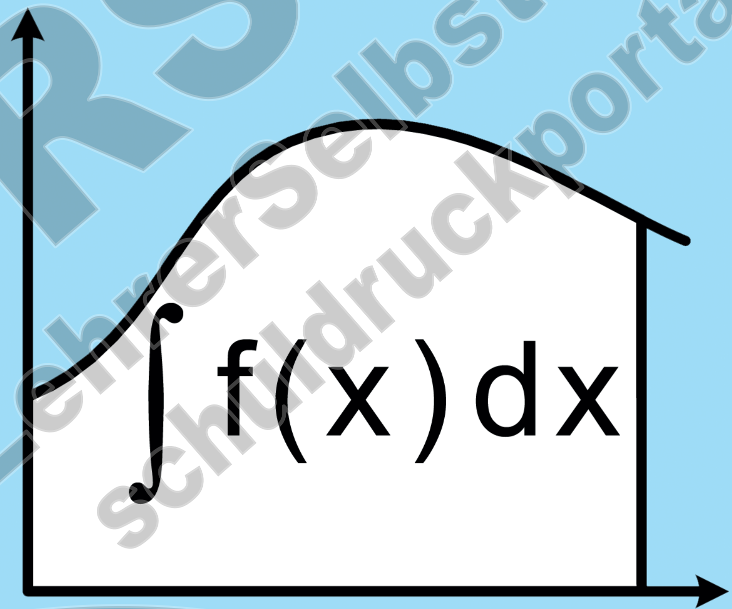
Integralrechnung

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-030-251

LehrerS...
Sok... z (Germany) 2014
w... erlag...
...w.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrech...
selbstorganisi... lernen

Kapit...

Rand- und Flächeninhalts... n

02-030-251

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bed v chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab 77

Kapitel 8 – Rekonstru von Funktioner 81

Kapitel 9 – Vol integ 87

Kapitel 10 – Uneig e Int e 89

We führun er Integral nung

pitel 1 eare Subs 91

K el 12 – Allgemein ubstitutionsve 99

Ka itel 13 – Partie ntegration er roduktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ ion bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa nung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)

St

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

sula Pirkl

Integral nung
selbst ganisiert er en

LEHRER SELBST LAG

51

Stand: 17.03.2015

Lehre
Sok de GmbH, Koblenz (Germany) 2013
ww bstVerlag.de

D druck.de

Vorwort . . . .

Einführung in die Integralrechung

Vorbetrachtungen 3

Kapitel 1:
Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2:
Von der Flächeninhaltsf on zur Stamm on 16

Kapitel 3:
Berechnung chen n nfunktion 25

Kapitel 4:
Flä nter Kurven 49

pitel
Integrale 63

nwendung d tegralrech g

Kapitel 6
Kontext ene Bedeut Flächen 71

Kapi
arameteraufgabe 77

Kapitel 8
Rekonstrukti von Funktionen 81

Kapitel 9
. . . . 87

. . . . 89

Weiterführung der Integralrech

Kapitel 11
Lineare Substitution 91

ionsverfahen 99

Partielle tion oder Produktintegration 103

Kapitel 14
Beispiele zur Integration bei e-Funktion 7

Kapitel 15
Logarithmische Integration . . . .

Vorwort

Die Basis für die Entwicklung des vorliegenden Arbeitshefts zum Thema Integralrechnung bilden meine langjährigen Erfahrungen im Unterricht an Oberstufen von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Vor allem die heterogene Zusammensetzung in Klassen mit Schülerinnen und Schülern, die in ihrem Bildungsgang zuvor die unterschiedlichsten Schulformen besucht haben, stellen hohe und vielschichtige Herausforderun[illegible] die Gestaltung von Unterricht. Das bildungs[illegible]sche Ziel, das Erreichen der Allgemeinen Hochsch[illegible]ife für Schülerinnen und Schüler unabhängig von ih[illegible]isher erreichten Kompetenz zu ermögli[illegible]setzt [illegible] dass die Schülerinnen und Schü[illegible] dort abgehol[illegible] den, wo sie sich befinden. Mein[illegible] Jahre hinweg entwickelten Arbeit[illegible] die [illegible]menbereiche der Oberstufe [illegible]uf ausger[illegible] diesen Bedürfnissen zu ent[illegible] zielte[illegible]isse meiner Schülerinnen u[illegible]ndesabitur Hessen bestätigen, dass der [illegible] Weg erfolg[illegible] ist. Es ist [illegible]lant, [illegible] zu weiteren T[illegible] der Oberstu[illegible] Arb[illegible]fte herauszugeben.

[illegible] mir imm[illegible] wieder aufgefa[illegible], dass viele [illegible] Schüler m[illegible] Komplexitä[illegible] Zu[illegible] der Integ[illegible] Schw[illegible] ten [illegible], und selbst bei einfa[illegible] Flächenbere[illegible] [illegible] Problemen stande[illegible] wurde von mir [illegible] neuen [illegible]sucht, die[illegible] Zugang zu die[illegible] Thema erleicht[illegible]. Als Ergebnis [illegible]ieses, auch von Kollegen und Kolleginnen erprobte Unterrichts[illegible] entstanden, mit dem in der Regel sogar Schülerinnen und Schüler erfolgreich einen Weg zum Thema Integralrechnung finden, die von sich selbst behaupten, Mathematik nicht zu verstehen. Durch den [illegible] besteht die Möglichk[illegible] Verfa[illegible] [illegible] der Forderung nach selbstorganisi[illegible] [illegible] (SOL) Rechnung getragen und die Zielset[illegible] der Kompetenzerweiterung erlangt.

Eigene Erfahrung mit dem Einsatz der Unterlagen zeigen, dass sich häufig bereits schon bei der Bearbeitung der ersten Sei[illegible] Erfolgserlebnisse einstellen, [illegible]llung zum Fach Math[illegible]ssen. Letztendlich [illegible]ülerinnen und Schü[illegible] Kolleginnen und en[illegible], die nicht von mir [illegible], den Anstoß gegeben, zum Thema [illegible] dieses Arbeitsheft in gebundener Form [illegible]ben.

Ursula Ri[illegible]

Komment[illegible] Schül[illegible] Schülern:

Es hat [illegible]ig [illegible]macht, mit Ihren [illegible]lagen z[illegible] habe alles ve[illegible]den, w[illegible] man sich das Thema in ganz kle[illegible]schritt[illegible] selbst erarbeiten konnte und [illegible] sogar die Auf[illegible] im Schulbuch [illegible] Pro[illegible] lösen ko[illegible]

„Ich wa[illegible] schlecht [illegible]thematik und hatte in [illegible]elstufe oft eine Fünf. Seit ich mit [illegible] Unterlagen arbeite, erkenne ich Strukturen, kann im[illegible] wieder zurückblättern und nachlesen, [illegible] Mathematik und schreibe gute Noten."

Zielgruppe

Die Unterlagen beinhalten für die Abiturprüfung in Hessen grundlegende Themen aus dem Bereich der Integralrechung für Grund- und Leistungskurs und können in der gymnasialen Oberstufe sowie an Fachoberschulen und Einrichtungen, in denen die Allgemeine Hochschulreife erworben werden kann, eingesetzt werden. Das Konzept des selbstorganisierten Lernens ermöglicht auch angehenden Studentinnen und Studenten zur Vorbereitung auf einen Studiengang, der Mathematik beinhaltet, ihre Kenntnisse zum Thema Integralrechnung aufzuarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik [illegible] der Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vorzüg[illegible]ignet, da die Unterlagen die Bedürfnisse Ziel[illegible]ngsproblem in Mathematik" voll abdeckt.

Meth[illegible]didaktische Anmerk[illegible]

Die Unterlag[illegible]uf ausgerichtet, dass die Schülerinnen un[illegible]ehend eigenständig und individuell in Lern[illegible] Hause die einzelnen Themen erarbeiten [illegible]lzeiten auch nacharbeiten können. Über [illegible] kann der zeitliche Rahmen so gesteuert [illegible] 20 Stunden für den Abschnitt Einführung in [illegible]chnung nicht überschritten werden. Als Le[illegible]lichen mir die Unte[illegible] mittlerweile die [illegible] auf den Unterricht [illegible]gestalten, dass ich [illegible]d die Rolle eines [illegible]chs wahrnehmen [illegible]end leistungsstar[illegible]erinnen und Sch[illegible]men in der Regel völlig selbstständig erarbeiten, kann ich bei Bedarf individuelle Unterstützung anbieten. Zu Beginn der Stunden erfolgt eine inhaltsorientierte, fachliche Einführung bzw. die gemeinsame Wiederholung zur Festigung der bisher gewonnenen Erkenntnisse und somit die Erweiterung der Kompetenz des Einzelnen.

Die Unterlagen sind so gestaltet, dass Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse vollständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben werden, sodass keine unübersichtlichen losen Blättersammlungen entstehen und alle Informationen ohne Suchaktionen schnell nachgeschlagen werden können. Die vollständigen Lösungen werden als Download zur Verfügung gestellt. Da die Unterlagen ergänzend zum Schulbuch eingesetzt werden, sind an Stellen, an denen beispielsweise weitere Vertiefungen durch Übungsaufgaben gewünscht sind, ... eingefügt, dass Verweise der Lehrerinnen und Lehrer auf Aufgaben im Schulbuch ... notiert werden können. Weiteren Anregungen und Verbesserungswünschen werden gerne auf ... geprüft.

Anmerkungen zu den einzelnen Kapiteln

Einführung in die Integralrechnung: Kapitel ...

Der Teil Einführung in die Integralrechnung stellt ein in sich geschlossenes Unterrichtskonzept dar. Die einzelnen Kapitel bauen aufeinander auf und sollten daher in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. In Kapitel 1 bis 3 werden anhand der Betrachtung von Flächenstücken bei linearen F... des Begriffes In... funktion bi... ordin... d... ... Entkopplung vom Regelwerk für ... nung die oben beschriebene Reduktion ... exität bewirkt.

In Kapitel 4 erfolgt unter Verwendung der nun bereits bekannten Stammfunktion ein einfach nachvollziehbarer und anschaulicher Ü... Integral. Die formale Herleit... $= x^2$ über Grenzwert... ändnis nicht notwen... sprungen werden. A... nalen Charakter d... sind option... können zur Binnen... in heterogenen Lerngruppen herange...

...eichen Betrachtungen an Geraden kos... ...inn der Unterrichtsreihe etwas mehr Zeit ... ...e direkte Einstieg über die Grenzwert... ...er- oder Untersumme. Das gleicht sich jedoch wieder aus, da die Sch... nen und Schüler die Rechenregeln für die Integralrechnung als Ergänzung zu den Regeln für d... gang m... unktion sehen, Begriffe klar ... nen ... Ende von Kapitel 5 ohne Probl... in der Lage sind, die vorgegebenen Standardau... lächenberechnung selbstständig ... sen.

Anwendungen der Integralrechnung: Kapitel 6 bis 10

In ... schnitt Anwendung der Integralrechnung findet sich ... Sammlung ... Arbeitsblättern ... Einführung ... relevante Standardthemen der Integralrechnung. Die Aufgabenstellung in Kapitel 6 knüpft dabei an das Beispiel zur Berechnung der Arbeit aus den Vorbemerkungen an, wobei die Bedeutung von Flächen im Sachzusammenhang einer Aufgabenstellung für weitere Beispiele erläutert wird.

Weiterführende Intergralrechnung: Kapitel 11 bis 15

Die Regel für die lineare Substitution wird zunächst für den Grundkurs intuitiv an Beispielen plausibel gemacht. Als erweiternde Betrachtung erfolgt an einem Beispiel auch die Erarbeitung des ausführlichen Substitutionsverfahrens bei der linearen Substitution. Die Ausführungen zur e-Funktion setzten die Kenntnis von Ableitungsregeln bei der e-Funktion voraus und können daher erst nach der Einführung in die e-Funktionen bearbeitet werden.

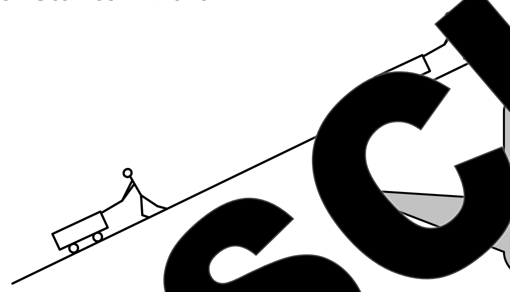
Eine Behandlung des Substitutionsverfahrens auch für nicht lineare innere Funktionen und die partielle In... dürfte dem Leistungskurs vorbehalten sein ... bereitung auf das Studium dienen. In beiden ... die jeweiligen Integrationsverfahren ... dfunktionen mithilfe von Beispielen ... Auf komplizierte Verfahren, die trickre... verlangen oder die mehreren Stufen be..., beide Integrationsverfahren benötigen, ... angen. Die Reihenfolge von Kapitel 12 u... eliebig.

Integrationsverfah... tionen und die logarithmische Integration ... und 15 kann erst nach der Behandlung de... en Ableitungsregeln erfolgen.

Vorbetrachtungen

Wie Sie sicherlich bereits aus dem Physikunterricht der Klasse 11 ... können ... chen zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse eine inhaltliche Bede... Dies soll nun am Beispiel der Berechnung der Arbeit noch einmal kurz dargestellt wer...

1. Arbeit bei konstanter Kraft



... wie weit man den W... nach oben zieht, man benötigt überall die gleiche Kraft.

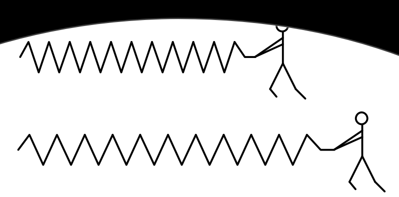
Diesen Sach... man in einem F,s-Diagramm wie folgt darstellen:

... dem Produkt aus Kraft F und Weg s, also „Kraft · Weg = F · s", wird die Arbeit W berechnet. Damit entspricht die Fläche A des Rechtecks der Arbeit W.

$W = F \cdot s$

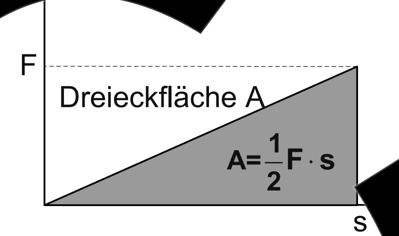
Übrigens ergibt sich aus den Einheiten N (Newton) für die Kraft und m (Meter) für den Weg die Einheit Nm (Newtonmeter) für die Arbeit.

2. Arbeit bei zunehmender Kraft



... weiter die Feder ... wird, desto ... ötigt man.

Bei einer ... F,s-Diagramm wie folgt au...



Die Fläche des ..., entsprechend zu ... oben, die Arbeit ... Ausdehnen der Fe... verrichtet wird, also

$W = \frac{1}{2}F \cdot ...$

3. Arbeit bei sich beliebig ändernder Kraft

In diesem Fall könnte ein F,s-Diagramm so aussehen:

Zielsetzung…

Mi… …rbeitet werden, mit der man … …ann, die in einem Koordinatensy… …n können und die keine … …er als Begrenzung haben.

Bevor jedoch die … in Angriff genommen wird, s… …t noch für das Verständnis d… …de mathematische Vorraussetzu… …holt werden.

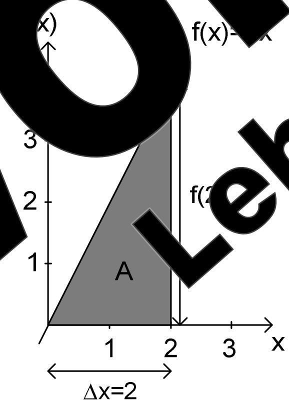
4. Mathematische Voraussetzungen

Abweichend von Ihrem Schulbuch werden in diesem Arbeitspap… …zun… …och keine Flächen betrachtet, bei denen die Begrenzung durch eine Kur… …schrie… …. … notwendigen Erkenntnisse werden hier zunächst anhand von Fläche… …beite… …e man auch mit den Formeln für Rechtecke, Dreiecke und Trapeze, also ele… …targe… …che… …etrachtungen, berechnen kann. Das hat den Vorteil, dass viele Ergebnisse… …ts… …nnten Meth… …n überprüft werden können und somit das Verständnis für d… …neu… …lernen… …en Verfah… … Flächenberechnung erleichtert wird.

Wiederholung von Flächenberechnun… …im Koo… …atensystem…

a) Dreiecke im Koordin… …nsystem

Im folgenden K… …dina… …stem … ein Dreieck … eingezeichnet, d… …s eine Seite auf der x-Achse lieg… …auf der x-A… …e liegend… …Seite wird als G… …seite g gewählt und hat wie bei einem… …eigu… …dreiec… …Länge Δ… …mit Δx = 2 L… (Längeneinheiten). Die Höhe des Dreie… …ier dem Funktion… …wert der Gera… …f(x) = 2x an der Stelle x = 2 also f(2) … 4 LE.



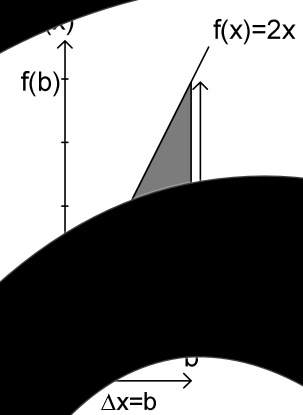
Da hier die Beschriftung mit Zahlenwerten vorgegeben ist, ergibt sich für die Fläche:

Fläche des Dreiecks A:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\Delta x \cdot f(x)}{2} = \frac{2 \cdot f(2)}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\,FE$$

(FE bedeutet Flächeneinheiten)

…Koordinatensystem, dessen Achsen nicht mehr …



… man für f(b) den Wert 2b einsetzt, indem … Satz ergänzen:

f(b) ist der Fu… …der Stelle x = ____ und

dieser wird berec… …n b in die

________________ eingezeichneten

Geraden einsetzt.

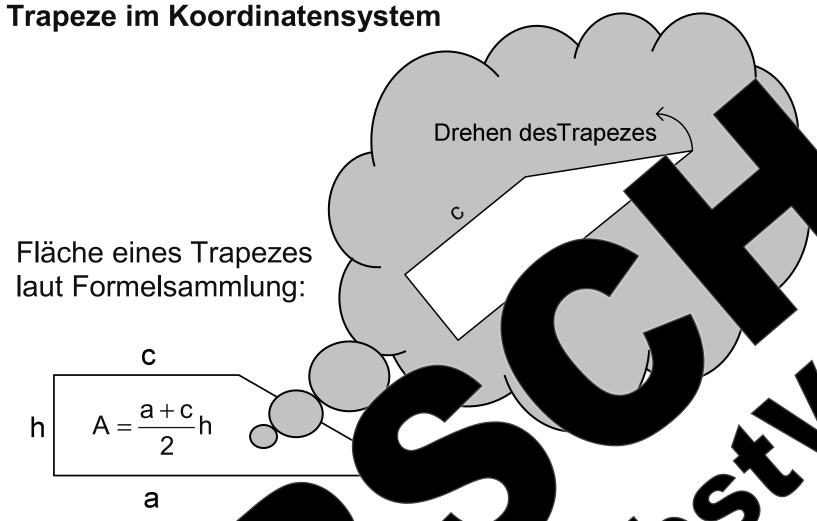
Fläche des Dreiecks A:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\Delta x \cdot f(x)}{2} = \frac{b \cdot f(b)}{2} = \ldots$$

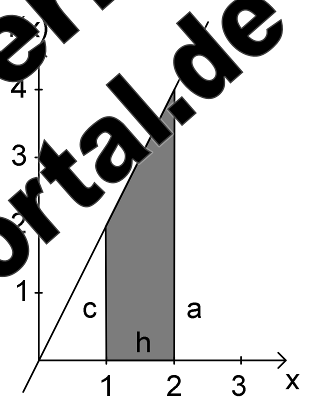
Anmerkung: Wenn Sie für b nun den … …ten Wert 2 einse… …en Sie wie oben für die Fläche den Wert 4 FE.

b) Trapeze im Koordinatensystem

Fläche eines Trapezes laut Formelsammlung:



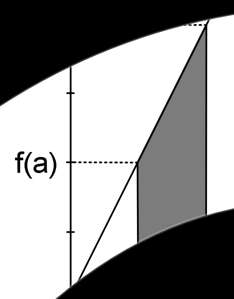
...n 90° ge... ...rapez im Koordi...te...stem.



...igen ... Rechnung, ...ss der Flächeninhalt des Trapezes im abgebildeten Koordinatensystem einen Betrag von A = ... hat.

...für Rechnung:

Überträgt man die Überlegungen für das Dreieck im nicht mit Zahlen skalierten Koordinatensyst... ...ibt sich die folgende Abbildung:



...f, durch entsprechende ...für die Fläche des Trapezes im Ko... ...e Formel

...) Δx

ergibt.

...Begründung:

Kapitel 1: Rand- und Flächeninhaltsfunktion

In diesem Kapitel werden anhand aufeinander aufbauender Aufga... ...llegen... ...ammenhänge hinsichtlich der neuen Methode, Flächen zu berechnen, erarbeitet. ...rsp... Sie daher keine Aufgabe. Sollten Sie sich hinsichtlich Ihrer Lösung nicht si... sein, ...eil Kontrollergebnisse angegeben und Sie finden zum Vergleichen Ergebnisse im...ung.

Neue Bezeichnungen und Schreibweisen

Auf den nun folgenden Seiten wird der Be... Randfunkti... ...rwendet und Flächen nicht nur mit dem Buchstaben A sondern in der Schreibwei... $A_0(b)$ ange... ...Verdeutli... Sie sich die Bedeutung.

- **Randfunktion:**

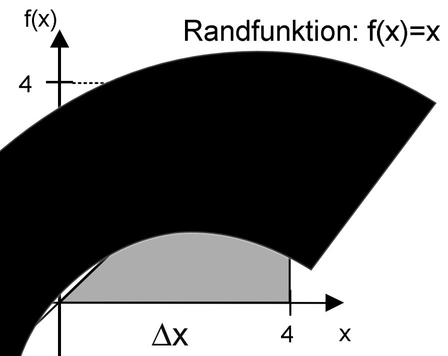
  Die Randfunktion stellt je... ...Begrenzung d... in den Abbildu... dargestellten Flächen dar.

- **Flächenanga...**

  Bish... ...für d... ...äche nur der ...uchstabe A ...wendet. Im Folgenden wird diese Sc...bweis... ...gänz... ...eispielsweise bedeutet $A_0(4)$ [sprich: A von Null bis vier] in der Aufgabe 1..., ...ass die ...che bei x = 0 links ...n der y-Achse, ...r sogenannten **unteren Grenze,** beginnt un... ...chts an... ...senkrechten Gerade x = 4, ...r sogenannten **oberen Grenze,** endet. Erläutern Sie, ...deutung die Angabe $A_0(b)$ h...:

1. Der Begriff der Fläch...

...targeometrischen Mitteln, also mit der ...bekannten Formel für die Fläc... ...timmen Sie dazu die Zahlenwerte ...von Δx und f(4) mithilfe der Angabe zur Ra... ...Abbildung.



Formel Dreiecksfläche:

Grundseite:

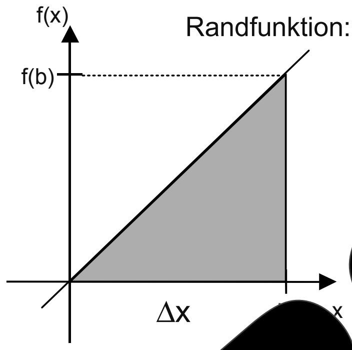
Höhe: h

Fläc... ...schen

$A_0(4) =$

b) Berechnen der Fläche $A_0(b)$, also der Fläche zwischen x = 0 und x = b

Für den rechten Wert der Flächenbegrenzung wird nun anstatt d… Za… 4 wie in Aufgabenteil a) die Variable x = b verwendet. Bestimmen Sie nun …tsp… zum Aufgabenteil a) die Längen Δx sowie f(b) und geben Sie … Fläche … bis b also $A_0(b)$ an.



$A_0(\ ) = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{f(b) \ldots}{2}$

Δx = ________

h = f(b) = ________

Fläche …nen 0 u… $A_0(\ )$ = ________

c) Da … Wert b …ndw… beliebig au… der x-Achse lieg… s…l nun für eine weitere …era…meine…g in der Form… den Fläch…inh…lt $A_0(b) = \frac{1}{2}b^2$ das b durch ein x ersetzt …rden.

… $A_0(b) = \frac{1}{2}b$… …ird daher: $A_0(x) = \frac{1}{2}x^2$

Der Sinn für dieses Ersetzen von b durch x besteht darin, dass man nun für die Berechnung der Fläche eine F… …x abhängig ist. Mit dieser Funktion wird die Fläc… …en Wert für x berechnet.

… Randfunktion f(x)

…äutern Sie durch einen Vergleich mit dem Ergebni… …il a), welche Bedeutung der Zahlenwert hat, der sich durch Einsetzen von 4 in die … $\frac{1}{\ }x^2$ ergibt.

$A_0(4)$=___

e) …ie die Ableitung…funktion …eninhaltsfunktion und …hen Sie das Ergebnis mit der …funktion. Was stellen Sie fest?

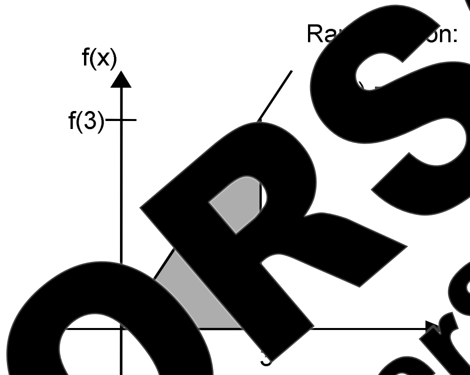
$A_0'(x)$ = _____

Vergleich…

Aufgabe 1.2

Als Randfunktion wird nun die Funktion f(x) = 2x gewählt. Mit d… …funktion … …e entsprechenden Schritte wie in Aufgabe 1.1 durchgeführt werd… …Ac… Sie darauf, dass sich der jeweilige Funktionswert und damit f(x) nun ändert.

a) Berechnen Sie den Zahlenwert der markierten Dreie… …äche… …äutern Sie jedoch zunächst, warum sich als Formel für die Dreiecksfläc… …$A_0(3) = \frac{1}{2}f(3)$… ergibt:



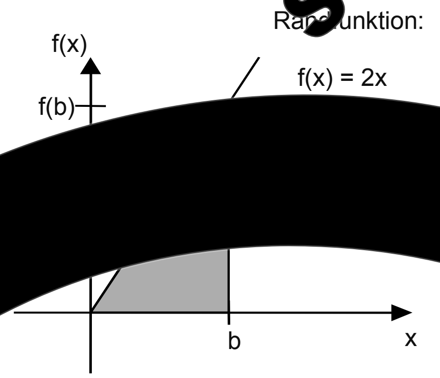
$A_0(3) = \frac{1}{2}f(3) \cdot \Delta x$

Δx = ________

f(3) = ______________

Fläch… zwischen …und 3: $A_0(3)$ = ____________________

Wie in Aufgabe 1.1 …ird nun der fe… Zahlenwert 3 auf der x-Achse durch einen variablen Wert b ersetzt. Berechnen Sie n… mithilfe von Δx und f(b) die Fläche zwischen 0 und b also $A_0(b)$. (Ko…trollergebnis: A_0… …b^2)



$A_0(b) = \frac{1}{2}f(b) \cdot \Delta x$

Δx =__________

f(b) =_________________________

Fläch… 0 und b … = ________________

c) Um auch hi… …hängige Flächeninhaltsfunktio… …lten, soll nun wie in Auf… …n x ersetzt werden. Tausche… …Aufgabe 1.1 c) im … …e b durch die Variable x aus.

…wischen 0 … …iner …bigen Stelle x $A_0(x)$ = _______________

$A_0(x)$ bezeichnet man auch hier als **Fläch… …funktion** zur Ra… …x).

d) Bestimmen Sie die Fläche zwischen 0 und der Stelle x = 3 mithilfe der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem im Aufgabenteil a) berechneten Wert.

$A_0(3) =$ ____________________

Vergleich: ____________________

e) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Randfunktion. Was stellen Sie fest?

x) = ____________________

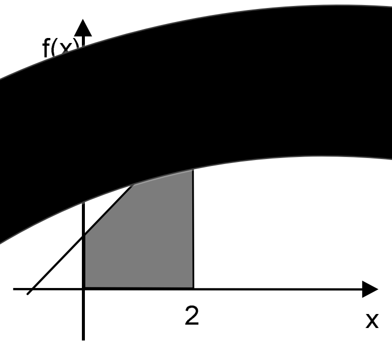
gleich: ____________________

Au ab

Als dfu d nun die tion f(x) = x+ ewählt. Wie Sie aus der Abbildung erkennen, kan n nun nicht mehr mit er einfachen mel für die Dreiecksfläche arbeiten, sondern muss zu echnende Fläc als Trapez be eln. Ermitteln Sie dabei mithilfe der Randfunktion und de en in der bildung die no digen Zahlenwerte. Tragen Sie fehlende Angaben und Bezei nungen in der bildung ei (K ntrollergebnis: $A_0(2)=4$)

a)

Formel Trapezfläche:



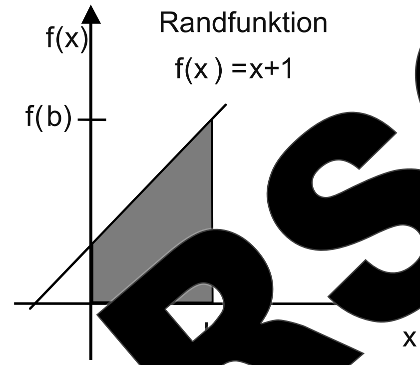
Länge ____________________

Länge Seite c: ____________________

Fläche: $A_0(2) =$ ____________________

b) Wie in den vorangegangenen Aufgaben 1.1 und 1.2 soll au hier, an mit n vorgegebenen Zahlenwert als rechte Grenze, mit einer va Grenz eitet und damit die Fläche zwischen 0 und b, also $A_0(b)$ bestimmt werden. daher die Schritte von Aufgabenteil a) entsprechend geändert durch. (Ko rollerge s: 5b²+b)

For ezi : ____________________



Trape n = ____________________

Länge S a = ____________________

e eite c: c = ____________________

Fläche $A_0(b) =$ ____________________

c) mitteln nun wieder altsfunktion (x) über den Aus ch Variab urch die Variable x.

(x) = ____________________

Bestimme Si die Fläche zwischen x = 0 und de Stelle x = mi hilfe der Flächeninhaltsfunktio d vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil a).

$A_0(2) =$ ____________________

e) Besti

st?

2. Zusammen

a) von Dreiecken und Trapezen im system berechnet. zw. vier Seiten begrenzt. Diese Beg eisen jeweils eschreiben Sie, welche Begrenzungen herigen en dargestel Flächen jeweils links und rechts sowie ob n haben, indem die folgenden Sätze ergänzen.

Alle Flächen haben als linke Begrenzung di Achse.

Alle Flächen haben als rechte Begr ____________________

Alle Flächen werden am oberen Rand durch die ______________________ [illegible]

Alle Flächen werden am unteren Rand durch die ___-Achse beg[illegible]zt.

Information

In späteren Kapiteln werden für die linke un[illegible] Beg[illegible]ung folgen[illegible] Bezeichnungen verwendet:

- Die **linke Begrenzung** einer [illegible] wird als [illegible]**re Grenze** [illegible]zeichnet.
- Die **rechte Begrenzung** ein[illegible]fläche wi[illegible] als [illegible]**ere Gren**[illegible] bezeichnet.

b) In allen Beispielen der vora[illegible] Aufgaben wurd[illegible] als Randfunkt[illegible] eine lineare Funktion f(x) verwe[illegible] Formulieren S[illegible] anhand Ihre[illegible]gebnisse Z[illegible]enhänge zwischen der **Flächeninha**[illegible]**n** A_0[illegible]er **Ra**[illegible]**funktion f(x)**, ind[illegible]m Sie den folgenden Satz vervollständig[illegible]

Wenn di[illegible]lächen[illegible]tsfunkt[illegible]n bekan[illegible] is[illegible] erhält man die [illegible]andfunktion, indem man die

Flä[illegible]inhalts[illegible]tion ______________________.

[illegible]enn [illegible] Ran[illegible]ktion bekan[illegible], erhält man die Flächeninhaltsfunktion, indem man die

[illegible]dfunktion ____.

Sie haben sic[illegible]ich erkannt, dass man aus der Randfunktion die Flächeninhaltsfunktion prinzipiell mit Hilfe einer Umkehrung der Ableitung ermitteln kann. Jedoch fällt es Ihnen schwer, für diese Rechnung einen passenden Begriff zu finden. Vielleicht ist Ihnen dabei spontan [illegible]wärts Ableiten“ in den Sinn gekom- [illegible]t den rechnerischen Ablauf zu [illegible]t zulässig. Sie sehen, [illegible]inzuführen. Lesen Sie dazu die folgende Definition.

c) Der Begriff „**Integri**[illegible]

M[illegible]

[illegible]as Funkt[illegible]rms einer Flächeninhaltsfunktion aus de[illegible]erm einer [illegible] Randfunktion wird als **Integrieren** bezeichnet.

Übungen

Ü1.1 Bestimmen Sie zu der gegebenen Flächeninhaltsfunktion A_0[illegible]gehö[illegible]funktion f(x):

a) $A_0(x) = 2x - 2$ ⇒ f(x)=______________________

b) $A_0(x) = x^2 - 5$ ⇒ f(x)=______________________

c) $A_0(x) = 0{,}5x^2 + x$ ⇒ f(x)=______________________

d) $A_0(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ⇒ f(x)=______________________

e) $A_0(x) = 0{,}7x^2 - 0{,}1$[illegible] ⇒ f(x)=______________________

f) $A_0(x) = ax^2 +$ [illegible] $+ c$ ⇒ f(x)=______________________

g) $A_0(x)$ [illegible] $x^2 +$ [illegible] $+ c$ ⇒ f(x)=______________________

[illegible] ⇒ f(x)=______________________

Ü[illegible] B[illegible]n Sie zu d[illegible]gebenen Ra[illegible]ktion f(x) die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$.

a) $f(x) = 2$ ⇒ $A_0(x)=$ ______________________

b) $f(x) = 0{,}2$[illegible] ⇒ $A_0(x)=$ ______________________

c) $f(x) = x + 2$ ⇒ $A_0(x)=$ ______________________

d) $f(x) = 2x + 1$ ⇒ $A_0(x)=$ ______________________

[illegible]

[illegible]

g) $f(x) = 2rx + 4s$ ⇒ $A_0(x)=$ ______________________

h) $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$ ⇒ $A_0(x)=$ ______________________

Ü1.3 Berechnen von Flächen

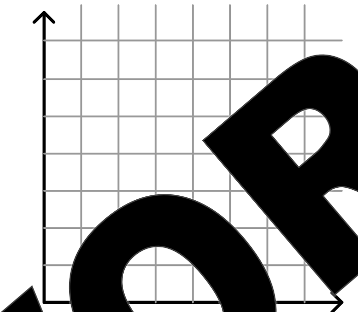
a) Skizzieren Sie die angegebenen Geraden in den jeweils vorgeg... Koor... ...emen. Wählen Sie dabei sinnvolle Skalierungen.

b) Markieren Sie jeweils für die angegebene rechte bzw. ob... Gren... die ...chnende Fläche farbig.

c) Berechnen Sie die Fläche mithilfe der Flächenin...funk... ...(x).

d) Berechnen Sie zur Kontrolle die markierte Fläche ... m... elementa...metrischer Betrachtungen (Rechteck, Dreieck bzw. T... und ...leiche... Sie die E...

Randfunktion f(x) = 2 rechte bz... ...ere ...ze x = 2

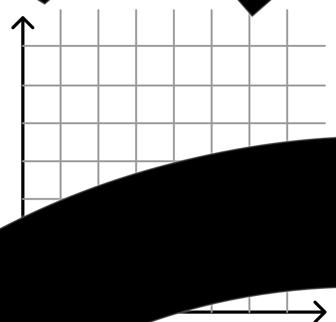


...

Kontrollrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

$A_{Rechte...}$= ______________

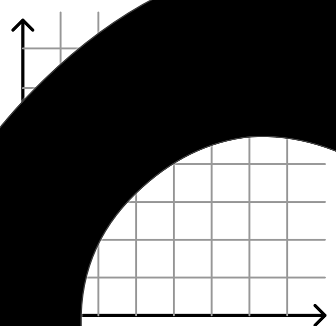
...funktion g(x) = 2 re... Grenze x = 3



$A_0(3)$ = ________________

...rechnung über elementargeometrische Betrachtung:

Randfunktion h(x) = 0,25x rechte Grenze x = 2

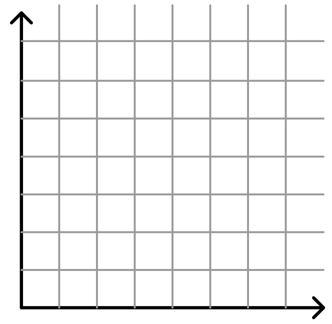


...) = ________________

Kontrollrechnung über elementargeome... ...chtung:

$A_{Dreieck}$=________________

Randfunktion k(x) = 0,25x rechte Grenze x = 3

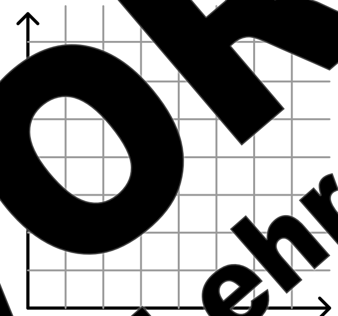


A_0(___) = ________________

Kontrollrec... ...geometrische Betrachtung:

A_D...

Randfunkti... ...x+2 ...te Gr...

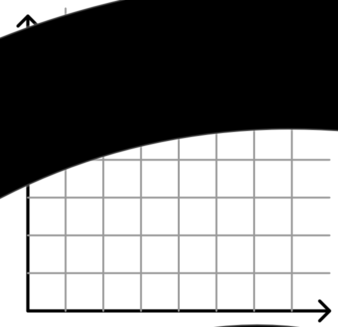


A... = ________________

...ontrollrech... über elementargeometrische Betrachtung:

$A_{Trape...}$ ________________

Randfunktion n(x) = x+2 rechte Grenze x = 2,5



____

Kont... ...entargeometrische Betrachtung:

A_{Trapez}= ________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung
selbstorganisiert lernen

Kapitel 2

Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgaben 77

Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen 81

Kapitel 9 – Volumenintegrale 87

Kapitel 10 – Uneigentliche Integrale 89

Weiterführung der Integralrechnung

Kapitel 11 – Lineare Substitution 91

Kapitel 12 – Allgemeines Substitutionsverfahren 99

Kapitel 13 – Partielle Integration oder Produktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa... ...nung selbstorganisiert erlernen ...2-030-251)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Ü1.4 Beschreiben Sie unter Verwendung der Ausdrücke
- Randfunktion
- senkrechte Gerade
- x-Achse
- y-Achse
- rechte bzw. obere Grenze
- linke bzw. untere Grenze
- unterer Rand
- oberer Rand

wie die in Aufgabe Ü1.3 berechneten Fläch... enzt...

Ü1.5 F... uli... Sie, ... he neuen E... nisse S... nsichtlich der Berechnung von Flächen in Au... be ... onnen ... . erwenden S... er Ihrer Erklärung den Begriff „Integrieren“.

Ü... ... Rechnung sich hint... “ verbirgt.

Kapitel 2: Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunkti...

In der nun folgenden Aufgabe soll die Berechnung von Flächen, di... cht an ... chse beginnen, untersucht werden.

1. Flächen, die nicht an der y-Achse beginnen

Aufgabe 2.1

Gegeben ist die Randfunktion f(x) = x+1

a) Bestimmen Sie die Flächeninhal... ktion $A_0(x)$ s... die weite... gegebenen Flächen. Berechnen Sie für die Randfunk... f mithil... r Flächeninhal... funktion $A_{..}(x)$ ... folgenden Flächen:

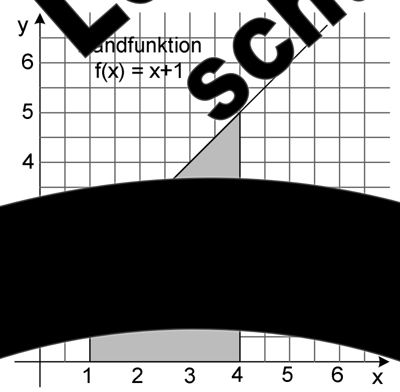
$A_0(x)$ = ______

$A_0(1)$ = ______

$A_0(4)$ = ______

b) ... hilfe d... rgebnisse au... ufgabe a) sol... un die in den folgenden Aufgaben i) bis iv) grau ... Flächen be... chnet werde...

i) Erläutern ... en dargeste... Ansatz, die Rechenschritte und das Ergebnis.



Grenzen für die Fläche:

linke Grenze: a = _____

rechte Grenze: b = _____

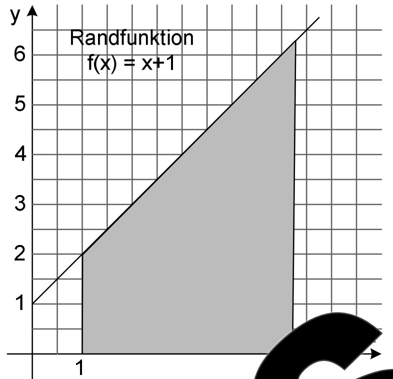
Erläuteru...

(1) $A_1(4) = A_0(4) - A_0(1)$ (1)______

(2) $A_1(4) = 12 - 1{,}5$ (2)______

(3) $A_1(4) = 10{,}5$ FE

ii) Erläutern Sie den dargestellten Ansatz, die Rechenschritte und das Ergebnis.



Grenzen für die Fläche:

linke Grenze: ___

rechte Grenze: b = ___

Erläuterung:

(1) $A_1(x) = \ldots (1)$ (1) ___

___

___

(2) $A_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1{,}5$ (2) ___

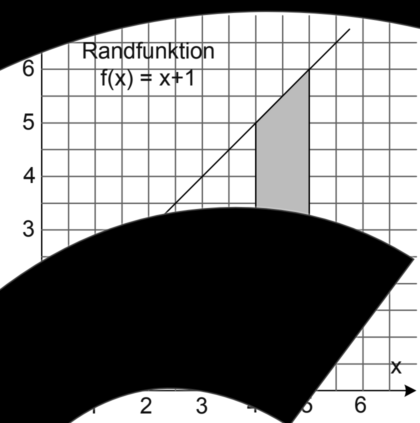
___

(3) $A_1'(x) = x+1$ (3) ___

___

iii) Berechnen ... (5) entsprechend zu den Zeilen (1) bis (3) dieser ...

Grenzen für die Fläche:



linke Grenze: ___

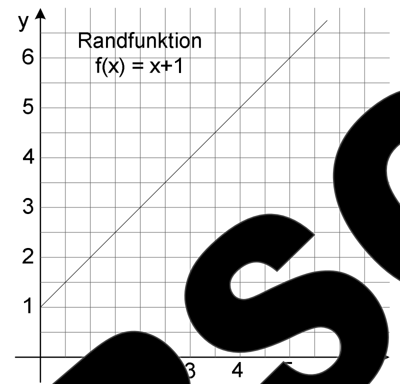
rechte Grenze: ___

$A_4(5) = A\_(\_\_) - A\_(\_\_)$

$A_4(5) =$ ___

$A_4(5) =$ ___

iv) Übertragen Sie die Überlegungen zur Berechnung der Fläche A... auf den allgemeinen Fall, bei dem die obere Grenze den beliebigen Wert ... annimmt und ...ren Sie eine beliebige passende Fläche.



$A_4(x) = A\_(\_\_) - A\_(\_\_)$

$A_4(x) =$ ___

Für die erste Ableitung von $A_4(x)$ gilt dann:

$A_4'(x) =$ ___

Aufgabe ...

a) Vergleichen Sie die Flächeninhaltsfunktionen $A_0(x)$, $A_1(x)$ und $A_4(x)$, indem Sie den folgenden Satz vervollständigen:

Die Summanden ___ sind in allen drei Flächeninhaltsfunktionen vorhanden. Die Flächeninhaltsfunktionen unterscheiden sich durch ___

___

b) Vergleichen Sie die erste Ableitung der Flächeninhaltsfunktionen $A_0'(x)$, $A_1'(x)$ und $A_4'(x)$. Was stellen Sie fest?

___

Aufgabe 2.3

Bilden Sie für die Funktion $g(x)=2x+3$ die folgenden Flächeninhaltsfunktionen: $A_0(x)$, $A_2(x)$ und $A_3(x)$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich $A_2(x)$ bzw. $A_3(x)$ durch die Konstanten –10 bzw. –18 von $A_0(x)$ unterscheiden.

Aufgabe 2.4

Gegeben ist die Randfunktion f(x) = 2x +3.

a) Erläutern Sie die einzelnen Schritte der folgenden Rech… bzw. …stlegungen:

(1) $A_0(x) = x^2 + 3x$ (1) ______________________

(2) $A_a(x) = A_0(x) - A_0(a)$ (2) ______________________

(3) $A_a(x) = x^2 + 3x - (a^2 + …$ (3) ______________________

(4) c = −… + 3a (4) ______________________

(5) $A_a(x) = x^2 + 3x + …$ (5) ______________________

(6) $A_a'(x) = 2…$ (6) ______________________

b) …Sie, bezogen auf die Wahl der linken … chied zwischen den …cheninhaltsfunktionen $A_0(x)$ und $A_a(x)$, indem Sie …tze vervollständigen:

Die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ wird durch Integration der ____________ f(x) berechnet … e c. Wenn man eine Fläche … eninhaltsfunktion $A_0(x)$ … e an der linken bzw. unteren Grenz… also an der … ie weiter… cheninhaltsfunktionen für Flächen, die d… dfunktion …enzt werden, aber nicht an der unteren Grenze x = 0 beginnen, u… n sich von … nur durch eine ______________.

2. Verallgemeinerungen, Definitionen und Begriffe

Wir haben in den vorangegangenen Aufgaben folgendes festg…

- Zu jeder Randfunktion kann man durch Integration …terschi…ch… ninhaltsfunktionen ermitteln, die sich jedoch nur durch eine Konstante …tersch…
- Wenn man eine beliebige Flächeninhaltsfu… A… et, …tfällt die Konstante c und man erhält die Randfunktion, welche den oberen R… er Fl… darstellt.

Aus diesem Zusammenhang wird nu… r wichti… Begri… "Stamm…nktion" abgel…t:

Da f(x) durch Ab…ten aus $A_a(x)$ ent…eht bzw. abstamm…, b…eichnet ma… Flächeninhalts…ktion $A_a(x)$ a… als **Stamm…ion F(x)** zur R…dfunktion f(x).

…: …diffe…zierbare F…ion **F(x)**, für d… **F…(x) = f(x)** gilt, wird als **Stammfunktion** vo…) bezeichnet.

Eine Stammfunkti… wird mit dem … Namen der R…unktion geh…en großen …chstaben bezei… Bsp.: Die Stamm…nktion von … wird mit G(x) bezeichnet.

Erläutern Si… unter dem Begriff Stammfunktion versteht.

____

____

____

Geben Sie an, wie man aus der Randfunktion f(x) die Fläche… n $A_0(x)$ erhält.

____

____

…e an, wie man aus der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ eine allge… mmfunktion F(x) …dfunktion f(x) erhält.

____

____

3. Ergänzende Betrachtungen zur Konstanten c

Verdeutlichen Sie sich das nebenstehende Ablaufdiagramm und bearbeiten Sie dazu die folgende... Aufgaben:

a) Beg... warum man zu den beiden Stammfunktionen G(x) eindeutig die zugehörige Ra...nktion ... berechnen kann, jedoch aus der Randfunktion g(x) nur die allgemeine bzw. eine ... bestimmte Stammfunktion ermitteln kann.

____

____

____

____

b) Man berechnet ... f(x) = ax + b die Stammfunktion. Begründen Sie, waru... $F(x) = 0{,}5ax^2 + bx$ angibt sondern noch eine ... c ergibt.

____

____

c) Für den Fall c = 0 lautet eine Stammfunktion $G(x) = 4x^2 + 5x$. ... x den Wert 10 in diese Funktion ei... man G(10) = 450. Interpretieren ...cksichtigung, dass für A... ² + 5x, die anschauliche Be... s Wertes.

____

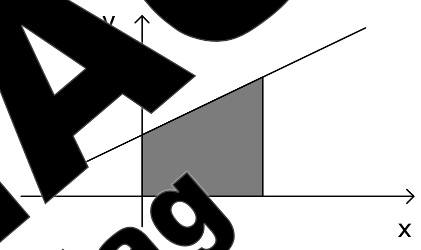
____

...n Sie den Merksatz:

...n man einen positiven Zahlenwert b i... mfunktion der ...
... = nx² + mx einsetzt, beginnt die zu... läche an der ___

Übungen

Ü2.1 In der Abbildung nebenan ist die Funktion h(x) = 0,5x + 1 skizziert. In die unten angegebenen Stammfunktionen wird der Wert 2 eingesetzt. Entscheiden Sie, mit welcher d... angegebenen Stammfunktionen die markierte Fläche berechnet wird:



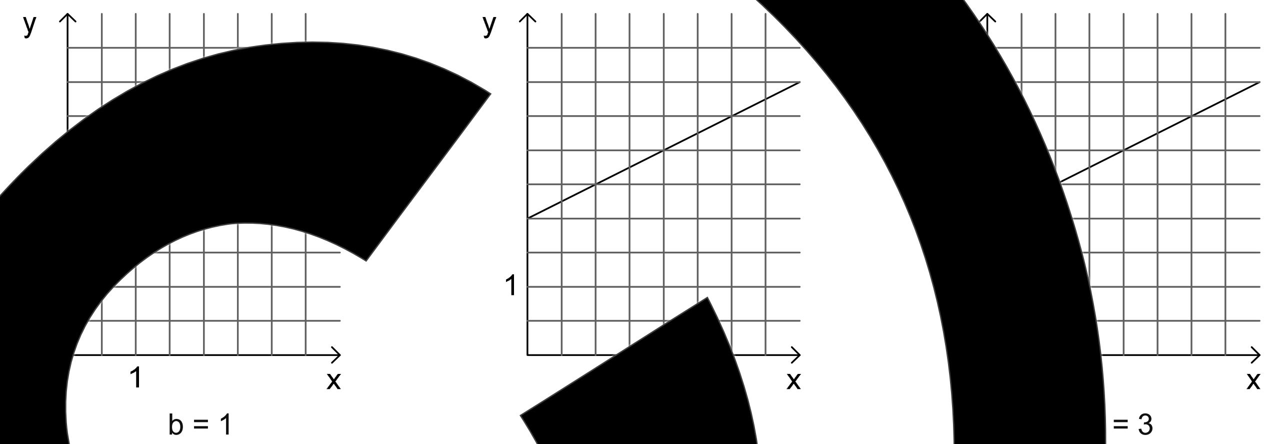
❍ $H(x) = 0{,}25x^2 + x + 1$
❍ $H(x) = 0{,}25x^2 + x$
❍ $H(x) = 0{,}25x^2 + x – 1$

Ü2.2 Berechnen Sie zur gege... Randfu... eine Stammfunktion F(x):

a) f(x) = x + 2 F(x) = ______________________
b) f(x) = 3 F(x) = ______________________
c) ...x – ... F... ______________________
d) f(x) = –... F(x) = ______________________
e) f... F(x) = ______________________
f) f(x) = 2x + 5 F... ______________________
g) f(x) = –10x F(x) = ______________________
h) f(x) = 0,25x + 0,5 F(x) = ______________________
i) f(x) = ... ______________________

____

...dfunktion f(x) = 0,5x + 2 ergibt sic... funktion $F(x) = 0{,}25x^2 + 2x$. Setzt man in die Stammfunktion für x einen Wert b ei... ine Fläche. Skizzieren Sie diese Fläche ohne Rechnung für die jeweils gegebenen ... Diagrammen unten.



Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn…g
selbstorganisi…t …lernen

Kapit…

Berechnung von Fläc…
…r Stammfunktio…

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion 25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede…ung v… …chen 71
Kapitel 7 – Parameteraufgab… 77
Kapitel 8 – Rekonstru… von Funktionen 81
Kapitel 9 – Vol… …integ… 87
Kapitel 10 – Uneig… …e Int…e 89

We… …führun… …er Integral…chnung

K…itel 1… – …eare Subs…ion 91
K…tel 12 – Allgemein… Substitutionsverfahren 99
Kapitel 13 – Partie… Integration …er Produktintegration 103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integ…ion bei e-Funktionen 107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa… …nung selbstorganisiert erlernen …2-030-251)
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 3: Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion

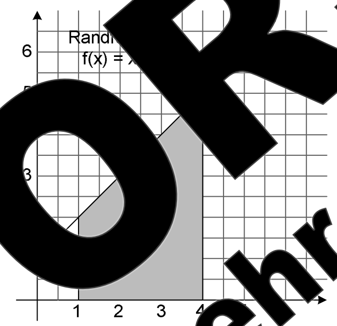
Bisher wurden die Flächen zwischen einer Geraden und der x-Ach… …fe der …inhaltsfunktion $A_a(x)$ berechnet. Nun soll das Verfahren verallgemeinert werden, in… d… …mfunktion zur Berechnung von Flächen herangezogen wird.

1. Grundlegende Betrachtung zur Flächenbere… …un… … Stammfunkti…n

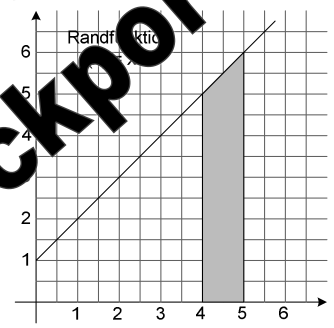
Zunächst soll im folgenden Beispiel ge… …rden, … man mit einer S… …mfunktion eine Fläche berechnen kann und wie die Konstan… …in die Rech… …einfließt. E… …n bzw. ergänzen Sie dazu die Angaben unten.

Rückblick:

Im Kapitel 2 wurden für d… … …n $f(x) = x + 1$ m… …lfe der Flächen…altsfunktion $A_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ di… …nden Fläche… …erechnet:



$A_1(4)$ = 10,5 FE



$A_4(5)$ = 5,5 FE

Nun sollen diese Flächen …er Anwendung der Stammfunktion erneut berechnet und die bereits bekannten Ergebnisse als Vergleich herangezogen werden.

F(x) =	…		Ermitteln der allgemeinen Stammfunktion mit Konstante c aus der Flächeninhaltsfunktion
…	…) + c =	0 + 0 + c = c	… der Stammfunktion für x = ____
F(1) =	$A_0(1)$ + c =	0,5 + 1+ c = 1,5 + c	Bere… …mfunktion für x = ____
F(4) =	…	____ + c	Berechnen d… …tion für x = ____
…	…) + c =	…5 + c = __________	Berechnen der St… … für x = ____

Berechnen Sie nun die folgenden Differenzen (beachten Sie, dass bei der Su... ion vo... mmen Klammern gesetzt werden müssen) und vergleichen Sie die Ergebnis... mit den ... ück... oben dargestellten Flächen.

a) F(4) – F(1) =

b) F(5) – F(4) =

c) Vergleich:

Die über die Bildung ... Differenzen F... – F(1) und ... – F(4) bere... n Zahlenwerte sind

______________ mit den Za... ten für die ... berechneten Fläche.

Fol... ng aus ... n Ve... eich:

...it d... ifferen... (4) – F(1) ... et man für die Randfunktion f(x) die Fläche zwischen

__________ und mit de... ifferenz F(5) ... berechnet man für die Randfunktion f(x) die

... e zwische... __________

d) Was stellen Sie ... d b) bezüglich der Konstanten fest?

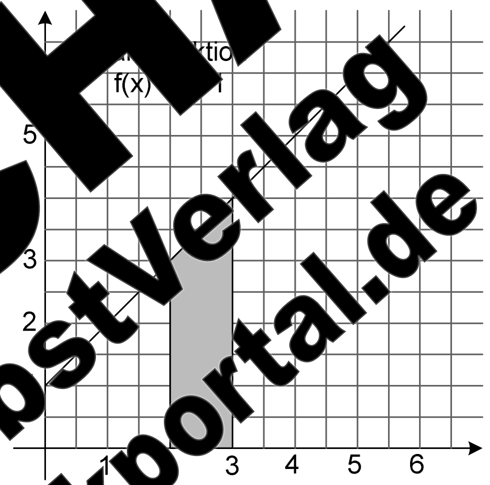
Folgerung aus der Feststellung:

> **Merke**
>
> **Die ... iner Stammfunktion F(x). Da d... bei der B... chen jeweils gegebener linker bzw... d rechter ... keine Rolle spielt, kann man sie bei ... gen.**

2. Vereinbarungen zur Schreibweise

Bei der Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion soll di... Schreibweise vereinbart werden:

Für die Randfunktion f(x) = x + 1 gilt bei ... Berechnung der Fläche zwischen der ... eren Grenze x = 2 und der oberen Grenze ... 3.



...ngabe, ...he Fläche ...echne... d, in der ... schreibweis... für d... lächeninhalts-funktion.

$$A_2(3) = \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3 = \left(\frac{1}{2}\cdot 3^2+3\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\right) = 7{,}5 - 4 = 3{,}5\text{FE}$$

Zuerst wird 3 als ...re Grenze in die ...ktion ... F(3)

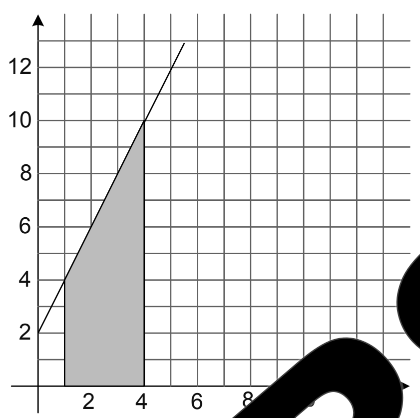
Danach wird 2 als untere Grenze in die Stammfunktion eingesetzt, d.h. F(2) wird berechnet.

Allgemein...

> **...funktion verläuft im Intervall [a;b] oberhalb der x-Achse ... ßt mit der ...en x = a als untere Grenze und der Geraden x = b als ober... owie der ...hse die Fläche $A_a(b)$ ein. Man schreibt:**
>
> **$A_a(b) = [$ ... $) – F(a)$**

3. Beispiel für die Berechnung einer Fläche mithilfe der Stammfunkt...:

Gegeben ist die Funktion f(x) = 2x + 2. Zu berechnen ist die Fläche A... ...ie Fläche zwischen der unteren Grenze x = 1 und der oberen Grenze x = 4.



Randfunktion: ... ...: 2x + 2

Stammfunktio... ...): ...F(x) = x² + ...x ...c

$A ... = \left[x^2 + 2x\right]_1^4$

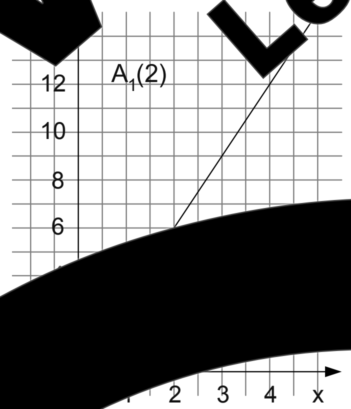
$... 4^2 + 2 ... (1^2 + 2 \cdot 1)$

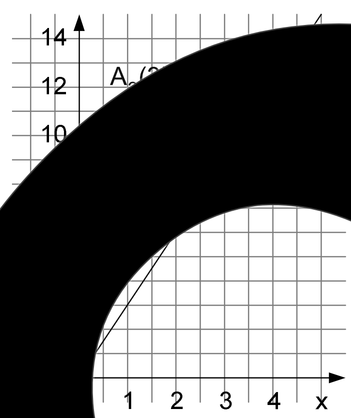
$... 3 = 21$ FE

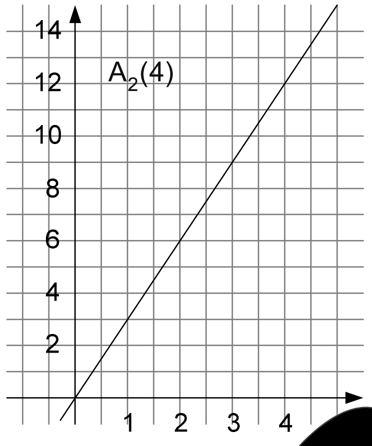
Übungen

Ü3.1 Berec... ...n von F... ...en

a) ...eg... ist di... ...andfunktion f(x... ...3x. Mark... ...e in den folgenden Koordinatensystemen, ...tspr... ...n Beispiel o... ...n, jeweils di... Fl... ...he $A_1(2)$, $A_2(3)$ und $A_2(4)$ und berechnen Sie ...eils die Maßzahl in d... E... ...heit FE.







b) Berechnen Sie jewei... ...(2), $A_2(3)$ und ... ...(4) für die fol... ...en Funktionen:

i) f(x) ... ...x + 2 ... ...rgebnis... ...ontrolle: ... FE, 12 FE, 28 FE

ii) f(x) ... 2 FE, 2 FE, 4 FE

... $\frac{...}{2}$ ... 1,75 FE, 2,25 FE, 5 FE

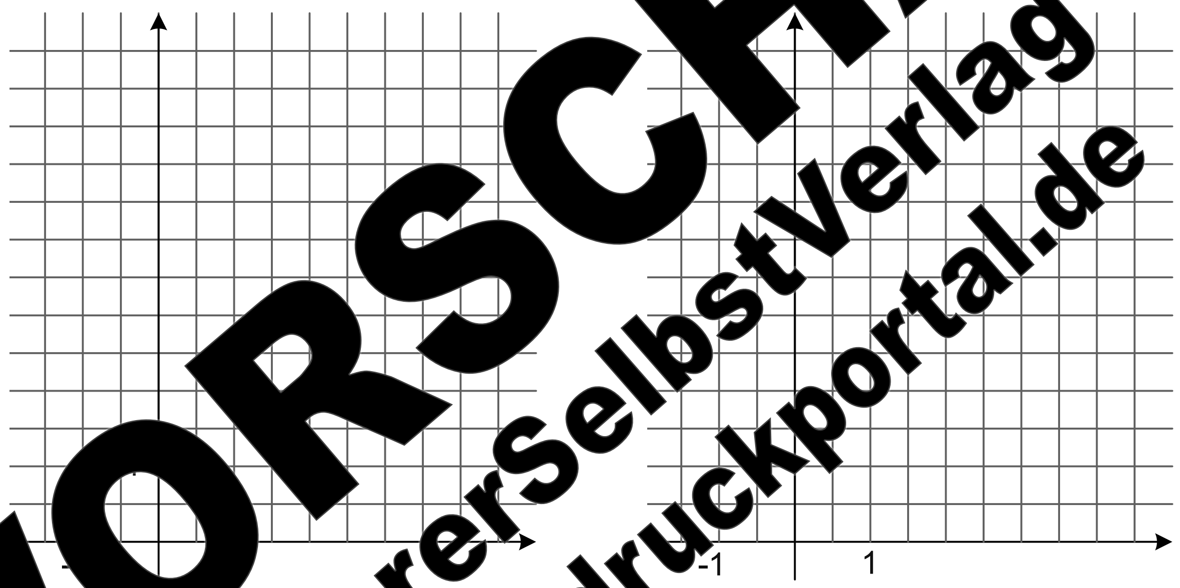
R... für Re... ...ungen:

...) zu ii) zu iii)

4. Berechnung von Flächen links und rechts der y-Achse mithilfe de… Stamm…tion

Gegeben sind die beiden Funktionen f(x) = 2x + 2 und g(x) = x + 1,5.

a) Zeichnen Sie die Funktion jeweils in eines der gegebene… …ordin… …steme ein.



b) …itteln … die Stamm…ionen

…) = 2x + 2 … folgt: F… x² + 2x + c

Für g(x) = x +1,5 folgt: G(x) = ______________

c) Zeichnen Sie für die Funktion f(x) die untere Grenze x = –1 und die obere Grenze x = 2 deutlich als senkrechte Geraden ein.
Zeichnen … Grenze x = –1 und die obere Grenze x = 4 eb…

…tion und überprüfen Sie die …, indem Sie jeweils die Flächen… Dreiecke auch über …ntargeometrische Betrachtungen bestimm…

Berechnung für die Randfunktion f(x):

$A_{-1}(0) = [F(x)]_{-1}^{0} = [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]_{-1}^{0} =$ ______________

elem…: $A_{Dreieck} = \frac{g \cdot h}{2} =$ ______________

…$[F(x)]_{-1}^{2} = [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]_{-1}^{2} =$ ______________

…ntargeometrisch zum Vergleich: A…

Berechnung für die Randfunktion g(x):

$A_{-1}(0) = [G(x)]_{-1}^{0} = [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]_{-1}^{0} =$ ______________

elementargeometrisch zum Vergleich: $A_{Trapez} = \frac{(a + …}{2}$ … = ______________

$A_{-1}(4) = [G(x)]_{-1}^{4} = [$______ … = ______________

elementargeometrisch… …Vergleic… = $\frac{(a+c)}{…}$ … ______________

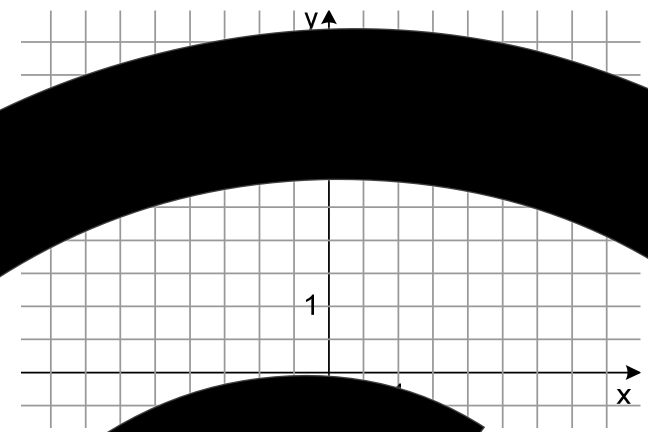
e) Vergleich… …Ergeb… …nd ergän… …ie den folgen…en Satz:

Bei Verwe… …mfunktion … Berechnung … Fläche zwischen der …tion … der x-Achse … es keine Ro… ______________
____

Üb…en

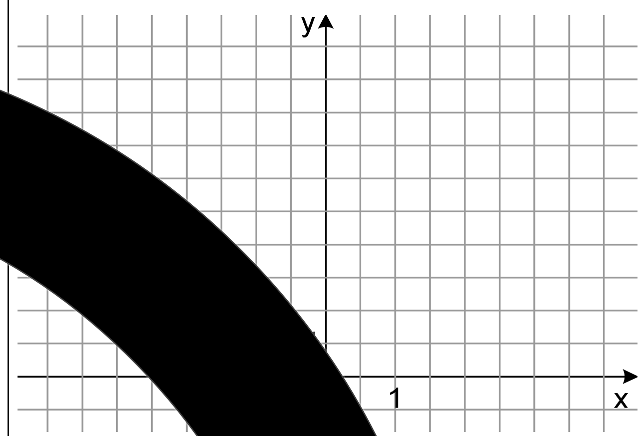
…ichnen Sie die … Gerade… …nd berechnen Sie mithilfe der entsprechenden …mmfunktio…en jeweils die F… zwischen der unteren Grenze a = 2 und der oberen Grenze b = 3 sowie zw…chen a = –… und b = 1. Markieren Sie jeweils die zu bestimmenden Flächen.

a) f(x) = x + 2



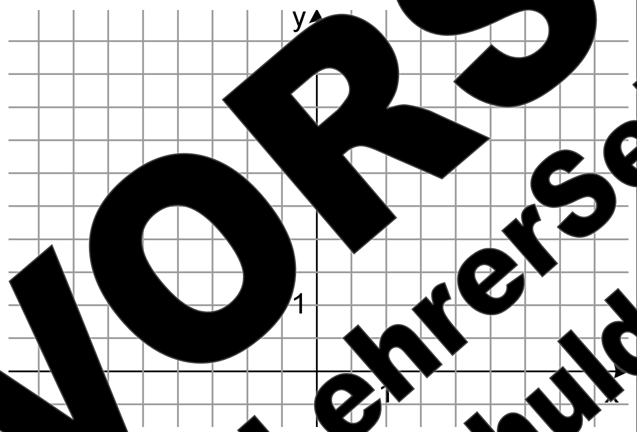
… ______________

b) f(x) = 2x + 5



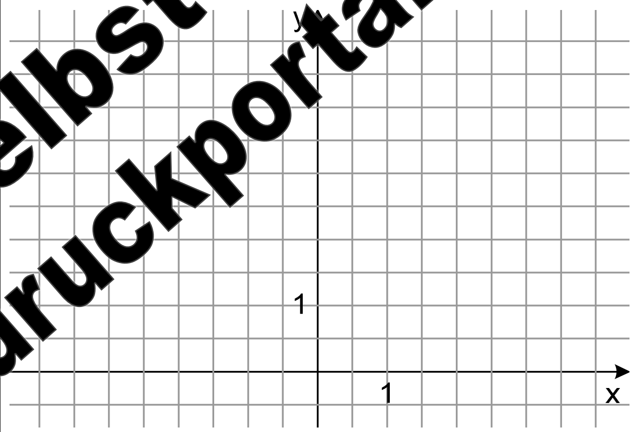
Stammfunktion: F… ______________

c) $f(x) = 0{,}25x + 0{,}5$



Stammfunktion: F(x) = ___________________

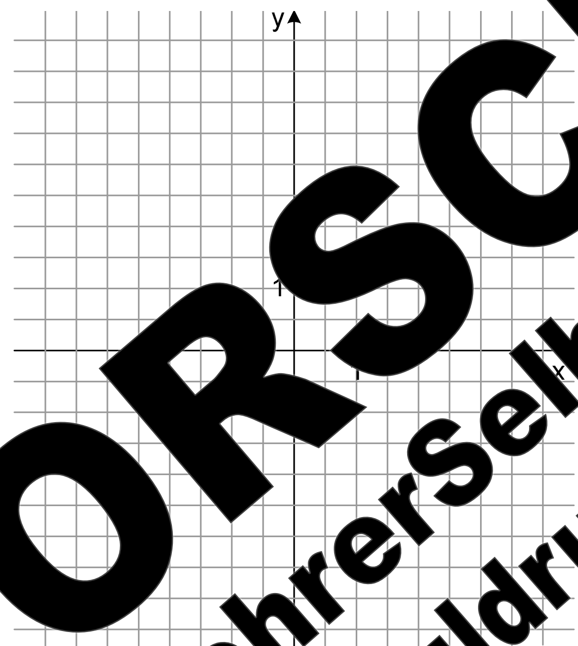
f(x) = 3



Stammfunktion: F(x) = ___________________

5. Berechnung von Flächen unterhalb der x-Achse mithilfe der Stammfu... n

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = -2x - 2$ in das Koordinatensys... u... echnen Sie mithilfe der Stammfunktion die Fläche zwischen der unteren Grenz... a = –3 ... d... Grenze b = 1. Interpretieren Sie das Ergebnis mithilfe von entsprech... geo... nen Betrachtungen und ergänzen Sie den Merksatz.



f(x) = –2... 2

F... ____________________

...(1) = [F(x)]... =

...ation:

____

____

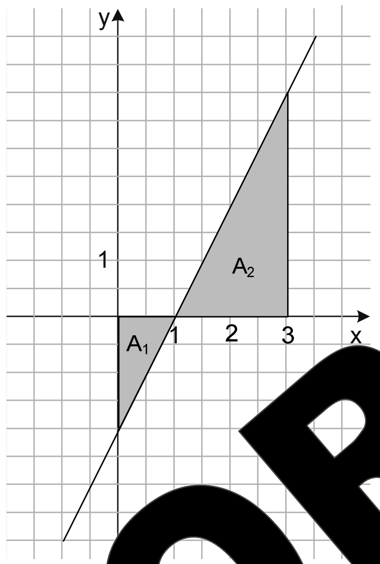
____

____

...n unterhalb der x-Achse sind ______________________. M... net die Flächen ...rhalb und oberhalb der x-Achse daher ge... t und addiert die ... er Ergebnisse.

Beispiel für die Schreibweise bei der Berechnung von Flächen unterhalb ... oberh... der x-Achse:

Zu berechnen ist die Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion ... im Intervall [0;3].



$f(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = ... 2x + ...$

Flächenberechnung:

... A_1 unter der x-Achse liegt, ist ... Wert für die Fläche negativ. Daher wird mit Betragsstrichen gerechnet.

... $= |A_0(1)| = \left|\left[x^2 - 2x\right]_0^1\right| = |1 - 2 - 0| ... = 1$ FE

2. Fläche: $A_2 = A_1(3) = \left[x^2 - 2x\right]_1^3 = ... - (1-2) = 3 + 1 = 4$ FE

... oberhalb der x-Achse liegt, ist der Wert für die Fläche positiv. Daher benötigt man keine Betragsstriche.

Gesamtfläche: $A_1 + A_2 = 1 + 4 = 5$ FE

Übungen

Ü3.3 Berech... ...den Sie, warum es sinnvoll ist, die F...

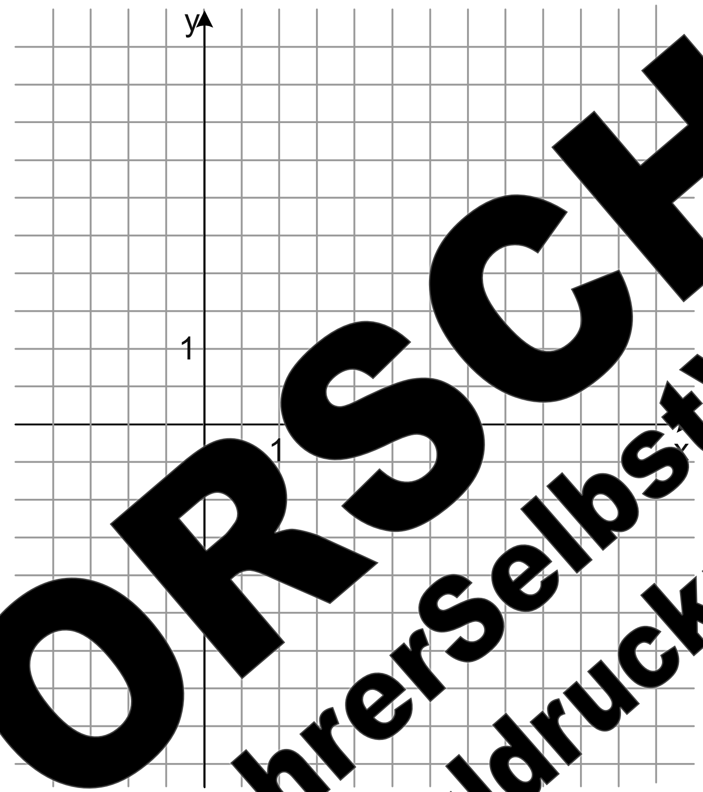
... Grenzen a = – 1 und b ... ...ebnis: A= 10 FE)

... $-\frac{1}{3}x - 1$ Grenzen a = – 3 und b = 6 ...is: A= 13,5 FE)

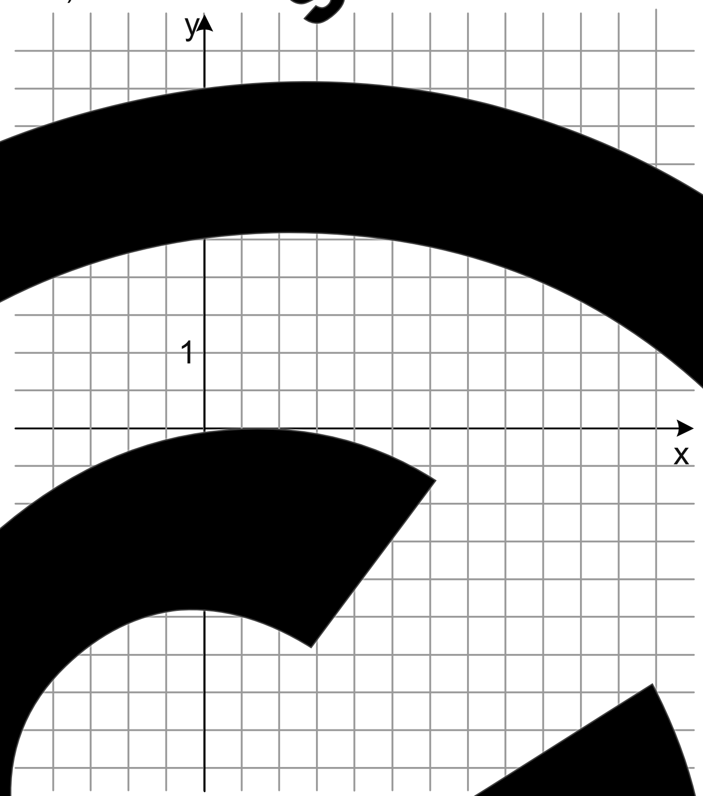
Begründung:

...r Rechnungen auf der Folgeseite

zu a)

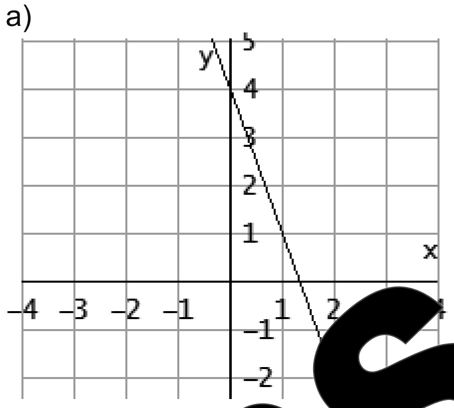


zu b)

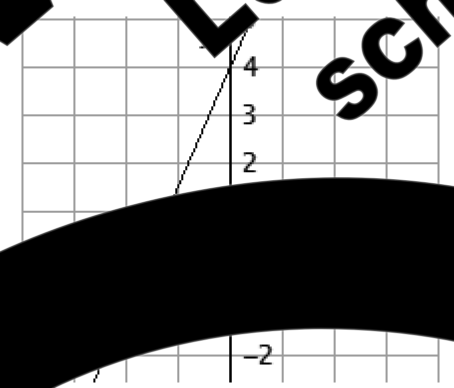


Ü3.4 Markieren Sie in allen Abbildungen jeweils das Dreieck, welches die G… mit d… beiden Koordinatenachsen einschließt. Berechnen Sie die Fläche des …reiecks …chst… elementargeometrisch und dann mithilfe der Stammfunktion.

a)

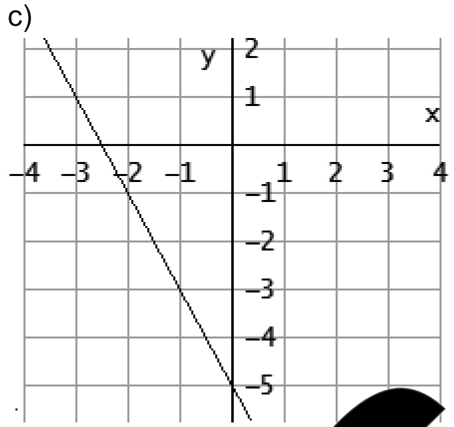


$a(x) = -3x$ …

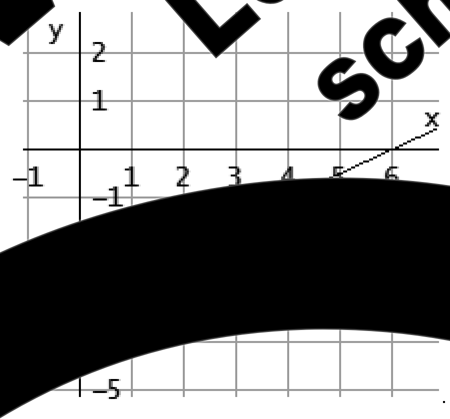


$b(x) = 2,5x + 4$

c)



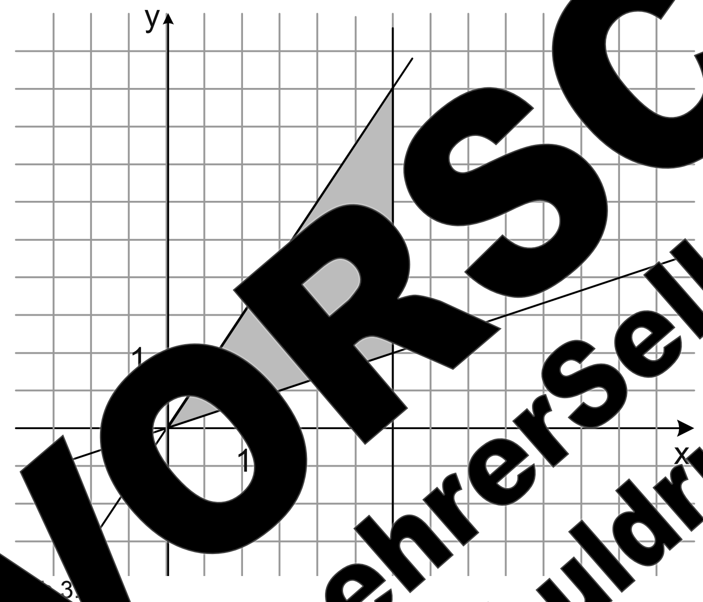
$c(x) = -2x - 5$



$d(x) = 0,5x - 3$

6. Berechnung von Flächen zwischen zwei Funktionen

In der Abbildung ist eine dreieckige Fläche durch die obere Funktion … untere Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x$ sowie durch die senkrechte Gerade x = 3 begrenzt. … Fläch… markierten Dreiecks soll nun mit drei unterschiedlichen Methoden berech… werd…
(Kontrollergebnis: 5,25 FE)



…schriften Sie zu…nst die …eraden mit … zugehörigen Funktions…chnunge… u… bere… Sie die Sta…unktionen.

F(x) =

G(x) =

a) B…immen Sie d… Fläche des … drei Geraden begrenzten Dreiecks mithilfe von herkömmlichen elementargeo…ischen Mitteln und einem möglichst geringen Rechenaufwand.

…utern Sie die geometrische Bedeutung des folg… …d führen Sie dann die Berechnung durch.

$$A_{Dreieck} = [F(x)]_0^3 - [G(x)]_0^3$$

Erläuterung:

…ng:

$= [F(x)]_0^3 - [G(x)]_0^3 =$

c) Im Folgenden wird eine weitere Möglichkeit für die Flächenberechnung a… …endet… …er wird zunächst die Differenz h(x) zwischen den beiden Randfunktion… …bildet. … …enz zwischen den beiden Randfunktionen wird als Differenzenfunk… …zeich… Die Berechnung der Differenzenfunktion erfolgt über den Ansatz:

h(x) = obere Funktion – untere Fun…
h(x) = f(x) – g(x)

Nach dem Einsetzen der beiden Funktion… …me i… Ansatz …erden di… fo… …en Rechenschritte durchgeführt. Erläuter… …e Bede…

$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{7}{\ldots}x$

$H(x) = \frac{7}{12}x^2 + c$

$A_{D\ldots} \ldots]_0^3 = \ldots x^2]_0 = \frac{\ldots \cdot 9}{12}$

$A_{\ldots k} = 5{,}2\ldots$

… drei Wege habe… …Ergebnis 5,25 FE geliefert. Begründen Sie, warum es bei …wendung der Sta…funktion …er ist, den Weg von Aufgabenteil c) zu verwenden.

… oben angegebenen Funktionen g(x) …

k(x) = untere Funktion – obere…
k(x) = g(x) – f(x)

…d des Ergebnisses, welcher Fehler auf…

Ergänzen Sie zu einem Merksatz:

Berechnung der Fläche zwischen zwei Funktionen ob… …lb … Achse

Man bildet die Differenzenfunkt… …(x) übe…

h(x) = ________________ Funktion – … ________________ Funktion

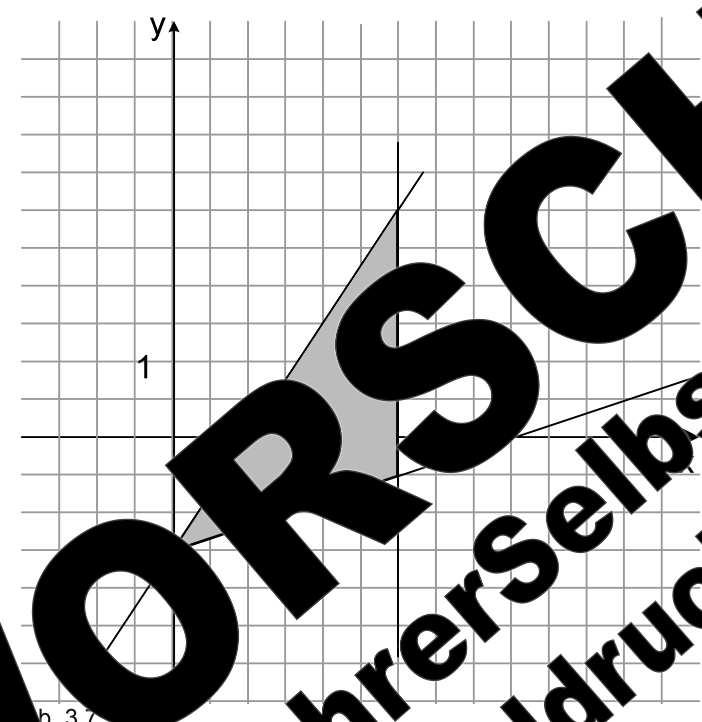
und berechnet die Fläc… … der …mfunktion H(x).

Übungen

Ü3.5 Gegeben sind die Funktionen … und g(x) = x + … sowie die Ger… … = 2. Zeichnen Sie die Geraden und …en Sie die Fl…e, welche v… …en drei Geraden eingeschlossen wird. berechnen Sie die… …läc… …ithilf… …Stammfu… . Ermitteln Si… dazu zunächst eine geeignete Differe… …funk… h(x).

7. Berechnung von Flächen zwischen zwei Geraden unterhalb … ober… der …chse

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionen $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ und … $\frac{3}{2}$ s… …ie Gerade x = 3.



…b. 3.7

Be… …n Sie die Geraden zun… …t mit den zugehörigen …unk…sbezeichnungen und …echnen Sie di… …ifferenze… …h(x).

h(x) = obere Fkt. – …ere Fkt.

h(x) = ____________________

h… ____________________

h(x) = ____________________

h(x) = ____________________

Vergleichen Sie … Fläche des …standenen Dreiecks mit der Fläche in Abb. 3.6. Beschreiben Sie, wie di… Fläche in Abb. … aus der Fläche in Abb. 3.6 hervorgeht und begründen Sie damit, warum die beiden Flächen gleich groß sind.

…nen Sie mit der Differenzen… …e Fläche für Abb. 3.7 und begründen Sie anhand der Rechnung, wa… …g der beiden Randfunktionen keine Rolle bei der Flächenberechnung über di… …spielt.

H(x) = ______________

$A_0(3)$ = ______________

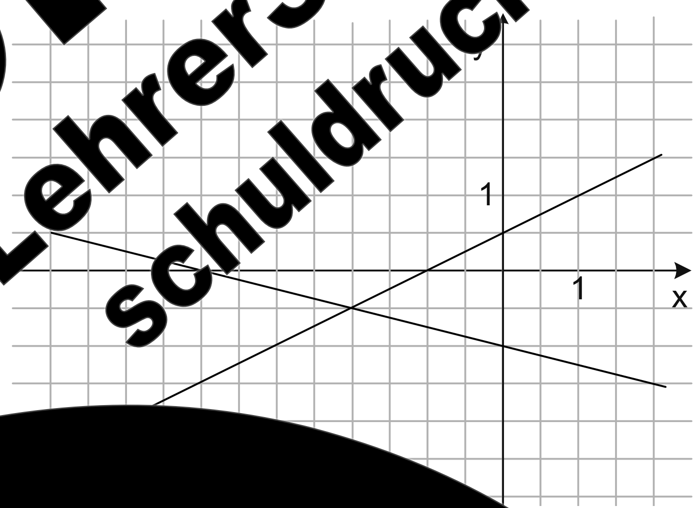
Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Fläche zwischen zwei linearen Funktionen

Wenn man die Fläche zwischen zwei Funktionen mithilfe der Differenzenfunktion h(x) berechnet, spielt es ___________ Rolle, ob die Fläche vollständig ober- oder unterhalb oder teilweise ober- oder unterhalb der ___-Achse verläuft.

8. Berechnung von Flächen zwischen zwei sich schneidenden Geraden

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = -\frac{1}{4}x - 1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Markieren Sie zwischen den Grenzen ... und ... 0 die Fläche zwischen den beiden Geraden.



... , dass man die Fläche ... zwischen f(x) und g(x) mithilfe der ... Differenzenfunktion h(x) ermitteln kann. Erläutern ... in der folgenden Rechnung ... die Fläche das falsche Ergebnis 0FE erhält:

$$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x - 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$A_{-4}(0) = [\ldots] \ldots - \left(-\frac{3 \cdot 16}{8} + \frac{3 \cdot 4}{2}\right) = 0 - (-6 + \ldots$$

____

____

____

____

b) Wie Sie sicher erkannt haben, wurde bei der Rechnung von Aufgabe ... nicht berücksichtigt, dass die beiden Funktionen links und rechts vom Schnittpunkt ihre Positionen hinsichtlich der oberen und unteren Funktion tauschen. Eine Möglichkeit die geforderte Fläche richtig zu berechnen, wird im Folgenden dargestellt. Erläutern und ergänzen Sie die einzelnen Rechenschritte.

(1) Ansatz: $A_{-4}(0) = A_{-4}(-2) + A_{-2}(0)$ (1) ______________________

____

(2) Intervall [–4;–2]:

$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ (2) ______________________

$A_{-4}(-2) = [H(x)]_{-4}^{-2} = [\ldots]_{-4}$ ______________________

$= \ldots + \frac{3}{2} \ldots$

Da f(x) und g(x) die Position untere und obere Funktion tauschen, gilt hier nun: $h(x) = g(x) - f(x) = -(f(x) - g(x))$. D.h. man muss die Differenzenfunktion nicht neu berechnen, sondern nur alle Vorzeichen von h(x) umdrehen.

(3) Intervall [–2;0]:

$\ldots = -\left(-\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ (3) ______________________

$A_{-2}(0) = [H(x)]_{-2}^{0} = [\ldots]_{-2}^{0}$ ______________________

$= 0 - (\ldots)$

$= -\left(-\frac{3}{2}\right) = 1{,}5\,FE$

(4) ______________________

____

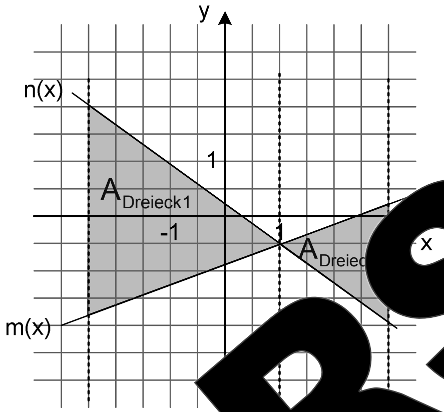
Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Fläche zwischen zwei sich schneidenden ... Funktionen

D... zwei sich schneidenden Funktionen ... sich unabhängig ... bezüglich der x- und y-Achse mithilfe ______________ h(x) berechnen. An jedem Schnittpunkt m... eine neue ______________ hinzufügen und immer darauf achten, dass ... Intervall für h(x) gilt: h(x) = ______________ Funktion – ______________ Funktion ... Rechnung bedeutet dies, dass man beim Wechsel ... Intervalls bei h(x) bzw. ... einfach alle Vorzeichen ______________

Ü3.6 Die markierten Flächen sollen berechnet werden. Zeichnen Sie da… …en no… …n Stellen mithilfe von senkrechten Geraden Grenzen ein, und geben Sie jew… …de… …tz für die Flächenberechnung wie im Beispiel an:

Beispiel:

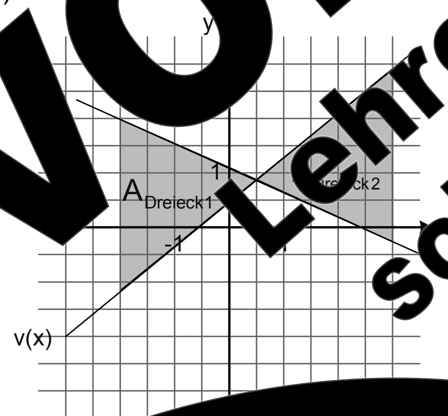


$h(x) = … − m(…)$

$A… = [H(…)]…^{2,5}$

$A_{Dreieck2} = [−H(x)]^{3}…$

a)

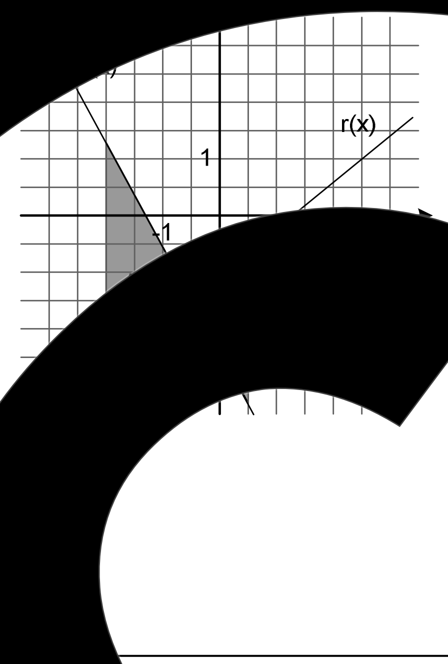


$h(x) = … v(x)$

$A_{Dreieck1} = [\_\_\_\_]$

$A_{Dreieck2} = [\_\_\_\_]$

b)



$h(x) = r(x) − …$

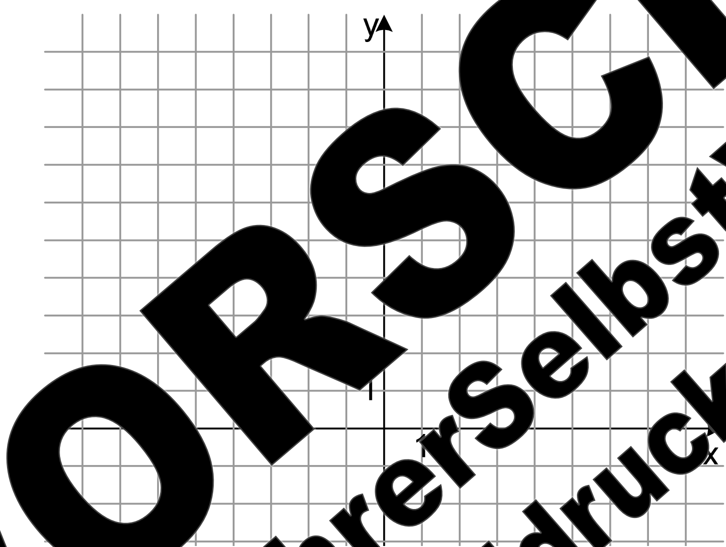
$A_{D1} = [\_\_\_\_]$

$A_{D2} = [\_\_\_\_]$

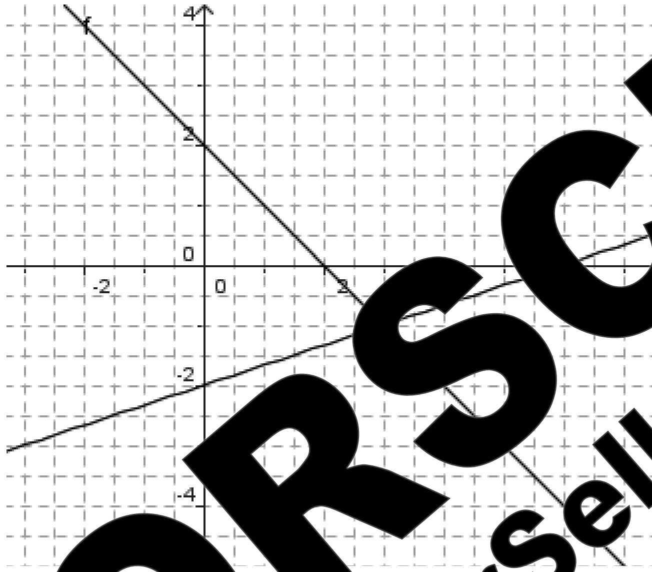
Zusatzaufgaben zum Festigen und Wiederholen

Übungen

Ü3.7 Zeigen Sie unter Verwendung der Differenzenfun… dass … …äche, welche von den Geraden $f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$, $g(x) = -\frac{3}{2}x + 6$ und x = … …gren… …ird, die Maßzahl A = 30,625 FE ergibt.



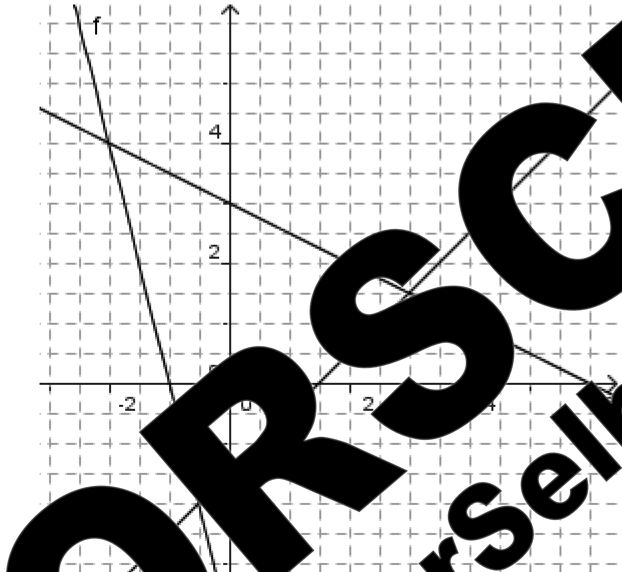
Ü3.8 Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Geraden u(x) = … und w… 1 … 2 zwischen der unteren Grenze a = 0 und der oberen Grenze b = …



(Erg…is A = … E)

Ü3.9 Berechnung unregelmäßiger Dreiecke im Koordinatensystem mithilfe vo… …mmf… …ionen

Gegeben sind die Geraden f(x) = – 4x – 4 , g(x) = $-\frac{1}{…}$ x + 3 … i(x… …1,5



Be… …en S… …ie Fläche mithilfe der M… …der …ammfunktion.

…fen:
– Die Koordi… …te… …er Eckpunkte können hier aus … A…bildung abgelesen werde…
– Te… …ie die Fläche d…ch Einzeichnen v… …eeigneten …enkrechten Geraden so in zwei Teilflä… …ein, dass die Methode der Stamm… …tion anwendbar ist.

(Er… …s: A = 13,125 FE)

Ü3.10 Zeichnen Sie die Geraden $u(x) = -\frac{1}{3}x - 2$, $v(x) = x + 2$ sowie $w(x) = -x$ u… …rechn… Sie die Fläche des von den drei Geraden begrenzten Dreiecks. (Ergeb… …8 FE)

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn…
selbstorganisi… …lernen

Kapit…

Flächen unter Kurv…

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung v... ...chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab... 77

Kapitel 8 – Rekonstru... von Funktionen 81

Kapitel 9 – Vol... ...teg... 87

Kapitel 10 – Uneig... ...e In... 89

We... ...führun... ...er Integral...

Kapitel 1... ...eare Subs... 91

Kapitel 12 – Allgemein... Substitutionsv... 99

Kapitel 13 – Partie... ...ntegration ... ...oduktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ...on bei e-Funktionen 107

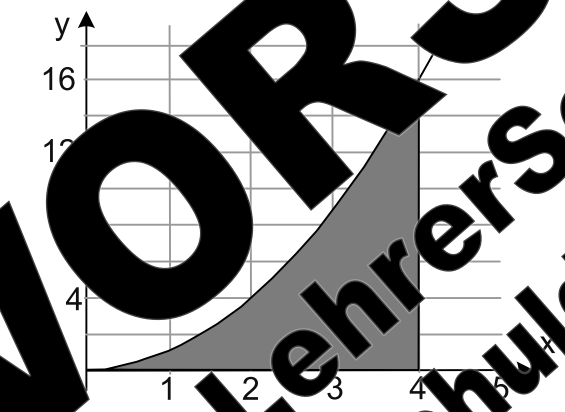
Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Kapitel 4: Flächen unter Kurven

Nachdem Sie gelernt haben, dass man bei Geraden als Randfunkt... ...der S...mfunktion die Fläche berechnen kann, die zwischen einer Gerade g(x) und der x-A... ...e s... ...wei senkrechten Geraden liegt, welche die untere Grenze x = a und die ob... Grenze ...ad..., sollen diese Kenntnisse nun für nicht lineare Randfunktionen, d.h. Kurve... ...weite... ...rden. Dafür wird zunächst die möglichst einfache Randfunktion $f(x) = x^2$ betrachtet.

1. Formulieren einer Hypothese

In der Abbildung ist die Rand...on ... x^2 da...stellt. For...ieren Sie unte... ...wendung Ihrer Kenntnisse hinsichtlich de... Zusammenh... ...chen R...funktion und Stam...unktion eine Hypothese über die Bere... ...u markierten F...che.



A... 4.1

Hypothese:

A... den Überleg...en zur Berechnung von Flächen unter Gerade... kann man für die markierte Fläche unter de... ...ktion $f(x) = x^2$ die folgende Vermutung über e... Stammfunktion ableiten:

Stammfunktion von f(x): $F(x) =$ __________

2. Berechnen der Fläche unter Annahme der Hypothese

Bere... ...e der Fläche zwischen der Randfunktion f(x), der ...enze b = 4 aufgrund Ihrer Hypothese mit der

...inhalt von a = 0 bis b = 4: $A_0(4)$

$A_0(4) =$ ____________________________

Vermut... $A_0(4) =$ ______FE

...s zur Gültigkeit der Hypothese

...e Gültigkeit der oben erstellten Hypothese z... ...ersuchen, geht m... ...vor: Die ...chte Fläche wird zunächst durch treppe... ...eordnete Recht... ...alken oder ...eze angenähert. Liegen die Rechte... ...dfunktion, so be... ...an die Summe aller Rechteckflächen als Obersumme O. Liegen die Rechteckflächen unterhal[illegible] Rand[illegible]tion, so bezeichnet man die Summe aller Rechteckflächen als Untersumm[illegible] Berech[illegible] in Aufgabe a) und b) die Fläche der jeweils abgebildeten Rechtecke bz[illegible]abe [illegible]läche der eingezeichneten Trapeze sowie die Summe aller Rechteck- und Trap[illegible]

a) Annäherung der Fläche über die Bildung der Obersu[illegible] O m[illegible]ken

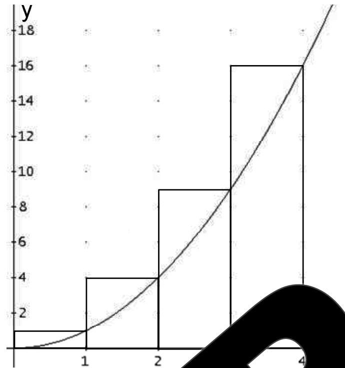


Abb.4.3.1

Berechn[illegible]flächen:

$O_0(1)$ = ______________________

$O_1(2$[illegible] ______________________

$O_2(3)$ = ______________________

O_3[illegible] ______________________

Su[illegible] O = ______________

S[illegible] S[illegible]: "ide[illegible]ch zur" od[illegible]leiner als di[illegible] [illegible]er "größer als die" :

Die g[illegible]aue Fläche unter de[illegible] ist ______________________ über die [illegible]me O berechne[illegible]äche.

b) Annäherung der Fläche über die Bildung der Untersumme U mit Balken

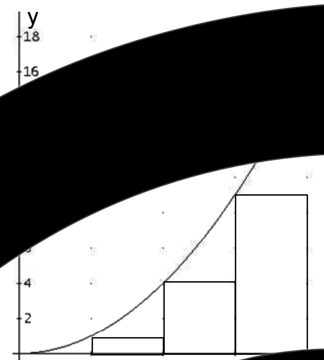


Abb.4.3.2

Berechnung der Rechteckflächen:

[illegible] ______________________

[illegible] ______________________

$U_2(3)$ = ______________________

$U_3(4)$ = ______________________

Summe: U = ______________

[illegible] Sie entsprechend zur Obersumme: Die genaue Fläche unter d[illegible]

______________________ über [illegible]ersumme U bere[illegible]he.

Da die Obersumme einen zu großen Wert und die Untersumme eine[illegible] kleine[illegible]ert für die markierte Fläche liefert, soll ein Näherungswert für die ges[illegible] Fläch[illegible]elwertbildung bestimmt werden:

A_{Mittel}=

Formulieren Sie ein vorläufiges Ergebnis h[illegible]tig[illegible]eit der H[illegible]these und der Vermutung hinsichtlich des über die Stammfu[illegible] bere[illegible]eten Fläche[illegible]lts:

____

____

c) Zur Ober- u[illegible]rsumme alt[illegible]ative Annä[illegible]ng der Fl[illegible]e mithilfe von 4 Tra[illegible]en

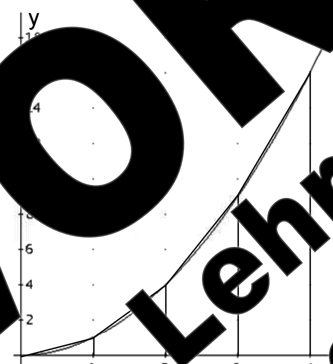


Abb.4.3.3

[illegible]erechnung d[illegible]rapezflächen:

T[illegible] = ______________________

$T_1(2)$ = ______________________

$T_2(3)$ = ______________________

$T_3(4)$ = ______________________

Summe: T = ______________

Ent[illegible] ob die Summe der Trapezflächen größer oder kleiner [illegible]Achse.

[illegible]______ als die Trapezfläche.

[illegible]ergleichen Sie das Ergebnis mit der Ob[illegible]nberechnung.

Vergleich: ____

4. Verbess[illegible]

Di[illegible] und Untersumme bzw. dem Trape[illegible]erechnete [illegible]äche kommt dem mit der Stammfunkt[illegible]en Wert schon [illegible] man ka[illegible]ehmen, dass die Hypothese richtig ist. I[illegible] Abschnitt soll die [illegible]ng verbessert werden. Dazu wird für die Berechnung der Fläc[illegible] der [illegible]nktion $f(x) = x^2$, der x-Achse, der unteren Grenze a = 0 und der o[illegible]ze b = 3 nur die Betrachtung der Obersummen weiter ve[illegible]

a) Hypothese zur Fläche $A_0(3)$ für die Randfunktion $f(x) = x^2$

Geben Sie anhand der Hypothese zur Flächenberechnung mit d... funkti... e Vermutung für die Maßzahl der folgenden gesuchten Fläche an:

$A_0(3)$ = ______________________________

b) Beschreiben des Näherungsverfahrens

Beschreiben Sie das Näherungsverfah... anhand der A... ungen 4.4.... bis 4.4.4.

____

____

____

____

c) Näh...gs...hre...

...a e... hr aufw...dig ist, per Ha... die Fläche ... ielzahl von Balken zu berechnen, kann ...n ... me beispiel weise mit dem Computerprogramm Geogebra berechnen. ...en vi... ildungen ... die Anzahl der Ba...ken durch den Wert n angegeben, und der Z...enwert O gibt jew... die von Geog... ermittelte Obersumme an.

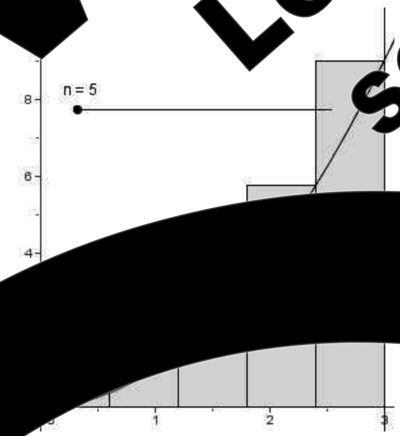


Abb.4.4.1

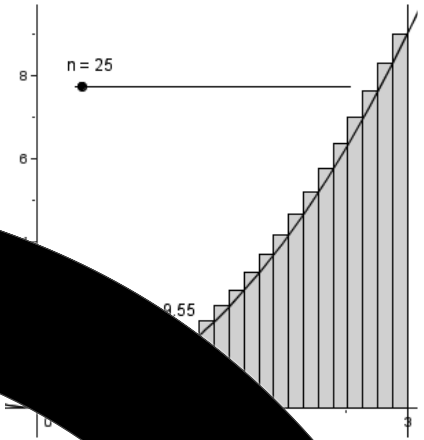
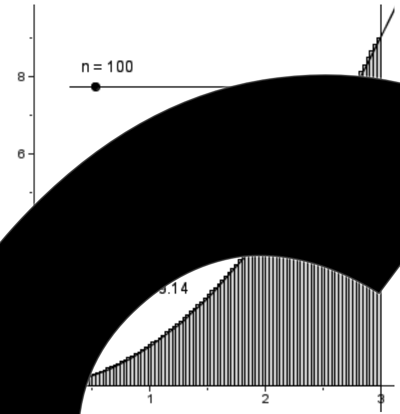
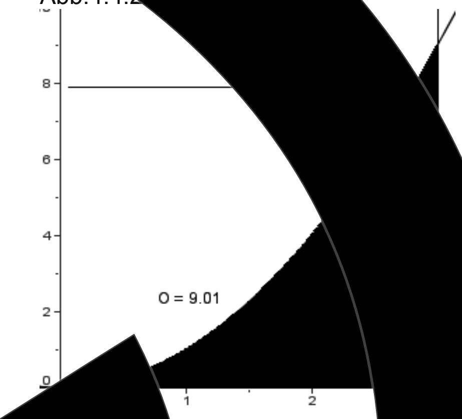


Abb.4.4.2



...4.3



Notieren Sie den Wert für die Obersumme zu der jeweiligen Anzahl ... Balke...

n = 5: O = ___________FE

n = 25: O = ___________FE

n = 100: O = ___________FE

n = 1000: O = ___________FE

Vergleichen Sie die Werte für die ...ersumm... O mit dem verm...eten Wert für ... Fläche $A_0(3)$ und begründen Sie, war... ...en ... ausg...en kann, dass die oben not...te Vermutung über den genauen Inhalt de... ...äche $A_0(3)$ ...

Vergleich: ______________________________

Begründ... ______________________________

____

____

____

...sammenfassung:

...r die Berechn...g der Fläche $A_0(x)$ gilt bei der Parabel $f(x) = x^2$: $A_0(x) = \frac{1}{3}x^3$

Damit hat die Randfunktion $f(x) = x^2$ die Stammfunktion: $F(x)$ = ______________

...ionen für Randfunktionen der

...rmulieren Sie aufgrund Ihrer Kenntnis bei Stam... ...Geraden und der Stammfunktion von $f(x) = x^2$ sowie den Ableitungsregeln der Differen... ...e Regel, die angibt, wie man bei einer Funktion $f(x) = ax^n$ die Stammfunktion F(x) be...

... x^n gilt: F(x) = ______

... die ... Worten:

____

____

____

6. Erweiternde und vertiefende Betrachtungen zur Ermittlung der Stammfun... von ... = x^2

Die Betrachtungen in Abschnitt 4 sind Plausibilitätsbetrachtungen fü... ...gkeit ... ...pothese zur Flächenberechnung bei Flächen mit nicht linearen Randfunktione... ...den soll, vor allem im Leistungskurs, die Gültigkeit dieser Hypothese zumindest ... die Ra... ...(x) = x^2 ausführlich bewiesen werden. In allen gängigen Schulbücher... ...n die... ...eweis ebenfalls nachgeschlagen werden.

a) Erstellen einer Abbildung für die Obersu... ...ei n Ba... und Festle... ...ezeichnungen

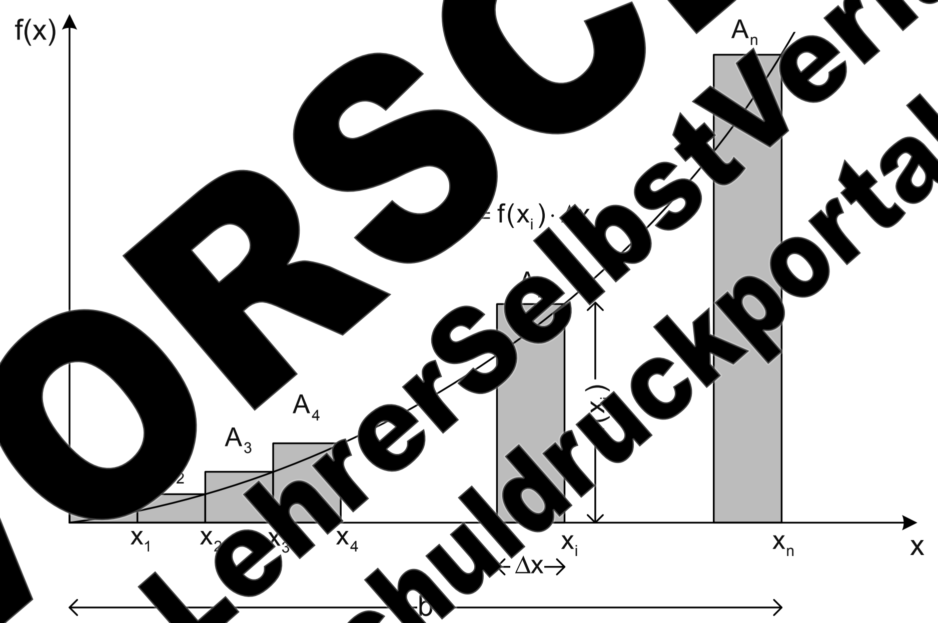


Abb.4.6

b) Bezeichnungen: n: Anzahl aller Balken

b: Gesamtbreite über alle Balken

... Breite eines Balkens

... Fläche ... Höhe des i-ten Balkens

c) Festlegen der Grenzen: untere Grenze a = 0
obere Grenze b = x_n

d) Bestimm...

Be... ...ite eines Balkens gilt: $\Delta x = \frac{b}{n}$ und ... $i \cdot \frac{b}{n}$

e) Erläutern Sie die in den Zeilen (1) bis (8) erfolgten Rechnungen und ...rmun... ...chritte.

(1) $O_0(b) = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$

(2) $O_0(b) = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + ... (x_n)\cdot\Delta x$

(3) $O_0(b) = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)]\Delta x$

(4) $O_0(b) = \left[f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right) + f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right) + f(... \frac{b}{...}) + ... n\cdot\frac{b}{n}\right] \frac{b}{n}$

(5) $O_0(b) = \left[1\cdot\frac{b^2}{n^2} + 4\cdot\frac{b^2}{...} + 9 ... + n^2 ...\right]\frac{b}{n}$

(6) $O_0(b) = \frac{b^2}{...}[1 ... = \frac{b}{n^3} ... n(1+n)(2 ... 1)$

(7) ... $= \frac{b}{...} ... n^3 + 2 ... = \frac{b^3}{6} \cdot 2 ... = \frac{b^3}{6}\left(2 ... + \frac{1}{n^2}\right)$

(8) ...(b) ... $\frac{b^3}{...}\left(2 + \frac{3}{n} + ...\right) ... \cdot 2 = \frac{1}{3}b^3$ ... $A_0(x) = \frac{1}{3}x^3$

...it dieser Formel wird die ...umme der Quadratzahlen von 1 b... ...berechnet. Ka... ...n i... Tafelwerk ...chg...hlagen.

E... ...gen zu de... ...zelnen Zeile...

(1) ____________________

(2) ____________________

(3) ____________________

(5) ____________________

(6) ____________________

(8) ____________________

7. Der Begriff Integral

Im Rahmen der Flächenberechnungen für Geraden und für die Para... präse... für Kurven wurde bisher der Begriff "Stammfunktion" verwendet. Bei der Parabel ... der Betrachtung von Geraden gewonnene Regel zur Bestimmu... Stam... über das Integrieren der Randfunktion bestätigt werden, indem man di... die Bildung der Obersumme angenähert hat. Die Näherung an die wa... Fläc... Ku... st dabei durch ein Erhöhen der Anzahl der Balken erreicht worden. Hier ... festgestellt:

Ergänzen Sie: Je größer die Anzahl der Bal... de, des _____________ wurden die

Balken und desto ____________________ ...en sich ... Balken dem wa...en Kurvenve...uf

angepasst. Je ___________ B... verwend... , deste... ist die Annäh...ng der

____________________ an ... e zwischen Ku... und x-Ac...

Nachdem für den R... der Ermittl... er Stammfu... bereits der Begriff „Integrieren" ...ende... de, s... nun de... tische Begri... **Integral**" definiert werden. Verdeutli... da... chrittweise ... ende Tabelle.

Erl...rung	Formelmäßige Darstellung
Die ...mmfu... für f(x) = ... urde ...rch ...s Aufsummieren ... Recht- ...alken hergeleitet ...ird die ... der ... n sehr groß ... für n:	$n \to \infty$
Die Fläche eines beliebigen Balk...s A_i wird mithilfe der Rechteckformel A = $\boxed{\text{Länge}}$ · $\boxed{\text{Breite}}$ dann wie nebenan berechnet.	$A_i = \boxed{\text{Höhe des i-ten Balkens}} \cdot \boxed{\text{Breite des i-ten Balkens}}$ $A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$
W... ...der Mathematik (übrigens ...er Summenbildung im Programm ...) mit dem Summensymbol $\sum$.	(sprich: ... is n für …)
Werden zwischen der unteren Grenze 0 und der oberen Gren... viele dieser Rechtec... aufsummie... die Fläc...	$A_0(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta$...

...druck entsp... der Summe aus ...ch vielen Balken der Obersumme, wobei jeder ...n fast die Breite Null hat. Berechnet wird damit ... Näherung für die Fläche zwischen Randfun... ...d x-Achse.

Wenn die Anzahl der Balken sehr groß wird, also n gegen ∞ läuft, dann wird die Breite der Balken immer kleiner (vgl. Abb. 4.4.1 bis 4.4.3) und nähert sich der Breite Null (vgl. Abb.4.4.4). Damit geht auch Δx gegen Null. Man gibt im Grenzfall die Breite des Balkens dann nicht mehr mit Δx an, sondern man schreibt **dx**.	Für Δx→... schreib... im Grenzfall **dx.**
Um die Summe aus sehr vielen extrem... schmalen Balken vom Grenzfall für n ... zu unterscheiden, schreibt man ...tt d... Symbols für die Summenbil...g $\sum$ das Symbol $\int$ als **Integralsymbo**... das Integralsymbol ...es S fü... Summe symboli...en.	$A = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} f(...)... \int f(x)dx$ sprich: ...tegral f(x) dx

Wende... ...se ...ibweise auf un... ...rünglich... ...benstellung und alle bisher erwo... ...tnis... ...ne Fläche zw...en einer Kur... und der x-Achse zu berechnen, an, folgt:

...etr...ungen bei Geraden

...Aus der Betrachtung ...en Gerade... wissen wir, dass ... die Randfunkt... ...rieren mu...s, u... Stam... ...n zu ...halten. Mit d... Stammfunktion F(x) kann man Fläche zwischen einer G...den und der x-Achse bere...en.

$A_0(b) = [F(x)]_0^b = F(b) - F(0) = F(b)$

Betrachtungen bei Kurven

Aus Betrachtungen zur Grenzwertbildung bei den Balken der Obersumme wissen wir, dass die Fläche zwischen Kurve und x-Achse dem Integral entspricht.

$A_0(b) = \int f(x)dx$

...trachtungen

Der Verg... ...hnung des Integrals durch d... ...funktion von f(x...

$A_0(b) = \int_0^b f(x)dx = [F(x)]_0^b = F$...

Man err... ...einer Funktion f(x) und der x... ...ntervall [a,b] über ...s Integral der Funktion f(x).

...s erfolgt über die Stammfunktion du... ...eren von f(x). (Hauptsatz der Integralrechnung)

$$A_a(b) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

8. Beispiel für die Anwendung der Integralschreibweise bei der Berechnung … Fläch…

Berechnung der Fläche $A_1(2)$ zwischen Randfunktion und x-Achse i… [1;2], … zwischen der unteren Grenze a = 1 und der oberen Grenze b = 2 mithilfe der In… …g.

Randfunktion: $f(x) = x^2$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

…fo
Man… …et … …er Stammf…ion zu… …te Kon…ante **c** n… a…
Inte…onskonsta…te…

Fläche: $A… \int^{2} x^2 dx = \left[\frac{1}{…}x^3\right] … = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{…} … \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Hinte… …em In…l-zeic… …ersche… …r F…ionste… …Ra… …iplizier… …dx.

Die Stammf…ion wird **ohne** In…ations-konst… …n eckige… Kl…ern einschli… …er Integrat…s-grenzen ang…en.

E…setzen der Grenzen in die Stammfunktion. Es wird immer „obere Grenze“ minus „untere Grenze“ gerechnet.

Übungen

Ü4.1 Berechnen Sie, wie im Beispiel, für die Funktion $f(x) = x^2$ die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse in den gegebenen Intervallen.
a) [2;4]

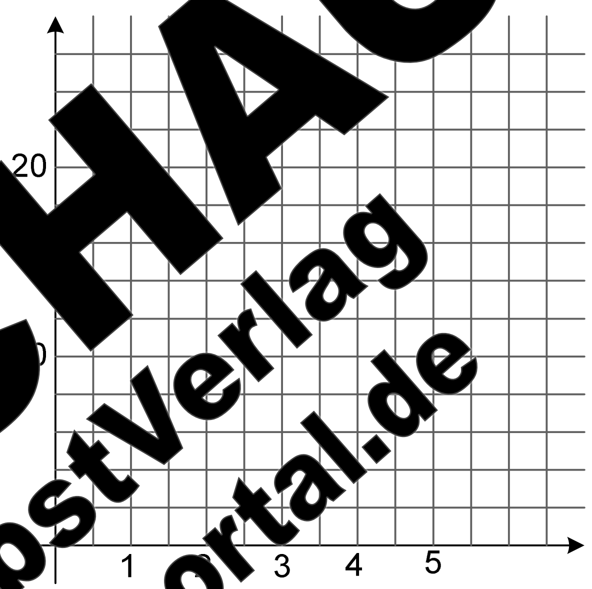
Ü4.2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$.

a) Ermitteln Sie im Intervall [0;3] einen Nährungswert für die Fläche mithilfe der Trapezmethode. Zeichnen Sie dazu die Funktion f(x) im angegebenen Intervall und teilen Sie die Fläche in drei Trapeze ein.

b) Ermitteln Sie eine Stammfunktion.

c) Berechnen Sie die Fläche im Int… [0;3] mithilfe der Integralrechnu… …nd vergleichen Sie den Wert mit de… Näherung aus Aufgab… …).

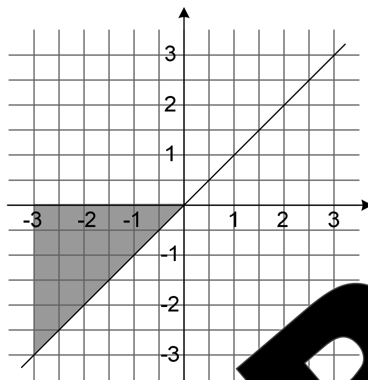
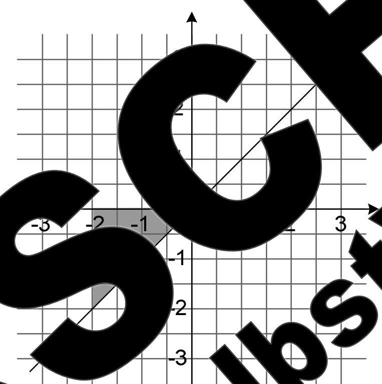
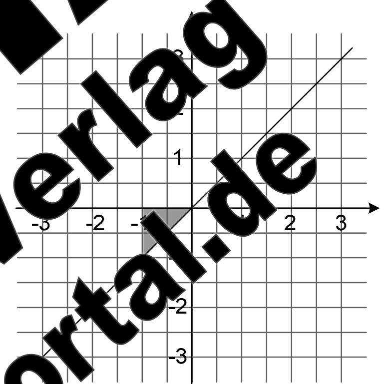
d) Berechnen Sie die F…che i… …rvall [2;4] mithilfe der Inte… …



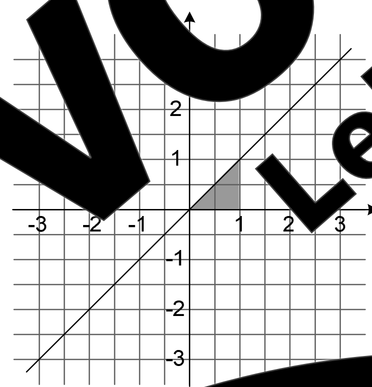
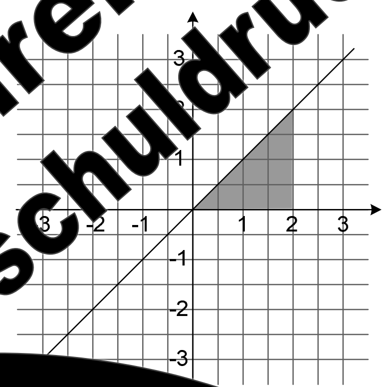
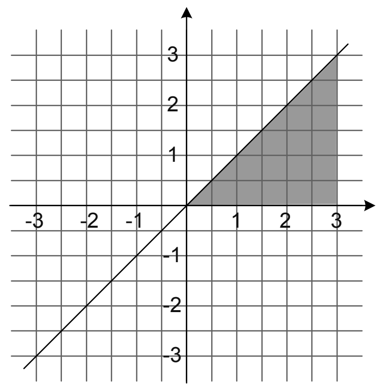
9. Erweiternde Betrachtungen zum funktionalen Charakter der Stammfunkti…

Aufgabe 4.9.1

Berechnen Sie für die lineare Funktion f(x) = x die folgende… …ächen … …reiecksformel, also ohne Anwendung der Integralrechung, auf elementargeo…ische… …eg.

$A_{-3}(0) = \frac{\cdot}{}$ … FE $A_{-2}(0) = \frac{\cdot}{2}$ = ____FE $A_{-1}(0) = \frac{\cdot}{2}$ = ____FE

$A_0(3) = \frac{\cdot}{2}$ = ____FE

…gabe 4.9.2

Wie bei den Betrachtungen zu Geraden im Kapitel 3 festgestellt … bei der Berechnung von Flächen die Integrationskonstante bei der Stammf… …chlässigen. Damit verwenden wir hi… …n von f(x) = x.

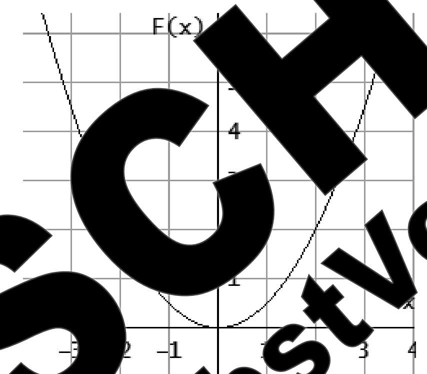
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Füll… …mmfunk… …(x) die folgende Wertetabelle aus.

	–3	–2	–1	1	2
…(x)					

Aufgabe 4.9.3

Die Abbildung zeigt den Graphen der Stammfunktion F(x). Erg… …im a…deten Koordinatensystem die Wertepaare aus der Wertetabelle in Auf… …e 4… …dem Sie entsprechende Punkte markieren.



Aufgabe 4.9…

Verglei… Sie … …nter A…gabe 4.9.1 b…rechneten Wert… die Flächen mit der Wertetabelle bzw… …Di…mm eingetra… Koordinaten… Sie für die Stammfunktion jeweils den pa…nden … eins…en.

$A_{-3}(0)$ = F(___) $A_0(3)$ = F(___)

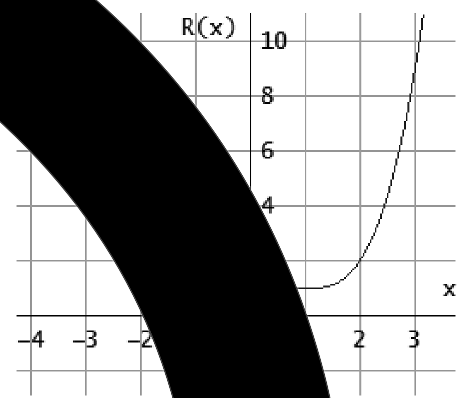
$A_{-2}(0)$ = F(___) $A_0(2)$ = F(___)

$A_{-1}(0)$ = F(___) $A_0(1)$ = F(___)

Ergänzen Sie aufgrund des Vergleichs die folgenden Aussagen: Die in Aufgabe 4.9.1 berechneten Flächen entsprechen den Funktionswerten der ________________________. Setzt man in die Stammfunktion einen Wert b für x ein, berechnet man eine Fläche, die an der ___-Achse beginnt und an de…

Ü…

…rationale Funktion r(x) verläuft … …sten Quadranten vollständig oberhalb der x-Achse. Der Graph der Stammfunktion R(x) mit c = 0 ist im Diagramm nebenan dargestellt. Ermitteln Sie mithilfe des Graphen die Maßzahl für folgende Flächen.



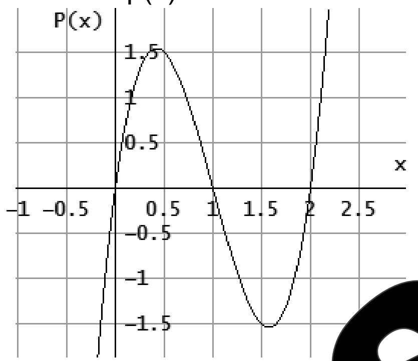
$A_0(1)$ …

…(___) = ______ FE

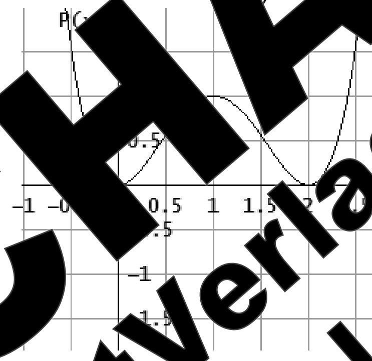
…3) $= \int_1^3 r(x)dx = \left[\_\_\_\right]$ =

Ü4.4 In den folgenden Abbildungen sind eine Funktion p(x) und ihre für c = 0 zuge... Stam...nktion P(x) gegeben.

Funktion p(x):



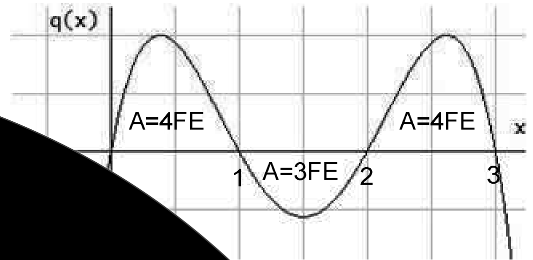
Stammfunktion ...x)



Erläutern Sie, warum hi... die Aussage gil...

Die von der Funk... p(x) ... der x-... eingeschl... Fläche ... nicht mithilfe der Funktionswerte vo... ...rden.

Ü4.5 Die Funktion q(x) schließt mit der x-Achse, wie abgebildet, drei Flächenstücke mit den angegebenen Maß...



Geb...

...en sind.

Q(0) = 0 Q(1) = 4 Q(2) = 7 Q(2) = 1 Q(3) = 5

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrech...
selbstorganisi... ...en

Kapit...

Rechenregeln für Integ...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede... v... ...chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab... 77

Kapitel 8 – Rekonstru... von Funktionen 81

Kapitel 9 – Vol... Integ... 87

Kapitel 10 – Uneig... ...e In...e 89

We...führun... ...er Integral...chnung

Kapitel 1... ...eare Subs... 91

...tel 12 – Allgemein... Substitutionsve... 99

Kapitel 13 – Partie... Integration ...der ...duktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ...ion bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa... ...nung selbstorganisiert erlernen ...2-030-251)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 5: Rechenregeln für Integrale

Bei der Berechnung von Flächen mithilfe der Stammfunktion bzw. d... ...rechn... gelten alle für die im Kapitel 1 bis 3 für Geraden hergeleiteten Regeln. Zusätzlich k... ...me... ...och Definitionen und einige Rechenregeln für den Umgang mit Integralen hinzu.

Def.: Ein Integral, bei dem keine Grenzen angeg... si... ...ma... **unbesti...mtes Integral**.

$\int f(x) ... F(x)$

Man lässt die eckige Klammer be... Stammfunktio... weg und f... ...afür die Integrationskonstante hinzu.
Ein Integral, bei dem Gre... ...ange... ...n si... ...nennt m... **...timmtes In...**.

Bestimmung der Sta... ...nktion bei ei... ...chen Pote... ...ktionen

Potenzregel mi... **f(x) = ...** ⇨ **$F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$**

Ü5.1 B...eise... ...die ...nzregel, ind... S... die erste ...leitung der Stammfunktion berechnen.

Ü5.... ...erechnen Sie jew... ...e Stammfu... und überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die ...mittelte Stammf...on wieder ... ...en und tragen Sie die Ergebnisse ein.

a) $f(x) = 4$ $F(x)=$ b) $f(x) = 5x$ $F(x)=$ c) $f(x) = 3x^2$ $F(x)=$

d) $f(x) = 8x^3$ $F(x)=$ e) $f(x) = 10x^4$ $F(x)=$ f) $f(x) = 15x^5$ $F(x)=$

g) $f(x) = ...$ ... $\frac{1}{...}$ $F(x)=$ i) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $F(x)=$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $F(x)=$

Summenregel $I = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)+g(x))dx$

Ü5.3 Die Integrale I_1 und I_2 sollen ohne einen Flächenbezug berechnet werden, d.h. der Funktionsverlauf der Randfunktion soll nicht berücksichtigt werden. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Berechnung für beide Integrale den gleichen Wert ergibt.

a) $I_1 = \int_{-1}^{1} (4x^3 + 6x^2 + 3)dx$ und $I_2 = \int_{-1}^{1} 4x^3dx + \int_{-1}^{1} 6x^2dx + \int_{-1}^{1} 3dx$

b) $I_1 = \int_{1}^{2} (2x^3 + 9x^2 + 2)dx$ und $I_2 = \int_{1}^{2} 2x^3dx + \int_{1}^{2} 9x^2dx + \int_{1}^{2} 2dx$

Faktorregel $I = \int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Ü5.4 Überprüfen Sie die Gültigkeit der Faktorregel anhand der folgenden Beispiele. Berechnen Sie dazu jeweils die bestimmten Integrale I_1 und I_2. Vergleichen Sie die Ergebnisse. Was stellen Sie hinsichtlich des Rechenaufwandes fest?

Feststellung:____

____

a) $I = \int_2^3 18x^5dx$ und $I = 18\int_2^3 x^5dx$

b) $I = \int_0^1 (4x^3 + 4x + 2)dx$ und $I = 2\int_0^1 (2x^3 + 2x + 1)dx$

Stimmen obere und untere Grenze überein, ergibt sich für das Integral der Wert Null.	$\int_a^a f(x)dx = 0$

Intervalladditivität	$\int_a^b f(x$ … $\int^c$ … $\int^c f(x)dx$

Ü5.5 Begründen Sie die Gültigkeit der beiden … eln jew… mithilfe geomet… cher Betrach… gen bzw. mit Ihren Kenntnissen über die Flä… nber… ung b… Geraden an … eigneten Be… n.

… enzen ändert … en.	… $_a$

… Überprüfen Sie die Vorzeichenregel durch Vergleich der beide… d I_2 .

$I_1 = \int_2^3 4x^3 dx =$ ______________________________

I_2 … ______________________________

Übungen zur Berechnen von Flächen mithilfe der Integralrechnung unte… wendu… aller bisher gelernten Regeln

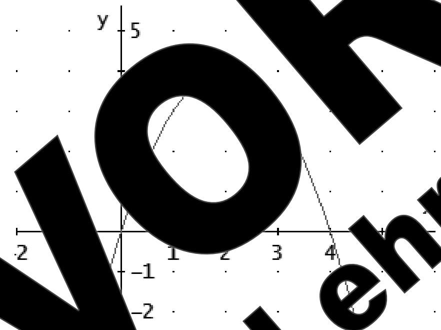
Aufgabenstellung

Berechnen Sie die folgenden Flächen, indem Sie

- die für Geraden ermittelten Regeln für die G… en … er und unterhalb der x-Achse sowie für Flächen zwischen zwei Funktionen a… en,
- die Rechenregeln für Integrale anw…
- in allen Abbildungen die Integratio… renzen, … Sie … es aus de… Betrachtung von Geraden gewohnt sind, als senkrechte Gera… einzei… en und in d… jeweiligen Abbil… gen die zu berechnende Fläche far… kiere…

Beispiel:

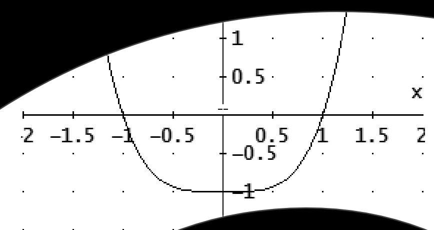
$f(x) = 4x - x^2$ … echnen … die Fläche, we… che die Funktion f(x) mit der x-Achse … ießt.



$$… = \int_0^4 (4x - x^2)d… \left[… 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = (2 \cdot 4^2 - \frac{1}{3}4^3) - 0 = \frac{32}{3}$$

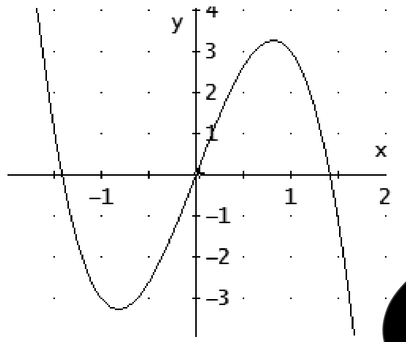
Ü5.7

$f(x) =$ … n Sie die Fläche, welche die Funktion f(x) mit der … ießt. (Ergebnis 1,6 FE)



Ü5.8

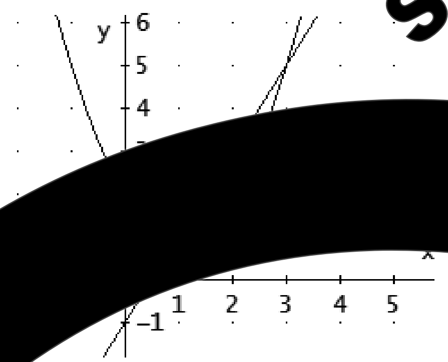
$u(x) = 6x–3x^3$



Berechnen Sie die Fläche, welch... f(x) zwischen den Grenzen a = –1 und ... 1 mit ... einschließt. (4,5 FE)

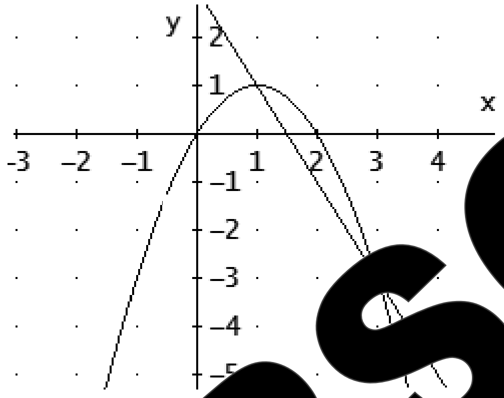
u(... – 2x + 2 u... v(x) = 2x – 1

...erechnen Sie die Fläche, welche von der Kurve und der Geraden eingeschlossen wird. (1,333 FE)



Ü5.10

$a(x) = 2x - x^2$ und $b(x) = -2x + 3$

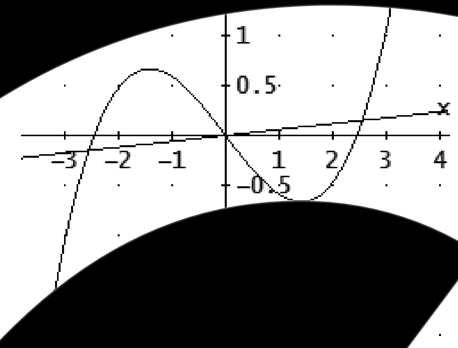


Berechnen Sie die F...che, ... von der Kurve und der Gerad... ingesc... (1,333 FE)

Ü5.11

$g(x) = \frac{1}{17}x$ und $f(x) = \frac{2}{17}x^3 - \frac{12}{17}x$

Berechnen Sie die Fläche zwischen Kurve f und Gerade g sowie den beiden Geraden x = 1 und x = 2. (12/17 FE)

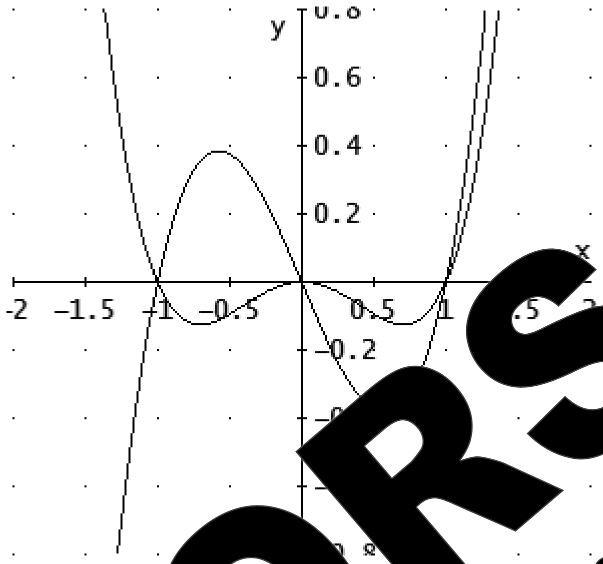


Nutzen Sie die Faktorregel für die ...reinfachung der Rechnung!

Ü5.12

$u(x) = x^4 - x^2$ und $w(x) = x^3 - x$

Berechnen Sie die Fläche, welche im Intervall [–1;1] von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird. (0,5 FE)



Ergänz...

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapit...

Kontextbezogene Bede... von Flächen

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede tung v chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab 77

Kapitel 8 – Rekonstru von unktionen 81

Kapitel 9 – Vol nteg 87

Kapitel 10 – Uneig e In e 89

We führun er Integral chnung

Kap itel 1 eare Subs n 91

Kap itel 12 – Allgemei Substitutionsv n 99

Kapitel 13 – Partie ntegration der roduktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ on bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa hung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)

S

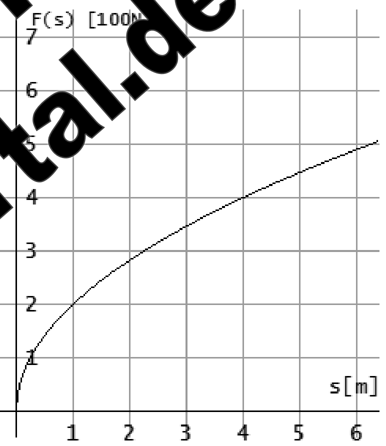
SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 6: Kontextbezogene Bedeutung von Flächen

Wenn man eine Fläche mithilfe der Integralrechnung berechnet un nn d eit Flächeneinheiten FE zuordnet, versteht man darunter in der Regel, s e m eine Fläche im geometrischen Sinn handelt. Wie Sie jedoch im Einstiegsb iel zu rsten Kapitels gesehen haben, kann einer Fläche im Koordinatensystem im Kontex r Auf nstellung auch eine andere Bedeutung zukommen. In diesem Kapitel sollen exe larisc e di Aufgabenstellungen behandelt werden.

1. Flächen im Kraft-Weg-Diagramm

Ein Roboterarm benötigt für di vegu ines genstands auf einem Fließband über d trecke von eine K ft, die mithilfe der Funktion F(hrieben werden kann.



Die Funktion F(s) gramm an darg llt.

Begründen Sie, hier verricht beit mithilfe des A $W = \int_0$ ds berechne n, und zeigen mit einer R nung einschließlic der Betracht g von inh dass n für die verr te Arbeit folge er Wert gibt: Nm

2. Grundlegendes zur Bedeutung von Flächen

Im Beispiel zur Berechnung der Arbeit ist die kontextbezogene Bedeu[illegible] h die A[illegible] rungen zum Einstiegsbeispiel in den Vorbetrachtungen ersichtlich. Hier soll ein[illegible] de Möglichkeit verdeutlicht werden, wie man erkennen kann, ob eine Fläche [illegible] Anwe[illegible] gene Bedeutung hat und wie man diese Bedeutung ermitteln kann.

Merkmal 1:

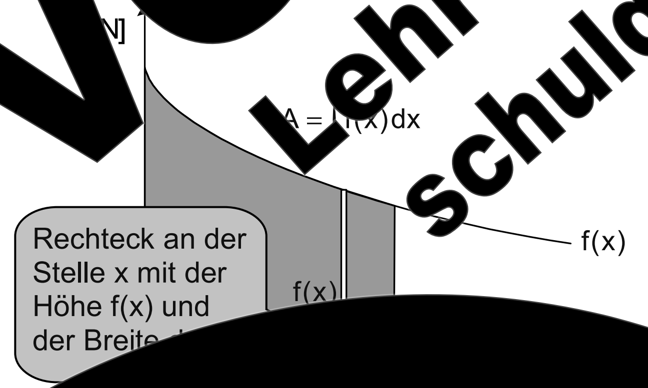
Wenn eine Fläche eine Anwendungsbezogene [illegible] tung [illegible] liegt die Fläche i[illegible] im [illegible] sten Quadranten des Koordinatensystems.

Merkmal 2:

Das Produkt der Einheiten der G[illegible] en [illegible] der y- und x-Achse d[illegible] gestellt wer[illegible] muss eine sinnvolle neue Einheit ergeben.

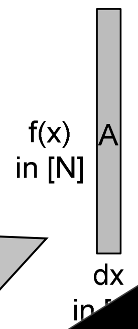
Begründung:

Die grau ma[illegible] Fläch[illegible] ischen der Kurve f(x) und der x-A[illegible] kann mit Hilfe der Integralre[illegible] ung u[illegible] die B[illegible] hnung von $A = \int f(x)dx$ ermittelt werden. Erläutern Sie die geo[illegible] tris[illegible] Bedeu[illegible] des Ausdrucks „$f(x)dx$", indem Sie die Sätze ergänzen:



Der Ausdruck $\int f(x)dx$ bedeutet, dass die Fläche unter der Kurve bei der Integralrechnung letztendlich aus der _____________ unendlich vieler ganz schmaler Rechtecke berechnet wird. (Vgl. Kapitel 4). Der Ausdruck „$f(x)dx$" oder [illegible] " gibt dabei die _____________ eines [illegible] hr schmalen Rechtecks an.

Für die Fläch[illegible] hr schmale[illegible] Betra[illegible] Pr[illegible] ie ges[illegible] che [illegible] enbildung aus diesen [illegible] n berechnet wird, erhält man [illegible] die Gesamtfläche die Einheit [illegible] o die Einheit für die Arbeit.



[illegible] echtecks
[illegible] dx

Einh[illegible] äche

$[A] = [\quad]$

Weitere Beispiele für Flächen mit kontextbezogener Bedeutung.

Auf der x- und y-Achse werden die im Folgenden angegeben G[illegible] etragen. [illegible] eben Sie jeweils die Einheit und die kontextbezogene Bedeutung der Fläche an.

Bedeutung der y-Achse	Bedeutung der x-Achse	Einhe[illegible] Flä[illegible]	[illegible] ntextbezogene Bedeutung der Fläche
Anzahl verkaufter oder produzierter Artikel pro Tag d, d.h. Verkaufsrate oder Produktionsrate Einheit $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{d}}\right]$	Zeit t Einheit [d] Es [illegible] ch fo[illegible] nde Z[illegible] e[illegible] h: [s ,min; h; ...]	$[A] = \left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A] = [\quad]$	___ ___
Zufluss- bzw. [illegible] ss-rate von Wasse[illegible] einen Be[illegible] älter r(t) [illegible] Seku[illegible] Ein[illegible] $\left[\frac{m^3}{s}\right]$	[illegible] eit t Ein[illegible] [s]	$[A] = \left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A] = [\quad]$	___ ___
[illegible] schwindigkeit eines F[illegible] zeuges v(t) Einheit $\left[\frac{m}{s}\right]$	Zeit t Einheit [illegible]	$[A] = \left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A] = [\quad]$	___ ___
Beschleunigung eine[illegible] Fahrzeu[illegible]	[illegible]	$[A] = \left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ [illegible]	___ ___
Änderungsrate der Konzentration eines Stoffes in einer Flüssigkeit k(t) pro St[illegible] Einheit [illegible]	Zeit t Einheit [h]	$[A] = \left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A] = [\quad]$	___ ___
[illegible] pro Tag [illegible] $\left[\frac{mg}{d}\right]$	[illegible] Einheit [d]	$[A] = \left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ [illegible]]	___ ___

Bedeutung der y-Achse	Bedeutung der x-Achse	Einheit der Fläche	Kontextbezogene Bedeutung der Fläche
Ausstoß von Rußpartikeln mit einem bestimmten Durchmesser r(x) Einheit $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\mu\text{m}}\right]$	Durchmesser x Einheit $[\mu\text{m}]$	$[A]=[\quad]$	
Kraft F Einheit $[N]$ (Newton)	Weg s Einheit $[m]$	$[A]=[\quad]$	
Leistung P Einheit $[W]$ (Watt) oder $[kW]$	Zeit t Einheit $[s]$ oder $[h]$	$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	

Raum für weitere Beispiele zur Bedeutung von Flächen in Diagrammen

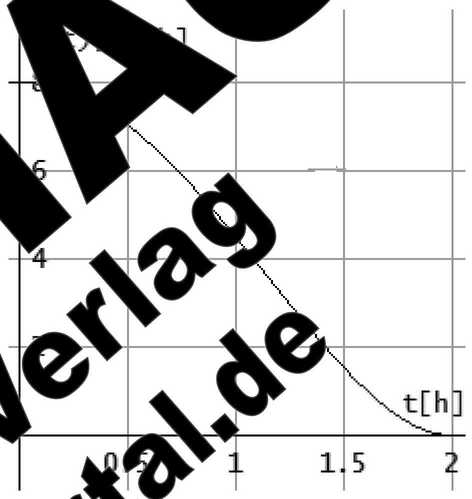
		$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	
		$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	
		$[A]=[\quad]$ oder $[A]=[\quad]$	

Übungen

Ü6.1 Dem nebenan abgebildeten Graph kann entnommen werden, welche Menge einer Reagenz bei einem chemischen Prozess zu einem Zeitpunkt t entsteht. Damit wird die Reaktionsgeschwindigkeit r(t) angegeben. Für r(t) gilt: $r(t) = 0{,}5t^4 - 4t^2 + 8$

Einheiten: r(t) wird in der Einheit $\frac{kg}{h}$ und die Zeit t in der Einheit Stunde h angegeben.

Begründen Sie, warum man die Menge der insgesamt entstandenen Reagenz mithilfe des Hauptsatzes $R = \int_0^2 r(t)\,dt$ berechnen kann und zeigen Sie mithilfe einer Rechnung einschließlich der Betrachtung von Einheiten, dass sich hier R = 8,533 [illegible] ergibt.



Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapit…

Parameteraufgabe…

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun…

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede…tung v… …ächen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab… 77

Kapitel 8 – Rekonstru… von Funktionen 81

Kapitel 9 – Vol… integ… 87

Kapitel 10 – Uneig… …e 89

…eiterführun… …er Integr…chnung

…pitel 1… …eare Subs… 91

…pitel 12 – Allgemein… Substitutionsve… 99

Kapitel 13 – Partie… Integration … Produktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ…on bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa… …nung selbstorganisiert erlernen …2-030-251)

S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 7: Parameteraufgaben

Bisher haben Sie Flächen bei Funktionen berechnet, die eindeutig … …ren, bei denen also außer der Variable x keine weiteren Variablen vorgekomme… sind. E… …bt … …uch Aufgabenstellungen, bei denen die Gleichung einer Randf… …n ein… …e Variable, einen sogenannten **Parameter**, enthält. Im Folgenden wird im Beis… … zu d… …m Aufgabentyp eine Aufgabenstellung aus dem Bereich der Architektur … …est… …n B…spiel 2 eine rein formale Aufgabe ohne Anwendungsbezug bearbeitet.

Beispiel 1:

Ein Gebäude soll auf Wunsch … …es Bauherrn … …bel ein Fe… …r erhalten, …essen oberer Rand durch eine Parabel und desse… … …l von der x-Ach… begrenzt wird. D… parabelförmige Rand des Fensters soll durch … Gle… …ng $r_a(x$… – ax² + 4a …estimmt werde… … …ie Fensterfläche soll insgesamt 16 m² be…

Überlegungen zu… … der Aufgab…stellung:

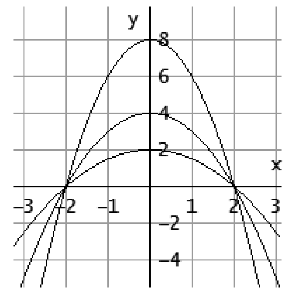
Sie hab… … …ahrsch…lich noch ke… …der nur wenig… …ngen mit Funktionen, die einen Param… … entha… … ges…melt. Dah… s… nun zunäc…st verdeutlicht werden, was der Parameter b…wirk… …zu sind … der folgenden … …dung die Pa…eln zu den Parametern a = 1, a = 2 und a = 0,5 a… …bi… … Ordne… …e den Para… …e Numme… de… Graphen zu und beschreiben Sie Ihre Ü…legu…

…e Funkti… $r_a(…) = – ax^2$ …

(1) a = 1 $r_1(x) = –x^2$ …

(2) a = 2 $r_2(x) =$ … $^2 + 8$

(3) a = 0,5 $r_{0,5}(x) = –0,5x^2 + 2$



…ern Sie, welche Auswirkung der Parameter a au… … …nsters hat und markieren Sie …e Fläche, welche von $r_1(x)$ bestimmt wird.

…orschlag für die Aufgabenstellung

… aufgrund des gekrümmten Randes nicht d… …hen, für welches … …erfläche den …nten Wert von 16 m² annimmt. Die Vorg… … zur Ermittlung d… …en Para… soll nun schrittweise erfolgen:

Schritt 1: Ansatz

Erläutern Sie, welche Bedeutung der folgende Ansatz hat:

$A_{-2}(2) = 2A_0(2) \quad \Rightarrow A_0(2) = 8 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 r_a(x)dx = 8$

Schritt 2: Einsetzen der Fu... in den Ansa...

$\int^2 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ dx = 8$

Schritt 3: B...chnen ... Inte...s und Auf...se... der entstehenden Gleichung nach a.
(...trollerg...s a = 1,5)

Beispiel 2:

In der rechten Spalte wird die ausführliche Lösung der folgenden A... ...rgest... ...d in der linken Spalte soll unter Verwendung mathematischer Terminologie erläute... ...erd... ...lche Berechnungen und Umformungen jeweils durchgeführt werden.

Aufgabenstellung:

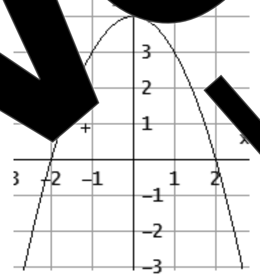
Berechnen Sie den Parameter a mit $a \in IR$ ... ...en die ...bel $f_a(x) = -a^2x^2 + ...$ mit der x-Achse eine Fläche von 8 FE einschließt.

Überlegungen zum Verständ... der Aufga... ...ung und ...iner Strategie für ...n Lösungsweg.

1. Anfertigen einer S...

Um sich ein B... ...n d... ...ufgabenstellung und ...er zu berechnen... Fläche machen zu können, ist es immer ratsam ... Fläche an...fertigen. Da d... Graph der Funktion aufgrund des Param... ...unte... ...edlich aussieht, wähl... ...an einen g...nstigen bzw. einfachen Wert, um eine Skiz... ...zu ...en. Die Funktion ist hier für den Wert a = 1 gezeichnet worden.

Skiz... für $f_1(x)$ ... $x^2 + 4$



Beg...den Sie, waru... ...an für eine Skizze der Funktion den Parameter a... ...ählt:

Erläutern Sie, welche Veränderung sich am Verlauf der Funktion ergibt, wenn man einen anderen Wert für a wählt:

...mulieren des Ansatzes für die Flächenbere...

Ansatz: Erläutern Sie die Überlegungen, die dem ... ...de liegen und hier insbesondere, warum man nicht 2 sondern ... ...enze wählt:

$\int_0^N r(x)dx = 4$

3. Entwickeln einer Lösungsstrategie

Wenn Ihre Überlegungen zum Ansatz richtig sind, haben Sie erkannt, ... die ... aus Symmetriegründen zwischen der unteren Grenze x = 0 und der Nullste... N ... ktion als obere Grenze berechnet. Damit muss man für die Flächenberechnu... die Nu... (x) berechnen:

Strategie: Nullstellen berechnen → Nullstellen in Ansatz einsetzen → ...

Nullstellen: $f_a(x) = 0$

$-a^2x^2 + 4 = 0$

Be... en S... ... Nullste... f(x) für di... meine ...ktion $f_a(x)$ b... werde... sen und z... igen ... durch ...g... s man hier als Lösung $x_{1,2}$ ... rhält.

Flä... be... nun...

$\int_0^{\frac{2}{a}} (-a^2x^2 + 4)\,dx = 4$

Er... n Sie de... Ansatz für die Flächenberechnung und die Re... enschritte.

Berechnung von a

$\left[-\frac{a^2}{3}x^3 + 4x\right]_0^{\frac{2}{a}} = 4$

$-\frac{8}{3a} + \frac{8}{a} = 4$

3

Übungsaufgaben für dies... sind in vielen Quellen zu finde... bei der Bearbeitung, dass S... urvenuntersuchung (hier mü... alle Untersuchungs... einen Überblick über den Verla... on verschaffen müssen. Wä... chen Parameter für diese Skizze.

Ergä... ngen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapit...

Rekonstruktion von Fun...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede ... chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab 77

Kapitel 8 – Rekonstru ... von Funktionen 81

Kapitel 9 – Vol ... nteg 87

Kapitel 10 – Uneig ... e 89

We ... führun ... er Integral ... hnung

...itel 1 ... eare Subs 91

...pitel 12 – Allgemein ... Substitutionsve ... n 99

Kapitel 13 – Partie ... ntegration ... er ... oduktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ ... ion bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Kapitel 8: Rekonstruktion von Funktionen

Bisher haben Sie hinsichtlich der Integralrechnung Aufgaben bearb ... denen ... ein Parameter im Funktionsterm enthalten war. Nun wird diese Aufgabenstellung so e ... iter ... kein Koeffizient bekannt ist.

Auch bei diesem Aufgabentyp, den Sie bereits aus ... Klass ... enn ... kann man ähnlich wie bei der Untersuchung von Kurven oft systematisch vorgehe ... gegebene ... ufgabentext schrittweise analysiert. Die Vorgehensweise ... ei ... omplex ... rein form ... eispiel ohne Anwendungsbezug dargestellt werden.

1. Zuordenen eines Funktionstyps

Man muss aus der Aufgabe ... ellung zuna ... usarbe ... um welche ... Typ ... Funktion es sich handelt und dann für diese ... die allgemeine ... leichung notiere ... Folgenden sind die Ansätze für die häufigsten F ... nstyp ... aufgelistet.

Ganz ... le Fu ... Grades (Par ... bel)

oh ...	mit Achsensymmetrie
... = ax ... x + c	$f(x) = ax^2 + b$

Ganzra ... ale Funktion 3. Grades

oh ... e Symmetrie	mit Punktsymmetrie
$f(x) = ax^3 + bx^2$ ... d	$f(x) = ax^3 + bx$

... Grades (Parabel)

...	mit Achsensymmetrie
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	... $) = ax^4 + bx^2 + c$

2. Bedingungsanalyse

Nun mus ... ung herausarbeiten bzw. ana ... che Bedingungen für den V ... sind. Die Informationen sind häuf ... elt gegeben, be ... kte, die Lage von Extremwerten un ... kten (Vgl. Band ... Neu kommt jetzt hinzu, dass sich eine ... uf eine ... be bezieht.

... enden wird ein Lösungsverfahren, bei dem ge ... bene Bedingunge ... se in den ... nsterm eingearbeitet werden, an einem ko ... Beispiel gezeig ... ungsweg lässt ... eitgehend auf andere Aufgaben übertra

... tlichen Sie sich die einzelnen Schri ... egs.

Aufgabenstellung

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die durch den U… …rläuft … der gleichen Stelle wie die Funktion $k(x) = x^2 - 2x + 1$ einen Extremwert hat. B… x = … det sich der Wendepunkt. Die Funktion schließt mit der Geraden x = 2 und d… beiden … …chsen im vierten Quadranten eine Fläche von 12 FE ein.

1. Schritt

Allgemeiner Funktionsterm:	$f(…) = ax^… + bx^2 + … d$

…t günstig mit ei… Bedingung, f… x = 0 gilt zu be…nen, da hie… …fort der Koe…, der kein x hat, …Wert n… …mt und da…it …gfällt. (vgl. Ban… D…enzialrech…)

2. Schritt

Analysiere… …er 1. B…gung…	F…nktion verl…ft …urch den Ursprung O(0/0)
Math…tis… Ans… der Bedin…	$f(0) = 0$
…setz… der Werte:	$… \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$ $d = 0$
1. Zwischenergebnis für Funktionst…	$f_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

d = 0 wird in die allgemeine Ausgangsfunktion eingesetzt und man … Zwischen… dem…

…g mit der Bedingung für …kt fortzufahren, da in …ung nur die Koe… …b vorhanden sind und m… …gkeit von a ausdrück…

3. Schritt

Analysieren…	Wendepunkt bei x = 2
Mathe…	$f''(2) = 0$ mit $f'(x … … + c$ $f''(x)…$
Ei… Werte:	$6a \cdot 2 + 2b = 0$ $12a + 2b …$

x = 2 w… zweite … von f(x)…

2. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f_2(x) = ax^3 - 6ax^2 + c…$ $f_2'(x) = 3ax^2 … 2ax + c…$

Für b wird n… …en …ttelte Ausd… "– 6a" in das erst… …che… …bnis $f_1(…)$ eingese… …durch erhält m… …r die gesu… Funktion d… 2. Zwischenergebnis f… Da man für d… 4. Schritt … erste Ableitung b…tigt, er… …lt man noch …(x).

4. Schritt

Analysieren de… …edi…ung:	Die …Koordinate für … Extremwert der gesuchten …ktion f(x) sti… …mit der x-Koordinate des …xtremwert… der …unktion k(x) überein. Also muss die x-Koordin…te …s Extremwertes von k(x) in einer Neben…ung ermittelt werden: $k(x) = x^2 - 2x + 1$ $k'(x) = 2x - 2$ Extremwert: $k'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$ $\Rightarrow x = 1$ Damit hat die Funktion f(x) an der Stelle x = 1 einen Extremwert.
…	… mit $f'(x) = 3ax^2 - 12ax + c$
…n der Werte:	$3a \cdot …$
3. Zwischenergeb… …tionsterm:	$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9…$

x = 1 wird in die erste Ableitung von f(x) eingesetzt.

…ch Einsetzen von 9a für c erhält ma… …ittes Zwischenergebnis, in dem nur no… Koeffizient a vorhanden ist.

5. Schritt

Den letzten Koeffizienten a bestimmt man nun über die Flächenbedingun[illegible] noch [illegible]arameter vorhanden ist, geht man hier wie bei der Parameteraufgabe in Kapitel 7 v[illegible]

Analysieren der 4. Bedingung:	Die Fläche liegt zwis[illegible] den [illegible]enzen 0 und 2 im **vierten Q[illegible]** unte[illegible]alb der x-Achse.
Mathematischer Ansatz der Bedingung:	[illegible](2) = −12
Einsetzen der Werte:	[illegible](x)dx = −12 [illegible]x³ − 6ax² + 9ax[illegible]x = −12 [illegible]ax⁴ − [illegible]ax²] = −12 [illegible]−16a + 18a [illegible]12 [illegible] = [illegible]2 a = −2
Enderg[illegible]nis:	**f(x[illegible]3 + 12x² − 18x**

[illegible]ung: Man muss [illegible]uf achten, [illegible] Fläche oberhalb [illegible]er unterhalb der x-Achse liegt. Bei Flächen oberhalb der x-Achse wird der Betrag mit positivem und bei Flächen unterhalb der x-Achse mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

Der Koeffizient a wird mit der Flächenbedingung zahlenmäßig bestimmt und in das dritte Zwischenergebnis eingesetzt. Daraus ergibt sich das Endergebnis.

Strukturdiagramm zur Lösung von Rekonstruktionsaufgaben

Die Abfolge der einzelnen Lösungsschritte bei der Rekonstruktion [illegible]ionen [illegible] den Rechenaufwand erheblich beeinflussen. Es ist daher sinnvoll, mit de[illegible] D[illegible]m vorgeschlagenen Abfolge von Arbeitsschritten vorzugehen und jeweils mit d[illegible] Zwische[illegible] in denen die Anzahl der unbekannten Koeffizienten schrittweise geringer wird, w[illegible]zuarb[illegible].

[illegible]de Übungen: ______________________

Raum für Rechnungen und Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Volumenintegrale

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion 25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede ung v chen 71
Kapitel 7 – Parameteraufgab 77
Kapitel 8 – Rekonstru von Funktionen 81
Kapitel 9 – Vol integ 87
Kapitel 10 – Uneig e Int e 89

Wei führun er Integralrechnung

Kapitel 11 eare Subs 91
Kapitel 12 – Allgemein Substitutionsv 99
Kapitel 13 – Partie ntegration Produktintegration 103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integr ion bei e-Funktionen 107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

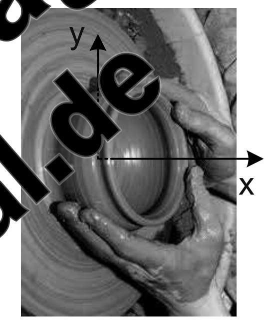
Gesa nung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 9: Volumenintegrale

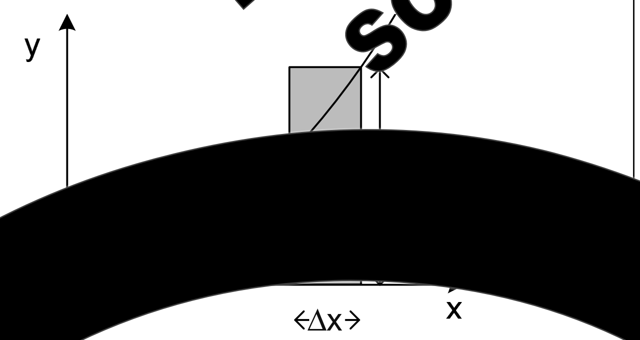
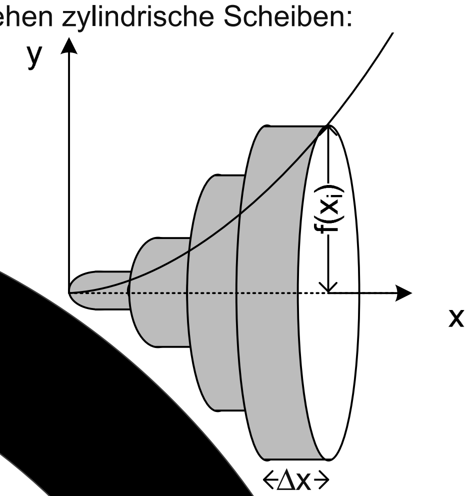
Schaut man einem Kunsthandwerker beim Töpfern auf de pfersch zu, erkennt man, dass hier rotationssymmetrische Gegenst entst . Das Volumen dieser Gegenstände kann man mithilf der Inte echn ermitteln.

Qu ery-wheel.jpg to: S terstock.com



Für Berechnungen ist es einfach enn s Rotationskörper die x-Achse dreht. Dazu dreht ma en G stan nebena estellt, in Gedanken um 90°.

Die Form Vo berechnung solchen Rot nsk rpers wird durch Gegenüberstellung mit de leitu er In tionsformel erläutert. Bearbeiten Sie dabei zuerst die linke Spalte und übertr n Sie di sätze und Überlegungen auf die e Spalte.

unter einer Kurve	Rotationsvolumen
In K tel 4 wurde die for äßige Bezie ung für ral mithilfe von ersummen au n flächen he eleitet.	Lässt man die rechteckigen Balken der Abbildung in der linken Spalte um die x-Achse rotieren, so entstehen zylindrische Scheiben:
	
Die Fläche eines R mit der Flächenform $= f(x_i)\Delta x$ berechn	Das Volumen rs lässt sich, wie Sie in der Sekundarst aben, mit der Formel $V = \pi r^2 h$ berechn n sie nun, warum man die i-te Zylinde der Abbildung mit folgender Formel be n: $V_i =$

Ergänzen Sie: Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ gibt die ____________________ aller abgebildeten Balken an. Lässt man Δx immer ______________ werden, so werden die Balken immer schmaler. Die Fläche unter dem Graphen von f wird durch die Summe der ______________ ange...t. Je ... schmaler die Balken werden, desto ... _______________ ist die N... . Streb... die Breite der Rechtecke ge... , so verwendet ma... ...ere... ...ng der Fläche folgende... In...al:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ergänzen Sie: Der ... ...ck $\sum$ ... gibt die ______________ ...bg...bildeten Zyli...sche... . La... man Δx immer kleiner ...rden, ...rd die ______________ der Zylindersch...n immer ...er und das gesuchte Volu... immer ______________ angenähert. ...trebt die Höhe der Zylinder gegen Null, so ver...endet man entsprechend zur Fl...enbetrachtung ... das Aufsummieren unendlich v... ...trem schmaler __________________________ das ...tegralzeichen und schreibt:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Beispiele und Übungsaufga... ... ...einer Vielzahl von Quellen. entnommen werden.

Erg... ...ngen: ______________________________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn... selbstorganisi... ...lernen

Kapite...

Uneigentliche Integ...

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede... v... ...chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab... 77

Kapitel 8 – Rekonstru... von Funktionen 81

Kapitel 9 – Vol... ...integ... 87

Kapitel 10 – Uneig... ...e Int...e 89

We... ...führun... ...er Integral...chnung

...itel 1... ...eare Subs... 91

...el 12 – Allgemein... Substitutionsv... 99

Kapitel 13 – Partie... ...ntegration ...der ...oduktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ...on bei e-Funktionen 107

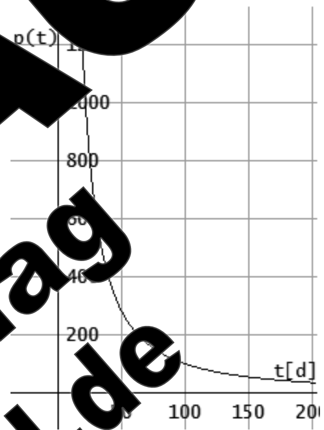
Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa... ...nung selbstorganisiert erlernen ...2-030-251)

S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 10: Uneigentliche Integrale



Bei Modeprodukten, die nach einer Werbephase einen Renner auf... Markt darstellen und eine hohe Verkaufsrate haben, nimmt das Käuferinteresse meist sehr schnell ab. Aus den Verkaufsdat...n ab de... ersten bis zum fünfzigsten Verkaufstag für ein solches Pro... wird d...

Funktion $p(t) = \frac{100000}{\sqrt{t^3}}$ ermittelt. Einheit für p(t): $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\ldots}\right]$

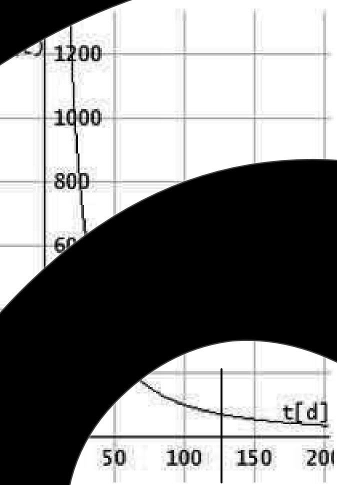
Das Diagramm nebenan zeigt den Verlauf d... ...unkt...

Aus diesen Daten soll nun für die Planun... ...r Produkt...n b...chnet werden, wie viele Teile davon insgesamt ...uft we...n können.

a) Erläutern Sie, war... ...Fläche zwisc... Funktion u... ...Achse der A...zahl der insgesamt verkauften Teile entspricht.

b) ...grü... ...arum man ...i der Berech...g der Fläche für die untere Grenze a den Wert x = 1 ...setzen ...n, jedoch ...obere Gre... ...existiert.

c) ... ...zwischen Funktion und x-Achse berechnen ... bis ins Unendliche ausdehnt.



g

Erläutern... ...benstehenden Abbildung die grundlegende... ...atz bei der Flächenberechnu...

Vervollständigen Sie fehlende Angabe den Re ngen und erläutern Sie unter Angabe der Zeile mmern entscheidenden Rechenschritt Überl

(1) $A_1(g)=\int_1^g \frac{100000}{\sqrt{t^3}}\,dt$

(2) $A_1(g)=100000\int_1^g \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$

(3) $A_1(g)=100000\int_1^g t^{\_\_}\,dt$

(4) $A_1(g)=100000\left[\frac{\quad}{\_\_\_\_}\right]_1^g$

(5) $A_1(g)=100000\left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_1^g$

(6) $A_1(g)=100000\left(-\frac{2}{\sqrt{g}}-(\_\_\_)\right)$

(7) $A_1(\infty)=\lim\limits_{g\to\infty} A_1(g)$

(8) $A_1(\infty)=\lim 100000\left(\_\_\_\_\_\_\right)$

(9) $A_1(\infty)$ 00000

Zusa ena

 einer Flächenb chnung mithi r Integralrechnung die Integrationsgrenzen nicht ber erden, da ine unktion be weise keine Nullstellen hat, sondern sich der x-Achse nur ann ert, fügt man einer belie Stelle eine Grenze g ein. Man berechnet unter Verwendung der unbekannten Gr zunächst das bestimmte Integral der Funktion und führt anschließend eine Grenzwertbere ung durch. Ergibt sich dabei für den Grenzwert ein endlicher Wert, so wird das Integral als **uneigentliches Integral** bezeichnet.

d) Berechnen Sie die Lücken im Text aus:

(1

$A_4(\infty)=\lim\limits_{g\to\infty}\_\_\_\_ =$

Das **uneigentliche Integral** existiert, da die Fläche den endli) = _____ FE hat.

(2) $A_4(g)$

$\_\_\_\_ \to$

neigentliche Integral existiert nicht, da die Wert hat.

B ungen :

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert lernen

Kapite

Lineare Substitutio

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion........ 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede ung v ächen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab 77

Kapitel 8 – Rekonstru von Funktionen 81

Kapitel 9 – Vol nteg 87

Kapitel 10 Uneig e Int e 89

We führun er Integral chnung

itel 1 eare Subs 91

K el 12 – Allgemein Substitutionsv n 99

Kapitel 13 – Parti ntegration er roduktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ ion bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa hung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)
S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 11: Lineare Substitution

1. Wiederholung Zusammenhang Stammfunktion – Randfunkt itung nktion

Aufgabe 11.1

Verdeutlichen Sie sich am Beispiel der gegebenen Funkti) = 1 + $3x^2$ die Zusammenhänge zwischen Randfunktion f(x), Stammfunktion F(x) Ab nkt n f '(x). Füllen Sie dazu die Lücken im Text aus. Auf das Hinzufügen der Integr konst n soll hier ereinfachung verzichtet werden.

2. Lineare S

Beim er Kettenregel haben Sie bereits nnere und äußere F egriffe spielen nun auch bei der hier Integrationsregel ionen behandelt werden, bei denen die **ktion u(x)** eine **ktion** ist, also d Form **u(x) = ax + b** hat.

nun folgenden Aufgabe sollen grundlegende ammenhänge zw Randfunktion f(x) er zugehörigen Ableitungsfunktion f '(x) für en verschiedene klassen mit er innerer Funktion wiederholt werden.

Aufgabe 11.2

Ableitung von Funktionen mit linearer innerer Funktion
Geben Sie für die folgenden Funktionen f(x) die innere Funktion u(x) u… die … Funktion v(u) an und bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion wie im …piel a):

Funktion	innere Funktion u(x) = ax + b	äuß… Funk… v(u) = …b)	…bleitungsfunktion
a) $r(x) = (ax + b)^3$	u'(x) = a	$v(u) = (u)^3$ $v'(u) = …u)^2 = 3(a…$	$r'(x) = a \cdot 3(ax+b)^2$
b) $s(x) = (ax + b)^4$	… = ____	v(u) = ____ v'…	s'(x) = ____
c) t(x) = … +b	u'(x) = ____	v(u) = ____ v'(u) = ____ =	t'(x) = ____ =
d) w(x) = sin(ax+b)	u'(x) = ____	v(u) = ____ v'(u) = ____	w'(x) = ____

Ergänzen …

… v(ax+b) enthält aus der inneren … Faktor ____ und als zweiten Faktor die … ____________

…ktion, also v'(ax+b).

Man kann das Ergebnis daher in der Form **f '(x) = a v'(ax+b)** darste…

Aufgabe 11…

Integr… …arer innerer Funktion
Mit … aus der Ab…ng von Funktionen mit linearen Verkettun… …hilfe bereits be… …nfunktionen soll nun anhand der Beispiele aus Aufgabe 11.2 e… …n auf die I… …ser Funktionen geschlossen werden. Bearbeit…n Sie dazu auf de… Seite das …(x) = $(ax + b)^3$ und gehen Sie anschließend b… …n anderen Funkti… dazu vor. …reits mit Ihrer ersten Vermutung zu einer …ktion richtig liege… …sich das …nd Prüfen einer zweiten Vermutung.

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	Stammfunktion
$f(x) = x^3$		$F(x) = \frac{1}{4}x^4$
$r(x) = (ax + b)^3$	**Vermutung 1:** $R(x) = \frac{1}{4}(ax…$ **Prüfen:** $R'… 4 \cdot \frac{1}{4}(a…)^3$ $= a(ax…)^3 \neq r(x)$ **Ergebnis: Die Vermutung 1 ist falsch.** **Vermutung 2:** $R… = \frac{1}{a}\frac{1}{4}(ax+…$ **Prüfen:** $R'(x) = a \cdot 4 \cdot \frac{1}{a}\frac{1}{4}(ax+b)^3$ $= (ax+b)^3 = r…$ **Ergebnis: Die Vermutung 2 ist richtig.** …r durch die innere …bleitung entstandene Faktor a muss durch Hinzunahme des Faktors $\frac{1}{a}$ bei R(x) korrigiert werden.	$R(…) = \frac{1}{4a}(ax+b)^4$

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	Stammfunktion
$f(x) = x^4$		F(x)= ____
…b)^4	Vermutung 1: ____ Prüfen: …st ____	S(x) = ____

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	...mmf...tion
$f(x)=\sqrt{x}$		...) ______
$t(x)=\sqrt{ax+b}$	Vermutung 1: ______ Prüfen: Die V...utung ist ______	T(x) = ______
f(x) = sin...		F(x)= ______
...(x) = ...(ax+b)	Verm...g 1: ______ ...üfen: Die Vermutung ist ______	W(x) = ______

..., bei denen die innere Funktion die Form f(x... ...den integriert, indem man ______ Funktion integriert und dies... ...h die Ableitung der ______ Funktion also durch ____ dividiert.

...are Substitutionsregel:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) \quad \text{mit} \quad a,b \in IR \text{ und } a \neq 0$$

E... ...bungen: ______

3. Ergänzung zur unbestimmten Integration über das ausführliche linea... ...bstitu...nsverfahren

Wenn die Funktionen komplizierter werden, ist es günstig, mit d... ...führlic... ...titutions-verfahren zu arbeiten. Dieses Verfahren wird hier zunächst an z... ...en Beispielen erklärt, kann aber auch bei Funktionen angewandt werden, deren inne... Funk... nic... ...ist.

Beispiel 1:

Der Ausdruck in der Klam... also die innere F...ion ... durch u ersetzt.

Die innere Funktion wird nach ... abgeleitet. Anstatt u' schreibt man hier $\frac{du}{dx}$

$F(x)=\int(1-2x)^3dx$ ...bstitution

Inhalt der Klammer und dx werden ersetzt bzw. substituiert.

$u=1-...$

$\frac{du}{dx}=-2$

Auflösen nach dx

$...=-\frac{1}{2}du$

$F(...)=\int u^3(-...)$

Wenn mög-lich, verein-fachen ... dan... rie...

$...\int u^3du$

$...)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4$

$F(...)=-\frac{1}{8}(1-2...)...+...$

R...substituieren und ...tegrationskonstante ...fügen.

...spiel 2:

...eispiel 2 wird ge...gt, wie m... ...ache gebrochen rationale Funktionen, also Funktionen, bei d...en x im Nenn... ...eht, mithilf... ...Substitutionsregel integrieren kann. Erläutern Sie die einzelnen Schritte:

$F(x)=\int\frac{1}{(1+3x)^2}dx$ Substitution

$u=1+3x$ ______

______

... 3 ______

$...=\int\frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{3}du$ ______

$F(x)=\int u^{-2}\frac{1}{3}du$ ______

$F(x)=\frac{1}{3}\int u^{-2}d...$ ______

F(x)... ______

______

$...\frac{1}{3(1+3x)}+c$ ______

4. Ergänzung zur bestimmten Integration über das ausführliche lineare Subst[illegible]ensve[illegible]ren

Es gibt verschiedenen Möglichkeiten beim ausführlichen linearen Subs[illegible]fahren mit den Integrationsgrenzen umzugehen. Hier wird für die Funktion $t(x)=\sqrt{2x+[illegible]}$ (vgl. [illegible]11.3) nur die Methode beschrieben, bei der die Grenzen beibehalten und e[illegible]ch de[illegible]ksubstitution eingesetzt werden.

Ergänzen Sie die Rechnungen:

$$T(x)=\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,d[illegible]$$

Die Grenzen 0 und 4 sind nur für die Variable x gültig. Das wird nach der Substitution berücksichtigt, inde[illegible] für jeden Ausdruck, in dem u v[illegible]mt, explizit [illegible] Grenz[illegible] = 0 u[illegible] x[illegible]4 n[illegible]t wird.

[illegible]tution

$\frac{du}{dx}=$

$dx=$

Vor dem E[illegible]setzen der Grenze[illegible] muss rück[illegible]tuiert werden.

$$T(u)=\int_{x=0}^{x=4}\sqrt{\_\_\_}\,\frac{du}{\_\_}=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=4}u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{[illegible]}\Big[\_\_\_\_\_\_\Big]_{x=0}^{x=4}$$

$$P(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{[illegible]}\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^4=\_\_\_\_\_\_\_\_=\frac{\_\_}{3}\approx 8{,}67FE$$

Nach der Rücksubstitution werden di[illegible]nzen wie gewohnt [illegible]geben und eingesetzt.

Ü11.1 Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \sin(ax+b)\,dx$ (Ergebnis vgl. Aufgabe 11.3) und das besti[illegible]is: $\int^{\pi} \cos(-0{,}5x)dx = 4FE$).

5. Lineare Substitution bei der e-Funktion

Sie wissen bereits, dass man die Stammfunktion bei linear verk[illegible] Funkti[illegible]ife der linearen Substitution ermitteln kann. Um diese Regel auf die e-F[illegible]uwenden, soll hier die im Kasten Stammfunktion angegebene Funktion F(x) durch Ableiten [illegible]ifiz[illegible]en.

Aufgabe 11.4
Leiten Sie die angegebene Stammfunktion ab u[illegible]rmu[illegible]e ei[illegible] Merksatz für die Bildung der Stammfunktion bei diesem Typ von e-Funktionen.

Ableitungsfunktion	← ableiten	Funktion	integrieren →	Stammfunktion
$f'(x)=ae^{ax+b}$		$f(x)=$ [illegible]		$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}$ [illegible]

ableiten

$F'(x)=$ ____________

____

____

____

Aufgabe 11.5
Geben Sie jeweils die Ableitungs- und Stammfunktion an:

$f'(x)=$	← ableiten	Funktion $f(x)=e^{x}$	integrieren →	$F(x)=$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$F(x)=$
$f'(x)=$	← ableiten	Funktion $f(x)=e^{2x}$	[illegible]	[illegible]
$f'(x)=$	← ableiten	Funktion $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$	integrieren →	[illegible]
[illegible]	[illegible]	Funktion $f(x)=e^{1-x}$	integrieren →	$F($[illegible]
[illegible]$(x)=$	← [illegible]bleiten	Funktion $f(x)=e^{2x-3}$	integrieren →	$F(x)=$

[illegible]nde Übungen: ____________________

Raum für Rechnungen und Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrech…
selbstorganisi… …len

Kapite…

Allgemeines Substitutions… …n

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede[...] v[...]chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab[...] 77

Kapitel 8 – Rekonstru[...] von [...]ktionen 81

Kapitel 9 – Vol[...]integ[...] 87

Kapitel 10 – Uneig[...]e Int[...]e 89

We[...]führun[...]er Integral[...]hnung

[...]itel 1[...] – [...]eare Subs[...] 91

[...]el 12 – Allgemein[...] Substitutionsverfahren 99

Kapitel 13 – Partie[...]ntegration [...]er [...]oduktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ[...]on bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa[...]nung selbstorganisiert erlernen [...]2-030-251)

S[...]

[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[...]
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

Kapitel 12: Allgemeines Substitutionsverfahren

Wie Sie im Kapitel "Lineare Substitution" bereits erkannt haben, wi[...] Integra[...]sverfahren bei Funktionen eingesetzt, bei denen man zum Ableiten die Kettenregel [...]we[...] Wie bei der linearen Substitution wird meist auch bei komplizierteren Funktione[...] inne[...] substituiert. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen häufig auftretende Standardmetho[...]ei de[...]stitution behandelt werden.

1. Standardverfahren bei der Integration durch S[...]

Die standardmäßige Vorgehensweise be[...]tegra[...] durch Substitutio[...] an[...]and der folgenden Funktionen beispielhaft verdeutlicht we[...]. Das Subst[...]nsverfahre[...] vor allem dann angewendet werden, wenn im Funktio[...]rm die A[...]eitung einer inn[...]en Funktion u(x) als Faktor vorkommt.

$u(x) = 2 - 3x^2$

m(x) = –10x(2–[...]

u'(x) = [...] ste[...] de[...]10x = $\frac{...}{3}$

u'(x) [...]kt hier [...] denn 4x = 2 · 2[...]

n(x) = [...]

u(x) = x² + 8[...]

u'(x) = 2x
steckt hier
drin, denn
$x = \frac{1}{2} \cdot 2x$

$\mathbf{p(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x^2-1}}}$

$u(x) = x^2 - 1$

g(x)=[...]in(x) cos(x)

u(x) = sin(x)

u'(x) = cos(x)

Aufgabe 12.1

Erläutern Sie f[...] jeweils erfolgten Rechnungen bzw. ergänzen Sie fehlende Rech[...]

[...]bstitution

$\int -10x(2-3x^2)^4 dx$ | D[...] wird su[...]

Substitution: $u = 2 - 3x^2$ | __________

$\frac{du}{dx} = 6x$ | __________

____

____

____

[...] du | x muss sich vollständig kürzen lassen.

$= \frac{5}{3}\frac{1}{5}u^5$ | __________

$[...]x) = \frac{1}{3}(2-3x^2)^5 + c$ | __________

b) Unbestimmte Integration der Funktion n(x) durch Substitution

$$N(x)=\int\frac{4x}{(x^2+8)^2}\,dx$$

Auch hier wird die innere Funktion

Substitution: $u=x^2+8$

$$\frac{du}{dx}=2x$$

$$dx=\frac{du}{2x}$$

$$N(u)=\int\frac{4x}{u^2}\frac{du}{2x}=2\int\frac{1}{u^2}\,du=-\frac{2}{u}$$

$$N(x)=\_\_\_\_+c$$

c) Besti… Integ…on der Funktion …x) durch Su…ution

E… …chiede… Möglichk… …ei der Int…ation durch Substitution mit den In… …zu… …ier wird nu… Methode beschrieben, bei der die Grenzen bei…alten und erst nach d… Rücksubstitu… eingesetzt werden.

… Sie die …chnungen:

$$P(x)=\int_0^{0,5}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Substitution…

Die Grenzen 0 und 0,5 sind nur für die Variable x gültig. Das wird nach der Substitution berücksichtigt, …em für jeden Ausdruck, in dem u … explizit für die Grenzen …5 notiert wird.

$dx=\_\_\_\_$

$$P(x)=\int_{x=0}^{x=0,5}\frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{-2x}=-\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=0,5}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=0,5}u^{-\frac{1}{2}}\,du=\Big[\_\_\_\_\Big]_{x=0}^{x=0,5}$$

$$P(x)=\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{0,5}=\_\_\_\_=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

…Einsetzen …n muss …iert

…stitution werden die Grenzen …gewohnt angegeben und eingesetzt.

d) Bestimmte Integration der Funktion q(x) durch Substitution

$$A_0(0,5\pi)=\int_0^{0,5\pi}\sin^2(x)\cos(x)\,dx=\int_0^{0,5\pi}(\sin(x))^2\cos(x)\,dx$$

…hier k… …s(x), …ie …ung der …er… …tion sin(x), …ktor im …tionsterm vor.

Substitution: $u=\sin(x)$

$$\frac{du}{dx}=\_\_\_\_$$

$dx=\_\_\_\_$

…s(x) ka… man kürzen.

$$A_0(0,5\pi)=\int_{x=0}^{x=0,5\pi}u^2\cos(x)\ldots$$

$$A_0(0,5\pi)=\left[\frac{1}{\ldots}\ldots\right]=\_\_\_\_=\frac{1}{3}$$

2. Kom… …substitu…onsverfahren …hilfe des Ta… …s lösen

Die …gration … Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$ ist kom…ziert, muss aber nicht in allen Details …rchg… …uden, da in Tafelwerken bzw. Formelsammlungen die Stammfunktion hierzu angeben …l. Um…ungsschritte werden jedoch …ndig, wenn die Funktion nicht genau in dieser Form …ben ist, sondern … in der Form $f(x)=\frac{1}{a^2x^2+1}$. Anhand dieses Beispiels sollen die gr…dlegenden Ü…egungen für den Lösungsweg dargestellt werden. Dieser Lösungsweg kann dann auf ähnliche Integrale übertragen werden.

$$f_t(x)=\frac{1}{t^2x^2+1}=\frac{1}{t^2(x^2\ldots)}=\frac{1}{t^2}\frac{1}{(\ldots+\frac{1}{t^2})}$$

Der Ausdruck muss algebraisch so umgeformt werden, dass der Bruch dem Ausdruck $\frac{1}{x^2+a^2}$ im Tafelwerk entspricht. Hier wird für …so $\frac{1}{t^2}$ eingesetzt.

$$F_t(x)=\frac{1}{t^2}(t\arctan(tx))+c=\frac{\arctan(tx)}{t}+c$$

…rk ist als Stammfunktion der A… …n$\left(\frac{x}{a}\right)$ angegeben. Man muss nun … durch $\frac{1}{t}$ ersetzen und wenn möglich vereinfa…

Ü12.1 Ermitteln Sie die Stammfunktion von $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ auf dem ent[…]rechen[…] Weg[…]

E[…]ungen: ______________________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapite[…]

Partielle Integration o[…] […]uktintegration

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun[illegible]

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede[illegible] v[illegible]chen 71
Kapitel 7 – Parameteraufgab[illegible] 77
Kapitel 8 – Rekonstru[illegible] von [illegible]unktionen 81
Kapitel 9 – Vol[illegible]nteg[illegible] 87
Kapitel 10 – Uneig[illegible]e In[illegible]e 89

[illegible]führun[illegible]er Integral[illegible]chnung

[illegible]itel 1[illegible] [illegible]eare Subs[illegible]ion 91
[illegible]el 12 – Allgemein[illegible]ubstitutionsv[illegible]n 99
Kapitel 13 – Partiel[illegible]ntegration oder Produktintegration 103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integ[illegible]ion bei e-Funktionen 107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa[illegible] [illegible]nung selbstorganisiert erlernen [illegible]2-030-251)

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 13: Partielle Integration oder Produktintegration

1. Voraussetzung für die Anwendung der Formel

Voraussetzung für diese Integrationsvariante ist, dass si[illegible] die zu [illegible] Funktion $\int f(x)dx$ aus einem Produkt von zwei Funktionen zusammensetzt.

Beispiel: $f(x) = 4x\sin(x) = \underbrace{4x}_{1.Faktor} \cdot \sin(x)$

Ein Fa[illegible]t die Funkt[illegible]
De[illegible] ande[illegible] Faktor di[illegible] Funktion sin(x).

Sie wissen bereits, dass ma[illegible] unktion[illegible] aus [illegible] Produkt zwe[illegible] [illegible]ktionen zusammensetzen, also in [illegible] $u(x)\cdot v(x)$ vorl[illegible]en, [illegible]r die Able[illegible] die Produktregel anwenden muss. Der Integra[illegible] von [illegible]tionen dies[illegible] Ty[illegible] liegt eb[illegible] die Produktregel zugrunde.

2. Herleitung der [illegible]

Die P[illegible] für [illegible] Ableiten wir[illegible] erwendung [illegible] f'(x) = (u·v)' in leicht veränderter Form noti[illegible]

$$f'(x) = u'v + v'u$$
oder
$$[illegible] = u'v + v'u$$

[illegible] f'(x) schreibt ma[illegible] (u·v)'

Entweder nach u'v oder nach [illegible] auflösen. (vgl. Ü13.1)

$$v'u = (u\cdot v)' - u'v$$

Beide Seiten inte[illegible]

$$[illegible] - \int u'v\,dx$$

$$\boxed{\int v'u\,dx = u\cdot v [illegible]}$$

aus $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = (uv)'$
da $\int f'(x)dx = f(x)$
[illegible] $\int (uv)'dx = uv$

3. Hinweise zur Form[illegible]

Das Integ[illegible] ist kompliziert, kann aber a[illegible] einer Funktion und einer [illegible]ellt werden. Wie im folgenden Be[illegible]tlicht wird, entsteht du[illegible]u und v' zu diesem Produkt auf der [illegible] der Formel ein [illegible]st als das Ausgangsintegral.

$$\int v'u\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx$$

kompliziertes Integral aus der Aufgabenstellung

Integra[illegible]er als in de[illegible] Aufgabe[illegible]

4. Produktintegration am Beispiel f(x) = 4x sin(x)

Wie Sie oben schon erkannt haben, besteht der Funktionsterm aus zw… …toren. … festgelegt, wie man die beiden Faktoren den Funktionen u(x) oder u … v' zuordnet. Man ordnet die Faktoren jedoch standardmäßig so zu, dass man den Faktor … u … der sich beim Ableiten vereinfacht. In der folgenden Aufgaben werden beide …lichk… Zuordnung und das daraus resultierende Ergebnis für die Berechnung des Integrals …igt.

$f(x) = \int … \sin(x)dx$

Auswahlmöglichkeit f… Zuor…ng von u u… v

Möglichkei… Möglichk…

$\int \underbrace{4x}_{v'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u} …$ $\int \underbrace{4x}_{u} \cdot \underbrace{…}_{v'} dx$

u = sin(x) v = … … v = ______

u' = ______ … 4x u' = ______ v' = sin(x)

u'v … (x) $u'v = -4\cos(x)$

De… …ck u'v = …²cos(…) ist kompli…rter als das A…gangsintegral, da sich der Faktor 4x nicht vereinfac…

Möglichkeit 1 verwerfen

Der Ausdruck u'v = – 4cos(x) ist einfacher als das Ausgangsintegral, da sich der Faktor 4x vereinfacht.

Möglichkeit 2 wählen

…hführen der Integration durch …setzen in die Formel

$… \int u'v\,dx$

$\int 4x\sin… …(x) - \int -4\cos(x)dx$

$\int 4x\sin(x)d… … + 4\int \cos(x)dx$

$F(x) = … 4\sin(x) + c$

Übungen

Ü13.1 Begründen Sie anhand der Beispielaufgabe, dass die oben… …te Fo… $\int v'u\,dx = u \cdot v - \int u'v\,dx$ und die Formel $\int u'v\,dx = u \cdot v - \int v…dx$ …wertig sind.

Ü1… …fahrens der partiellen Integration … cos(2 + x) die Stammfunktion …(2 + x) + 2x sin(2 + x)

$f(x) = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{co…}_{v'}$

u = 2x v = ______

u' = ______ v' = cos(2+x)

…el $\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$

$\int 2x\cos(2+x)dx =$ ______________________

Ü13.3 Erläutern Sie in Stichworten die Bedeutung einzelnen Zeilen bzw. die erfolg… Umform…gen und Berechnungen. Formulieren Sie, welche Besonderheit hier au…

$F(x)=\int \sin^2(x)\,dx=\int \underbrace{\sin(x)}_{u}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{v'}\,dx$ (1)____________

(2) $u=\sin(x)$ $v=$____

$u'=$______ $v'=\sin(x)$

$\int uv'\,dx = uv-\int u'v\,dx$

$\int \sin^2(x)\,dx=-\sin(x)\cos(x)-\int \cos(x)(-\cos\ldots)\,dx$

$\int \sin^2(x)\,dx=-\sin(x)\cos(x)+\int \cos\ldots$

$\int \sin^2(x)\,dx=-\sin(x)\cos(x)+\int \ldots \sin\ldots$ (4)____________

$\int \sin^2(x)\,dx=-\sin(x)\cos\ldots\int 1dx\ldots\int \sin^2(x)\ldots$

$2\int \sin^2(x)\,dx=-\sin\ldots\cos(x)\ldots x$ … (5)____________

$\int \sin^2(x)\,dx=-\frac{1}{2}\sin\ldots(x)\ldots\frac{\ldots}{2}\ldots$

(5) … (6)____________

… (8)____________

(8) … (9)____________

Besond…____________

E… …bungen: ____________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

Kapitel …

Beispiele zur Integrat… …e-Funktionen

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion 25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bed ung v ächen 71
Kapitel 7 – Parameteraufgab 77
Kapitel 8 – Rekonstru von ktionen 81
Kapitel 9 – Vol Integ 87
Kapitel 10 – Uneig e In e 89

We führun er Integral chnung

Kapitel 1 eare Subst 91
Kapitel 12 – Allgemein Substitutionsv 99
Kapitel 13 – Partie ntegration Produktintegration 103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integ on bei e-Funktionen 107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesa nung selbstorganisiert erlernen 2-030-251)
S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 14: Beispiele zur Integration von e-Funktionen

1. Numerische Integration

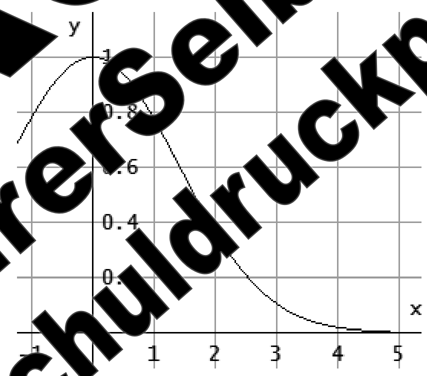
Für e-Funktionen wie $f(x)=e^{-x^2}$ existiert keine Stammf ion. Da n das Substitutionsverfahren und die partielle Integration nicht anwenden. F n kön hier jedoch mit numerischen Verfahren wie der Mittelwertbildung aus Ober- u Unter ode em Trapezverfahren approximiert werden.

Aufgabe 14.1

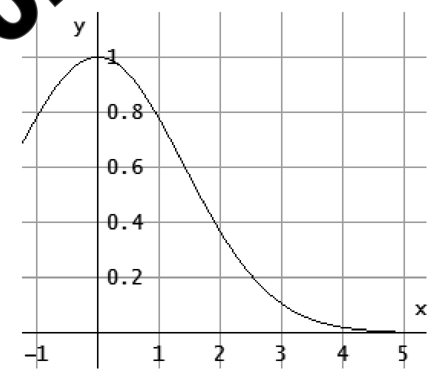
Ermitteln Sie einen Näherungs für Fläche che die Fu on $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ntervall [0;4] mit der x-Achse einschließt dem Sie die ei einer enbreite v $\Delta x = 1$ mithilfe von Ober- und Untersumme ap Kontrollergebnis A ≈ ,76 FE)

a) Zeichnen Si beiden Abbildu im e ante en für summe w. für die U umm n.

Obersumme



Untersumme



b) Ermitteln Sie die folgend Funktionswerte und berechnen Sie den Näherungswert für die Fläche A .

f(0) = ___

)= ___

f(4)= ___

Obersumm ___

U ___

gswert für die Fläche: A ≈ ___

utern Sie, wie man den Nährungswert für A ssern kann:

___

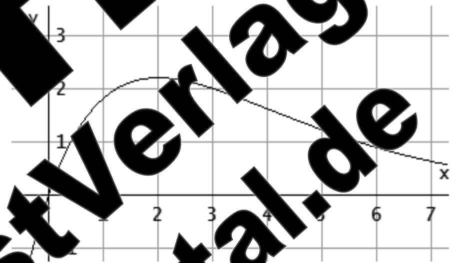
2. Die Produktintegration bei e-Funktionen mit linearer innerer Funktion

e-Funktionen mit einer linearen Funktion u(x) im Exponenten und eine ... in dem x^n vorkommt, werden mithilfe der Produktintegration integriert.

Aufgabe 14.2

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 3xe^{-\frac{1}{2}x}$ m... x-Achse einen endlichen Flächeninhalt von ... 12 FE einschließt.

Zeigen Sie dazu durch Ergänzun... es Rechenwe... ss f(x) die angegebene Stammfunkt... und fügen Sie in der Abbildung eine b... bige ... re Gre... g ein (vgl. uneigentliche Inte... apitel ...).



Ermittlung ... funk...

$\int \underbrace{3x}_{u} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{v'} dx$

u = 3x

u'=______ $v' = e^{-\frac{1}{2}x}$

Formel: $\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$

$\int 3xe^{-\frac{1}{2}x} dx$ ...

______ – ______

$F(x) = -6e^{-\frac{1}{2}x}(x+2)+c$

Berechnung des Flächeninhalts:

$A_0(g) = \int^{g} f(...$ ______

A... ______

3. Ergänzende Betrachtung zur nichtlinearen Substitution bei e-...ktione...

Für e-Funktionen der Form $f(x) = ax^{n-1}e^{bx^n}$ bietet sich das Substit...ns...ren an, da im Vorfaktor die Ableitung des Exponenten enthalten ist.

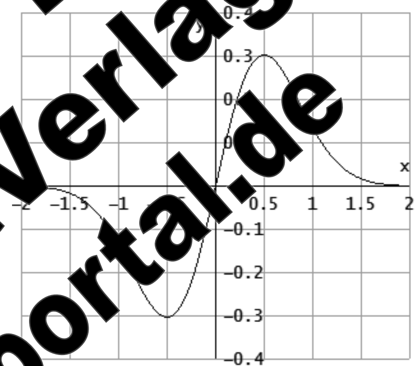
Aufgabe 14.3

Zeigen Sie, dass die Fläche, welche d... ...unktion

$f(x) = x...$

im ersten Quadranten mit d... x-A... ...schließt, einen endlichen Flächeninhalt von ... FE h...

Ergänzen Sie d... in d... Abbild... ...e beliebig... ...ere Grenze g (vgl. ... ...er... Integrale im Kapitel 10) sowie im Vorschlag für ... ...ösu... ...g fehlende Berechnungen und A...



$A_0(... \int_0 xe^{-2x^2} dx$

Substitution: $u = -2x^2$

$\frac{du}{dx} = $ ___

dx = ___

$A_0(g) = [\_\_\_\_]_0^g = -\frac{1}{4}\left(e^{-g^2}-1\right)$

$A_0(\infty) = \lim_{g\to\infty} -\frac{1}{4}\left(e^{-g^2}-1\right) = $ ___

...de Übungen: ______

Raum für Rechnungen und Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechn[illegible]
selbstorganisi[illegible]

Kapite[illegible]

Logarithmische Integr[illegible]

02-030-251

Einführung in die Integralrechung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion. 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnun…

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bede…tung v… …chen 71

Kapitel 7 – Parameteraufgab… 77

Kapitel 8 – Rekonstru… von Funktionen 81

Kapitel 9 – Vol… Integ… 87

Kapitel 10 – Uneig… …e In…e 89

We…führun… …er Integral…chnung

…itel 1… …eare Subs…tion 91

…tel 12 – Allgemein… Substitutionsv… 99

Kapitel 13 – Partie… Integration …der Produktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integ…on bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Kapitel 15: Logarithmische Integration

Besonders einfach ist die Integration durch Substitution, wenn die … …in die … $(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden kann. Ergänzen Sie:

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{1+4x}$ Substitution $u = 1 + 4$…

$\frac{}{x}$ = ___

= ___

$F(x) = \int \frac{1}{u}$ ___ $= \frac{1}{4}$ …

$F(x) = \frac{1}{}$ … $|$

$F(x) = \frac{}{4}$ … $x|$

Die Subst… …führt zum Ausd… $\int \frac{1}{u}\,du$, w…s …h der Integ…tion … $|u|$ ergibt.

Betrag… …e können e… …fallen, wen… …ein Ausdru… …steht, …er …er positiv ist.

E…änz… Sie zum …rksatz:

> … alle Funktionen, we… … die Form …(x) = k $\frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden können, auf das …tegral k$\int$ ___ … führen, k… …n das ausführliche Integrationsverfahren umgehen und die Stammfunktion sofort mit d… Formel $F(x) =$ ___________ ermitteln.

Ü15.1

… …en an. Achten Sie auf Betragsstriche:

…(x) $= \frac{3}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{}{\sin(…}$ … $f(x) = \frac{x}{9x^2+1}$

$F(x) =$ $F(x) =$

d) … $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ f) …

…= $F(x) =$ $F(x$…

…nde Übungen: ________________________________

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen