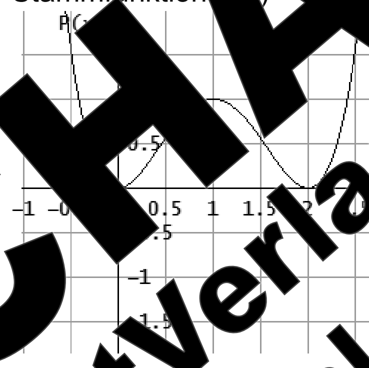
…3) $= \int_1^3 r(x)dx = [\_\_\_\_]$ =

Ü4.4 In den folgenden Abbildungen sind eine Funktion p(x) und ihre für c = 0 zuge… Stam…nktion P(x) gegeben.

Funktion p(x):



Stammfunktion …(x)



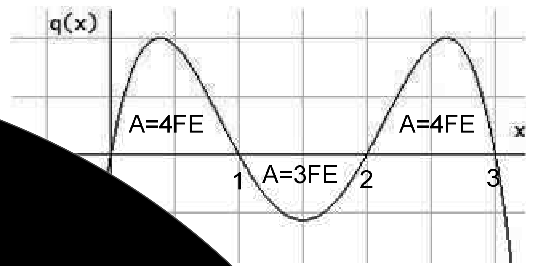
Erläutern Sie, warum hi… die Aussage gil…

Die von der Funk… p(x) … der x-Achse eingesch…ene Fläche … nicht mithilfe der Funktionswerte vo… …erden.

Ü4.5 Die Funktion q(x) schließt mit der x-Achse, wie abgebildet, drei Flächenstücke mit den angegebenen Maß…

Geb…

…en sind.



Q(0) = 0 Q(1) = 4 Q(2) = 7 Q(2) = 1 Q(3) = 5

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnu…
selbstorganisi…rt …lernen

Kapit…

Rechenregeln für Integ…

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun[illegible]

We[illegible]führun[illegible]er Integral[illegible]hnung

Gesa[illegible]nung selbstorganisiert erlernen [illegible]2-030-251)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 5: Rechenregeln für Integrale

Bei der Berechnung von Flächen mithilfe der Stammfunktion bzw. [illegible]rechn[illegible] gelten alle für die im Kapitel 1 bis 3 für Geraden hergeleiteten Regeln. Zusätzlich k[illegible]me[illegible]och Definitionen und einige Rechenregeln für den Umgang mit Integralen hinzu[illegible]

Def.: Ein Integral, bei dem keine Grenzen angeg[illegible] si[illegible]ma[illegible] **unbesti[illegible]mtes Integral**.

$$\int f(x) [illegible] F(x)$$

Man lässt die eckige Klammer be[illegible] Stammfunktio[illegible]weg und f[illegible]ür die Integrationskonstante hinzu.
Ein Integral, bei dem Gr[illegible]ang[illegible]n si[illegible]nennt m[illegible] **[illegible]stimmtes In[illegible]**.

Bestimmung der Sta[illegible]nktion bei ei[illegible]chen Pote[illegible]nktionen

Potenzregel mi[illegible] f(x) = [illegible] ⇨ $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$

Ü5.1 B[illegible]eise[illegible] die [illegible]zregel, ind[illegible]e die erste[illegible]tung der Stammfunktion berechnen.

Ü5.[illegible] [illegible]erechnen Sie jew[illegible] Stammfu[illegible] und überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die [illegible]mittelte Stammf[illegible]on wieder[illegible]n und tragen Sie die Ergebnisse ein.

a) f(x) = 4 F(x)=
b) f(x) = 5x F(x)=
c) f(x) = 3x² F(x)=
d) f(x) = 8x³ F(x)=
e) $f(x) = 10x^4$ F(x)=
f) $f(x) = 15x^5$ F(x)=
g) f(x) = [illegible]
h) [illegible] 1 [illegible] F(x)=
i) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ F(x)=
l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ F(x)=

Summenregel $\mathbf{I = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)+g(x))dx}$

Ü5.3 Die Integrale I_1 und I_2 sollen ohne einen Flächenbezug berechnet werden, d.h. der Funktionsverlauf der Randfunktion soll nicht berücksichtigt werden. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Berechnung für beide Integrale den gleichen Wert ergibt.

a) $I_1 = \int_{-1}^{1} (4x^3 + 6x^2 + 3)dx$ und $I_2 = \int_{-1}^{1} 4x^3dx + \int_{-1}^{1} 6x^2dx + \int_{-1}^{1} 3dx$

b) $I_1 = \int_{1}^{2} (2x^3 + 9x^2 + 2)dx$ und $I_2 = \int_{1}^{2} 2x^3dx + \int_{1}^{2} 9x^2dx + \int_{1}^{2} 2dx$

Faktorregel $\mathbf{I = \int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx}$

Ü5.4 Überprüfen Sie die Gültigkeit der Faktorregel anhand der folgenden ... Berechnen Sie dazu jeweils die bestimmten Integrale I_1 und I_2 . Vergleichen Sie die Ergebnisse. Was stellen Sie hinsichtlich des Rechenaufwandes fest?

Feststellung:____________________________________

a) $I = \int_{2}^{3} 18x^5dx$ und $I = 18\int_{2}^{3} x^5dx$

b) $I = \int_{0}^{1} (4x^3 + 4x + 2)dx$ und $I = 2\int_{0}^{1} (2x^3 + 2x + 1)dx$

Stimmen obere und untere Grenze überein, ergibt sich für das Integral der Wert Null.	$\int_a^a f(x)dx = 0$
Intervalladditivität	$\int_a^b f(x$ … $\int^c$ … $\int^c f(x)dx$

Ü5.5 Begründen Sie die Gültigkeit der beiden R…eln jew… mithilfe geomet…cher Betrachtu…gen bzw. mit Ihren Kenntnissen über die Flä…nbe…ung b… Geraden an …eigneten Bei…

…enzen ändert …en.	$\int_a$ …

…6 Überprüfen Sie die Vorzeichenregel durch Vergleich der beide… …d I_2 .

$I_1 = \int_2^3 4x^3 dx =$ ______________________________

I_2 ______________________________

Übungen zur Berechnen von Flächen mithilfe der Integralrechnung unte… …wend… aller bisher gelernten Regeln

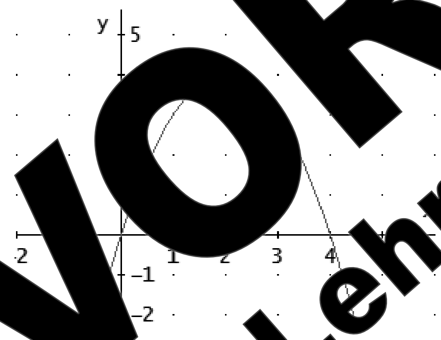
Aufgabenstellung

Berechnen Sie die folgenden Flächen, indem Sie

- die für Geraden ermittelten Regeln für die G… …en …er und unterhalb der x-Achse sowie für Flächen zwischen zwei Funktionen a… …en,
- die Rechenregeln für Integrale anw…
- in allen Abbildungen die Integratio… …renzen, …e Sie …es aus de… Betrachtung vo… Geraden gewohnt sind, als senkrechte Gera… einzei…en und in d… …eweiligen Ab…ungen die zu berechnende Fläche far… …kiere…

Beispiel:

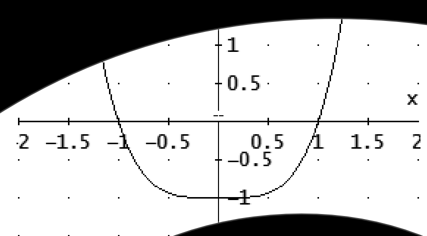
$f(x) = 4x - x^2$ …echne… Sie die Fläche, we…che die Funktion f(x) mit der x-Achse …schließt.



$\ldots = \int_0^4 (4x - x^2)d\ldots \left[\ldots 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = (2 \cdot 4^2 - \frac{1}{3}4^3) - 0 = \frac{32}{3}$

Ü5.7

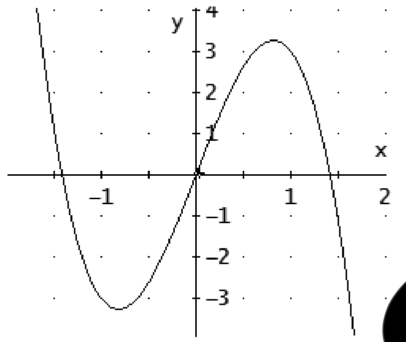
f(x) = x… …n Sie die Fläche, welche die Funktion f(x) mit der …ließt. (Ergebnis 1,6 FE)



Ü5.8

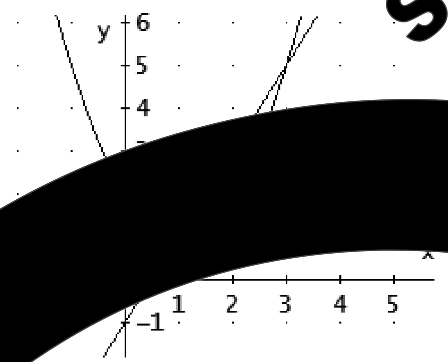
$u(x) = 6x–3x^3$

Berechnen Sie die Fläche, welch… f(x) zwischen den Grenzen a = –1 und… 1 mit … einschließt. (4,5 FE)



u(… – 2x + 2 u… v(x) = 2x – 1

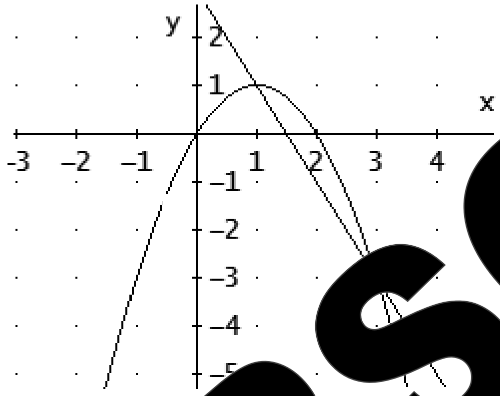
…erechnen Sie die Fläche, welche von der Kurve und der Geraden eingeschlossen wird. (1,333 FE)



Ü5.10

$a(x) = 2x – x^2$ und $b(x) = –2x + 3$

Berechnen Sie die F…he, … von der Kurve und der Gerad… eingesc… (1,333 FE)

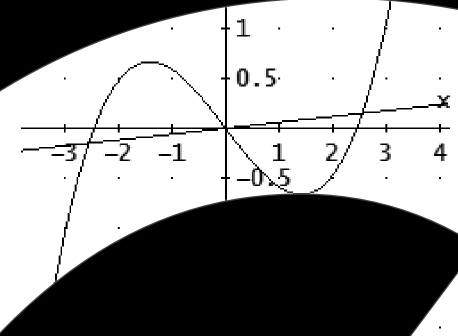


Ü5.11

$g(x) = \frac{1}{17}x$ und $f(x) = \frac{2}{17}x^3 - \frac{12}{17}x$

Berechnen Sie die Fläche zwischen Kurve f und Gerade g sowie den beiden Geraden x = 1 und x = 2. (12/17 FE)

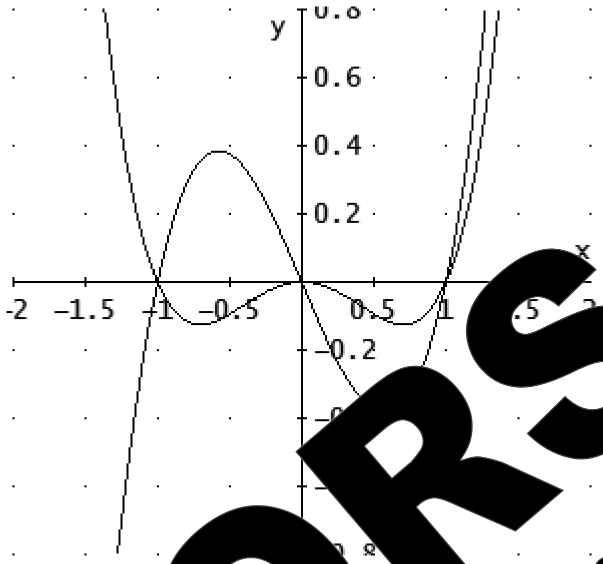
Nutzen Sie die Faktorregel für die …reinfachung der Rechnung!



Ü5.12

$u(x) = x^4 - x^2$ und $w(x) = x^3 - x$

Berechnen Sie die Fläche, welche im Intervall [–1;1] von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird. (0,5 FE)



Ergänz...

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Kontextbezogene Bede... von Flächen

02-030-251

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun...

We...führun... ...er Integral...hnung

Gesa... ...nung selbstorganisiert erlernen ...2-030-251)

S...

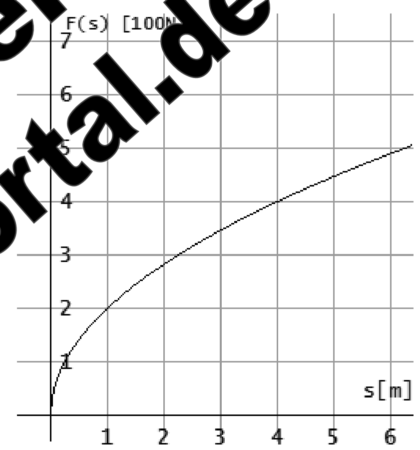
...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 6: Kontextbezogene Bedeutung von Flächen

Wenn man eine Fläche mithilfe der Integralrechnung berechnet un... ...enn d... ...heit Flächeneinheiten FE zuordnet, versteht man darunter in der Regel, ...s e... ...m eine Fläche im geometrischen Sinn handelt. Wie Sie jedoch im Einstiegsb...iel zu ... ...ersten Kapitels gesehen haben, kann einer Fläche im Koordinatensystem im Kontext ...r Auf...nstellung auch eine andere Bedeutung zukommen. In diesem Kapitel sollen exe...larisc... ...e di... Aufgabenstellungen behandelt werden.

1. Flächen im Kraft-Weg-Diagramm

Ein Roboterarm benötigt für di... ...egu... ...ines ...enstand...s auf einem Fließband über d... ...trecke von ... ...n eine K...ft, die mithilfe der Funktion F(... ...hrieben werde... kann.



Die Funktion F(s) ... ...gramm ...an dar...ellt.

Begründen Sie, ...hier verricht... ...beit mithilf...

des A... ...V = ...ds berechne... ..., und zeige...

mit... einer R...nung einschließl... der Betracht... ...on ...inh... dass ...n für die ve... ...te Arbeit fo... ...er Wert ...gibt: ... ...Nm

2. Grundlegendes zur Bedeutung von Flächen

Im Beispiel zur Berechnung der Arbeit ist die kontextbezogene Bedeu h die rungen zum Einstiegsbeispiel in den Vorbetrachtungen ersichtlich. Hier soll ein de Möglichkeit verdeutlicht werden, wie man erkennen kann, ob eine Fläche Anwe gene Bedeutung hat und wie man diese Bedeutung ermitteln kann.

Merkmal 1:

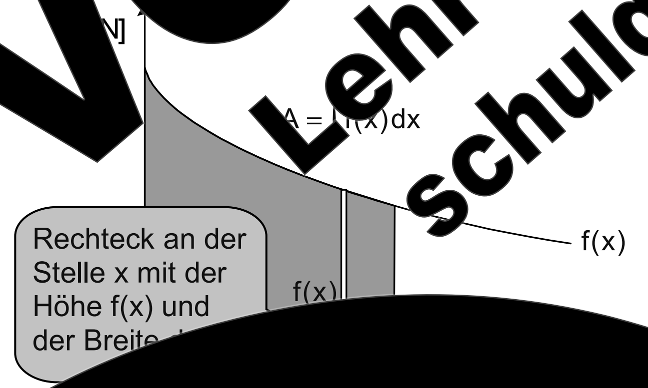
Wenn eine Fläche eine Anwendungsbezogene tung iegt die Fläche i rsten Quadranten des Koordinatensystems.

Merkmal 2:

Das Produkt der Einheiten der G en der y- und x-Achse d gestellt wer muss eine sinnvolle neue Einheit ergeben.

Begründung:

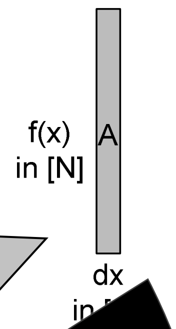
Die grau ma fläch ischen der Kurve f(x) und der x- kann mit Hilfe der Integralre ung u lie B hnung von A $\int f(x)dx$ ermittelt werden. Erläutern Sie die geo tris Bedeu des Ausdruc „f(x)dx", inde die Sätze ergänzen:



Rechteck an der Stelle x mit der Höhe f(x) und der Breite

Der Ausdruck $\int f(x)dx$ bedeutet, dass die Fläche unter der Kurve bei der Integralrechnung letztendlich aus der _____________ unendlich vieler ganz schmaler Rechtecke berechnet wird. (Vgl. Kapitel 4). Der Ausdruck „$f(x)dx$" oder „ " gibt dabei die _____________ eines hr schmalen Rechtecks an.

Für die Fläch hr schmale Betra Pr e ges che enbildung aus diesen n berechnet wird, erhält man die Gesamtfläche die Einheit o die Einheit für die Arbeit.



echtecks
dx

Einh äche

$[A] =$]

Weitere Beispiele für Flächen mit kontextbezogener Bedeutung.

Auf der x- und y-Achse werden die im Folgenden angegeben G etrag eben Sie jeweils die Einheit und die kontextbezogene Bedeutung der Fläche an.

Bedeutung der y-Achse	Bedeutung der x-Achse	Einhe r Flä	ntextbezogene Bedeutung der Fläche
Anzahl verkaufter oder produzierter Artikel pro Tag d, d.h. Verkaufsrate oder Produktionsrate Einheit $\left[\frac{Anzahl}{d}\right]$	Zeit t Einheit [d] Es ch fo nde Z e h: s ,min; h;]	$[A]=\left[\frac{}{}\right]$ $=[\ ]$	______ ______
Zufluss- bzw. ss-rate von Wasse einen Be lter r(t) Seku Ein $\left[\frac{m^3}{s}\right]$	eit t Ein t [s]	$[A]=\left[\frac{}{}\right]$ $[A]=[\ ]$	______ ______
schwindigkeit eines F zeuges v(t) Einheit $\left[\frac{m}{s}\right]$	Zeit t Einheit [	$[A]=\left[\frac{}{}\right]$ $[A]=[\ ]$	______ ______
Beschleunigung eine Fahrzeu		$[A]=\left[\frac{}{}\right]$	______ ______
Änderungsrate der Konzentration eines Stoffes in einer Flüssigkeit k(t) pro St Einheit	Zeit t Einheit [h]	$[A]=\left[\frac{}{}\right]$ $[A]=[\ ]$	______ ______
pro Tag $\left[\frac{mg}{d}\right]$	Einheit [d]	$[A]=\left[\frac{}{}\right]$]	______ ______

Bedeutung der y-Achse	**Bedeutung der x-Achse**	**Einheit der Fläche**	**Kontextbezogene Bedeutung der Fläche**
Ausstoß von Rußpartikeln mit einem bestimmten Durchmesser r(x) Einheit $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\mu m}\right]$	Durchmesser x Einheit $[\mu m]$	$[A]=[\quad]$	
Kraft F Einheit $[N]$ (Newton)	Weg s Einheit $[m]$	$[A]=[\quad]$	
Leistung P Einheit $[W]$ (Watt) oder $[kW]$	Zeit Einheit $[s]$ oder $[h]$	$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	

Raum für weitere Beispiele zur Bedeutung von Flächen in Diagrammen

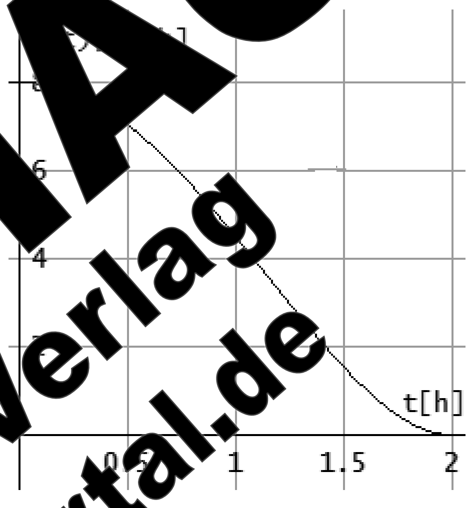
		$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	
		$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	
		$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	

Übungen

Ü6.1 Dem nebenan abgebildeten Graph kann entnommen werden, welche Menge einer Reagenz bei einem chemischen Prozess zu einem Zeitpunkt t entsteht. Damit wird die Reaktionsgeschwindigkeit r(t) angegeben. Für r(t) gilt: $r(t) = 0{,}5t^4 - 4t^2 + 8$

Einheiten: r(t) wird in der Einheit $\frac{kg}{h}$ und die Zeit t in der Einheit Stunde h angegeben.

Begründen Sie, warum man die Menge des insgesamt entstandenen Reagenz mithilfe des Ansatzes $R = \int_0^2 r(t)\,dt$ berechnen kann und zeigen Sie mithilfe einer Rechnung einschließlich der Betrachtung von Einheiten, dass sich hier R = 8,533



Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn... selbstorganisi... ...ernen

Kapit...

Parameteraufgabe...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun

We führun er Integralr nung

Gesa nung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)

S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 7: Parameteraufgaben

Bisher haben Sie Flächen bei Funktionen berechnet, die eindeutig ren, bei denen also außer der Variable x keine weiteren Variablen vorgekommen sind. E bt uch Aufgabenstellungen, bei denen die Gleichung einer Randf n ein e Variable, einen sogenannten **Parameter**, enthält. Im Folgenden wird im Beis zu em Aufgabentyp eine Aufgabenstellung aus dem Bereich der Architektur est B piel 2 eine rein formale Aufgabe ohne Anwendungsbezug bearbeitet.

Beispiel 1:

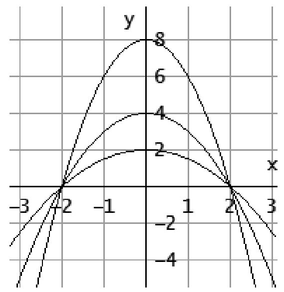
Ein Gebäude soll auf Wunsch es B bel ein F r erhalten, essen oberer Rand durch eine Parabel und desse l von der x-Ach begrenzt wird. D parabelförmige Rand des Fensters soll durch Gleichung $r_a(x)$ – ax² + 4a bestimmt werde ie Fensterfläche soll insgesamt 16 m² be

Überlegungen zu der Aufgabenstellung:

Sie hab ahrs lich noch k der nur wenig ungen mit Funktionen, die einen Param entha ges elt. Dah s nun zunächst verdeutlicht werden, was der Parameter bewirk azu sind der folgenden bildung die Par zu den Parametern a = 1, a = 2 und a = 0,5 a bi Ordne e den Para e Numme de Graphen zu und beschreiben Sie Ihre Ü egu

e Funktio $r_a(x) = -ax^2$

(1) a = 1 $r_1(x) = -x^2$
(2) a = 2 $r_2(x) = \ \ ^2 + 8$
(3) a = 0,5 $r_{0,5}(x) = -0,5x^2 + 2$



tern Sie, welche Auswirkung der Parameter a au nsters hat und markieren Sie e Fläche, welche von $r_1(x)$ bestimmt wird.

orschlag für die Aufgabenstellung

aufgrund des gekrümmten Randes nicht di hen, für welches erfläche den nten Wert von 16 m² annimmt. Die Vorg zur Ermittlung d en Parasoll nun schrittweise erfolgen:

Schritt 1: Ansatz

Erläutern Sie, welche Bedeutung der folgende Ansatz hat:

$A_{-2}(2) = 2A_0(2) \quad \Rightarrow A_0(2) = 8 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 r_a(x)dx$ 8

Schritt 2: Einsetzen der Fu… in den Ansa…

$\int^2$ ________________ $dx = 8$

Schritt 3: …chnen … Inte…s und Auf…se… der entstehenden Gleichung nach a.
(…trollerge…s a = 1,5)

Beispiel 2:

In der rechten Spalte wird die ausführliche Lösung der folgenden A… …rgest… …d in der linken Spalte soll unter Verwendung mathematischer Terminologie erläute… …erd… …lche Berechnungen und Umformungen jeweils durchgeführt werden.

Aufgabenstellung:

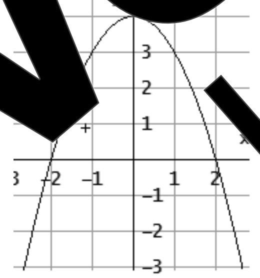
Berechnen Sie den Parameter a mit $a \in IR$ … …en die … …bel $f_a(x) = -a^2x^2$ … mit der x-Achse eine Fläche von 8 FE einschließt.

Überlegungen zum Verständ… …der Aufga… …ung u… …einer Strategie für … Lösungsweg.

1. Anfertigen einer S…

Um sich ein B… …n d… …ufgabenstellung und … …u berechne… …Fläche machen zu können, ist es immer ratsam… … Fläche an…fer…gen. Da d… …raph der Funktion aufgrund des Parame… …unte… …edlich aussieht, wäh… …an eine… …ns…gen bzw. einfachen Wert, um eine Skiz… … zu … …en. Die Fun… …st hier für de… …ert a = 1 gezeichnet worden.

…kiz… …ür $f_1(x)$ … $x^2 + 4$



Beg…den Sie, waru… …an für eine Skizze der Funktion den Parameter a … …ählt:

…rläutern Sie, welche Veränderung sich am Verlauf der Funktion ergibt, w…n man einen anderen Wert für a wählt:

…mulieren des Ansatzes für die Flächenbere…

Ansatz: Erläutern Sie die Überlegungen, die dem … …de liegen und hier insbesondere, warum man nicht 2 sondern … …enze wählt:

$\int_0^N r(x)dx = 4$

3. Entwickeln einer Lösungsstrategie

Wenn Ihre Überlegungen zum Ansatz richtig sind, haben Sie erkannt, ... die ... aus Symmetriegründen zwischen der unteren Grenze x = 0 und der Nullste... ...ktion als obere Grenze berechnet. Damit muss man für die Flächenberechnu... die Nu... ...(x) berechnen:

Strategie: Nullstellen berechnen → Nullstellen in Ansatz einsetzen → ...

Nullstellen: $f_a(x) = 0$

$-a^2x^2 + 4 = 0$

Be... ...en S... ...erun... ...e Nullste... ...on f(x) für di... ...gemeine ...ktion $f_a(x)$ b... ...t werde... ...ssen und z...igen ...e durch ... ...s man hier als Lösung $x_{1,2} = \pm\frac{2}{a}$ erhält.

Flä... ...nun...

$\int_0^{\frac{2}{a}} (-a^2x^2 + 4)dx = 4$

Er... ...n Sie de... ...satz für die Flächenberechnung und die Re...enschritte:

Berechnung von a

$\left[-\frac{a^2}{3}x^3 + 4x\right]_0^{\frac{2}{a}} = 4$

$-\frac{8}{3a} + \frac{8}{a} = 4$

3

Übungsaufgaben für dies... ...sind in vielen Quellen zu finde... ...bei der Bearbeitung, dass S... ...urvenuntersuchung (hier mü... ...alle Untersuchungs... ...einen Überblick über den Verla... ...on verschaffen müssen. Wä... ...chen Parameter für diese Skizze.

Ergä... ...ngen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapit...

Rekonstruktion von Fun...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnung

We... ...führun... ...er Integralr...hnung

Kapitel 8: Rekonstruktion von Funktionen

Bisher haben Sie hinsichtlich der Integralrechnung Aufgaben bearb... ...denen ... ein Parameter im Funktionsterm enthalten war. Nun wird diese Aufgabenstellung so e... ...ite... ... kein Koeffizient bekannt ist.

Auch bei diesem Aufgabentyp, den Sie bereits aus ... Klass... ...enne... kann man ähnlich wie bei der Untersuchung von Kurven oft systematisch vorgehe... ...n gegebene... Aufgabentext schrittweise analysiert. Die Vorgehensweise ... ei... ...omplex... rein form... ...eispiel ohne Anwendungsbezug dargestellt werden.

1. Zuordenen eines Funktionstyps

Man muss aus der Aufgabe... ...ung zuna... ...usarbe... ...um welche... Typ ... Funktion es sich handelt und dann für diese... ... die allgemeine ...leichung notier... ...Folgenden sind die Ansätze für die häufigsten F...nstyp... aufgelistet.

...Ganz... ...ale Fu... ...Grades (Par...bel)

oh... ...	mit Achsensymmetrie
... = ax... ...x + c	$f(x) = ax^2 + b$

Ganzra...nale Funktion 3. Grades

oh...e Symmetrie	mit Punktsymmetrie
$f(x) = ax^3 + bx^2$ ... d	$f(x) = ax^3 + bx$

...4. Grades (Parabel)

...	mit Achsensymmetrie
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	...$) = ax^4 + bx^2 + c$

2. Bedingungsanalyse

Nun mus... ...ung herausarbeiten bzw. ana... ...che Bedingungen für den V... ...sind. Die Informationen sind häuf... ...elt gegeben, be... ...kte, die Lage von Extremwerten un... ...kten (Vgl. Band ... Neu kommt jetzt hinzu, dass sich eine ... auf eine ...be bezieht.

...enden wird ein Lösungsverfahren, bei dem ge...bene Bedingunge... ...se in den ...nsterm eingearbeitet werden, an einem ko... Beispiel gezeigt... ...ungsweg lässt ...eitgehend auf andere Aufgaben übertr...

...utlichen Sie sich die einzelnen Schri... ...vegs.

Aufgabenstellung

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die durch den U… …rläuft … der gleichen Stelle wie die Funktion $k(x) = x^2 - 2x + 1$ einen Extremwert hat. B… x = … det sich der Wendepunkt. Die Funktion schließt mit der Geraden x = 2 und d… …eiden … …chsen im vierten Quadranten eine Fläche von 12 FE ein.

1. Schritt

Allgemeiner Funktionsterm:	f(… ax³ + bx² + … d

…t günstig mit ei… Bedingung, f… x = 0 gilt zu be…nen, da hie… …fort der Koe… der kein x hat, … Wert n… und da… wegfällt. (vgl. Ban… D…enzialrech…)

2. Schritt

Analysiere… …er 1. B…gun…	F…nktion verl… durch den Ursprung O(0/0)
Math…tis… Ans… der Bedin…	$f(0) = 0$
…setz… der Werte:	$… \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$ $d = 0$
1. Zwischenergebnis für Funktionst…rm	$f_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

d = 0 wird in die allgemeine Ausgangsfunktion eingesetzt und man erh… Zwischene… dem…

…g mit der Bedingung für …kt fortzufahren, da in …ung nur die Koe… b vorhanden sind und m… …gkeit von a ausdrück…

3. Schritt

Analysieren…	Wendepunkt bei x = 2
Mathem… …ng:	$f''(2) = 0$ mit $f'(x…$ …bx + c $f''(x)…$
Ei… Werte:	$6a \cdot 2 + 2b = 0$ $12a + 2b…$

x = 2 w… zweite … von f(x)…

2. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f_2(x) = ax^3 - 6ax^2 + c…$ $f_2'(x) = 3ax^2 … 2ax + c…$

Für b wird n… …ermittelte Ausd…ck "– 6a" in das erst… …che…bnis $f_1(x)$ eingese… …durch erhält m… …die gesu… Funktion d… 2. Zwischenergebnis f… Da man für d… 4. Schritt …rste Ableitung b…tigt, erm…lt man noch f…(x).

4. Schritt

Analysieren de… …edi…g:	Die x-Koordinate für den Extremwert der gesuchten F…ktion f(x) sti… mit der x-Koordinate des Extremwert… der Funktion k(x) überein. Also muss die x-Koordin…te des Extremwertes von k(x) in einer Nebenr…ung ermittelt werden: $k(x) = x^2 - 2x + 1$ $k'(x) = 2x - 2$ Extremwert: $k'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$ $\Rightarrow x = 1$ Damit hat die Funktion f(x) an der Stelle x = 1 einen Extremwert.
…	… mit $f'(x) = 3ax^2 - 12ax + c$
…n der Werte:	$3a \cdot …$
3. Zwischenergeb… …tionsterm:	$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9…$

x = 1 wird in die erste Ableitung von f(x) eingesetzt.

…ch Einsetzen von 9a für c erhält ma… …ittes Zwischenergebnis, in dem nur no… Koeffizient a vorhanden ist.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

5. Schritt

Den letzten Koeffizienten a bestimmt man nun über die Flächenbedingun... noch ... Parameter vorhanden ist, geht man hier wie bei der Parameteraufgabe in Kapitel 7 v...

Analysieren der 4. Bedingung:	Die Fläche liegt zwis... den ... enzen 0 und 2 im **vierten Q... nt...** unte... alb der x-Achse.
Mathematischer Ansatz der Bedingung:	... (2) = –12
Einsetzen der Werte:	... $(x)dx = -12$ ... $x^3 - 6ax^2 + 9ax\,dx = -12$ $\left[\ldots ax^4 - 2 \ldots ax^2 \right] = -12$ ... $-16a + 18a$ ... 12 ... = –12 $a = -2$
Enderg...nis:	**f(x) = –2x³ + 12x² – 18x**

Achtung: Man muss ... auf achten, ... Fläche oberhalb ... unterhalb der x-Achse liegt. Bei Flächen oberhalb der x-Achse wird der Betrag mit positivem und bei Flächen unterhalb der x-Achse mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

Der Koeffizient a wird mit der Flächenbedingung zahlenmäßig bestimmt und in das dritte Zwischenergebnis eingesetzt. Daraus ergibt sich das Endergebnis.

Strukturdiagramm zur Lösung von Rekonstruktionsaufgaben

Die Abfolge der einzelnen Lösungsschritte bei der Rekonstruktion ... ionen ... den Rechenaufwand erheblich beeinflussen. Es ist daher sinnvoll, mit de... D... m vorgeschlagenen Abfolge von Arbeitsschritten vorzugehen und jeweils mit d... Zwische... , in denen die Anzahl der unbekannten Koeffizienten schrittweise geringer wird, w... zuarb...

...de Übungen: ______________________

Raum für Rechnungen und Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Volumenintegrale

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun

We… führun… der Integralr…hnung

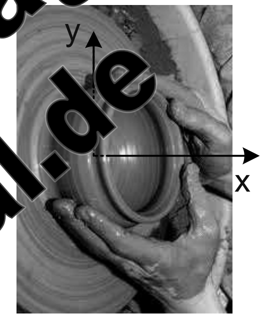
Gesa… …hung selbstorganisiert erlernen …2-030-251)
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 9: Volumenintegrale

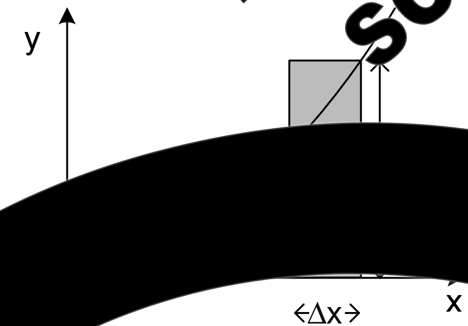
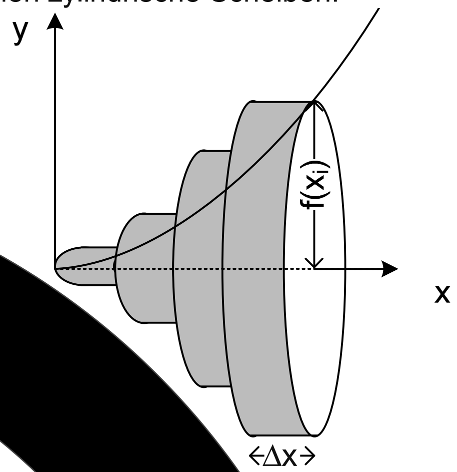

Qu… …ery-wheel.jpg
…o: S…terstock.com

Schaut man einem Kunsthandwerker beim Töpfern auf de… …pfersch… zu, erkennt man, dass hier rotationssymmetrische Gegenst… entst… Das Volumen dieser Gegenstände kann man mithilf… der Inte… …chn… ermitteln.



Für Berechnungen ist es einfach… …nn s… …ationskörpe… …ie x-Achse dreht. Dazu dreht ma… …en G… …stan… … neben… …estellt, in Gedanken um 90°.

Die Form… … Vo… …berechnung … …chen Rot…ons…rpers wird durch Gegenüberstellung mit der… …eitu… …er In… …tionsforme… erläutert. Bearb… …Sie dabei zuerst die linke Spalte und übertr… …n Sie d… …sätze und Überle… …ungen auf die … …e Spalte.

…unter einer Kurve	Rotationsvolumen
In K… …tel 4 wurde die fo… …äßige Bezie… …g für … …gral mithilfe vo… …ersummen … n … …lächen he… …eleitet.	Lässt man die rechteckigen Balken der Abbildung in der linken Spalte um die x-Achse rotieren, so entstehen zylindrische Scheiben:
	
Die Fläche eines R… …it der Flächenform… … $= f(x_i)\Delta x$ berechn…	Das Volumen … …s lässt sich, wie Sie in der Sekundarst… …aben, mit der Formel $V = \pi r^2 h$ berechn… …n sie nun, warum man die i-te Zylinde… …der Abbildung mit folgender Formel be… …n: $V_i =$ …

Ergänzen Sie: Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ gibt die ____________________ aller abgebildeten Balken an. Lässt man Δx immer ______________ werden, so werden die Balken immer schmaler. Die Fläche unter dem Graphen von f wird durch die Summe der ______________ ang... Je schmaler die Balken werden, desto ______________ ist die N... Strebt die Breite der Rechtecke ge... so verwendet ma... ...g der Fläche folgende... I...al:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ergänzen Sie: Der ... gibt die ______________ ...gebildeten Zylinderschei... La... man Δx immer kleiner werden, ...rd die ______________ der Zylindersch... immer ... und das gesuchte Volu... immer ______________ angenähert. Strebt die Höhe der Zylinder gegen Null, so verwendet man entsprechend zur Flächenbetrachtung für das Aufsummieren unendlich vieler extrem schmaler ________________________ das ...tegralzeichen und schreibt:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Beispiele und Übungsaufgab... ...einer Vielzahl von Quellen. entnommen werden.

Erg... ...ungen: ____

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Uneigentliche Integr...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun

We führun er Integral chnung

Gesa hung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)

S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 10: Uneigentliche Integrale

Bei Modeprodukten, die nach einer Werbephase einen Renner au Markt darstellen und eine hohe Verkaufsrate haben, nimmt das Käuferinteresse meist sehr schnell ab. Aus den Verkaufsdat n ab de ersten bis zum fünfzigsten Verkaufstag für ein solches Pro wird d Funktion $p(t) = \frac{100000}{\sqrt{t^3}}$ ermittelt. Einheit für p(t): $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\ }\right]$

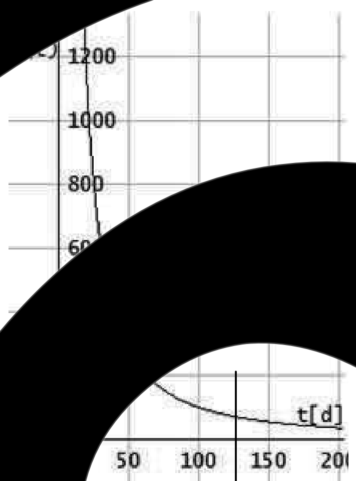
Das Diagramm nebenan zeigt den Verlauf d unkt

Aus diesen Daten soll nun für die Planung r Produktion b chnet werden, wie viele Teile davon insgesamt uft we n können.

a) Erläutern Sie, war Fläche zwisc Funktion und Achse der Anzahl der insgesamt verkauften Teile entspricht

b) gru arum man ei der Berech der Fläche für die untere Grenze a den Wert x = 1 setzen , jedoch obere Gre existiert.

zwischen Funktion und x-Achse berechnen bis ins Unendliche ausdehnt.



g

Erläutern benstehenden Abbildung die grundlegende atz bei der Flächenberechnu

(1) $A_1(g) = \int_1^g \frac{100000}{\sqrt{t^3}}\,dt$

(2) $A_1(g) = 100000 \int_1^g \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$

(3) $A_1(g) = 100000 \int_1^g t^{\_\_}\,dt$

(4) $A_1(g) = 100000 \left[\_\_\_\_\right]_1^g$

(5) $A_1(g) = 100000 \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_1^g$

(6) $A_1(g) = 100000 \left(-\frac{2}{\sqrt{g}} - (\_\_\_)\right)$

(7) $A_1(\infty) = \lim_{g\to\infty} A_1(g)$

(8) $A_1(\infty) = \lim 100000 (\_\_\_\_)$

(9) $A_1(\infty)$ ... 00000

Vervollständigen Sie fehlende Angabe... den Re... ngen und erläutern Sie unter Angabe der Zeile... mmern entscheidenden Rechenschritt... d Überl...

Zusa... enf...

... i einer Flächenb... echnung mithi... er Integralrechnung die Integrationsgrenzen nicht bere... erden, da ... eine Funktion be... sweise keine Nullstellen hat, sondern sich der x-Achse nur ann... ert, fügt man ... einer belie... gen Stelle eine Grenze g ein. Man berechnet unter Verwendung der unbekannten Gr... g zunächst das bestimmte Integral der Funktion und führt anschließend eine Grenzwertbere... ung durch. Ergibt sich dabei für den Grenzwert ein endlicher Wert, so wird das Integral als **uneigentliches Integral** bezeichnet.

d) Berechnen ... Sie die Lücken im Text aus:

(1) ...

$A_4(\infty) = \lim_{g\to\infty} \_\_\_\_ =$

Das **uneigentliche Integral** existiert, da die Fläche den endli... $\infty) = \_\_\_\_$ FE hat.

(2) $A_4(g)$ ...

... $\to$

... **neigentliche Integral** existiert nicht, da die ... Wert hat.

B... ungen :

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapitel ...

Lineare Substitutio...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnung

Weiterführung der Integralrechnung

Gesa... ...nung selbstorganisiert erlernen ...2-030-251)

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 11: Lineare Substitution

1. Wiederholung Zusammenhang Stammfunktion – Randfunktion – Ableitungsfunktion

Aufgabe 11.1

Verdeutlichen Sie sich am Beispiel der gegebenen Funktion f(x) = 1... + $3x^2$ die Zusammenhänge zwischen Randfunktion f(x), Stammfunktion F(x) ... Ableitungsfunktion f '(x). Füllen Sie dazu die Lücken im Text aus. Auf das Hinzufügen der Integrationskonstanten soll hier zur Vereinfachung verzichtet werden.

2. Lineare S...

Beim ... der Kettenregel haben Sie bereits ... innere und äußere F... ...egriffe spielen nun auch bei der hier ... Integrationsregel ... ...tionen behandelt werden, bei denen die ... **...ktion u(x)** eine ...**ktion** ist, also die Form **u(x) = ax + b** hat.

...nun folgenden Aufgabe sollen grundlegende Zusammenhänge zw... Randfunktion f(x) ...er zugehörigen Ableitungsfunktion f '(x) für ...en verschiedene... ...klassen mit ...er innerer Funktion wiederholt werden.

Aufgabe 11.2

Ableitung von Funktionen mit linearer innerer Funktion
Geben Sie für die folgenden Funktionen f(x) die innere Funktion u(x) u... die ... Funktion v(u) an und bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion wie im B... piel a):

Funktion	innere Funktion $u(x) = ax + b$	äuß... Funk... $v(u) =$ ...	...bleitungsfunktion
a) $r(x) = (ax + b)^3$	$u'(x) = a$	$v(u) = (u)^3$ $v'(u) =$ ... $u)^2 = 3(a$...	$r'(x)$ ... $a \cdot 3(ax+b)^2$
b) $s(x) = (ax + b)^4$	... = ____	v(u) = ____ v'...	s'(... = ____________
c) t(... ...+b	u'(x) =___	v(u) = ____ ... = ____________ =	t'(x) = ____________ =
d) w(x) = sin(ax+b)	...(x) = ___	v(u) = _______ v'(u) = ____________	w'(x) = ___________

Ergänzen ...

... v(ax+b) enthält aus der inneren

... Faktor ____ und als zweiten Faktor die ... ____________________

...tion, also v'(ax+b).

Man kann das Ergebnis daher in der Form **f '(x) = a v'(ax+b)** darste...

Aufgabe 11...

Integr... ...arer innerer Funktion
Mit ... aus der Ab... ...ng von Funktionen mit linearen Verkettun... ...hilfe bereits be... ...nfunktionen soll nun anhand der Beispiele aus Aufgabe 11.2 e... ...n auf die I... ...ser Funktionen geschlossen werden. Bearbeit...n Sie dazu auf de... ...Seite das ...(x) = $(ax + b)^3$ und gehen Sie anschließend b... ...n anderen Funkti... ...dazu vor. ...reits mit Ihrer ersten Vermutung zu einer... ...ktion richtig liege... ...sich das ...nd Prüfen einer zweiten Vermutung...

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung f... die Stammfunktion	St... ...funktion
$f(x) = x^3$		...$(x) = \frac{1}{4}x^4$
$r(x) = (ax + b)^3$	**Vermutung 1:** $R(x) = \frac{1}{4}(a$... **Prüfen:** R'... ...$4 \cdot \frac{1}{4}(a$... $= a(ax$... $\neq r(x)$ **Ergeb...** **Die V... ...g 1 ist ...** ...**mutung 2:** R... $\frac{1}{a}\frac{1}{4}(ax+$... $R'(x) =$ ... $\frac{1}{a}\frac{1}{4}(ax+b)^3$ ...$(ax+b)^3 = r$... **Ergebnis:** ...**ie Vermutu... 2 ist richtig.**	R(...) $= \frac{1}{4a}(ax+b)^4$ ...r durch die innere ...bleitung entstandene Faktor a muss durch Hinzunahme des Faktors $\frac{1}{a}$ bei R(x) korrigiert werden.

Funktion	Form... ...eren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	Stammfunktion
$f(x) = x^4$		F(x)= ________
...b)^4	Vermutung 1: ________ ________ Prüfen: ...st ____________________	S(x) = ____________

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	…mmf…ion
$f(x) = \sqrt{x}$		…) ______
$t(x) = \sqrt{ax+b}$	Vermutung 1: ______ Prüfen: Die V…utung ist ______	T(x) = ______
f(x) = sin…		F(x)= ______
…(x) = …(ax+b)	Verm…1: ______ …üfen: Die Vermutung ist ______	W(x) = ______

… bei denen die innere Funktion die Form f(… …den integriert, indem man ______ Funktion integriert und dies… …h die Ableitung der ______ Funktion also durch ____ dividiert.

…are Substitutionsregel:

$\int f(ax+b)dx = \ldots \frac{\ldots}{a} \cdot F(ax+b)$ mit $a,b \in IR$ und $a \neq 0$

E… …bungen: ______

3. Ergänzung zur unbestimmten Integration über das ausführliche linea… …bstitu…nsverfahren

Wenn die Funktionen komplizierter werden, ist es günstig, mit d… …führlich… …titutions-verfahren zu arbeiten. Dieses Verfahren wird hier zunächst an z… …en Beispielen erklärt, kann aber auch bei Funktionen angewandt werden, deren inne… Funk… nic… …ist.

Beispiel 1:

Der Ausdruck in der Klam… also die innere F…ion … durch u ersetzt.

Die innere Funktion wird nach … abgeleitet. Anstatt u… schreibt man hier $\frac{du}{dx}$

$F(x) = \int (1-2x)^3 dx$ …bstitution

Inhalt der Klammer und dx werden ersetzt bzw. substituiert.

$u = 1-\ldots$

$\frac{du}{dx} = -2$

Auflösen nach dx

$\ldots = -\frac{1}{2}du$

Wenn mög-lich, verein-fachen … dan… rie…

$F(\ldots = \int u^3(-\ldots$

$\ldots \int u^3 du$

$\ldots) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4$

$F(\ldots = -\frac{1}{8}(1-2\ldots + \ldots$

R…substituieren und …tegrationskonstante …fügen.

…spiel 2:

…eispiel 2 wird ge…gt, wie m… …fache gebrochen rationale Funktionen, also Funktionen, bei d…n x im Nenn… …eht, mithilf… …r Substitutionsregel integrieren kann. Erläutern Sie die einzelnen Schritte:

$F(x) = \int \frac{1}{(1+3x)^2}dx$ Substitution

$u = 1+3x$ ______

______

… 3 ______

$\ldots = \int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{3}du$ ______

$F(x) = \int u^{-2}\frac{1}{3}du$ ______

$F(x) = \frac{1}{3}\int u^{-2}d\ldots$ ______

F(x)… ______

______

______

$\ldots \frac{1}{3(1+3x)} + c$ ______

4. Ergänzung zur bestimmten Integration über das ausführliche lineare Subst... ensve... ren

Es gibt verschiedenen Möglichkeiten beim ausführlichen linearen Subs... fahren mit den Integrationsgrenzen umzugehen. Hier wird für die Funktion $t(x) = \sqrt{2x+...}$ (vgl. ... 1.3) nur die Methode beschrieben, bei der die Grenzen beibehalten und e... ch de... ksubstitution eingesetzt werden.

Ergänzen Sie die Rechnungen:

$T(x) = \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,d...$

Die Grenzen 0 und 4 sind nur für die Variable x gültig. Das wird nach der Substitution berücksichtigt, inde... für jeden Ausdruck, in dem u v... mt, explizit ... Grenz... = 0 u... x... 4 n... t wird.

...itution ...

$\frac{du}{dx} =$

$dx =$

Vor dem E... etzen der Grenzen muss rück... tuiert wer...

$...(u) = \int_{x=0} \sqrt{\_\_\_}\ \frac{du}{\_\_} = \frac{1}{2}\int_{x=0} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{...}\Big[\_\_\_\Big]_{x=0}^{x=4}$

$P(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{...}\sqrt{(2x+1)^3}\right]^4 = \_\_\_ = \frac{\_\_}{3} \approx 8{,}67\text{FE}$

Nach der Rücksubstitution werden di... en wie gewohnt ...geben und eingesetzt.

Ü11.1 Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \sin(ax+b)\,dx$ (Ergebnis vgl. Aufgabe 11.3) und das besti... ...nis: $\int^{\pi} \cos(-0{,}5x)dx$ =4FE).

5. Lineare Substitution bei der e-Funktion

Sie wissen bereits, dass man die Stammfunktion bei linear verk... Funkti... ilfe der linearen Substitution ermitteln kann. Um diese Regel auf die e-F... zuwenden, soll hier die im Kasten Stammfunktion angegebene Funktion F(x) durch ableiten ...ifiz... den.

Aufgabe 11.4
Leiten Sie die angegebene Stammfunktion ab u... ermu... e e... n Merksatz für die Bildung der Stammfunktion bei diesem Typ von e-Funktionen.

Ableitungsfunktion $f'(x) = ae^{ax+b}$ ← ableiten ← ...nktion $f(x)$ ... → integrieren → Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ ...

ableiten

$F'(x) =$

Aufgabe 11.5
Geben Sie jeweils die Ableit...gs- und Stammfunktion an:

Ableitung		Funktion		Stammfunktion
$f'(x) =$	ableiten	Funktion $f(x) = e^x$	integrieren	$F(x) =$
			...ieren	$F(x) =$
$f'(x) =$	ableiten	Funktion $f(x) = e^{2x}$		...) =
$f'(x) =$	ableiten	Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$	integrie...	
		Funktion $f(x) = e^{1-x}$	integrieren	F...
...(x) =	...bleiten	Funktion $f(x) = e^{2x-3}$	integrieren	$F(x) =$

...nde Übungen: ________

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Raum für Rechnungen und Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn...
selbstorganisi... ...en

Kapite...

Allgemeines Substitutions... ...n

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun

We führun er Integral nung

Gesa nung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)

S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 12: Allgemeines Substitutionsverfahren

Wie Sie im Kapitel "Lineare Substitution" bereits erkannt haben, wi tegra sverfahren bei Funktionen eingesetzt, bei denen man zum Ableiten die Kettenregel we Wie bei der linearen Substitution wird meist auch bei komplizierteren Funktione inne ubstituiert. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen häufig auftretende Standardmetho ei de stitution behandelt werden.

1. Standardverfahren bei der Integration durch S

Die standardmäßige Vorgehensweise be tegra durch Substitutio and der folgenden Funktionen beispielhaft verdeutlicht we Das Subst nsverfahre vor allem dann angewendet werden, wenn im Funktio rm die eitung einer inn en unktion u( ) als Faktor vorkommt.

u(x) = 2 – 3x²

m(x) = –10x(2–

u'(x) =
ste
de 10x =
3

u'(x) kt hier
denn 4x = 2 · 2

n(x) =

(x) = x² + 8

u'(x) = 2x
steckt hier
drin, denn
$x = \frac{1}{2} \cdot 2x$

$\mathbf{p(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x^2 - 1}}}$

u(x) = x² – 1

g(x) = in (x) cos(x)

u(x) sin(x)

u'(x) = cos(x)

Aufgabe 12.1

Erläutern Sie f jeweils erfolgten Rechnungen bzw. ergänzen Sie fehlende Rech

bstitution

$\int -10x(2-3x^2)^4 dx$

Substitution: $u = 2 - 3x^2$

$\frac{du}{dx} = 6x$

du

x muss sich
vollständig
kürzen lassen.

$= \frac{5}{3}\frac{1}{5}u^5$

$x) = \frac{1}{3}(2-3x^2)^5 + c$

b) Unbestimmte Integration der Funktion n(x) durch Substitution

Auch hier wird die innere Funktion

$$N(x)=\int \frac{4x}{(x^2+8)^2}\,dx$$

Substitution: $u=x^2+8$

$$\frac{du}{dx}=2x$$

$$dx=\frac{du}{2x}$$

$$N(u)=\int \frac{4x}{u^2}\,\frac{du}{2x}=2\int \frac{1}{u^2}\,du=-\frac{2}{u}$$

$$N(x)=\text{———}+c$$

c) Bestim[illegible] Integ[illegible]on der Funktion [illegible]x) durch Su[illegible]ution

E[illegible]bt [illegible]chieden[illegible]n Möglichk[illegible]ei der Int[illegible]ation durch Substitution mit den In[illegible]ation[illegible] umzu[illegible]n: Hier wird nur d[illegible] Methode beschrieben, bei der die Grenzen bei[illegible]alten und erst nach d[illegible] Rücksubstitution eingesetzt werden.

[illegible] Sie die [illegible]echnungen:

$$P(x)=\int_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Substitution[illegible]

Die Grenzen 0 und 0,5 sind nur für die Variable x gültig. Das wird nach der Substitution berücksichtigt, [illegible]em für jeden Ausdruck, in dem u [illegible] explizit für die Grenzen [illegible]5 notiert wird.

$$dx=\text{———}$$

$$P(x)=\int_{x=0}^{x=0,5} \frac{x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{-2x}=-\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=0,5}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=0,5} u^{-\frac{1}{2}}\,du=\Big[\text{———}\Big]_{x=0}^{x=0,5}$$

$$P(x)=\Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{0,5}=\text{———}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[illegible]Einsetzen [illegible]n muss [illegible]iert

[illegible]stitution werden die Grenzen [illegible]gewohnt angegeben und eingesetzt.

d) Bestimmte Integration der Funktion q(x) durch Substitution

$$A_0(0,5\pi)=\int_0^{0,5\pi}\sin^2(x)\cos(x)\,dx=\int_0^{0,5\pi}(\sin(x))^2\cos(x)\,dx$$

[illegible]hier k[illegible]s(x), [illegible]ie [illegible]ng der [illegible]er[illegible]tion sin(x), [illegible]ktor im [illegible]tionsterm vor.

Substitution: $u=\sin(x)$

$$\frac{du}{dx}=\text{———}$$

$$dx=\text{———}$$

[illegible]s(x) ka[illegible] man kürze[illegible]

$$A_0(0,5\pi)=\int_{x=0}^{x=0,5\pi} u^2\cos(x)\ldots$$

$$A_0(0,5\pi)=\Big[\frac{1}{\ldots}\ldots=\ldots=\frac{1}{3}$$

2. Kom[illegible]subst[illegible]onsverfahren [illegible]hilfe des Ta[illegible]s lösen

Die [illegible]gration [illegible] Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$ ist kompliziert, muss aber nicht in allen Details [illegible]rchg[illegible]en, da in Tafelwerken bzw. Formelsammlungen die Stammfunktion hierzu angeben [illegible]. Umf[illegible]ungsschritte [illegible]den jedoch [illegible]ndig, wenn die Funktion nicht genau in dieser Form [illegible]geben ist, sondern [illegible] in der Form $f(x)=\frac{1}{a^2x^2+1}$. Anhand dieses Beispiels sollen die grundlegenden Ü[illegible]legungen für den Lösungsweg dargestellt werden. Dieser Lösungsweg kann dann auf ähnliche Integrale übertragen werden.

$$f_t(x)=\frac{1}{t^2x^2+1}=\frac{1}{t^2(x^2\ldots)}=\frac{1}{t^2}\,\frac{1}{(\ldots+\frac{1}{\ldots})}$$

Der Ausdruck muss algebraisch so umgeformt werden, dass der Bruch dem Ausdruck $\frac{1}{x^2+a^2}$ im Tafelwerk entspricht. Hier wird für [illegible]lso $\frac{1}{t^2}$ eingesetzt.

$$\ldots+\frac{1}{t^2})$$

$$F_t(x)=\frac{1}{t^2}(t\,\arctan(tx))+c=\frac{\arctan(tx)}{t}+c$$

[illegible]rk ist als Stammfunktion der A[illegible] [illegible]n$\left(\frac{x}{a}\right)$ angegeben. Man muss nun [illegible] durch $\frac{1}{t}$ ersetzen und wenn möglich vereinfa[illegible]

Ü12.1 Ermitteln Sie die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ auf dem ent...rechen... Weg.

E... ...ungen: ______________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn...
selbstorganisi... ...en

Kapite...

Partielle Integration ...
...uktintegration

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun

We...führung der Integralrechnung

Gesa... ...nung selbstorganisiert erlernen ...2-030-251)

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 13: Partielle Integration oder Produktintegration

1. Voraussetzung für die Anwendung der Formel

Voraussetzung für diese Integrationsvariante ist, dass si... die zu ... Funktion $\int f(x)dx$ aus einem Produkt von zwei Funktionen zusammensetzt.

Beispiel: $f(x) = 4x\sin(x) = \underbrace{4x}_{1.\text{Faktor}} \cdot \sin(x)$

Ein Fa... ...t die Funkt... ...
De... ...nde... Faktor di... Funktion sin(x)

Sie wissen bereits, dass ma... ...unktio... ...h aus dem Produkt zweier ...ktionen zusammensetzen, also in d... Fo... $u(x)\cdot v(x)$ vorl...gen, ...r die Ableitung die Produktregel anwenden muss. Der Integra... von F...ktionen dies... Ty...s liegt eb... ...ls die Produktregel zugrunde.

2. Herleitung der ...

Die P... ...l fü... Ableiten wir... ...erwendung v... f'(x) = (u·v)' in leicht veränderter Form noti...

$$f'(x) = u'v + v'u$$

oder

$$... = u'v + v'u$$

... f'(x)
schreibt man ...
(u·v)'

Entweder nach u'v oder nach ... auflösen. (vgl. Ü13.1)

$$v'u = (u\cdot v)' - u'v$$

Beide Seiten inte...

$$... - \int u'v\,dx$$

$$\boxed{\int v'u\,dx = u\cdot v ...}$$

aus $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = (uv)'$
da $\int f'(x)dx = f(x)$
...: $\int (uv)'dx = uv$

3. Hinweise zur Form...

Das Integ... ...g ist kompliziert, kann aber a... ...s einer Funktion und einer ... ...ellt werden. Wie im folgenden Be... ...tlicht wird, entsteht du... ...u und v' zu diesem Produkt auf der ... der Formel ein ... ...ist als das Ausgangsintegral.

$$\int v'u\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx$$

kompliziertes Integral aus der Aufgabenstellung

Integra... ...er als in de... Aufgabe...

4. Produktintegration am Beispiel f(x) = 4x sin(x)

Wie Sie oben schon erkannt haben, besteht der Funktionsterm aus zw… …toren. … festgelegt, wie man die beiden Faktoren den Funktionen u(x) oder u … v' zuordnet. Man ordnet die Faktoren jedoch standardmäßig so zu, dass man de… Fakto… u … er sich beim Ableiten vereinfacht. In der folgenden Aufgaben werden beid… …glichk… …Zuordnung und das daraus resultierende Ergebnis für die Berechnung des Integrals …igt.

$f(x) = \int … \sin(x)dx$

Auswahlmöglichkeit f… …e Zuor… …ng von u u…

Möglichkei… Möglich…

$\int \underbrace{4x}_{v'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u}$ … $\int \underbrace{4x}_{u} \cdot \underbrace{…}_{v'} dx$

u = sin(x) v = … v = ______

u'= ______ … 4x u'=______ v' = sin(x)

u'… …(x) $u'v = -4\cos(x)$

De… …ck u'v = … ^{2}cos(…) ist kompli…ter als das A…gangsintegral, da sich der Faktor 4x nicht vereinfac…

Möglichkeit 1 verwerfen

Der Ausdruck u'v = – 4cos(x) ist einfacher als das Ausgangsintegral, da sich der Faktor 4x vereinfacht.

Möglichkeit 2 wählen

…hführen der Integration durch …setzen in die Formel

… $\int u'v\,dx$

$\int 4x\sin…$ … $(x) - \int -4\cos(x)dx$

$\int 4x\sin(x)d…$ … $+ 4\int \cos(x)dx$

$F(x) = …$ … $4\sin(x) + c$

Übungen

Ü13.1 Begründen Sie anhand der Beispielaufgabe, dass die oben… …te Fo… $\int v'u\,dx = u \cdot v - \int u'v\,dx$ und die Formel $\int u'v\,dx = u \cdot v - \int v…dx$ …wertig sind.

Ü1… …fahrens der partiellen Integration …cos(2 + x) die Stammfunktion …(2 + x) + 2x sin(2 + x)…

$f(x) = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{co…}_{v'}$

u = 2x v = ______

u'=______ v' = cos(2+x)

…el $\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$

$\int 2x\cos(2+x)dx =$ ______

Ü13.3 Erläutern Sie in Stichworten die Bedeutung einzelnen Zeilen bzw. die erfolg... Umform...gen und Berechnungen. Formulieren Sie, welche Besonderheit hier au...

(1) $F(x) = \int \sin^2(x)\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v'}\,dx$ (1)________________

(2) $u = \sin(x)$ $v =$ ____

$u' =$ ______ $v' = \sin(x)$

$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

$\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) - \int \cos(x)(-\cos ...)\,dx$

$\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos ...$

$\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + \int ... \sin ...$ (4)________________

$\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos ... \int 1dx - \int \sin^2(x ...$

$2\int \sin^2(x)\,dx = -\sin ... \cos(x) ... x$ ...→(5)________________

$\int \sin^2(x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin ... (x) ... \frac{...}{2} ...$

(5)→(6)________________

...→(8)________________

(8)→(9)________________

Besond...

E... ...bungen: ________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn...
selbstorganisi... ...lernen

Kapite...

Beispiele zur Integrat...
...e-Funktionen

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun

We führun er Integral chnung

Kapitel 14: Beispiele zur Integration von e-Funktionen

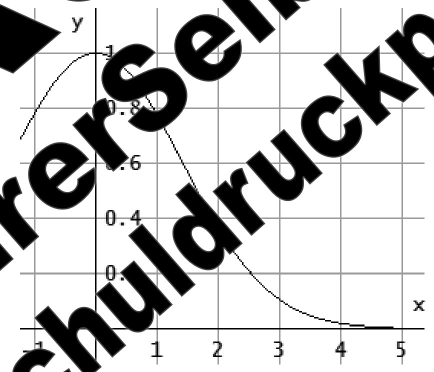
1. Numerische Integration

Für e-Funktionen wie $f(x) = e^{-x^2}$ existiert keine Stammf ion. Da n das Substitutionsverfahren und die partielle Integration nicht anwenden. F kö hier jedoch mit numerischen Verfahren wie der Mittelwertbildung aus Ober- u Unter ode em Trapezverfahren approximiert werden.

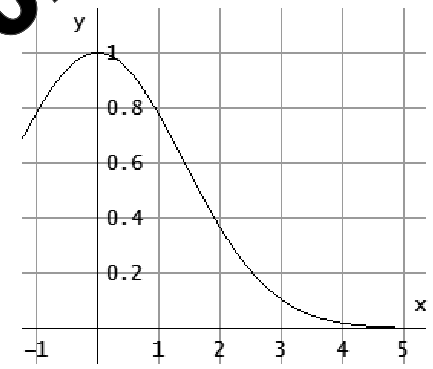
Aufgabe 14.1

Ermitteln Sie einen Näherungs für d Fläche che die Fu ion $f(x) = e$ ntervall [0;4] mit der x-Achse einschließt dem Sie die ei einer enbreite v Δx mithilfe von Ober- und Untersumme ap Kontrollergebnis A ≈ ,76 FE)

Obers e



Untersumme



a) Zeichnen Sie beide Abbildu im e ante en für rsumme w. für die U umm n.

b) Ermitteln Sie die folgend Funktionswerte und berechnen Sie den Näherungswert für die Fläche A .

f(0) = ______

)= __________

f(4)= __________

Obersumm

U

gswert für die Fläche: A ≈ ______________________

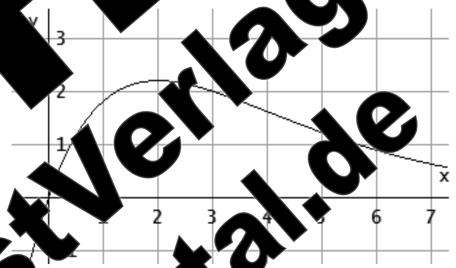
utern Sie, wie man den Nährungswert für A ssern kann:

2. Die Produktintegration bei e-Funktionen mit linearer innerer Funktion

e-Funktionen mit einer linearen Funktion u(x) im Exponenten und eine… in dem x^n vorkommt, werden mithilfe der Produktintegration integriert.

Aufgabe 14.2

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 3xe^{-\frac{1}{2}x}$ m… x-Achse einen endlichen Flächeninhalt von A… 12 FE einschließt.



Zeigen Sie dazu durch Ergänzun… es Rechenwe… ss f(x) die angegebene Stammfunkt… und fügen Sie in der Abbildung eine b… bige… ere Gr… g ein (vgl. uneigentliche Integ… apitel …).

Ermittlung … funk…

$\int \underbrace{3x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{v'} \, dx$

u = 3x ______

u'=______ $v' = e^{-\frac{1}{2}x}$

Formel: $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

$\int 3xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx$ …

______ − ______

$F(x) = -6e^{-\frac{1}{2}x}(x+2)+c$

Berechnung des Flächeninhalts:

$A_0(g) = \int^{g} f(…$ ______

A… ______

3. Ergänzende Betrachtung zur nichtlinearen Substitution bei e-…ktione…

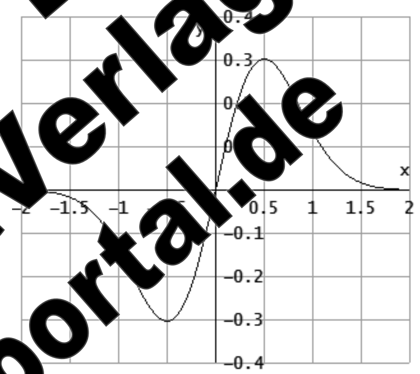
Für e-Funktionen der Form $f(x) = ax^{n-1}e^{bx^n}$ bietet sich das Substit…ns…ren an, da im Vorfaktor die Ableitung des Exponenten enthalten ist.

Aufgabe 14.3

Zeigen Sie, dass die Fläche, welche di… unktion

$f(x) = x…e^{-2x^2}$

im ersten Quadranten mit d… x-A… schließt, einen endlichen Flächeninhalt von … E h…



Ergänzen Sie d… in d… Abbild… e beliebig… obere Grenze g (vgl. … Integrale im Kapitel 10) sowie im Vorschlag für … fehlende Berechnungen und A…

$A_0(…) = \int_0 xe^{-2x^2}\,dx$

Substitution: $u = -2x^2$

$\frac{du}{dx} =$ ___

dx = ___

… ___

$A_0(g) = [\_\_\_\_]_0^g = -\frac{1}{4}\left(e^{-g^2}-1\right)$

$A_0(\infty) = \lim_{g\to\infty} -\frac{1}{4}\left(e^{-g^2}-1\right) =$ ___

…de Übungen: ______

Raum für Rechnungen und Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn... g
selbstorganisi... rt ... ernen

Kapite...

Logarithmische Integr...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Anwendung der Integralrechnun[illegible]

We[illegible]führun[illegible]er Integral[illegible]hnung

Gesa[illegible]hung selbstorganisiert erlernen [illegible]2-030-251)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 15: Logarithmische Integration

Besonders einfach ist die Integration durch Substitution, wenn die [illegible] in die [illegible]$(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden kann. Ergänzen Sie:

Beispiel:

$f(x)=\frac{1}{1+4x}$ Substitution $u=1+4$[illegible]

[illegible] = ___

[illegible] ___

Die Subst[illegible] führt zum Ausd[illegible] $\int\frac{1}{u}du$, w[illegible]s [illegible]ch der Integ[illegible]tion [illegible]$|u|$ ergibt.

$F(x)=\int\frac{1}{u}$ ___ $=\frac{1}{4}$[illegible]

$F(x)=\frac{1}{[illegible]}$[illegible]

$F(x)=\frac{[illegible]}{4}$[illegible]

Betrag[illegible] können [illegible]fa[illegible]en, wen[illegible] ein Ausdru[illegible]steht, [illegible] positiv ist.

Er[illegible]änz[illegible] Sie zum [illegible]rksatz:

[illegible] alle Funktionen, we[illegible] die Form [illegible]$(x)=k\frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden können, auf das [illegible]tegral $k\int$ ___ [illegible] führen, k[illegible]n man das ausführliche Integrationsverfahren umgehen und die Stammfunktion sofort mit d[illegible] Formel $F(x)=$ ___________ ermitteln.

Ü15.1

[illegible]en an. Achten Sie auf Betragsstriche:

[illegible] $(x)=\frac{3}{x-1}$ b) $f(x)=\frac{[illegible]}{\sin([illegible]}$ [illegible] $f(x)=\frac{x}{9x^2+1}$

$F(x)=$ $F(x)=$

d) [illegible] e) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ f) [illegible]

[illegible]$=$ $F(x)=$ $F(x)$[illegible]

[illegible]nde Übungen: ___________

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen