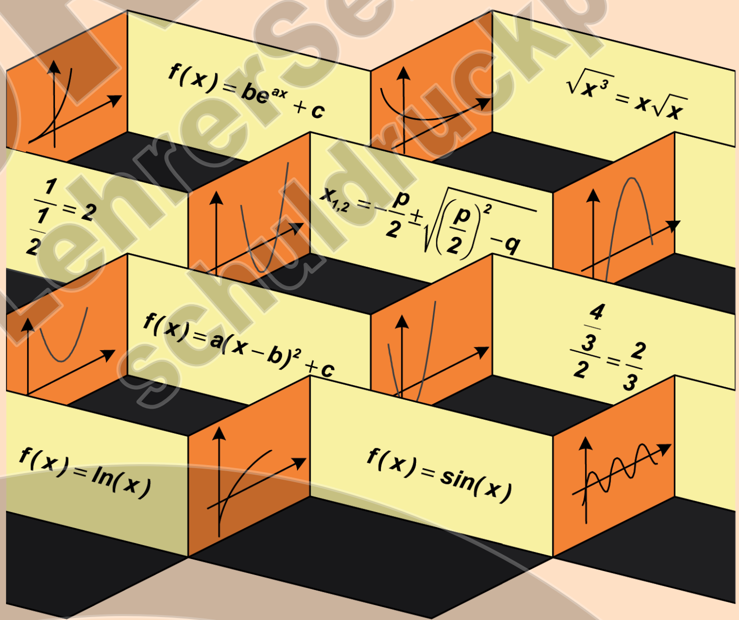
Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-033-279

Umschlag Vorderseite (Innen)

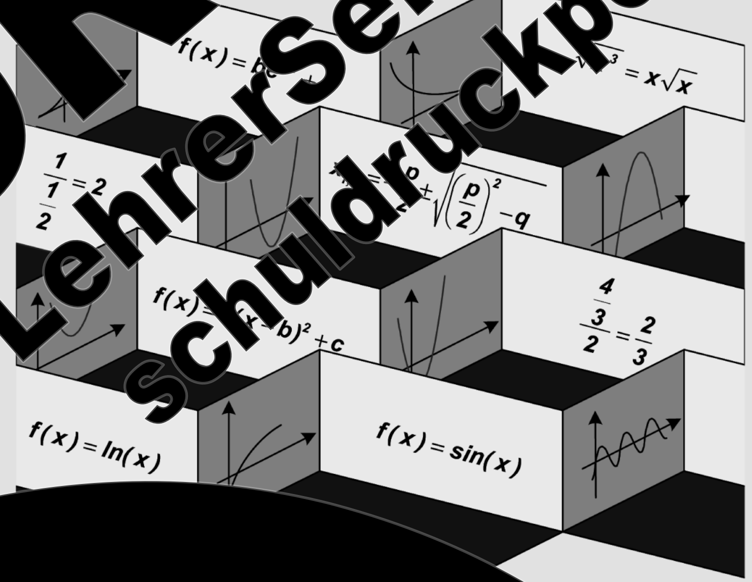
(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Brüche, Potenzen, Wu… und Binome

Gesamtw[illegible] [illegible]s zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
St[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F[illegible]

Grundle[illegible]es zu [illegible]gebra u[illegible]unktionen

selbstorgan[illegible]ert erlernen

[illegible]e Mathematik

[illegible]estellnummer 02-033-279

Stand: 01.09.2015

L… g
…eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2014
…erselbstverlag.de

…www.f-druck.de

Kapitel 4:
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

Kapi[illegible] 5:
[illegible]onale Funktionen 2. Grades

Kapitel 6:
Gleichungen 3. und höheren Grades

Kapitel 7:
Ganzrationale Funktionen 3. und h[illegible]ren Gr[illegible]s

Kap[illegible] 8:
U[illegible]rfunkt[illegible]en

[illegible]etrische Funktionen

Kapitel 10: Exponential- und Logarithmusfunktionen

Kapitel 11 [illegible]de Betrachtung [illegible] Betragsun[illegible]chungen

Vorwort

Grundlegende Kenntnisse zur Algebra und zu Funktionen sind Voraussetzung für das Verständnis der Mathematik an weiterführenden Schulformen und an Hochschulen und damit der Schlüssel zum Erfolg auf einem eingeschlagenen Bildungsweg. Erfahrungen an Schule und Hochschule zeigen allerdings, dass gerade hinsichtlich dieser Thematik häufig Kenntnisse fehlen oder verschüttet sind und Lernende das Verständnis neuer mathematischer Zusammenhänge nicht gelingen kann, da sie an elem[illegible] Umformungen, die beispielsweise Brüche, Pote[illegible] und Binome enthalten, scheitern.

Das Ziel des vorliegenden Arbeitsbu[illegible] da[illegible]lende Grundkenntnisse aufzuarbe[illegible] und zu ergän[illegible]. Dabei werden die zentralen Zusam[illegible] schrittig und unter Verzicht auf [illegible] un[illegible] no[illegible]ndige Formalismen erklärt un[illegible]ielen v[illegible]t. Die Beispiele und Übun[illegible]gabe[illegible]ind s[illegible]ltet, das möglichst schnell ein[illegible] für das Verständnis der Mathe[illegible]tik a[illegible]erfü[illegible]en Schu[illegible] [illegible] auch Hoc[illegible]stern[illegible] beschränken [illegible] nicht nu[illegible] ein A[illegible]erun[illegible]ofil der Sek[illegible]ufe I. So [illegible] Umform[illegible]n, die bei der [illegible]nung des D[illegible]enz[illegible]tiente[illegible]eim Ableitu[illegible]ül und bei de[illegible]egra[illegible]ftreten, losge[illegible]t von diesen T[illegible]men [illegible]s rein algebraischer Si[illegible]handelt.

Zielg[illegible]pen und H[illegible]ise zur Hand[illegible]abung des Arbeitsbuchs

Die einzelnen Themen des Arbeitsbu[illegible] bauen aufeinander auf, so dass eine systematische Bearbeitung der einzelnen Kapitel in der vorgegebenen Reihenfolge sinnvoll ist. Die Lernenden [illegible]gani-sierten Le[illegible] Frag[illegible] [illegible]texte ausfüllen und Bere[illegible] [illegible]ren bzw. ergänzen oder beschreiben. D[illegible] [illegible]e bzw. Curricula eine Behandlung von wieder[illegible]enden Themen in weiterführenden Schulformen üblicherweise nicht vorsehen und Schulbücher diese Themen ebenfalls nicht beinhalten, ist diese Lernform hervorragend dazu geeignet, da[illegible] Schülerinnen anhand des Arbeits[illegible] Stoffs selbständig bew[illegible]erfolg selbst kontrolli[illegible]sheft in Form einer [illegible]g. Dass dieses Kon[illegible] [illegible] Schülerin:

„[illegible]ch angefangen zu arbeiten und alles ver[illegible] [illegible]habe für das Buch 12,50 € ausgegeben und [illegible]n 120,00 € im Monat für Nachhilfe sparen.“

[illegible]isierten Zugangsvoraussetzungen zu Hochsch[illegible] [illegible]eben der Erlangung der Fachhochschu[illegible] Hochschulreif[illegible] berufl[illegible]se einschließen, führt zwangs[illegible]m Pr[illegible], dass für angehende Studierend[illegible] Sc[illegible] oft längere Zeit zurückliegt, bzw[illegible]thema[illegible]bereiche, die in der Hochschul[illegible]usges[illegible]erden, gänzlich unbekannt sind. Das v[illegible]de [illegible]itsbuch bildet für diese Zielgrup[illegible] au[illegible] der sie s[illegible]den Anforderungen der [illegible]chulm[illegible]matik nähe[illegible]n. Erste Erfahrungen i[illegible]men eines V[illegible]ku[illegible]mathematik an einer Hochsch[illegible]heinen die[illegible]rmutung zu bestätigen. In der [illegible]edbackrunde de[illegible] Vorkurses wurd[illegible]durchweg positive [illegible]ewertung[illegible]n das Arbeiten [illegible] Buch abgegeben:

„Gute [illegible]egsmöglich[illegible]t für Langzeit-Mathe-Abs[illegible]enzler“
„[illegible]urch Buch gute [illegible]olung und Auffüllung vo[illegible] Lücken“
„Für Ex-Schü[illegible]it Mathe Leistungskurs gute Wiederh[illegible]“
„Gute [illegible]benarbeit“
„B[illegible] nur zuhören.“

[illegible]pitel 1
Die Themen in diesem Kapitel beziehen sich auf die Themen Bruchrechnung, Potenzen und binomische Formeln und sind damit Grundlage für die folgenden Kapitel.

Kapitel 2
Da das Lösen linearer Gleichungen den Lernenenden in der Regel keine größeren Probleme bereitet, ist dieses Kapitel knapp gehalten. Die Gleichungen sind unter folgenden Gesichtspunkten ausgewählt worden:

- Anwenden und Wiederholen von Bruchrechnung und binomischen Formeln.
- Thematisieren von parametrisierten Gleichungen.
- [illegible]rgänzende Betrachtungen von Bruchgleichungen.
- [illegible]eare Gleichungen und Ungleichungen wird im [illegible]les Lösens von quadratischen Ungleichun[illegible]gen.

Kap[illegible]
Da vie[illegible]in der Lage sind, ohne Taschenrechner u[illegible] also alleine aus den Informationen zum [illegible]tt und zur Steigung Geraden zu zeichnen, w[illegible]ma ausführlich behandelt. Zudem werden [illegible] für alle Funktionsklassen gültige Ansätze, zu[illegible] von Achsenabschnitten und Schnittpunkten [illegible]

Kapitel 4
Quadratische Gleichung[illegible] Lösung mithilfe der [illegible]ormel sind in der Re[illegible] Allerdings ist die An[illegible]ung alternativer Lö[illegible]den meist Neuland, [illegible]s rein rechnerisch[illegible]er Anwendung der [illegible]mel bereitet oft e[illegible]bleme. Eine klein-

schrittige Erläuterung der Lösungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von der Form der Gleichung und umfangreiche Übungen dazu stehen hier im Mittelpunkt. Das Lösen von Wurzelgleichungen und quadratischen Ungleichungen wird erweiternd betrachtet.

Kapitel 5
Für die Kenntnisse rund um Parabeln gilt Ähnliches wie für die quadratischen Gleichungen. Grundlagen sind meist vorhanden, jedoch treten häufig schon beim Zeichnen einer verschobenen Normalparabel ohne Erstellung einer Wertetabelle Schwierigkeiten auf. Die hier notwendigen Techniken und die Gesetzmäßigkeiten hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegelns von Parabeln werden an Beispielen vermittelt. [illegible] dazu wird die Darstellung des Funktionsterms in Scheitelpunktform, polynomialer und faktorisierter [illegible] deren Bedeutung und das Umrechnen von [illegible] Darstellungsform in eine andere thematisiert. Die Bedeutung der Diskriminanten bei der Berechnung von [illegible] und bei Schnittpunktproblemen [illegible] pq-Formel werden ebenfalls behandelt.

Kapitel 6 und 7
In diesen beiden Kapiteln [illegible] der Übergang [illegible] Themen [illegible] weiterführenden Schulformen [illegible]. Während in Kapitel 6 [illegible] für Gleichungen 3. und höheren Grades vorgestellt und geübt werden, findet in Kapitel 7 der Einstieg in die Untersuchung von ganzrationalen Funktionen 3. und höheren Grades statt, wobei auch hier der Zusammenhang [illegible] die Bedeutung von Funktionsgleichungen in polynomialer und faktorisierter Form thematisiert [illegible].

Kapitel 8 bis 11
Vertiefende Betrachtungen [illegible] wie Zusammenhänge zwischen Funktionen und deren zugehörigen Umkehrfunktionen sowie [illegible] erweiterte Regeln hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegelns, bilden den Schwerpunkt dieses Kapitels. Die Betrachtungen beziehen sich auf ganzrationale und trigonometrische Funktionen, sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen und die Lösung von Gleichungen, die bei diesen Funktionsklassen auftreten können. Die hier erworbenen Kenntnisse [illegible] anderem Voraussetzung für die Untersuchung komplexer Funktionen im Rahmen der Differenzial- und Integralrechnung in der Qualifizierungsphase der [illegible] Oberstufe sind, kann in dieser Phase auf das Arbeitsbuch zurückgegriffen werden. Der Aufbau und die Struktur ermöglichen hierbei einen Einsatz im Grund- und im Leistungskurs.

Dank
Für Anregungen zur inhaltlichen und formalen Gestaltung danke ich meinem Mann, Dipl.-Ing. Gerold Pirkl und Professor Dr. Thorsten-Karl Strempel von der Hochschule Darmstadt.

Kapitel 1: Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome

Sie haben in der Sekundarstufe I bereits die Gesetze zum Umgang mit Brüchen, Potenzen, Wurzeln und binomischen Formeln kennen gelernt. Allerdings zeigt es sich häufig, [illegible] gerade [illegible] Anwendung dieser elementaren algebraischen Zusammenhänge immer wieder Schwierigkeiten bereitet. Daher soll in diesem Kapitel die Möglichkeit gegeben werden, die wesentlichen [illegible] wiederholen.

Aufgabe 1.1

Arbeiten mit Brüchen

Im Rahmen dieser Aufgabe sollen grundlegende Umformungen bei Brüchen, auf die in späteren Aufgaben und Kapiteln zurückgegriffen wird, wiederholt werden. Es wird hier besonderer Wert darauf gelegt, die einzelnen Rechnungen in Teilschritte zu zerlegen, die bei sicherem Umgang mit Brüchen automatisiert im Kopf ablaufen. [illegible] werden [illegible] Rechenschritte [illegible] aufgelistet und überwiegend in den Sprechblasen verdeutlicht. Arbeiten Sie [illegible] gegebenen Informationen durch und wenden Sie die Verfahren jeweils auf die Übungen an.

Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs wird als **Zähler** bezeichnet.

a) Definition[illegible]

echter Bruch: Der Zähler ist kleiner als der Nenner. Bsp.: $\frac{8}{9}$

Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs wird als **Nenner** bezeichnet.

unechter Bruch: Der Zähler ist größer oder gleich dem Nenner. Bsp.: $\frac{16}{9}$

[illegible] ganze Zahl in einen unechten Bruch [illegible] mit dem Nenner 1 versieht. Bsp.: $4 = \frac{4}{1}$

Eine Zahl be[illegible] und einem gebrochenen Teil und [illegible] ein unechter Bruch. Bsp.: $2\frac{4}{9}$

Achtung!
Bei gemischten Zahlen steht [illegible] ganzen Zahl, hier 2, und dem Bruch ein unsichtbares [illegible] (+) und kein [illegible]ationszeichen (·). $2\frac{4}{9} = 2[illegible]\frac{4}{9} \neq 2 \cdot \frac{4}{9}$

Man erhält den Kehrwert eines Bruches, indem m[illegible] Bruch „umdreht“.

Bsp.: Der Kehrwert des Bru[illegible] ist der Bruch $\frac{5}{4}$.

b) Unechte Brüche und gemischte Zahlen umwandeln

Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

Schritte:

1. Den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl vor dem Bruch multiplizieren.
2. Das Produkt zum vorhandenen Zähler des Bruchs addieren.
3. Der Nenner bleibt gleich.

Beispiel:

Im ...

$\frac{4}{...} = \frac{...5+4}{5} = \frac{15+4}{...5}$

$= \frac{19}{5}$

Umwandeln eines unechten Bruchs in ... gemis...e Zahl

Schritte:

1. Zähler durch den Nenner te...
2. Den ganzzahligen ...ieren.
3. Den Rest als B... dar...len. Dabei kommt d... Zähler; der Nenner bleibt...n.
4. Wen... ble...ntsteht eine ... Zah...

Beispi...

Im Kopf: 29 : 6 = 4 Rest 5

$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$

Üb... zu 1.1.b:
...an... Sie den unechten Bruch in eine gemischte Zahl, bzw. die gemischte Zahl in einen unechten ...

(1) $3\frac{1}{2} =$ ___ (2) $\frac{9}{4} =$ (3) $4\frac{2}{3} =$ ___ (4) $5\frac{3}{4} =$ ___ (5) $\frac{17}{12} =$ ___

...tationen in der Mathematik

Verwendung gemischter Zahlen

Gemischte Zahlen werden in der Mathematik praktisch n... Bei der Anwendung von Mathematik wird diese Darstellung bei Bru... ...nutzt.

Notat... bei Multiplikation und Divisi...

... oben schon erläutert, ein Pluszeic... ...elassen. ... der Mathematik meistens das Malsym... (*) nicht ... Beispielswei... schreibt man anstatt $3 \cdot x$ oder 3*x einfach ...

... Division wird das Geteiltzeichen fast nie durch (:) dargestellt. M... ...t hier ...gerechte Bruchstriche oder den Schrägstich (/... statt y : 5 schrei... ...ler y/5.

c) Erweitern eines Bruchs auf einen vorgegebenen Nenner

Schritte:

1. Wie oft passt der gegebene Nenner in den neuen vorgegebenen Nenner?
2. Zähler und Nenner mit der gefundenen Zahl multiplizieren.

Beispiel:

... auf d... ...nner 20

Im ...: Die ... passt 5-mal in 20, also ...

$= \frac{15}{20}$

Übung zu 1.1.c:
Erweitern Sie auf den angegebenen Ne...:

(1) $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ auf den Nenne...

(2) $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ au... ...er 48

(3) 5 ... den ...ner 16:

...e, dass man 5 auch als $\frac{5}{1}$ dar... kann.

d) Kürzen von Brüchen

i) Method... ...ttweise kürzen

...piel:

... Teiler von Za... ...chen.

2. Zähler und Nenner solange jeweils durch die gleiche Zahl dividieren bis es keinen gemeinsamen Teiler mehr gibt.

12:2=6
18:2=9

6:3=2
9:3=3

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Bei ... ...rholt durch ... ...en, ...eilbar ist. (Die ... ...e 0 oder 5 ...sein).
– ob die Zahl durch 3 geteilt werden kann. (Ist die Quersumme durch 3 teilbar, dann ist es auch die Zahl.)

oder auch kürz...

24:4=6
36:4=9

$\frac{24}{36} = \frac{6}{9} = ...$

ii) Methode 2: Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen

Schritte Methode 2:

Beispiel:

1. Die Zahlen im Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen.

Bsp.: 24:**2**=12
12:**2**=6
6:**2**=**3**

Primfaktore sind ... die nur durch sich ... und 1 teilb... sind, al... 3, 5, 7,11…

2. Die einzelnen Faktoren paarweise im Zähler und Nenner streichen (kürzen).

$\frac{24}{36} = \frac{\cancel{2} \cdot \ldots \cdot \cancel{3}}{\ldots \cdot \cancel{2} \cdot \ldots \cdot 3} = \frac{2}{3}$

iii) Methode 3: Den größt... gem... Teiler (ggT) verwenden

Schritte Methode ...

Beispiel:

1. Den **g**rößten ge... – **ggT** – ... Zä... im Nenner und im ... (s. ...abenteil e)
2. Zähler und Nenner durch diesen größten gemeinsamen Teiler teilen.

Im Kopf: 12 ist der ggT von 24 und 36. $\frac{24:12}{36:12}$

$\frac{24}{36} = \ldots = \frac{2}{3}$

Man darf auch schreiben: $\frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{2}{3}$

iv) Kürzen v...

... mit Methode 1, 2 oder 3 ...

Im Kopf: ... ggT von 18 ... 27 ist 9.

2. Gleiche Variable im Zähler und Nenner paarweise kürzen. Wenn Potenzen auftreten, ggf. Potenzgesetze (s. A...) ...

$\frac{\overset{2}{\cancel{18}}\, a \ldots}{\underset{3}{\cancel{27}}\, \cancel{b}c}$

Übung...

Kürz... gegebenen Brüche so weit wie möglich.

(2) $\frac{22}{1\ldots}$

(3) $\frac{20ab}{48ac} =$

(4) $\frac{45xy}{75xyz} =$

(5) $\frac{405xy}{1080x} =$

(6) $\frac{144\ldots}{720y\ldots}$

(7) $\frac{112uv}{210vw} =$

(8) ... =

e) Hauptnenner ermitteln

Der Hauptnenner (kurz HN) ... das **k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache – **kgV** – bezeichnet. Es gibt wie beim Kürzen ... beim Ermitteln des Hauptnenners bzw. kgV verschiedene Methoden. An dieser Stelle wer... zw... Möglichkeiten vorgestellt. Die Ermittlung über die Zerlegung in Primfaktoren ist dabei als ergänzende Möglichkeit gedacht, die meist nur angewandt wird, wenn es sich um große Zahlen handelt, b... Methode über die Kopfrechnung zu aufwendig wird.

Methode 1: Hauptnenner durch Kopfrechnung ermitteln

Bei Brüchen mit kleinen Zahlen kann man das kgV bzw. den Hauptnenner ohne viel Aufwand im Kopf ermitteln.

...te:

1. Den Nenner mit der größeren Zahl auswählen.
2. Die Reihe dieser Zahl (hier 8er-Reihe) im Kopf hochzählen ... kleine...
3. Merk... ge... Bruch ... Hauptnenner hat.

Hauptnenner von $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$

Im Kopf:
8-ter Reihe: 8, 16, 24, ...
6 passt nicht in 8
6 passt nicht in 16
6 passt 4-mal in 24
8 passt 3-mal in 24
... Hauptnenner der b...

$\frac{7}{8} = \frac{\ldots}{24}$ $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$

Im Kopf: $\frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3}$

Im Kopf $\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}$

Methode 2: Ermitteln des Hauptnenners über die Zerlegung in Primfaktoren

Schritte:

1. Alle Brüche, sofern es geht, so weit wie möglich kürzen.
2. Alle Nenner in Primfaktoren zerlegen. Dabei mit dem kleinstmöglichen Primfaktor beginnen. Wenn vorhanden, gleiche Primfaktoren in Spalten untereinander schreiben.
3. Aus jeder Spalte den Primfaktor einmal übernehmen und das Produkt dieser Zahlen bilden.
4. Jeden Bruch so erweitern, das… dem kgV bzw. dem Ha…nner entspricht.

Beispiel:

Hauptnenner v… …nd $\frac{}{42}$ $\frac{}{12}$

Schritt… …nd 3

Primfa…en 5…: $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

P…toren …42: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Prim…ren von 12: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

H…ptnenner: $HN = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

$HN = 168$

Schritt…

$168 : 56 = 3 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3}{56 \cdot 3} = \frac{9}{168}$

$168 : 42 = 4 \Rightarrow \frac{7 \cdot 4}{48 \cdot 4} = \frac{28}{168}$

$168 : 12 = 14 \Rightarrow \frac{5 \cdot 14}{12 \cdot 14} = \frac{70}{168}$

Hin…s:

…efind… …ich im Nenner eine V…iable, so muss man diese Variable im kgV berücksichtigen.

Bsp.: $\frac{}{4a}$ $\frac{}{6}$ auf den H…b…ngen. Das kgV ist 12a und damit ergibt sich: $\frac{9}{12a}, \frac{2a}{12a}$

Übung zu 1.1.e

Bringen Sie die fol… …nenner.

… $\frac{}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}$:

(3) $\frac{4}{5}, 1\frac{2}{3}, \frac{9}{10}$:

(4) $\frac{1}{2}$…

(… …y, $\frac{25}{42}$

f) Brüche addieren oder subtrahieren

Auch wenn die Addition und Subtraktion von Brüchen beim Einsatz eines …enrech…s kaum Probleme bereitet, ist es unbedingt notwendig, die entsprechenden Rechen… zu…nen und anwenden zu können, da der Taschenrechner spätesten beim A… von V… im Nenner keine allzu große Hilfe mehr darstellt. Im Rahmen dieser Aufgabe …erd… …gliche Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen exem…risch d…est…

Beispiel 1: Addition bei Bruchtermen

Man kann alle ganzen Zahlen und alle Brüche getr… voneinander addieren, da bei gemischten … zw… der ganzen Zahl und dem Bruch ein un…tbares Pluszeichen (+) steht.

Überlegung im Kopf: $1 + \frac{3}{4} + 3 + \frac{5}{…}$

Schritte:

1. Alle ganzen Zahlen addi… bzw. subt…
2. Den Hauptnenner HN su… …Brüche zum HN erweitern.
3. Die Zähler der… …ddiere… …nenner …t **gleich**.
4. Ergebnis vere…

$1\frac{3}{4} … \frac{5}{6} + 2 = 6 + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

$= 6 + \frac{9}{12} + \frac{10}{12}$

Der H… ist …2

$= 6 + \frac{19}{12} = 6 + 1\frac{7}{12}$

$= 7\frac{7}{12}$

Beis… 2: S…akt… …ei Bruchterme…

Sch…

1. Hier … günstig, une…e Brüche zu…wenden, …or allem, wenn der B…ch mit negativ… …orzeichen …ößer ist als der p…tive Bruch.
2. …n Hauptne…ner H… suchen u… die Brüche zum HN erweit…
3. Die Summe bzw. Differe… im Zähler bilden. Der **Nenner bleibt gleich**.
4. Ergebnis, wenn möglich, noch kürzen bzw., wenn es die Aufgabenstellu… …f… …n eine gemischte Zahl umwa…

$1\frac{5}{9} - 3\frac{5}{6} + 2 = \frac{14}{9} - \frac{23}{6} + 2$

Der HN ist 18

$= \frac{28 - 69 + 36}{18}$

$= -\frac{5}{18}$

Im Kopf erweitern: $\frac{14 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{23 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 18}{1 \cdot 18}$

…ariablen enthalten**

…nterme Variablen enthalten, kann … …aler Taschenrechner nicht mehr … weiteres eingesetzt werden.

Im … $\frac{3 \cdot 6}{5x \cdot 6} - \frac{5 \cdot 5}{6x \cdot 5} + \frac{1 \cdot 10x}{3 \cdot 10x}$

Schritte:

1. Falls… …n in unechte B…
2. … …und Brüche zum …
3. …me im Zähler bilden. Der **Nenner bleibt** **…n.**
4. …ebnis, wenn möglich, kürzen bzw., wenn …ordert, in eine gemischte Zahl umwande…

Der HN ist 30x

… $\frac{}{}1$ $= \frac{18 - 25 + 10x}{30x}$

$= \frac{10x - 7}{30x}$

Achtung!
Hier darf man **1…** …wie das **x** auf **keinen Fall kürz…** …**ähler eine Summe** und kein… …rhanden ist.

Übung zu 1.1.f

Berechnen Sie die angegebenen Summen zunächst ohne Verwendung des Tas… …rech… und stellen Sie das Ergebnis, so weit wie möglich, gekürzt dar. Überprüf… …re Re… wenn möglich, mit dem Taschenrechner.

(1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$ ____________________

(2) $1\frac{1}{2}+2\frac{2}{7}-1\frac{1}{14}=$ ____________________

(3) $\frac{4}{5a}+\frac{7}{15}+\frac{7}{10}=$ ____________________

(4) $\frac{2}{3b}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{4b}=$ ____________________

(5) $\frac{3}{8x}-\frac{5}{6y}+\frac{1}{12z}=$ ____________________

g) Br… …plizie…

Beis… 1: Bruchterme, die … Variable… …halten, multiplizieren

Gemischte Zahlen in unechte Brüche umwandeln.

Ganze Zahlen als Bruch mit Nenner 1 darstellen.

Schritte:

1. Alle …
… …chreiben und **vor** dem …lizieren so weit wie möglich kürzen.
…lle Zahlen im Zähler multiplizieren. Alle Zahlen im Nenner multiplizieren
4. Ergebnis, wenn möglich, bzw., wenn gefordert, in eine … …hl umwandeln.

$$1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{5}{8}\cdot 3 = \frac{4}{3}\cdot\frac{21}{8}\cdot\frac{3}{1} = \frac{\cancel{4}^{1}\cdot 21\cdot \cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1}\cdot \cancel{8}_{2}\cdot 1} = \frac{21}{…} = 10\frac{1}{2}$$

…pli… erst **kür…**

Übun…

… $\frac{…}{9}=$ ____________________

… $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{9}=$ ____________________

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, multiplizieren

6a kann man als … …eiben … …sst man dann unter dem ge…ins… …uchstrich weg.

Schritte:

1. Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
2. Alle Zähler und alle Nenner auf ein… Bruchstrich schreiben.
3. Vor dem Multiplizieren so we… wie m…ch kürzen
4. Alle verbleibenden Zah… …len im Zähler multiplizieren. All… …n Variablen und … …m Nenner m…plizieren.
5. Ergebnis, w… mö… bzw. …dert, i… gemischte Z…

$$6a \cdots \frac{…5c}{…} = \frac{\cancel{6}\,\cancel{a}\cdot 3\cancel{b}\cdot \cancel{5}\,\cancel{c}}{\cancel{10}\cdots\cancel{6}a\cancel{b}} = \frac{…}{…a}$$

Vor dem Multipli-zieren immer erst kürzen!

Übun…:

Bere…en Sie … folge…den Produk… und kürzen Sie … weit wie möglich.

… $\frac{…}{5x}$ ____________________

… $\cdot\frac{3z}{4y}=$ ____________________

(3) $\frac{2x}{3}\cdot\frac{15}{14x}\cdot 7=$ ____________________

h) Brüche divi…

… dividieren

$$= \frac{4}{1}:\frac{14}{3} … \frac{3}{…}$$

…lle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
2. Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu multi…
3. Weite… …eren.

Kehrwert: Aus (:) wird (·) Aus $\frac{14}{3}$ wird $\frac{3}{14}$

$= \frac{…}{7}$

… folge… …erksatz

Merke: Man dividiert eine ganze Zahl oder einen Bruch durc… Bruch, indem man mit dem ____________________ der hinter dem Divisionszeiche… …iziert.

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, dividieren

Schritte:

1. Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
2. Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu multiplizieren.
3. Weiter mit 2. Schritt beim Multiplizieren.

$4a : \frac{2a}{3} = [illegible] = \frac{4a}{1} \cdot \frac{2a}{[illegible]}$ … $= 6$

Ke[illegible]: Aus (:) wird (·). Aus $\frac{3}{2a}$ wird $\frac{2a}{3}$

Beispiel 3: Bruchterme mit Doppelbrüchen

(1) $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 1 \cdot 2 = 2$ — D[illegible] dividie[illegible] mit 2 multiplizieren oder …

(2) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$ [illegible] — … es wird mit dem Kehrwert des Bruchs [illegible] Nenner des Doppelbruchs multipliziert.

(3) $\frac{\frac{2x}{3}}{\frac{x}{9}} = [illegible] = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Übung 1.1.h:

Berechnen Sie die folgenden Quotienten und stellen Sie das Ergebnis so weit wie möglich gekürzt dar.

(1) $\frac{10}{\frac{1}{2}} =$ ______________________

(2) $3\frac{1}{4} : 2\frac{1}{[illegible]} =$ ______________________

[illegible]

(4) $\frac{16}{\frac{15}{24}} =$ ______________________

(5) $9y : \frac{3y}{2} =$ ______________________

(6) $\frac{5m}{1[illegible]}$ ______________________

Aufgabe 1.2

Potenzgesetze

Information: Definition des Begriffs Potenz

Bei der Additon von Summanden ist Ihnen mit Sicherheit bekannt, d[illegible] Summanden zur Abkürzung mit Hilfe eines Vorfaktors zusammenfassen ka[illegible]eispie[illegible]se ist $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4$. Bei der Multiplikation gibt es einen ähnlichen Zusammenha[illegible]. So k[illegible]an e[illegible]rodukt aus gleichen Faktoren wie folgt zusammenfassen: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$. Allgemein [illegible]nition:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n–Faktoren)

a w[illegible] Bas[illegible] [illegible]eichnet.

n wird als **Exponent** bezeichnet.

Der **Exponent n** gibt an, wie oft die Basis a mit sich selbst multipliziert wird, d.h. **potenziert** wird.

Vor eine[illegible] einer Zahl, welche potenziert wird, können sich Vorfaktoren oder auch Minus[illegible]en befinden.

[illegible]

Auf einen Vorfaktor vor der Basis hat der Exponent n keinen Einfluss. Ein Minuszeichen kann als Vorfaktor −1 interpretiert werden und bleibt nach dem Potenzieren ebenfalls unverändert erhalten.

Bsp.: $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$
$-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

$$u \cdot a^n = u \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$
$$-a^n = -a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

[illegible]lung getroffen wie bei der Multiplikation

$1 \cdot a = a$
$a^1 = a$

[illegible] 1 wird [illegible] notiert.

Übung zur Definition des Begriffs Potenz

Verdeutlich[illegible] verfahren Sie analog dazu.

Beisp[illegible] $= -24$

[illegible] = ______________ = ________ = _____

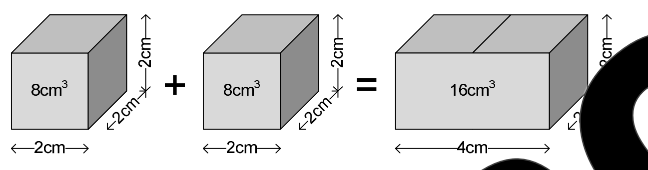
$-4^4 =$ ______________ = ________

$-2^4 a =$ ______________ = [illegible]

a) Addition von Ausdrücken mit Potenzen

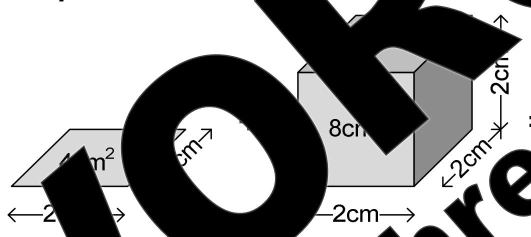
Anhand der Berechnung von Einheiten (Dimensionen) lassen sich die Potenzges[...] hinsic[...]h der Addition anschaulich darstellen. Größen kann man nur addieren oder s[...]hieren, [...]e gleiche Einheit haben, bzw. wenn die Einheit die gleiche Potenz besitz[...]weis[...]nen Flächen und Längen oder Flächen und Volumina weder addiert noch su[...]ahie[...]den.

Beispiel 1:



Die Maßza[...]werden addiert[...]heiten vera[...] sich bei der A[...]tion nicht. Die Einheit [...]bleibt cm[...]

Beispiel 2:



cm² und cm³ kann man **nicht** addieren

Beispiel 3:

$8\ m^2 + 8\ cm^2 = 80.000\ cm^2 + 8\ cm^2$
$= 80.008\ cm^2$

Ergänzen Sie:
Man kann Potenzen nur addieren, wenn die Basis und der Exponent ____________sind. Im [...] Einheitensystem* muss man dazu ggf. die [...]rher ______________________.. [...]ird der Exponent _________ v[...]

Allgemein kann man die Addition bzw. Subtraktion von Potenzen wi[...]

[...] Subtraktion von Potenzen
$\ldots a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm v) \cdot a^n$

*SI-E[...]m: Internationales Einheitensystem (frz. **S**ystème **i**nternational d[...] phy[...]ößen. Basiseinheiten sind: Meter, Kilogramm, [...]kunde, Kelvin, A[...] Candela.

Übungen zur Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Verdeutlichen Sie sich jeweils die Beispiele und verfahren Sie entsprechen[...]den Ü[...]gen.

Beispiel 1: $2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2^3 = 16$
$a^3 + a^3 = 2a^3$

Achtung:
$[\ldots] + 3^2 \neq 3^4 = 81$

(1) $3^2 + 3^2 =$ ___+ ___ = ___· ___ = ___· ___
(2) $5^3 + 5^3 =$ ___+ ___ = ___· ___ = [...]
(3) $4^2 + 4^2 + 4^2 =$ ___+ [...] = ___· ___
(4) $x^2 + x^2 =$ ______
(5) $b^2 + b^2 + b[\ldots]$

[...]htung:
$x^2 + x^2 \neq [\ldots]$

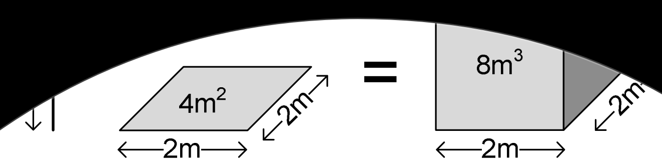
Beispiel 2: $4x[\ldots] + 2x^2 [\ldots] + x = x^3 - [\ldots]x$

(1) $[\ldots]3x [\ldots] - x^3 - 10x^2 [\ldots] =$ ______________________________
(2) $[\ldots]2x^2 + [\ldots] + 5x^2 - 3[\ldots] - x^2 =$ ______________________________

[...]ukte bei Poten[...] gleicher Ba[...]

Wie bei der Additi[...] kann man [...] die Multiplikation von Potenzen anhand der Berechnung von Flächen und Volumen ansc[...] darstellen.

Beispiel 1:



Rechnung[...]m³

Ergänzen Sie:
Die Zahlenwerte d[...]n werden ______________ [...]xponenten der Einheiten werden ______________, wenn [...]heiten ______________ sind.

Beispiel 2:

$3m \cdot 50cm = 3m \cdot 0,5m = 3m^1 \cdot 0,5m^1 = 1,5m^2$

Einheiten müssen ggf. umgerechnet werden.

In verallgemeinerter Form lässt sich die Regel zu… …plika… von Potenzen wi… …lgt veranschaulichen.

$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot … a \cdot a}_{a^7} = … = a…$

Ergänzen Sie den folgenden Merks…

…erden bei ________ …asis
…ltipliziert, inde… …n die Exponenten ________.
$a^m \cdot a^n = a…$

…unge… zu Produkten bei Potenzen gleicher Basis

Vere… Sie die Terme so weit wie m…lich, indem Sie Potenzen mit gleicher Basis zusamme…fassen.

(1) $x^3 \cdot x^5 =$ ________ (2) $2z^2 \cdot 6z^3 \cdot 3z^5 \cdot 4z =$ ________

(3) $3a^2 \cdot 4b^3 \cdot 2b^5 =$ ________ (4) $7v^{5a} \cdot v^{4a} =$ ________

(5) v^{3a+1} … …$^{4u+2} =$ ________

…

…$m^2 \cdot 2mm =$ ________ (10) $30cm^2 \cdot$ …

In Aufgabenstellungen ist oft auch der umgekehrte Rechenweg wicht… Formen Sie die Terme … …lass keine Summen in den Expo… …ten.

(11) $x^{a+b} =$ ________ (12) $z^{a+3b} =$ ________

(13) z… ________ (14) $x^{5a+b+c} =$ ________

(15… ________ (16) $2x^{2a+b} \cdot 3x^{a+2b} =$ ________

c) Potenzen, Brüche und negative Exponenten

In Aufgabe 1.1 haben Sie gelernt, wie man Variablen in Brüchen kürzen ka… …iese K…tnisse sollen im folgenden Beispiel verwendet werden, um zu begründe… …rum ne… …nenten sinnvoll sind. Verdeutlichen Sie sich die Überlegungen.

Anwenden der Definition von Potenzen auf y^5 und y^3 und paarweises Kürzen von y liefert y^2

Das… …nis … …ch … y^{5-3} darstellen.

$\frac{y^5}{y^3} = …$

…en Exponen… kann man zur Summe …ormen und dann die Regel für die Multipli…tion von Potenzen an…enden.

$y^2 = y^{5-3}$

…

$y^2 = y^5 \cdot y^{-3}$

…cht … nun die Ausg…saufgabenstellung mit dem Ende…nis, so ergibt sich: $\frac{y^5}{y^3} = y^5 \cdot y^{-3}$

oder entsprechend: $\frac{1}{y^3} = y^{-3}$.

Man erkennt aus diesem Beispiel, dass negative Exponenten eine neue Schreibweise für Brüche beinhalten, und man kann die folgende Regel formulieren.

…ten
…
a

Ergänzung:
Dieser Zusammenhang wird auch beim Exponenten 1 angewandt. Es gilt: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{-1}$

Ergänzung zu… …tiver Exponenten

Mit Hi… kann man Brüche so darstellen, … …chstrich mehr not…

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

Übungen zu Potenzen, Brüchen und negativen Exponenten

Beispiel 1: $\frac{x^4}{x^3} = x^4 \cdot x^{-3} = x^{4-3} = x$ bzw. $\frac{3x^4}{x^6} = 3x^4 \cdot x^{-6} = 3x^{4-6} = 3x^{-2} = \frac{3}{\ldots}$

Zusatzinfo:
Man ka... die R... auch ver... reit... $\frac{3\cancel{x^4}^{1}}{x^{\cancel{6}2}} = \frac{3}{\ldots}$

Kürzen Sie die angegebenen Brüche ... Sie, ... Beispiel 1, die Potenzgesetze anwenden und schreiben Sie das Ergebnis ggf. ohne negative Exponenten.

(1) $\frac{z^5}{z^3} =$ ________ = ... (2) $\frac{u^2}{u^3} =$ ________ = ______ = ______ = $\frac{1}{\_\_}$

(3) $\frac{2c^5}{c^4} =$ ________ = ... (4) ... = ________ = ______ = $\frac{1}{\_\_}$

Beispie... ... $x^{-2v} = \frac{x^u}{\ldots}$ bzw. $3x^{u-2v} \cdot 2\ldots 3 \cdot 2 \cdot x^{u-2v+v-u} = 6x^{-v} = \frac{6}{x^v}$

Form... ...e Bruchterme (1) bis (6) entsprechend der Beispiele so um, dass keine negativen Exponenten und keine Summen in den Exponenten auftreten.

(1) $x^{-2} \cdot y^5 =$ ____________ (2) $b^{3a-1} =$ ____________

(3) $\frac{1}{x^{a-b}} =$ ____________ (4) ...$^{-3} \cdot y^{a+2} =$ ____________

(5) $\frac{x^{a+b}}{\ldots}$ ____________

...n Sie, unter Angabe des Fehlers, warum die Umform...

(...) $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{-v-w}$ Die Umformung ist falsch, weil ____________

____

____

...richtige Erg...is lautet: $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{\_\_\_}$

d) Der Exponent 0

Warum irgendetwas hoch Null immer die Zahl 1 ergibt, ist eine häufig geste... Frage. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang anhand der folgende... ...stellung.

Aus der Bruchrechnung ist bekannt, dass gilt:

$\frac{a}{a} = \frac{\cancel{a}^1}{\cancel{a}^1} = \frac{1}{1} = 1$

also: $\frac{a}{a} = 1$

Aus der Po...zre... ist bekannt, d... gilt:

$\frac{a}{\ldots} \ldots a^{\ldots} \ldots a^{1-1} = a^0$

... $\frac{a}{a} = a^0$

$\boxed{a^0 = \ldots}$

Ergänzung:

Damit dieser Zus... ...elle reellen Zahlen gültig ist, wird festgelegt, dass auch gilt:

$\boxed{0^0 = 1}$

e) ...kte bei Potenzen mit ungleicher Basis und gleichem Exponenten

Formulieren Sie für den folgenden Zusammenhang einen Merksatz, indem Sie den Text ergänzen.

Ausklammern von Exponenten

$a^n \cdot b^n$ ... $(\ )^n$

... unterschiedliche Basis, jedoch den ______ Exponenten, ... geklammert werden.

Beispiele: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1.000.000$

Bei der Anw...
Regel lassen ...
Rechenvorteile ...

...formation:

...chen muss man Klammern setzen denn es ... $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ ... $\frac{4}{3}$

Diese Regel ist vor allem auch dann wichtig, wenn es um Potenzen mit negative[illegible] Vorze[illegible] geht. Verdeutlichen Sie sich dazu die beiden folgenden Beispiele.

Zur Erinnerung:
Ein negatives Vorzeichen kann man immer als Multiplikation mit dem Vorfaktor (–1) interpretieren. Da[illegible] Quadrat wirkt dann nur auf das a und nicht auf (–1).

(1) $-a^2 = (-1)\cdot a^2 = -a^2$

(2) $(-a)^2 = (-1\cdot a)^2 = (-1)^2\cdot a^2 = (+$ [illegible] a^2

Nur wenn das [illegible] eichen **in** ei[illegible] Klammer st[illegible] wird der Ausdruck b[illegible] Qu[illegible] eren [illegible], da da[illegible] Q[illegible] t hinter der Klammer a[illegible] id[illegible] ren in der Klamme[illegible] wirkt.

(3) B[illegible] gr[illegible] n Sie a[illegible] nd einer ausf[illegible] hrl[illegible] en [illegible] fo[illegible], ents[illegible] chend zu (1) [illegible] (2), dass gilt: $(-a)^3 = -a^3$

$(-a)^3 =$ ______________________________

Er[illegible] en Sie die f[illegible] de verallg[illegible] erte Merkregel

Vorzeichen beim Potenzieren		
Wenn n eine ________________ Zahl ist gilt:		$(-a)^n = a^n$
Wenn n ei[illegible]		$(-a)^n = -a^n$
B[illegible]		$-a^n$ = ____

[illegible] ngen zum Produkt bei Potenzen mit ungleicher Basis u[illegible] ponenten

Vereinfachen Sie die Terme, ohne Verwendung des Taschenrechners, [illegible] möglich. Stellen Sie dabei all[illegible] Exponenten dar.

(1) $\frac{48^2}{144^2}$ [illegible] ______________________________

(2) [illegible] ______________________________

____

____

(4) $\frac{(-3)^4}{-3^4} =$ ______________________________

(5) $\frac{(-5)^3}{-5^3} =$ ______________________________

(6) $(-2)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$ ______________________________

f) Potenzieren von Potenzen

Verdeutlichen Sie sich anhan[illegible] olgen[illegible] s, welch[illegible] n beachte[illegible] den müssen, wenn eine Potenz potenzier[illegible] rd. E[illegible] zen [illegible] en Merksat[illegible]

$(2^2)^2 = (4)^2 = 16$ [illegible] $2\cdot 2 = 2^4 = 2^{2}$[illegible]

$(2^3)^2 = (8)^2 =$ [illegible] $2\cdot$ [illegible] $\cdot 2\cdot 2$ [illegible] $= 2^{3\cdot 2}$

$(2^2)^3 = (4)^3 =$ [illegible] $2 = 2^6 = 2^{2\cdot 3}$

$(2^5)^2 =$ [illegible] 1024 [illegible] $\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ [illegible] $2^{10} = 2^{5}$[illegible]

$(2^2)^5$ [illegible] $(4)^5$ [illegible] $= 2$ [illegible] $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ [illegible] $2 = 2^{10} =$ [illegible]

[illegible] eren ei[illegible] Potenz
Eine Potenz [illegible] potenziert, i[illegible] man die Exponenten ______________________.
Die Reihe[illegible] olge, in de[illegible] potenziert wird, spielt dabei ______________ Rolle. Es gilt:
$(\mathbf{a}^m)^n = \mathbf{a}^{m\cdot n} = \mathbf{a}^{n\cdot m} = (\mathbf{a}^n)^m$

Achtun[illegible] [illegible] n einer Potenz nicht mit dem Potenzieren des [illegible] hang wird durch das folgende Beispiel [illegible]

$(a^2)^3 \neq a^{2^3}$, denn $a^{2\cdot 3} = a^6$ und [illegible] uch $a^{2^3} \neq a^{3^2}$

$(a^3)^2 \neq a^{3^2}$, denn $a^{3\cdot 2} = a^6$ und $a^{3^2} = a$ [illegible]

Übungen zu[illegible] tenzen

a) Be[illegible]

____

____

____

= ______________________________

= ______________________________

b) Kreuzen Sie an:

(1) $x^4 + x^3 = x^7$ richtig ❍ falsch ❍

(2) $x^4 \cdot x^3 = \begin{cases} x^7 \\ \dots \end{cases}$ ri… ❍ falsch ❍ / richtig … ❍

(3) $(x^4)^3 = \begin{cases} x^7 \\ x^{12} \\ x^{64} \end{cases}$ richtig ❍ falsch ❍ / richtig ❍ falsch ❍ / richtig ❍ falsch ❍

(4) $\dots{}^3)^4 = \begin{cases} x^{81} \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ … ❍ falsch ❍ / richtig ❍ falsch ❍ / richtig ❍ falsch ❍

(5) $-x^2 \cdot x^{-2} = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \end{cases}$ richtig ❍ falsch ❍ / richtig ❍ falsch ❍ / richtig ❍ falsch ❍

(6) $\dots + 4x^3 = \begin{cases} 7x^6 \\ 7x^3 \\ 7x^{\dots} \end{cases}$ richtig … ❍ / richtig … ❍ / richtig ❍ falsch ❍

(7) $x^2 \cdot x^{-2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ richtig ❍ fa… / richtig ❍ fa…

(8) $\dots = \begin{cases} x^{12} \\ x^{81} \end{cases}$ richtig … falsch ❍ / … falsch ❍

(9) $x^4 = (x^{-2})^{-2}$ ri… falsch …

(10) $-x^2 = \begin{cases} \dots \\ x\dots \end{cases}$ richtig ❍ falsch ❍ / richtig ❍ falsch ❍

g) Potenzen … rati… … …nenten

Sie … …rem bi…rigen Unterri… …ereits Erfah… …n mit Wurzeln gesammelt. So wissen Sie, dass … spi… …

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt[3]{27} = 3$

Es soll nun erarbeitet werden, da… …ie Wurzelzeichen auch mit Hilfe von Potenzen dargestellt werden können. Um die Zusammen…änge zu verdeutlichen, werden auch hier wieder Zahlenbeispiele herangezogen.

Ist …

… $\sqrt[3]{8}$ und auch $2 = 8^{\frac{1}{3}}$ gilt,

… gelten: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$.

… und $2 = 2^1 = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}$

$1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$

Potenzgesetz potenzieren

D… …xponenten habe… …deutung wie die bish… verwendet… …hen.

Ergän… …uadratwurzeln die folgende Vereinbaru… … wurde:

Bei der Quadratwurzel wird die 2 nicht notiert, bzw., wenn über der Wurzel nichts steht, handelt es sich um eine Quadratwurzel.

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Der Zusammenhang zwischen gebrochenem Exponent und Wurzelzeich… soll nu… …weiteren Beispielen überprüft werden. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

$\sqrt[4]{625} = 5$ und $625^{\frac{1}{4}} = \left(\_\_{}^4\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\cdot\frac{1}{4}} = 5^{\square} = 5$

$\sqrt[5]{32} = \_\_\_\_$ und $(32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\square}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\square\cdot\frac{1}{5}} = 2^1 = \_\_$

$\frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{\square}$ und $49^{-\frac{1}{2}} = \left(7^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 7^{\square\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 7^{\dots}$ … 1

Zusammenha… …wischen Wurz… …nd rationalen Pote…n:
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ bz… $\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

h) Potenzieren vo… …rationalen …ponenten bz… …otenzieren von Wurzeln

Für … Pote… …en … …fermen mit gebrochenen Potenz…n oder Wurzeln benötigt man im Prinzip kei… …euen P… …zgesetze und auc… die notwendi… Regeln für auftretende Brüche sind aus …ufg… 1.1 be…nt. Verdeutli… …Sie sich die … …nden Umformungen bzw. Umformungsschritte, …d g… … welche de… …ufgelisteten …tenzgesetze und Regeln für die Bruchrechnung jeweils …wende… …en. Ord… …jedem U… …ngsschritt die passende Nummer zu.

… $)^n = \left(a^n\right)^m$ ② $\left(a\dots\right)\dots = a^{m\cdot n}$ … $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ④ $a^{m\cdot n} = a^{n\cdot m}$ ⑤ $m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ ⑥ $\frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \bigcirc = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \bigcirc = a^{\frac{1}{n}\cdot m} \bigcirc = a^{\frac{m}{n}} \bigcirc = a^{m\cdot\frac{1}{n}} \bigcirc = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} \bigcirc = \sqrt[n]{a^m}$

… folgenden Zusammenhang, den man sich …

Potenzieren v…
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)\dots$

Verde… …r häufig auftretende Aufgabens… …folgenden Beispiele. und … …en Rechnungen analog dazu.

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Beispiel 1: Sonderfall $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Zur Erinnerung:
$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

(1)
$\sqrt{a^2} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^1 = a$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1$ …

$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

(2)
$\sqrt[3]{a^3} = \left(a^{\square}\right)^{\square}$ … = ___

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(\square\right)$ … = ___ = ___

$\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

… $^3 = \sqrt[\square]{a}$ … $\cdot\sqrt[\square]{a} = a^{\square}$ … $= a^{\square}$ … = ___ = __

…ispi… 2: Partielles W…zelziehen

$\sqrt{a^3} = \left(a^3\right)^{\frac{1}{2}} = a^{3\cdot\frac{1}{2}} = a^{\ldots} = a^{1+\frac{1}{2}} = a\cdot a$ … $= a\sqrt{a}$

$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^{2+1}} = \sqrt{a^2\cdot a} = \left(a^2\cdot a\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2}\,\sqrt{a} = a\sqrt{a}$

… zum Merken.

…rke: „Zerschneiden" von Wurzeltermen bzw. partie… …en

Wenn in einem Wurzelterm mehrere Faktoren auftreten, darf … getrennt voneinander mit einem eigenen Wurzelzeichen versehen und die … auch getrennt voneinander zie… … das auch als **partielles Wurz…**

… $= \sqrt{a^m}\,\sqrt{a^n}$

…s die kurze Version des partiellen Wurzelziehens in folgenden Bei… indem Sie …ungen vervollständigen.

… $= \sqrt{a^{\square}\cdot a} = \sqrt{a^{\square}}\sqrt{a} = a^{\square}\sqrt{a}$

(2) $\sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = \sqrt{36}\sqrt{\_\_} = 6\sqrt{\_\_}$

(3) $\sqrt{27} = \sqrt{\_\_\cdot 3} = \sqrt{\_\_}\cdot\sqrt{3} = \_\_$

(4) $\sqrt{8x} = \sqrt{\_\_\cdot 2x} = \sqrt{\_\_}\cdot\sqrt{2x} = 2\sqrt{2x}$

(5) $\sqrt{288x}$ = ___________ = ___________
= _________

(6) $\sqrt{125x^3} = \sqrt{25x^2}\cdot\sqrt{\_\_\_}$ = ___

(7) $\sqrt{98z^3}$ = ___________

(8) $\sqrt{128x^5}$ = … = ___________
… = ___________

…chten
12…

Treten unter der …urzel Za… …ert…, so kann eine parti… …zel gez… …erden, wenn die Zahl i… … zerlegt werden kann, b… dem al… …kt… …uadratzahlen auftreten. … güns… … den quadratischen Faktor die gr… …öglic… Quadratzahl zu wählen. … kö… Aufg…be (2) auch so lösen:
… $\cdot 8 =$ … $4\cdot 2 = \sqrt{9}\cdot$ … 2
$=$ … $\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
D… ist jedoch aufw…diger.

A…tung!

Aus ein… **…mme** oder **Differenz** kann man **kein…** …elle Wurzel ziehen.

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$$

Verdeutlichen Sie sich das am folgenden Zahlenbeispiel:

richtig: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
falsch: $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 = 7$

Beispi…

… denn $\sqrt{a^2} = \left(a^2\right)$ … $= a$…

Mehrfache Wurzeln …tsprechen dem Potenzieren … Potenz.

Verfahren Sie wie im Beispiel:

(1) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[12]{a}$, denn ___________

(2) … ___________

… x^2, denn ___________

… $32a^5}} = \sqrt{2a}$, denn ___________

Beispiel 4: Rationalmachen des Nenners

Treten in Brüchen Wurzeln auf, so wird ein Bruch in der Regel so angegeben, da[...] Ne[...] keine Wurzel erscheint. Dies ist auch bei den gängigen Modellen der Tasch[...]ner d[...]

Wenn man im Taschenrechner beispielsweise den Term $\frac{3}{\sqrt{2}}$ eingibt u[...] die [...]etaste betätigt,

erhält man $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Verdeutlichen Sie sich diesen Zusammenhang [...]d de[...]genden [...]ermumf[...] und machen Sie anschließend die Nenner der gegebenen [...]che in (1) [...]) rational. [...]gänzende und vertiefende Übungen zu Kapitel 1)

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = [...] \frac{\sqrt{b}}{[...]} = [...] \frac{[...]\sqrt{b}}{b}$$

(1) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ = ________ = ________

(2) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ = ________

(3) $\frac{3a}{\sqrt{2a}}$ = ________ = ________

(4) $\frac{a}{[...]2a}$ ________ = ________

Erg[...] Bemerkungen [...]sichtlich [...] Darstellung von Ergebnissen bei Rechnungen

Kommen bei Rechnungen, beispielsweise bei der Lösung von Gleichungen, Wurzeln vor, lassen sich die Ergebnisse nicht exakt mit dem [...]aschenrechner darstellen, sondern man erhält immer ein auf die Anzahl der Stellen des Taschenrech[...]ers gerundetes Ergebnis.

Beispiel: $2\sqrt{2} \approx 2{,}8284... \approx 2{,}83$

Entsprechendes gil[...] [...]lichen Dezimalbrüchen, wie $\frac{1}{6} \approx 0{,}1[...]$ [...] $3{,}14$ und der Eulerschen Zahl

[...]n Ergebnis für nachfolgende Rechnungen [...] ist es ungünstig, mit dem [...]ten Zahlenwert weiterzurechnen. Hier kann der Aufw[...] [...]be am Taschenrechner [...]ngreich werden und es können sich Eingabefehler einschle[...] [...]nnen aufgrund von gerundeten Zwischenergebnissen ungenaue Endergebnisse auftre[...] [...]ematik spielt der gerundete Zahlenwert zudem häufig keine Rolle.

Aus diesen Grü[...] [...]e in einer „möglichst vereinfa[...] [...]malisierten" Form, ohne [...] [...]en explizit auszurechnen, wobei [...]erium darin besteht, d[...] [...]nis am Ende gut lesbar ist bzw. die [...] Übungs- oder Kl[...] [...]as Normalisieren muss daher keine ei[...] [...]stellung eines[...] liefern und b[...]utet:

– [...]t wie möglich kürzen und als unechte Brüche darstellen.
– [...] von Brüchen möglichst ohne Wurzeln darstellen.
– [...]mit Zahlen und Variablen oder Konstanten ([...]e) wird, beginnen[...]n, [...]d sortiert.
– [...]reten komplexer Zahlen soll im Nen[...] [...]äre Einheit auftr[...]

Überblick Gesetze und Definitionen bei der Potenzrechnung

Grundlegende Zusammenhä[...]			
Der Exponent Null		Der Exponent [...]	De[...]e Exponenten $\frac{1}{n}$
$a^0 = 1$	$0^0 = 1$	$a^1 [...]$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
Potenzen mit gleic[...]pone[...]			
Addition und Subtraktion: $u \cdot a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm [...]$		Multiplika[...] Division: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{[...]}$	
[...]nzen [...]it negativen Exponenten			
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$[...] = a^n$	$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	
M[...]ikation und D[...] von Pote[...] mit gleicher Basis			
$[...]^m \cdot a^n = a^{m+n}$		$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	
Potenzi[...] von Potenzen			
[...]nzzahlige Exponenten: $(a^m)^n = (a^{[...]})^{[...]} = [...]^{nm}$	r[...]ale Exponenten: $[...] = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	potenzierte Exponenten: $a^{m^n} = a^{(m^n)} \neq \left(a^m\right)^n$	

Vermischte Übun[...] [...]tzen

Um[...]

[...]otenzgesetze bei d[...] Fassen Sie zusammen oder [...]en Sie, warum nicht weiter vereinfac[...]

(1) $8m^2 + 7m^2$ = ________________

(2) $5cm^2 + 3[...]$ ________________

(3) ________________

[...] = ________________

[...]$2\,m)^2$ = ________________

b) Notieren Sie jeweils die verwendeten Potenzgesetze, bzw. erläutern Sie die erf... ten Termumformungen in Stichworten.

(1) $\frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{18x^3}{2x}} = \sqrt{9x^2} = 3x$

Potenzgesetz: ____________

Umformungen: ____________

(2) $t^4 \cdot t^3 = t^7$

Potenzgesetz: ____________

(3) $z^{1+3a} = z \cdot z^{3a}$

Pote... esetz: ____________

(4) $u^{2v-1} = u^{2v} \cdot u^{-1} = \frac{u^{2v}}{u}$

Potenzg... ____________

Pote... esetz: ____________

(5) $\sqrt{\sqrt[3]{4x^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{4x^2}}$ ...

Potenzgesetz: ____________

Um... ng: ____________

(6) ... $\cdot c^{1-n}$ ... $= c^{n+1}$

Potenzgesetz: ____________

Potenz... etz: ____________

Um... ung: ____________

c) Die Potenzrechnung bildet unter ... erem eine Grundlage für Umformungen, die beispielsweise bei der Differenzial- und Integralrechnung notwendig werden. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben im Hinblick auf später folgende Problemstellungen, indem Sie auch hier wieder Umformungsschritte erläutern bzw. die verwend... ...etze angeben.

(1) ...

Potenzgese... ____________

$= \frac{1}{\sqrt{x}}$

Potenzgesetz: ____________

(2) $\frac{3}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}}$ ...

...rmung: ____________

Potenzgesetz: ____________

$(3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

Potenzgesetz: ____________

(3) $\frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

Umformung: ____________

$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

Potenzgesetz: ____________

$= \frac{1}{3x^{2 \cdot \frac{1}{3}}}$

Umformung: ____________

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Potenzgese... ____________

Ergänzen Sie die fehlenden Exponente... ei der V... ble... x:

(4) $2x^{\frac{1}{2}+1} = 2x^{\_\_} = 2\sqrt{x^{\_\_}} = \ldots \cdot x \ldots x = 2x\sqrt{x}$

Formen Sie entsprechend z... ...n.

(5) $4x^{\frac{1}{2}-1} =$

(6)

... $^{\frac{1}{\,}-1}$

c) ...fachen S... soweit wie mög..., indem Sie partielle Wurzeln ziehen, Nenner rational machen u... die Exponente... der Terme ... Summen darstellen.

(1) $\sqrt{288x^3} =$

(2)

(3) ... $\sqrt{8x^3} =$

(4) $\frac{5x}{\sqrt{x}} =$

(5) x^2 ...

...de Übungen: ____________

Aufgabe 1.3

Multiplizieren und Faktorisieren von Summen

Information 1.3.1

Multiplizieren von Summen – Distributivgesetz

Multipli... ...Sum... mit einem ...to...
Jeden S...nden ...r Klammer ...em Fa... multiplizieren.
$(b+c)$

Distributivgesetz

a (b + c) = ab + ac

(a + b)(c + d) = ac + ad + b...

Multiplikation einer Summe ...einer Summe
Jeden S...manden in der ers...en mit jedem ...manden d...zweiten Klammer multi...zieren.
$(c+d)$

...utern ... bei den folgenden B...spielen die Um...ungen.

Beisp... (1) → (2)

(1) $2\sqrt{3}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{\sqrt{12}}+\frac{z}{\sqrt{27}}\right)$ (2) → (3)

(2) $=\frac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}\,y}{...}$

(3) ... $\frac{...}{3}z$

Beispiel 2: ... (2)

(1) $(\sqrt{2x}+ ...$

(2) $=\sqrt{...}$ ... xy ... (2) → (3)

(3) ... $3\sqrt{xy}+2y\sqrt{2}$

Beispiel 3:

(1) → (2)

(2) → (3)

(3) → (4)

(4) → (5)

(1) $(2x+1)(3x+2)(x-2)$

(2) $=(6x^2+4x+3x+2)(x-2)$

(3) $=(6x^2+7x+2)(x-2)$

(4) $=6x^3-12x^2+7x^2-14x+2x-4$

(5) $=6x^3-5x^2-12x-4$

Merk... ...ein... ...ltiplizieren v... ...ei Klammern

1. Sc...: Man ...tipliziert zuer... ...wei Klammern ...einander, schreibt das Ergebnis in Klam...rn und die ...ch... verwende... ...ritt... Klammer dazu.

2. ...hritt: Man fasst, we... möglich, das ...gebnis der Multiplikation aus dem ersten Schritt zusammen...

3. Schritt: Man m...pliziert jede... S...mmanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer. F... ...as Beispiel oben gilt:

$(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$

4. Sch... ...manden zusammen.

Zusatzinformation:
Dieses Verfahren lässt sich au... Summanden in einer Klammer erw...

Beispiel 4:

Ergänz...

(2... ...2x ... + ___ x^3 − ___ x^2 − ____ $x^4 - 8$ ___ + ______ $x+1$

$= 6x^5 - 12x^4 + x^3 - 10x^2 + 2x + 1$

Übungen zu 1.3.1

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit wie möglich, zusammen.

a) $3z(5x + 3y + 7z + 1) =$

b) $(2u + 3v)(a + 2b) =$

c) $2\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{8}} + \frac{z}{\sqrt{18}}\right) =$

d) $(\sqrt{5x} + \sqrt{10y})(\sqrt{2x} + \sqrt{5y}) =$

e) $(3x - 5z)(2$ …

f) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) =$

… $- a^{2x}) =$

h) $b^{-2x}(b^x + 1 - b^{2x}) =$

i) $\frac{2}{e^x}(e$ …

Information 1.3.2

Faktorisieren von Summen

Summen, bei denen in jedem Summanden gleiche Faktoren vorko… man … **Ausklammern** dieser Faktoren zu einem Produkt aus den ausgekla… und einer Summe umformen. Dieses Verfahren, das auch als **Faktorisieren** … man auch als Umkehrung der Multiplikation einer Summe mit einem Fakto… .

Aus…mern bedeutet, d… Gedan… jeden Sum… durch die …klammern… Faktoren, hi… nur a, dividier…

Ausklammern von Faktoren

… $ac = a(1 +$ … $c)$

Wenn … Faktor, der au…mert werden soll, … steht, mu… in Gedanken eine …bare 1 vor den Summanden sehen.

$1 \cdot a + ab + ac$

Diese 1 … Ausklammern erhalten.

Beispiel 1: $x + 3xz +$ … $xy = x(1 + 3$ … $y)$

Auf die 1 achten.

Bei…

Schritt 1:
Die einzelnen Summanden in Gedanken in gleiche Faktoren zerlegen.
$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2xx + 2 \cdot 6x$

Schritt 2…
Gleiche Fakt… in Gedanken ma…
$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2$ …
… und vor die Klammer schreiben.

Schritt 3:
Nicht markierte Faktoren verbleiben in der Klammer. …gf. auf eine 1 achten.

… $2x^2} + \sqrt{24}x^2 + \sqrt{27}x^3 = 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}\sqrt{3}x \cdot x + 3\sqrt{3}x \cdot x^2 = \sqrt{3}x(2$ … $)$

Partielle Wurzeln ziehen.

…m Summand tritt … $\sqrt{3}x$ auf.

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Übungen zu 1.3.2

Faktorisieren Sie die Summen so weit wie möglich. Achten Sie beim Ausklammern … uf, da … m Endergebnis in der Klammer keine Brüche bzw. negative Exponenten o… urzeln … sind.

a) $9a + 18ab + 3a^2$ = ______

b) $yz + 3yz^3 - y^3z$ = ______

c) $25x^3 - 15x^2 + 5x$ = ______

d) $\sqrt{8t^2} + \sqrt{72}\,t^2 - \sqrt{32}\,t^3$ = ______

e) $\frac{1}{4}r^2 + \dots + \frac{\dots}{8}\dots$ ______

Klammern Sie so aus, dass in der Kl…er kein Bruch bzw. kein negativer Exponent vorhanden ist.

f) $c^x + 1 + \frac{1}{c^x}$ = ______

g) $e^{-2x} + e^{2x} - 2\dots$ ______

Erg… ungen: ______

Aufgabe 1.4

Binomische Formeln

Eine besondere Bedeutung beim Multiplizieren und Faktorisieren v… en ko… n binomischen Formeln zu. Die Anwendung dieser Formeln zieht sich durch alle Ge… te … thematik. Daher sind eingehende Kenntnisse im Umgang mit diesen Formeln un… sslich. … , ob Ihnen diese Formeln geläufig sind, sollten Sie zumindest die Übungsau… n zu d… Thema bearbeiten. Fehlende Kenntnisse können Sie dann ggf. anhand d… gege… Info… tionen aufarbeiten.

Information 1.4

1. binomische Formel	2… omisch… Formel	3. bino… e Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a \dots 2ab + b^2$	$(a + b)\dots b) = a^2 - b^2$

Diese Darstellung ist Ihne… mit S… heit … annt. Nun s… die Entstehu… dieser Formeln wiederholt und gleichzeitig begr… den, inwie… ihre Anwendung sinnvoll ist.

Aufgabe…

a) Im F… enden w… die Entstehung der binomischen Formeln dargestellt. Erläutern Sie die … gsschr… in (1), (2) u… (3). Versuchen Sie dabei, so weit wie möglich, Ausdrücke der … the… achsprache zu verwenden.

B… chnungen	Erläuterungen
(1) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$	(1) ______
$(a + b)(a + b)$	______
(…	______
(3) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(3) ______

b) Führen S… … erechnungen bzw. Rechensc… 2. binomische Formel durch…

(… ______

= ______

= ______

c) Führen Sie nun die entsprechenden Berechnungen bzw. Rechenschritte für di[illegible] binom[illegible] Formel durch.

(1) $(a + b)(a - b)$ = ____________________

(2) = ____________________

Aufgabe 1.4.2

Ausmultiplizieren von Summen mit Hilfe de[illegible] inomisch[illegible] Fo[illegible]eln

Binomische Formeln treten bei Aufgab[illegible] der F[illegible] der Form $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ und $(a + b)(a - b)$ auf, sondern es ersch[illegible]en andere Va[illegible] und zus[illegible]che Zahlenwerte. Sie sollen nun lernen, wie man die binomischen Fo[illegible]len kann, um die Klammern nicht jedes Mal erneut zeitaufwändig schrittweise au[illegible]ltiplizi[illegible]en zu [illegible]ssen. D.h., die binomischen Formeln werden verwendet, um effektiv un[illegible]zu arb[illegible]

a) Anwenden [illegible]inomi[illegible]en Formel

Verdeutli[illegible]n Sie s[illegible]ie schrittweise Be[illegible]chnung von: $(2[illegible] 3y)^2$ am folgenden Beispiel. Wenn man mit [illegible] U[illegible]ang de[illegible]omischen Formeln vertraut ist, laufen die in den Sprechblasen aufgelisteten Sch[illegible] im [illegible]ab.

1. Schritt
[illegible]nen der richtigen binomischen Formel und damit festlegen von Vorzeichen.
Hier: 1. binomische Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Schritt
Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe, **ohne auf Vorzeichen zu achten**, die Variablen a und b zu.
a := 2x*
b := 3y

3. Schritt
Im Kopf den ersten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren.
Hier: a^2 := [illegible]

4. Schritt
Im Kopf 2ab berechnen und [illegible]is notieren.
$2ab := 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$

5. Schritt
[illegible]pf den zweiten [illegible]nden einschließlich [illegible] quadrieren und [illegible]tieren.
[illegible]$)^2 = 9y^2$

*H[illegible]chreibweise: „**a:=**“ bedeutet, dass man der [illegible]blen a den Ausdr[illegible]hts vom Gleichheitszeichen steht [illegible]

b) Anwenden der 2. binomischen Formel

Berechnen Sie den Term $(5u - 7v)^2$ wie in Aufgabenteil a). Achten Sie dara[illegible]ss b[illegible]er zweiten binomischen Formel der mittlere Summand 2ab ein negatives V[illegible]hen hat[illegible] Sie die Schritte, die im Kopf durchgeführt werden zunächst noch ausfüh[illegible] vorgesehenen Stellen.

$(5u - 7v)^2$ = ____________________

Schritt[illegible] Kopf
[illegible] binomische Formel
2. [illegible]tt: a := ______ [illegible] ______
[illegible] Schritt: a^2 := ______
[illegible] Schritt: 2[illegible]b := ______
5. S[illegible]: b^2 := ______

c) Anwenden de[illegible]en Formel

Verde[illegible]ie s[illegible]hand des Te[illegible] $(4r + s)(4r - s)$ die Anwendung der 3. binomischen Formel.

1. Sc[illegible]t
Man [illegible]et im Kopf die [illegible]ge Formel [illegible]
Hier: 3. binomische Formel
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2. Schritt
Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe die Variablen a und b zu
a := 4r
b := s

$(4r + s)(4r - s) = 16r^2 - s^2$

3. S[illegible]
[illegible]ebnis notieren
Hier: **$a^2 := (4r)^2 = 16r^2$**

4. Schritt
Im Kopf den zweiten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren
Hier: **$b^2 := s^2$**

Berechnen Si[illegible]wie im Beispiel:

(0.5[illegible] ____________________

Schritte im [illegible]
1. Schritt: ____ [illegible] Formel
2. Schritt: a := ____________
[illegible]Schritt: a^2 := ______
[illegible]chritt: b^2 := ______

Übung zu 1.4.2

Lösen Sie die Klammern auf. Notieren Sie bei den Binomen direkt das Endergebni… Zwischenschritte im Kopf berechnen.

a) $(a - 3b)^2$ = ____________________

b) $(a + 1)^2$ = ____________________

c) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ = ____________________

d) $(u + 1)(1 - u)$ = ____________________

e) $(\frac{1}{3}w + v)^2$ ____________________

f) $(\frac{3}{5}x - 5y)^2$ ____________________

g) $(3s + \frac{1}{6}$ … $\frac{}{6}s -$ … ____________________

h) $(a$ … $b)($ … ____________________

i) … $)^2$ ____________________

j) $(\frac{4}{9}r + \frac{3}{4}s)^2$ = ____________________

k) $(\frac{1}{5}a - \frac{3}{5}b)(\frac{1}{5}a + \frac{3}{}$ … ____________________

l) … ____________________

m) … $\sqrt{2})^2$ = ____________________

n) $(\sqrt{10}\,a + \sqrt{5}\,b)^2$ = ____________________

o) $(\sqrt{3}\,x - \sqrt{}$ … ____________________

p) $(\sqrt{}$ … $\sqrt{3}b)$ = ____________________

q) … $)(\sqrt{3t} + \sqrt{2s})$ = ____________________

r) … $(a - b)^2$ = ____________________

Aufgabe 1.4.3

Faktorisieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formeln

Genau wie beim Ausmultiplizieren von binomischen Formeln kann … bei der Umkehrung dieser Rechnung, nämlich aus einer Summe auf eine binomische Formel z… schrittweise vorgehen. Man sollte dazu die binomischen Formeln auswendig im K… haben. … Vorgehen soll hier ebenfalls anhand von Beispielen gezeigt werden.

a) Faktorisieren mit der 1. binomischen F…

Zu Faktorisieren ist die Summe $25u^2 +$ … $uw + 4w^2$

1. Schritt
Man ordnet im Kopf anha… der Anzahl der Summand… und deren Vorz… …ine mögliche bin…sche …rmel zu.
Hier: $a^2 + 2ab$ … $(a$ …

2. …
…an zieht im Kopf die …urzel aus de… …ummanden …ordnet das E… der Variablen a zu.
Hier: $a := \sqrt{25u^2} = 5u$

3. Schritt
Man zieht im Kopf die Wurzel aus dem dritten Summanden und ordnet das Ergebnis der Variablen b zu.
Hier: $\mathbf{b} := \sqrt{4w^2} = \mathbf{2w}$

… $\mathbf{u + 20uw}$ … $\mathbf{= (5u + 2w)^2}$

4. Schritt
Man pr… im Kopf, ob da… …dukt 2ab dem Sum…nden in d… M… entspricht.
Hier: $\mathbf{2ab} := \mathbf{2 \cdot 5u}$ … $\mathbf{20uw}$.

Falls das nicht geht, kann die Summe nicht zum Binom umgeformt werden und Schritt 5 …

5. Schritt
Man notiert, wenn möglich, das Ergebnis.
Hier: $\mathbf{(5u + 2w)^2}$

… **2. binomisc…**

$4x^2 - 4x + 1 =$ ____________

Sch…

1. Schritt: … Formel ist möglich
2. Schritt: $a := \sqrt{}$ …
3. Schritt: $b := \sqrt{\_\_\_}$
4. Schritt: 2ab := ____________
5. Binom notieren

c) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel

$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

Wenn man 2 als $(\sqrt{2})^2$ auffasst, ist das ein drittes Binom.

Schritte im Kopf

1. Schritt: ___ b…sche Formel
2. Schritt: a := ______ = x
3. … $\sqrt{2}$
4. Schritt: Ergebn… notieren.

d) Faktorisieren mit der 3. binomi…en Formel und vorherigem Ausklammern

$12x^2 - 3z^2 = 3\,(4x^2 - z^2) = 3\,(\ldots z)(2x \ldots$

Das sieht zu…chst n… nach …er binomis…el a…a es keine …dratis… Sum…anden gi…. M… kann hi…ber die 3 …klam…rn und …hält:
12… 3(4x² – z²)

Schritte im Kopf

1. Schritt: ___. bi…sche Formel
2. Schritt: a := $\sqrt{\_\_\_\_\_}$ = 2x
3. Schritt: b := $\sqrt{\_\_\_\_\_}$ = z
4. Schritt: Ergebnis notieren.

e) Faktorisieren mit der zweiten bi…ischen Formel und vorherigem Ausklammern

Faktorisieren Sie die Summe $18a^2 - 12a + 2$, indem Sie schrittweise die fehlenden Angaben ausfüllen:

$18a^2 - 12a \ldots$ ______

1. Schritt: ______ …mel ist möglich
2. Schritt: a:= ______
3. Schritt: b:= ______
4. Schritt: 2ab := ______
5. Schritt: Ergebnis notieren.

Übung zu 1.4.3

Faktorisieren Sie die folgenden Summen so weit wie möglich, indem Sie Aus…ern u… oder die binomischen Formeln anwenden. Vereinfachen Sie das Ergebnis s…
Hinweis: Bei einer Aufgabe gibt es kein Ergebnis, da keine binomis… vor… und nicht ausgeklammert werden kann.

a) $2ax + 2ay - 4az$ =

b) $6a^2b + 12ab^2 - 18\,ab$ =

c) $4a^2 + 40ab + 25b^2$ =

d) $49x^2 - 42xy^2 + 9y^4$ =

e) $k^4 - 2k^2 + 1$ =

f) 1 – …

g) …x² … + 5… =

h) …⁶ – 8v² =

i) $12g^3 - 36g^2h + 27gh^2$ =

j) $\frac{3}{4}ax + \frac{3}{4}bx - \frac{3}{4}x$ =

k) …

l) …18ab + $\sqrt{12a}$ =

m) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{15}xy + \frac{1}{9}y^2$ =

n) $\frac{4}{9}u^2 - 1$

o) $\frac{1}{\ldots}$

=

…² =

Aufgabe 1.5

Quadratische Ergänzung

Aufgabenstellungen, wie beispielsweise die Ermittlung der Scheitelpunkt… …Parabel oder Lösungsverfahren bei quadratischen Ungleichungen , erfordern o… einen … …erm zu einem Binom umzuformen. Man bezeichnet dieses Verfahren als **quad… …che E…ng.** Die schrittweise Vorgehensweise bei der quadratischen Ergänzung wird wieder an… …eines …spiels dargestellt. Die einzelnen Schritte können auch hier bei ein wenig Übung … Kopf … …en. T…gen Sie Schritt für Schritt jeweils die Zwischenergebnisse aus den Sprechblasen an … …gese… Stellen ein.

In diesem Beispiel soll aus dem Term $16x^2 + 48$… ___ ein Bi… entstehen.

1. Schritt
Zuordnen einer passenden binomischen Formel. Anh… …der + vor 48 erkennt man, … 1. binomische Form… …sst.

$16x^2 + 48xy +$ … $= ($… $)$

2. Schr…
…dem gegebenen quadratischen … Su…anden a^2 … Wurzelzie… …n Wert von a …chnen … …n Wert in der Klammer rechts vom …leichheit… …en eintrage…

Hier: a … $16x^2 = 4x$

Z… …ergebnis: … $+ 48xy +$ ____ $= (4x +$ ___$)^2$

$16x^2 + 48x$… ______ = (______ + ______)^2

3. Schritt
Mit Hilfe des zweiten Summanden, der aus 2ab besteht, auf den Wert von b schließen. Man dividiert dazu den mitt… …manden dur…
…
…gebnis in der Klammer rechts vom …eichheitszeichen eintragen.

4. Schritt
Aus dem Ergebnis von Schritt 3 durch Quadrieren b^2 ermitteln und das Ergebnis notieren.

Hier: $b^2 := 36y^2$

Übung 1.5.1

Ergänzen Sie zum Binom: $x^2 - x +$ ____ . Notieren Sie als Hilfestellu… zunäc… …ch d… …nzelnen Rechenschritte, die im Kopf ablaufen, in der Sprechblase. (Kontroll… …is: (x –

$x^2 - x +$ ____ $= ($ ____ ____ $)$

Schrit… …Kopf
…chrit… …ino… …che Formel
2. S… a:= $\sqrt{\_\_\_\_}$ =
3. …hritt: b = $\frac{2ab}{2}$ … =
4. Schri… b^2 := ______

Übung 1.5.2

Ergänzen Sie zu… …om… …suchen Sie dabei di… S…itte 1 bis 4 …m Kopf durchzuführen.

a) $f^2 +$ …
b) p^2 …q + ___ =
c) … – 4… =
… 8x + ___
e) $9p^2 + 6p +$ ___ =
f) $x^2 - 6x +$ ___ =
g) $z^2 + z +$ ___
h) …
… =
… + az + ___ =
k) $4x^2 - 4xy +$ ___ =
l) $16a^2 - 32ay$ …
m) $16x^2$ …
n) …
… + ___ =
… – 40vw + ___ =

Ergänzende und vertiefende Übungen

Um die Regeln zur Potenzrechnung und den Umgang mit Binomen zu festi[illegible] und [illegible]tiefe[illegible] können Sie die folgenden ergänzenden Übungen bearbeiten. Dies ist besonders [illegible] wenn [illegible] Leistungskurs in Mathematik belegen wollen oder ein Studienfach wähle[illegible] [illegible]dem Vorlesungen in Mathematik obligatorisch sind.

Übung 1.6

Formen Sie die Brüche so um, dass im Nenner keine Wurz[illegible]erst[illegible]. Vereinfa[illegible] Sie die Terme dabei so weit wie möglich. (Vergl. Aufgabe [illegible] Beis[illegible]1)

a) $\frac{10b}{\sqrt{b}}$ = ______

b) $\frac{3x}{\sqrt{27x}}$ = ______

c) $\frac{z}{\sqrt{z}+1}$ = ______

d) $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$ = ______

e) $\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}$ ______

Übung [illegible]

Vere[illegible] Sie soweit wie m[illegible]ch.

a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ = ______

b) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ [illegible] ______

[illegible] = ______

d) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$ = ______

e) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{[illegible]}}$ ______

Übung 1.8

Kürzen Sie den Bruch so weit wie möglich.

a) $\frac{(x^n + x^{n+1})^2}{x^{2n}}$ = ______

b) $\frac{x^{2n+1} - x^{2n+3}}{x^{n+1} + x^{n+2}}$ = ______

Übung 1.9

Faktorisieren Sie unter Anwen[illegible]nzgesetze und [illegible]t Hilfe der bin[illegible]ischen Formeln.

a) $\sqrt{x^{2n} - 2x^{n+m} +}$ [illegible] = ______

b) $\sqrt{4x^{4n}}$ [illegible] $+4y$ [illegible] ______

Üng[illegible]

Fo[illegible]n Sie [illegible]erm durch [illegible]klammern [illegible] geeigneten Faktors so um, dass in der Klammer keine neg[illegible]en Potenzen bzw. [illegible] Brüche au[illegible]en.

a) [illegible] $+ a^x + 2$ = ______

b) $b^{2x} + 4 - b^{-2x}$ = ______

Übung 1.11

Di[illegible]hnung entstehen. Die Aufgabenstellung dort [illegible]nnen sicherlich, dass das jedoch zu [illegible]nierten Ausdruck führt, da [illegible]ull erscheint, wodurch eine Division [illegible]tsteht. Man muss diese Terme daher so [illegible] Nenner vollständig [illegible]sgekürzt werden kann oder im Nenner ein Ausdru[illegible]gleich Null wird. Erläutern Sie anhand der Beispiele die Rechenschritte, und wenden Sie [illegible]n auf die anderen Aufgaben an.

Beispiel 1

Reche[illegible]rn der Umformungen:

[illegible] = $(1) \rightarrow (2)$ ______

[illegible] $\frac{[illegible]2xh + h^2 - x^2}{h}$ = $(2) \rightarrow (3)$ ______

(3) $\frac{2xh+h^2}{h}=$ (3) → (4)________

(4) $\frac{h(2x+h)}{h}=$ (4) → (5)________

(5) $2x+h$ Für h = 0 ergibt sich der Te… 2x

Beispiel 2

Rechenschritte Erläutern d… Umform…en:

(1) $\frac{(x+h)^2-(x+h)-(x^2-x)}{h}=$ … → (2)________

(2) $\frac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h}$ (2) → …________

(3) $\frac{2xh+h^2-h}{h}=$ … (4)________

(4) $\frac{h(2x+h…}{h}=$ (4) → (5)________

(5) 2… – … Für h… ergibt … Term 2x –1.

Beisp…

Rechenschritte Erläutern der Umformungen:

(1) $\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=$ (1) → (2)________

(2) $\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{…}$ …________

(3) → (4)________

… $\frac{…h}{…x(x+h)}=$ (4) → (5)________

(5) $\frac{-h}{hx(x+h)}=$ (5) → (6)________

(6) $\frac{-1}{x(x+h)}$ … sich der Term $-\frac{1}{x^2}$.

Beispiel…

Rech… Erläutern der Umformungen:

(1) … = (1) → (2)________

____

(2) $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$ (2) → (3)________

(3) $\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$ (3) → (4)________

(4) $\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$ (4) → (5)________

(5) $\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$ (5) → (6…________

(6) $\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$ Für … erg… ch der Term … $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=$ …

Formen Sie mit Hi… die folgenden Te…e um.

a) $\frac{2(x+…}{…}$ b) $\frac{(x+h)^3…}{…}$

c) … d) $\frac{\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}}{h}$

e) $\frac{…-\frac{1}{x^2}}{h}$ f) $\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

Lösungen nach Einsetzen von h…0 in unsortierter Reihenfolge:

$3x^2$; $-\frac{1}{(x+1)^2}$; $\frac{1}{2\sqrt{x+3…}}$; $4x$; $-\frac{2}{x^3}$; $-\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

Aufgabe 1.6

Ergänzende Betrachtungen zu Binomen höherer Ordnung

a) Multiplizieren Sie den Term $(2x + 3)^4$, ohne Verwendung von Hilfs…teln …u Fuß aus. Wenn Sie alles richtig umgeformt haben, erhalten Sie als Ergebni… x^4 + 9… …6x… + 216x + 81

b) …rech… …e Produkte …rch Ausmulti…zi…en der Klammern.

$(a … b)^0$ = __

$(… b)^1$ = ______

$(a + b)^2$ = ___________

$(a + b)^3$ = _________________

$(a + b)^4$ …

…echnungen.

c) Ergänzen Sie die Tabelle, indem Sie das für $(a + b)^0$, $(a + b)^1$ und $(a + b)^2$ beg… …ne Sch… anhand Ihrer Ergebnisse aus b) fortsetzen.

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + …$

$(a + b)^3 =$ ____ + ____ + … …

$(a + b)^4 =$ ____ + ____ + … … ____

$(a + b)^5 =$ ____ + ____ + … … ____ + …

Geben Sie an, wie sich die Potenzen, gelese… …n links …h rechts, ver…lt…n.

(1) Potenzen von a: ______________________________

(2) Potenzen von b: ______________________________

Die Koeffi…ten e… …n bi… = 5 ergeb… fo…gendes Dreieck. Vervollständigen Sie das Dreieck, indem Sie … den be… …nenden Angab… a…f die Zahlen…erte ab n = 6 schließen.

n = 0								
… 1						1		
n = …					2	1		
n = 3				3	3	1		
n = 4			4	6	4	1		
n = 5	1	5	10	10	5	1		
n = 6								
n = 7								
…								

Man nennt dieses Dreieck d… "…calsche Dreieck" und die Zahlen… **Binomialkoeffi…** …bezeichnet. Die Zahlenwerte … …en Dreieck können zu… …Summenbildung ermittelt werden, … mit dem Tasch… …e $\boxed{nCr}$.

Be… …Eingabe: $\binom{9}{5} = 9\boxed{nCr}5 = 126$

… Tastenbezeichnung nCr stammt von der … Bedeutung des B… …fizienten …ler Wahrscheinlichkeitsrechnung, vg… …nastik.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kenntnis über die Koeffizienten und Potenz… …bei den …men folgendes Produkt.

$(a + b)^{10} =$ ______________________________

Information 1.5

Berechnet man den Ausdruck $(a + b)^n$ … erhält m… die …g. **Binom…reihe**.

Algemeine Formulierung … Binomia…

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{…} a^{n-1} … + … + \binom{n}{n-1} a^1 b^{…} \binom{n}{n} b^n = \sum … a^{…-k} b^k$

D… …icher Σ kenn…n S… wahrscheinlich …s dem Tabe… …alkulationspro…mm Excel. Di…es Zeichen wird dort zum **…ufsu…mieren** von Zelleninhalten …wendet. Entsprechend zur …deutung in E…el wird das Su…m…zeichen in der Mathematik als …kürzende …hreibweise b… …mmen verwendet.

e) In … …lgenden Beispiel … …n die Kenntnis… über die Binomialreihe auf die Anfangsaufgabe $(2 + 3x)^4$ …wendet. Sie seh… …dass diese… … wesentlich kürzer ist als der Weg von Teilaufgabe a). …eutlichen Si… sich das Beispi… und berechnen Sie anschließend mit dieser Methode ebenfalls den Term $(2x + \frac{1}{2})^5$

$(2+3x)^4 = \binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}2^3 \cdot 3x + \binom{4}{…}2^2 \cdot (3x)^2 + \binom{4}{3}2 \cdot (3x)^3 + \binom{4}{4}(3x)^4$

$… + 1 \cdot 81x^4$

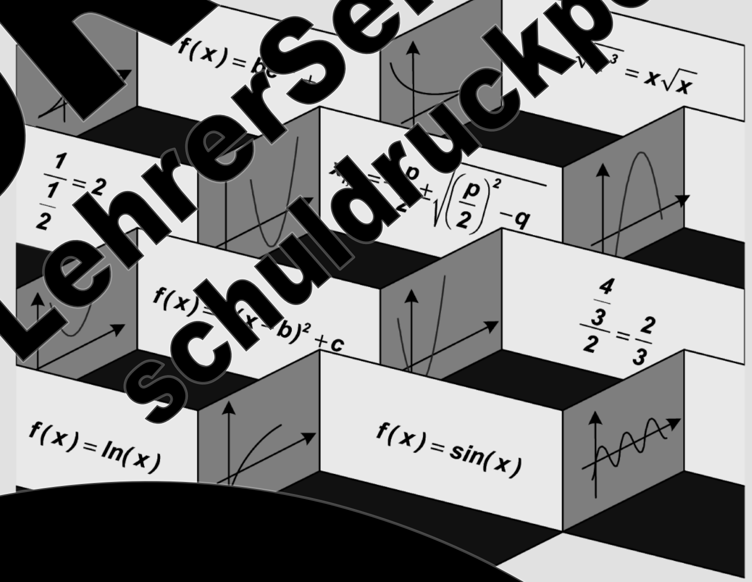
$…\frac{…}{2})^5 =$ ______________________________

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Grundlegendes zu Gleic

Gesamtw… …s zu Algebra und Funktionen … …iert erlernen
(Best…
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 2: Grundlegendes zu Gleichungen

Aufgabe 2.1

Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare G…ungen…

Das Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare G…hun… …hren, haben Sie bereits in der Sekundarstufe I gelernt. Hier wenden Sie nun die Ih… …bereits… …verfahren an. Die Aufgabe ist gleichzeitig eine Übung zur Wiederholung der B… …echn… …nd der binomischen Formeln. Versuchen Sie bei der Lösung vollständig auf den Ei…tz d… …hen… …ners zu verzichten. Zur Kontrolle ist die Lösungsmenge jeweils angegeben.

a) $2x = x$ b) …$+1)^2 = (x-1)^2$ {0}

c) $(x-1)^2 = x^2 - 1$ {1} … $\frac{x}{3} + 9 = 1$ {-24}

e) $\frac{3}{4}y - 2 = 1$ … $x + (x-…)… (x+2)^2 = 6$ {-9}

g) $2x + (9-x)^2 - 1 - (12…)^2 + 2… = 0$ {6} h) … $+ 6 - \frac{x}{3} = …$ {-3}

i) $2(4\frac{1}{2}x + 2\frac{3}{4}) = …$ {$\frac{7}{…}$} j) $10x … 2x) = 2(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})$ {$-\frac{1}{5}$}

k) $(1{,}5…(1{,}5…2)^2 - 38{,}08$ … {-2} l) $(x + …\frac{…}{3})^2 - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}x$ { }

Au…be 2.2

…a…trisierte Gleich…gen

Be… …olgenden …eich…ungen sind … der Lösungsvariablen x weitere Variablen, sog. Parameter, enthalten. D.h., in den meisten Fä… besteht die Lösung nicht nur aus einer Zahl, sondern enthält auch noch den Parameter. Lösen Si… …e Gleichungen wie gewohnt jeweils nach x auf. Decken Sie dabei das Beispiel unten ab, und versuche… Sie die Gleichungen zunächst ohne diese Hilfe zu bearbeiten. Die Lösungen sind jeweils als Kontrollergebnis gegeben.

a) $3x + 7 = 6a…$ b) $6x - 2a = 2x + 2a + 4b$ $x = a+b$

c) $3m…$ … $a + 5b = 5a + xb$ $x = 5$

e)… … $= 3sx - 7rt$ $x = -\frac{t}{3}$

…g zu c) bis f):

$$3s + sx = rx + 3r$$
$$sx - rx = 3r - 3s$$
$$x(s-r) = 3(r-s)$$
$$x = \frac{3(r-s)}{(s-r)}$$
$$x = \frac{-3(s-r)}{(s-r)}$$
$$x = -3 \quad \text{mit } r \neq s$$

Alle Summanden mit x auf die linke Seite bringen.

Kommt x i… mehr… Su… … …t.

…an die Klammern …n, müssen alle …gleich sein. Das …indem man im Z… …nner –1 aus… **M… …hren wird …wandt.**

… man beim Kürzen den Zähler und Nenner … …ie Klammer …– r) dividiert, darf die Klammer nicht Nul… …so dürfen r …nd s nicht den gleichen Wert annehm…

Aufgabe 2.3

Ergänzendes Vertiefungsthema Bruchgleichungen

In dieser Aufgabe werden Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichunge… beha… arbeiten Sie sich anhand des Beispiels die prinzipielle Vorgehensweise bei diesem …ei… typ und erläutern Sie anschließend den Lösungsweg im Beispiel auf der folgenden …ite.

Information 2.1: Beispielaufgabe zu Bruchgleichungen

	Rechnung	Bemer… …en z… …chnung
(1)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2x-10}$	(1) … 2) Nen… soweit wie mög… …h faktorisier…
(2)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2(x-5)}$	… (3) …enn mög… …h, … …che kürzen.
(3)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 =$ … x–5	(3) … (4) All… …rüc… auf den Hau… …enner bringen. …N … 5 … x
(4)	$\frac{5-2x}{5-x}$ … 5–x … =	(4) … (5) …leichung … HN multiplizieren. **A…tu…g**: Bei Minus … …ruch → Klammer setzen
(5)	5… 2… …5 – x) … –5	(5) → (6) Klamm… auflösen.
(6)	… 2x … –5	(6) → (8) …eichung nach x auflösen.
…	–x = –5	
(8)	x = …5	**A…htung:** x = 5 darf als Lösung nicht in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, da sich Null im Nenner ergibt. Daher muss ein Definitionsbereich angegeben werden.

Definitionsbereich … …hnung durch Nullsetzen des Nenners.

… …ung überschneiden sich.

$\Rightarrow$ L = { } Es existiert … keine Lösung!

Zusammenfassen der Schritte bei der Lösung von Bruchgleichu…

1. Die Summen in … …en so weit wie möglich fakt… …egebenenfalls kürzen.
2. Den Ha… … Summanden auf den Hauptnenn…
3. Die … multiplizieren.
4. Di… …chung na… …uflösen.
5. … …sbereich bestimmen.
6. … …ereich mit dem Ergebnis vergleichen und die L…sungsmenge ang…

Erläutern Sie jeweils die einzelnen Lösungsschritte:

(1) $\frac{8+x}{15+5x} - \frac{5}{9+3x} = \frac{4}{15}$

(2) $\frac{8+x}{5(3+x)} - \frac{5}{3(3+x)} = \frac{4}{3\cdot 5}$

(3) $\frac{3(8+x)}{15(x+3)} - \frac{5\cdot 5}{15(x+3)} = \frac{4(x+3)}{15(x+3)}$

(4) $3(8+x) - 25 = 4(3+x)$

(5) $24 + 3x - 25 =$ …2…

(6) … –1…

… = IR \ {– 3…

IL = {–…

…2.1

Erm… …n Sie den De… …ionsbere… d… Bruchgleichungen und bestätigen Sie jeweils die angegebene Lösungsmenge durch Rechnu…

a) $\frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-2}$ L = {4}

b) $\frac{4}{\ldots}$ … … { }

… x – 1

… $\frac{x}{4-2x} - \frac{x}{3x-6} = \frac{x}{4x-8}$ L= …

e) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x-3}{\ldots}$ L = {–5}

f) $\frac{2x+2}{x^2+\ldots}$ L = { }

g) … (x – 5)(2… L = {7}

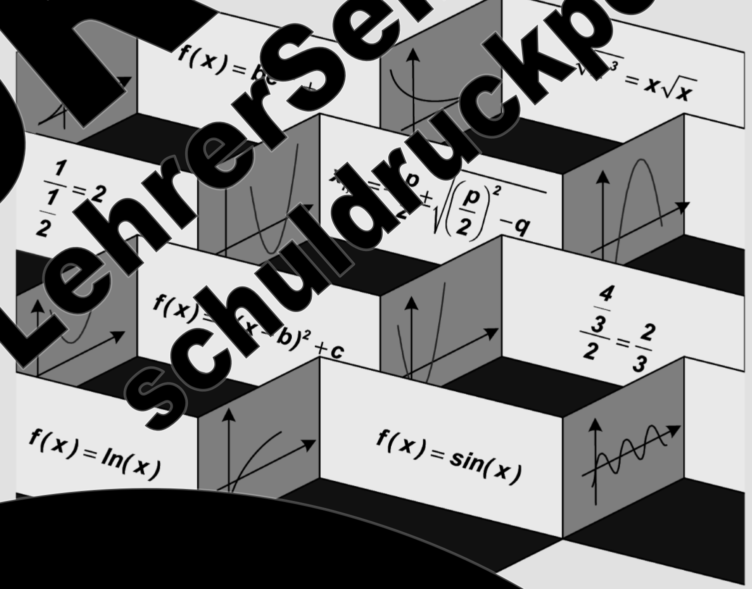
… $\frac{24x+6}{18x+6} + \frac{3x-6}{9x^2-1}$ L = {… $\frac{2}{3}$ }

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel

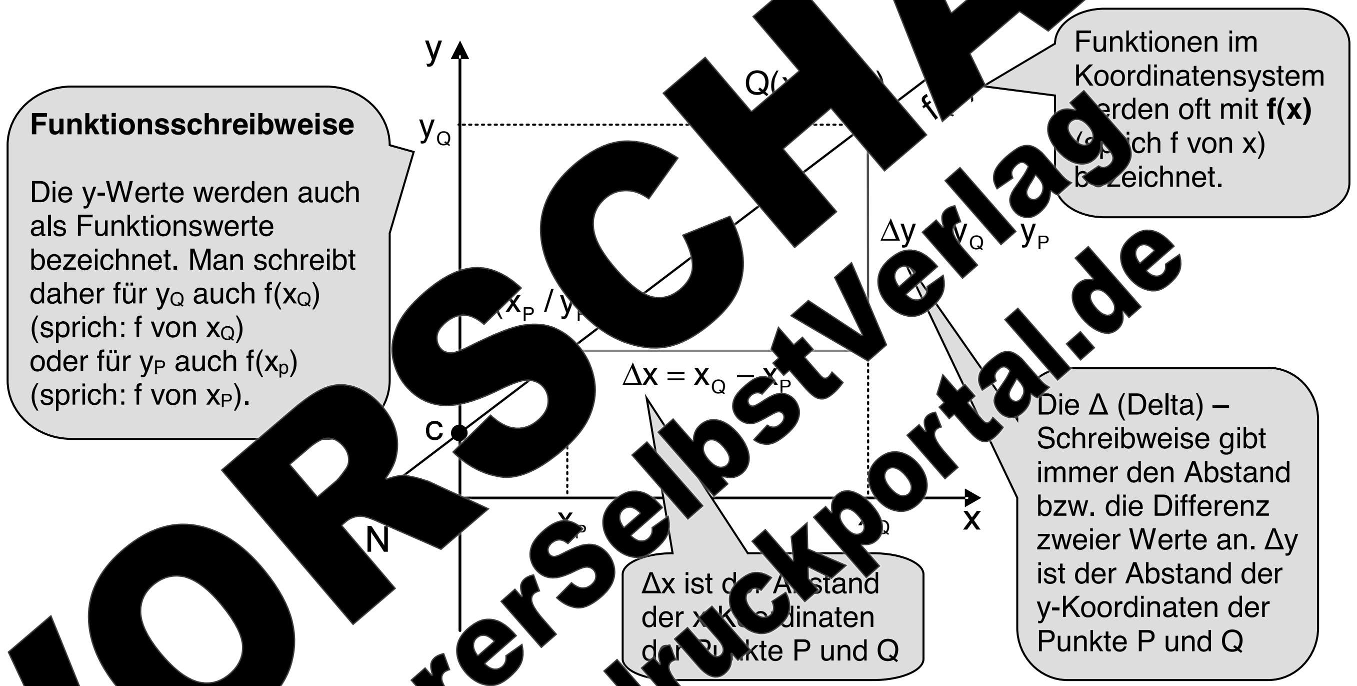
Lineare Funktionen

02-033-279

Kapitel 3: Lineare Funktionen

Aufgabe 3.1

Verdeutlichen Sie sich die folgenden grundlegenden Informationen ... bzw. ...aren Funktionen im Koordinatensystem.



Be...chnungen: ...in Koordinaten...em, bei dem die Achsen senkrecht zueinander verlaufen wi... ...s **kartesisches Koordinatensystem** bezeichnet.

Die **h...zontale Achse**, hier die x-Achse, wird auch als **Abzisse** be...et.

Die **vertikale Achse**, hier die y-Achse, wird auch als **Ordinate** bezeichnet. Diese Achse kann auch mit dem Namen der abgebildeten Funktion, hier ... ...werden.

...en, werden in der Regel mit f(x) bezeichnet. ... Funktionen unterscheiden zu können, verwendet man oft ... ...en drückt durch diese Schreibweise aus, dass ... ...nktion durch Einsetzen eines Wertes für x in die Funktionsg... ...net wird. (Vgl. Sprechblasen oben)

Abstände: ...stand Δx der x-Koordinaten der ... ...Q: $\Delta x = x_Q - x_P$

...d Δy der y-Koordinaten der Punk... $\Delta y = y_Q - y_P$

...stand d der Punkte P und Q (Pythagora... ...$^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

...abschnitt c: Die Stelle c, an der die Gera... die y-Achse sch... ...Koordinaten dieses Schnittpunktes ... ...er A(0/c)

Steigung m: Die Steigung einer Funktion ist durch das folgende Ve...nis def...

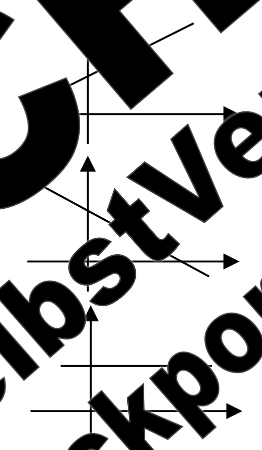
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

Verdeutlichen Sie sich anhand der A...ungen ... folgenden Seite, was man unter einer steigende... und ei...llend... Geraden versteht.

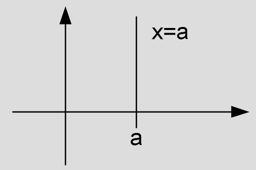
m>0: die Gerade ...gt

m<0: ...

...rade verlä... ...agerecht



Achtung: ...en der Form **x = a** gehen an der Stelle a durch ...chse und verlaufen senkrecht. Diese Gera... ...d **keine Funktionen**.



Funkti... ...ist durch die **Steigung m** und den **y-**

y = mx + c oder **f(x) = mx + ...**

(Oft wird anstelle von c auch ein b ve...

Nullstelle N ...se an der Stelle x_0 von einer G... ...nitten, so ...sen Punkt als **Nullstelle** N(... ...y-Koordinate ... annimmt, können die Koordina... ...telle mit dem ...er **f(x) = 0** berechnet werden.

Ma... sagt auch: „Die Funktion wird Null gesetzt".

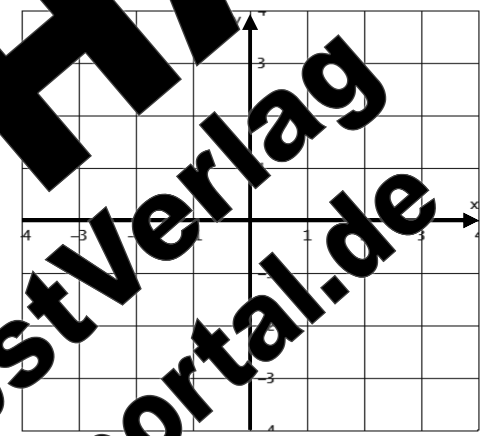
Um die Nullstelle zu erhalte... ...aus dem Ansatz ...tehende Gleichung mx + c = 0 na...

Zeichnen von Geraden: Um eine Gerade in einem Koordinatensystem z...chnen, ...tigt man keinen Taschenrechner und auch keine Wertetab... Wie m... ...ine Gerade direkt aus der Kenntnis von Achsenabs... ...und St... ...nnen kann, wird im Folgenden an zwei Beispielen e... ...erde... ...en Sie sich die Vorgehensweise, und wenden Sie die M...ode... ...in der Übung 3.1 an.

Beispiel Zeichnen von Geraden

$f(x) = -2x + 1$

$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$



Schritt 1: M... ...Sie den ...chs...nabschnitt c im Koordinatensystem. ...ür f(x) gilt $c_f = 1$ ...r g(x) gilt c_g ...

Schritt 2: Stellen ...en Wert für die Steigung m als Bruch dar. Ein nega... Vorzeichen kann man dann dem Zähler oder Nenner z...nen. Bedenken Sie dabei, dass man jede Zahl als Bruch mit ...Nenner 1 schreiben kann. Hier gilt:

...ür f(x) gilt:

$$m_f = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y-Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x-Richtung}}\right)$$

$$\ldots \frac{2}{\ldots} = \frac{-2}{-3} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y-Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x-Richtung}}\right)$$

Das Vorzeichen im Bruch gibt an, ob man sich in Richtung der Achsen in negativer oder positiver Rich...

Schritt 3: Zeichnen Si... ...m y-Achsenabschnitt c durch Abzählen der ent... ...ahl von Kästchen jeweils das Steigungsdreieck ei... ...Sie danach die angegebenen Geraden...

Übung 3...

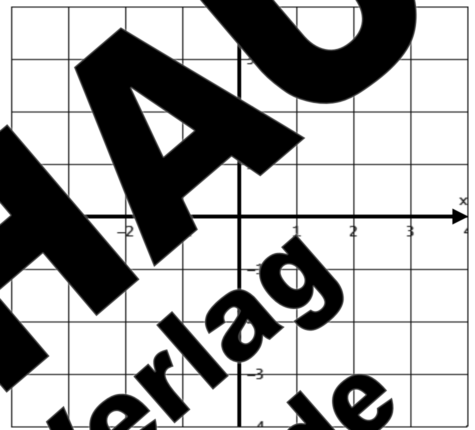
a) ... ...g des Taschenrechners oder einer Wert... ...Funktionen

...3x

...3

... auf der folgenden Seite gegebene Ko... ...em ein

b) Zeichnen Sie die Gerade ebenfalls in diesem Koordinatensystem ein. x = –2



c) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem, die Schreibweise Δx?

____

____

____

d) Welche Bedeutung hat, be... auf Angabe... einem Ko...atensystem ... Quotient $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$?

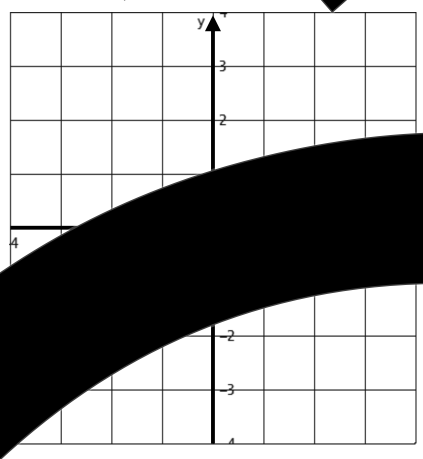
____

Aufgabe 3.2

Lageb...ehu...en zwis...n Geraden

Ergänze... ...ie n... ...eichnen d... ...eraden die Ü...schriften, und füllen Sie die jeweiligen Lücken ...Text a...

a) ______________ **Gerad...**



Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in das Koordinatensystem ein, und geben Sie an, wie die Geraden zueinander verlaufen.

... = 0,5x +3

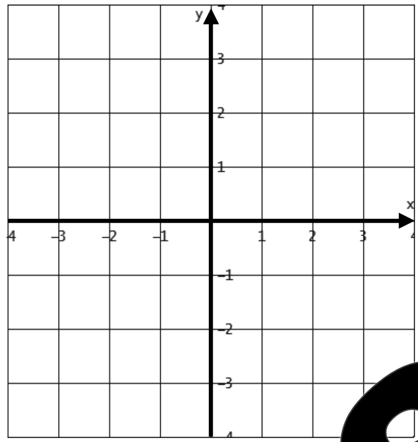
... +1

____

Merke: Zw... und h(x) = $m_h x + c_h$ sind ______________

... für die Steigungen gilt: $m_h = m_g$

b) ______________________ **Geraden**



Zeichnen Sie ... ...eiden G... ...d h in das Koordinatens... ...und g... Sie an, wie die Geraden zuein... ...er ...fen.

g(x) = ... 3

...(x) = ...

D... ...raden ... ______________

____

Wenn Sie ebenf... ...raden ... Steigu... m_g= 3 und m_h = $-\frac{1}{3}$, m_g = –4 und m_h= $\frac{1}{4}$ oder m_g= $\frac{2}{5}$ und m_h= ... ...kennen Si... ...ass auch die... ...eraden jeweils orthogonal sind.

Mer... Zwei ...aden g(x) ... x+ c_g und h(x) ... $m_h x + c_h$ sind

______________ (Schreibweise $g \perp h$), wenn gilt: $m_h = -\frac{1}{m_g}$

Aufgabe 3.3

Schnittpunkte von Geraden

Die beiden ... ...2 b) schneiden sich. Lesen Sie die Koordinaten des Schn...

... Schnittpunkt zu berechnen, verwendet ma... Gleichsetzungsverfahren. Man ... auch mit dem Additions- bzw. Einsetzungsverfahre...

Merke: Berechn... ...unkts zwischen zwei Funktione... **= g(x)**

Verd... Schritte bei der Berechnung des Sc... ...weier Geraden. Ac... ...ng entsprechender Aufgaben im Heft, d... ...ie Dokumentation ... ...egs stets den A...satz notieren.

Berechnen des Schnittpunktes:

Schritt 1:
Notieren des Ansatzes.

$g(x) = h(x)$

Schritt 2:
Gleichsetzen der Funktionsterme.

$-2x + 3 = 0,5x + 1$

___________ = ___________

Schritt 3:
Auflösen der Gleichung nach x.

...ert: $y = -2 \cdot 0,8 + 3 = 1,4$ $S(0,8 / 1,4)$

Schritt 4:
Berechnen des ... Wert... Funktionswerts des Schnittpunkts d... von x in eine der beiden Funktionsgleichungen. (Man verwendet die Funktionsgleich..., ...der de... ...aufwand geringer ist.)

Aufgabe 3.4

Nullstelle ... kann ... Schnittpunkt der Geraden ... mit der x-Achse betrachten. Da die x-Achse die ...ktionsgleichung f(x) = 0 hat, ergibt sich für die Berechnung der Nullstellen der schon angeführte A... **f(x) = 0.** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $g_1(x) = -2x + 3$ und $g_2(x) = 0,5x + 1$, und vergle... zur Probe die berechneten ... mit der Zeichnung von Aufgabe 3.2 a).

Gerade $g_1(x)$

Schritt 1: ______________

Schritt ...

Nullstelle ...: (______ / ______)

Gerade $g_2(x)$

Schritt 1: ______________

____

Nullstelle g_2: N_2(______ / ______

Aufgabe 3.5

Rechnerische Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus zwei gegeb... Pun... oder Bedingungen

Beispiel 1:

Gegeben sind die Punkte P(–2 / 3) und Q(2 / 1)

Schritt 1
Die x- und y-Koordinate des gegebenen Punkts notieren, bzw. bei zwei gegebenen Punkten denjenigen mit den einfacheren Zahlen auswählen. (Es spielt für das Ergebnis keine Rolle welchen Punkt man verwendet.)

x = 2

Schritt 2
Die Koordinaten von beiden Punkten in die Steigungsformel einsetzen und m berechnen oder den Wert von m ... in der Aufgabenstellung angegebenen Bedingung interpretieren.

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{3 - 1}{-2 - 2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

Schritt 3
Die allgemeine Geradengleichung y = mx + c nach c umformen: c = y – mx.
Dann ... die unter Schritt 1 und 2 ermittelten Werte für y, m und x einsetzen und c berechnen.

$c = y - mx = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 1 - (-1) = 2$

Schritt 4
Die gesuchte Gleichung ergibt sich, wenn man m und c in die allgemeine Form y = mx + c einsetzt.

Funktion: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Üb...

... die gesuchte Funkti...

...eben sind die Punkte A(3/2) und B(2/4).

x = ____

y = ____

m = ... = ____

... = ______________________

...on : g(x) = ______________________

b) Gegeben ist die Gerade h(x) = –3x + 5. Gesucht ist die zu h parallele Gerade g(x) durch den Punkt P(2/2).

x = ___

y = ___

$m = m_h =$ ____

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **parallel** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den Ansatz: $m_h = m_g$.

c = y – mx = ______________________________

Funktion: $g(x) = -3x + 8$

c) Gegeben ist die Gerade h(x) = $-\frac{4}{5}$ ... Gesucht ist die zu h orthogonale Gerade g(x) durch den Punkt P(2 / 3,5).

Zusatzinfo:
Die zur Geraden h(x) orthogonal verlaufende Gerade g(x) wird auch als die **Normale** der Geraden h(x) bezeichnet.

x = ___

y = ___

m = – ____ = ______

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **orthogonal** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den Ansatz: $m_g = -\frac{1}{m_h}$.

c = y ______________________

Funktion: $g(x) = \frac{5}{4}x + 1$

d) Gesuc... ...rade g(x) durch den P...

___

... **...lhalbierende** hat ...leichung **f(x) =** ... nd damit die Steig...

$m = -\frac{\quad}{m_{w1}} =$ ______

c = y – ... ______

Fu... = ______________

e) Gesucht ist die zur zweiten Winkelhalbierenden parallel verlaufende Gerade g(x) durch den Punkt P(–1 / –3).

x = ___

y = ___

m = _____ = _____

Di... **...eite W...elhalbierende** hat ... ...unkti... ...gleichung ... ...er **y = –x** un... ...amit ... Steig... $m_{W2} =$ –1

c = y – mx = ______________________

Funktion: g(x) = ______________

Raum für Notizen

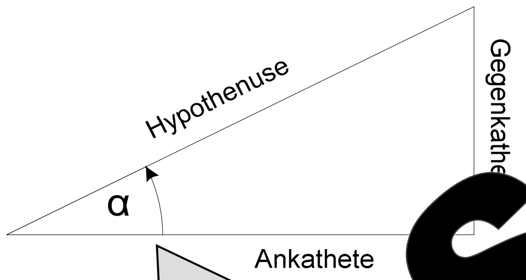
Ergänz... ____________________

Aufgabe 3.6

Winkel bei Geraden

a) Wiederholung Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Recherchieren Sie die Definition von sin, cos und tan im rechtwinkligen Dreieck und füllen Sie die entsprechenden Felder aus.



sin α = ____________

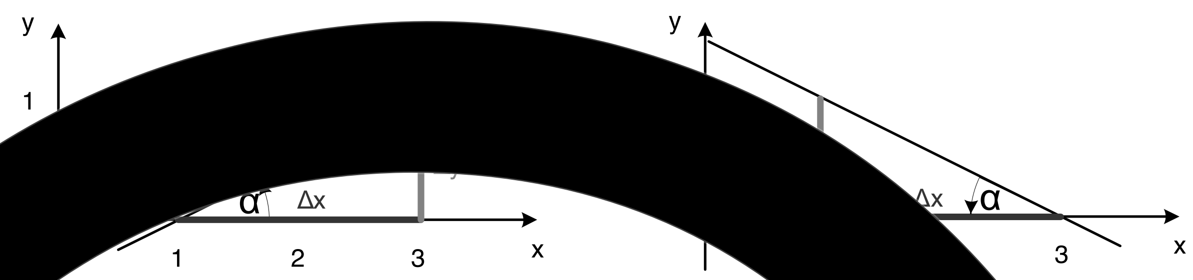
cos α = ____________

tan α = ____________

Die mathematisch positive Orientierung eines Winkels.
In der Mathematik ... eine Orientierung. Wird er von de... e au... gen den Uhrzeigersinn gemessen, so b... se ...tierung auch als **mathematisch pos...**

b) Schnittwinkel von Geraden mit der x-Achse

Bei den beiden abgebildeten Geraden f(x) = 0,5 x – 1 und h(x) = –0,5 x + 1,5 stellt das eingezeichnete Steigungsdreieck jeweils ein rechtwinkliges Dreieck dar.



Ordnen Sie in de... Δy jeweils die Ankathete A... athete Gk zu und begründe... hung gilt, wenn m die Steigung ... ist.

$$\tan(\alpha) = m$$

Beg...

Der Zahlenwert von α lässt sich dann mit dem Taschenrechner und der Funktion tan⁻¹ berechnen. (Bei den meisten Taschenrechnern über der tan-Taste mit shift oder inv... zu finden. Taschenrechner auf „deg“ einstellen).

Aus der Beziehung oben folgt: $\alpha = \tan^{-1}(m)$

für h(x) gilt dann: $\alpha = \tan^{-1}(0,5) \approx 26,6°$ ... g(x) gilt: $\alpha = \tan^{-1}(-0,5) \approx -26,6°$

Da man die Größe eines Winkels nicht als negativ... angibt, kann man die Formel für die Berechnung des Schnittwinkels einer Geraden mit der x-Achse auch mit Betragsstrichen versehen und den Winkel somit als positiven Wert darstellen.

Schnittwinkel Gerade und x-Achse: $\alpha = \tan^{-1}|m|$°

Übung 3.3

Gegeben ist die Gerade f(x) = –3x + ...
a) Berechnen Sie ... Schnittwinkel der Geraden f(x) = –3x + 1 mit der x-Achse.

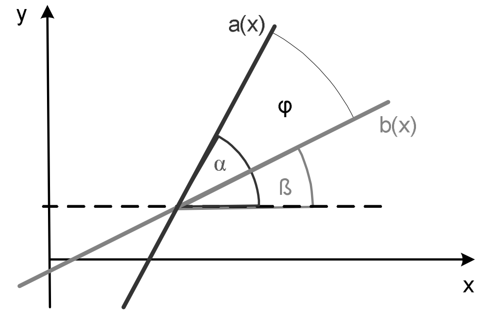
b) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass eine Gerade, welche die x-Achse unter einem Winkel von 7... schneidet, mit der y-Achse einen Winkel von 18,5° einschließt.

Information 3.1

Schnittwin...

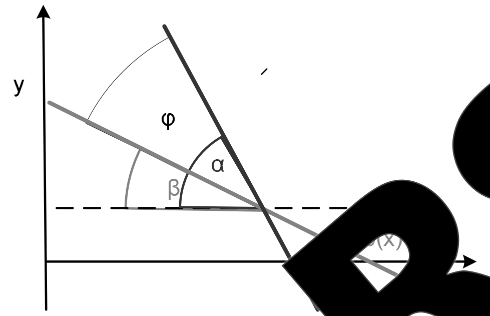
Wenn ... entstehen paarweise zwei Winkel, ... einer kleiner als 90° und ... sich zu 180° ergänzen. Als Schnittwin... im Allgemeinen der kl... also der Winkel kleiner als 90° bezeichnet. Man kann die S... zwischen den ... ilfe der Steigungswinkel berechnen.

a) Beide Geraden steigen oder fallen:



Man berechnet jeweils den Schnittwin... und β der beiden Geraden mit der x-Ach...

Der Schnittwinkel φ der beid... Ge... kann dann über die D...ferenz ... α ... berechnet werden.

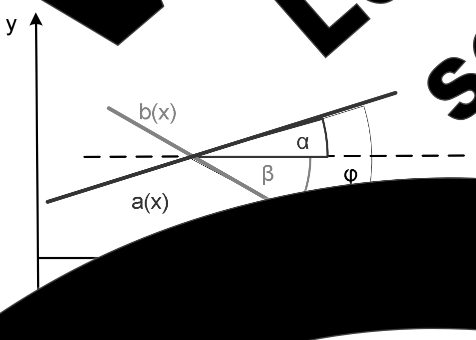


Schnittw...el zwisch... a(x) und b(x)

... β|

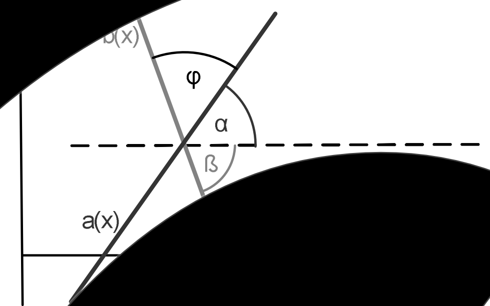
b) Eine Gera... fällt, ... Ge... steigt

Man berech... jeweils den Schnittwinkel α und β der bei... Geraden mit der x-Achse. Der Sch... ...el φ der Geraden kann dann über die ...me der Beträge von α und β berechnet we...en.



Schnittwinkel zwischen a(x) und b(x)

φ = |α| + |β|



Schnittwinkel zwi... b(x)

φ =180° – (|α ...

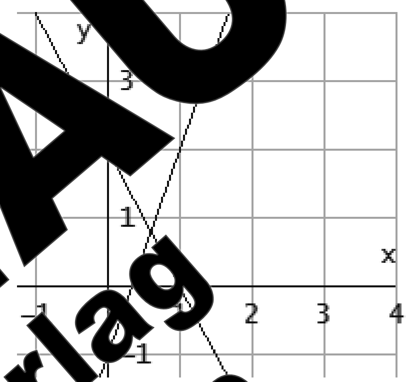
Übung 3.4

Gegeben sind die beiden Geraden

a(x) = –2x + 2 und b(x) = 3x – 1

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Geraden unt... einem Winkel von 45° schneiden.

b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die y-Achs... beiden Geraden geschnitten wird.



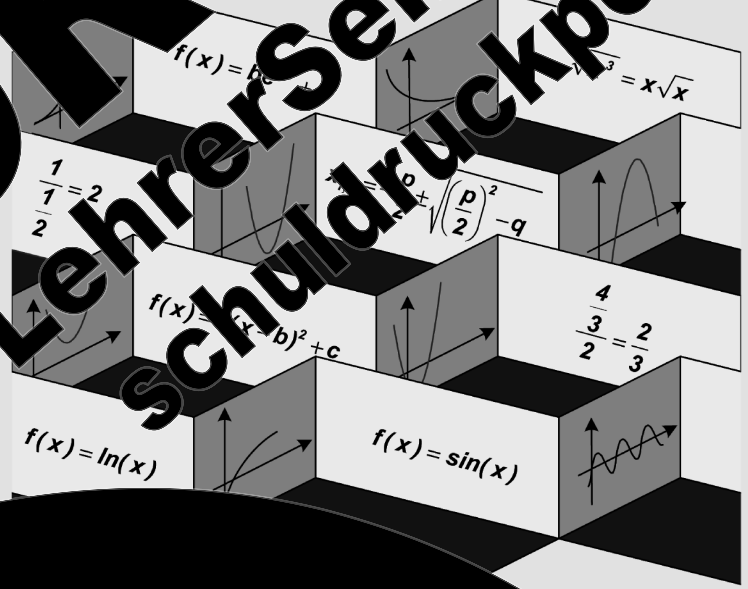
...nde Übungen: ____________________

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

Gesamtw... ...s zu Algebra und Funktionen ... ...iert erlernen
(Best...
St...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 4: Quadratische und biquadratische Gleichungen und U...ichung...

In der Sekundarstufe I haben Sie bereits Lösungsverfahren für diese ...leichung... ...elernt. Sie wissen sicherlich, dass für die Lösung quadratischer Gleichungen ... ...rmel ... abc-Formel und die quadratische Ergänzung angewandt werden kann. Dieser W... ist ... nicht immer notwendig. Im Folgenden lernen Sie, wie man quadratische ...leichun... ...jeweils einfachsten und damit für Rechenfehler am wenigsten anfälligen Verfa... ...ösen ...

Quadratische Gleichungen können in unterschiedlic... ...Da... ...for...en auftreten.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung in **polynomialer** Darstellung	**a... bx + ... 0**

...er Begriff **polynomial** b...eutet, dass der Gleichungst... aus einer Summe ..., in der vers...ied...e Potenzen vo... x ...ftreten.

Allgemeine Fo... tischen Gleichun... **fakt**... Dars...ng	**a(... b)(... c) = 0**

Der Begriff **faktorisiert** bedeutet, dass der Gleichungsterm aus einem Produkt unterschiedlicher „Summen" besteht.

Au... e 4.1

In ... en dieser ...ufgabe werden **...ungsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen in poly...omialer Fo...** behandelt. Bei einer quadratischen Gleichung können, müssen aber nicht immer, alle drei Sum...nden vorhanden sein. Der Summand bx und auch der Summand c können fehlen. Das wirkt sich a... das anzuwendende Lösungsverfahren aus. Im Folgenden werden die einzelnen Verfahren vorgestellt.

Aufgabe 4.1.1

Qua...

...ngen zu den Beispielen.

...4.1.1

Der Summand bx fehlt und es kommt nur ein x^2 vor.

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

S...
Glei... ...uflösen

Schritt 2...
Beim Ziehe... ...l darauf achten, das... ...sitive und eine negative... ...ben kann.

Ist der Ausdru... ... Wurzel negativ, gibt e... ...ung.

Begründung, warum es eine positive und eine negative Wurzel gibt.

$$x^2 = t$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{t}$$
$$\Rightarrow \quad |x| = \sqrt{t}$$
$$\Rightarrow \quad +x_1 = \sqrt{t} \lor -x_1 = \sqrt{t}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{t} \lor x_1 = -\sqrt{t}$$
$$\text{also} \quad x = \pm\sqrt{t}$$

Wenn man aus der Lösungsariablen die Wurzel zieht, muss man den Betrag beachten, da gilt: $(+x)^2 = x^2$ und $(-x)^2 = x^2$.

Wenn man die …strich… weg… will, … man vor dem x b… Vorzeichen be…ksichtigen.

Bringt man …s Vorzeichen … rechte Sei… …rg… eine positive un… …ega… Lösung fü… …eichung.

In den beiden fo… Bei…en sind die Lö…ungen der Glei…ung a…gegeben. Bestätigen Sie die angegebene … …ange… …ge d… Rechnung.

Beispi… … $- 8 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \qquad L = \{\pm 2\}$

Beispiel 2: $3x^2 + 6 = 0$

$L = \{\}$

…piel 3: $1 - (x - 1)^2 = 2x$

$\Rightarrow \quad x_1$ … $\qquad L = \{0\}$

Aufgabe 4.1.2

Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

Lesen Sie die Information zum Lösen dieses Gleichungstyps, und w… …ie den …ngsweg auf die Aufgabenstellung von Beispiel 2 an.

Information 4.1.2

Der Summand ohne x fehlt.

Au… …en Fa… durc… …eilen!

…$^2 + b$…

$x(ax + b) =$ …

…**usklam…ern**

… **$= 0$ oder a… $+ b = 0$**

$ax = -b$

$x_2 =$ …b…

Fallunterscheidung: Ein Produkt ist Null … …ein Faktor den W… Nu… annimmt. … …entw… …er ist das x vor … Nul… …der A… …uck in d… …lam… …ist …

Die zw…e Lösung x_2 …ergibt sich, indem man …en Term in der Klam-…mer Null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

D… e… Lösung x_1 …er immer Nul…

Be…iel 1:	$3x^2 =$ …x	Alles nac… links bringen. **Nicht durch x teilen!**
	$3x^2 - 9x = 0$	
	$x(3x - 9) = 0$	x ausklammern und Fallunterscheidung
	$x_1 = 0$	
	$3x - 9 = 0$	
	$3x = 9$	

…ie Gleichung $\frac{1}{2}x^2 = 2x$

a) …erechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung. (Kontrollergebnis $x_1 = 0$; $x_2 = 4$)

b) Beg… …um man bei der Lösung der Gleich… … x teilen darf.

Aufgabe 4.1.3

Anwenden der pq-Formel bei quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx +$

Lesen Sie die Information, und arbeiten Sie anschließend die Beispiele d... ergänzen ...abei fehlende Angaben. Auf die Anwendung der abc-Formel wird im Rahmen d... ...gen verzichtet, da es für das Lösen von quadratischen Gleichung dieser Form ausr...t, eine ...el zu kennen.

Information 4.1.3

Gesamte Gleichung und damit alle Summanden durch a teilen.

Vor dem **x** steht „**nix**“

p ...ibt sich aus $\frac{b}{a}$

q ergibt sich aus $\frac{c}{a}$

$a... + c = ...$

$... 0$

$x ... -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 ...}$

Beispiele

a) $...x^2 + 6x = ...$

$...x^2 ... 36 ...$

$x^2 + \_ x - \_ = 0$

$x_{1,2} = ...\frac{}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{}{}\right)^2 + ...} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 18} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$

$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{}{} = 3 \quad \vee \quad x_2 = -\frac{3}{2} - ... = -6$

L= {3; –6}

Anmerkung: D...

b) ...ungsmenge hier leer ist.

Vor dem x darf kein Minuszeichen stehen.

$2x - 4 = x^2$

$-x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 - 2x + 4 = 0$

$... = \_\_\_ \pm \sqrt{\_\_\_ - \_\_\_} = \_\_\_ \pm \sqrt{-...}$ L = { }

Begründung ...

c) Bestäti... Lösung x = 3 ergibt, indem sie fehlende... ergänzen.

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1,2} = \_\_ \pm \sqrt{\_\_\_\_\_\_}$

$x_{1,2} = \_\_ \pm 0$

$x_{1,2} = \_\_$ ... }

Aufgabe 4.1.4

Lösen einer biquadratischen Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c =$

Information 4.1.4

durch a dividieren; $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

Substitution: $\mathbf{x^4 = z^2}$

$\mathbf{x^2 = z}$

$ax^4 ... + c = 0$

$z^2 + pz ... = 0$

p...formel für z

$z_{1,2} = ... \left(...\right) ... - q$

Zwei Lösu...gen für z

$z_1 ... \wedge ... v$

Da die Lösun... Variable x ...cht i... muss die Su... rück... ...g ge... w...

...cksubs...ion: ... = z

$... = u \quad \wedge \quad x^2 = v$

$x_{1,2} = \pm ... \quad \wedge \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{...}$

Es können bis zu vier Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4 entstehen.

Beispiel: $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ | durch 2 dividieren

| Substitution $x^4 = z^2$, $x^2 = z$

$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ ...Formel anwenden

$\Rightarrow$ $z_1 = 1 \quad \wedge \quad z_2 = 2$ ...gen für z

$... = 2$ | Du...stitution z = x² Lösu...erechnen

$... \wedge \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ L= ... $\sqrt{2}$ }

$\Rightarrow$ $x_{1,2} = \pm 1$

Aufgabe 4.1.5

Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form

Lesen Sie die Information, und bearbeiten Sie die Beispiele.

Auf keinen Fall die Klammern ausmultiplizieren!

Wi... e In...
D... Klammern x nur mit der ...enz ... tritt, nennt ma... die ...mmern auch **Li...faktoren**.

$(x$ ... $(x+2)$ ...

Fallunterscheidung:
Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor den Wert Null annimmt. D.h., entweder ist der Ausdruck in der erste... oder zweiten Klamme... ...ll.

$x-3=0$ ... $=0$

$\vee$

$x_2=-2$

Den ...halt jeder Kla...mer ge...nnt voneina... Null setzen und die ...stehende Gleichung l... In der Regel br...ht man gar nicht zu r...nen, sondern liest die Lösungen direkt aus den ...**earfaktoren** ab.

Der Vorfakto... 12 hat keinen Einfluss auf ... Ergebnis, da man beide Seiten der Gleichung durch 12 dividieren kann.

...**spiel**...

a) 12(... − 7) = 0

direktes Ablesen: ⇒ $x_1=-4$; $x_2=7$

b) (3x + 6)(2x − 1) = 0

$3x+6$ ...

$x_2=0{,}5$

Achtung!
Da man den Te... in der Form (x − 5) (x − 5) schre... ...nnt man, dass die Lösung dopp...

...) $(x-5)^2=0$
$x_{1,2}=5$

Achtung!
Hier geht keine Fallunterscheid... der rechten Seite des Gleichhei... **keine 0** steh... Man muss die Kla... ausmul...n. Zeigen Sie, das... die ... Gleichung ist.

d) (x ... 5

Übung 4.1

Bestätigen Sie die angegebenen Lösungen der quadratischen und ...atische... ...ungen durch Rechnung.

a) $5-3x^2=22$ ... = { }

b) $x^2-7x+2=10$ ...1; 8...

c) $(x+2)(x-5)=0$ L= {−2;5}

d) $(x+5)(x+4)=20$ L= {0; −9...

e) $4x^2+12x=0$ L...

f) $9x^2+12x+4=0$ L... − 2/3}

g) $3x^2=5x$ L= {0; 5/3}

h) $0{,}5\,x^4-x^2$ ... = 0 L= ...

i) x(2x + 12) = 0 ...0; −6}

j) 2... 3x ... = 0 L= {±2}

k) ...13x² + ... 0 L= {±3;±2}

l) x(8... L={0,25; −0,5}

m) ...2x + 1)(3x + 1)=2... L= {1/6; −1}

n) ...a² − 3(a² + ...) = 8a² + 9a L= {0}

o) $(x+4)^2(x-4)^2=0$ L= {4; −4}

p) $(x+2)^2(x-2)^2=9$ L= {±7; ±1}

q) $(x+5)^2(x-5)^2$... L= {}

r) ... L= {−5/6; 1/2}

... = {6; 0}

...+ 5)² − c(2c + 3) = c + 1 ...2/7; −2}

... (1 + t)(2 + t)(3 + t) − (t − 1)(t − 2)(t − 3) = 1

Quadratische Gleichungen mit einem Parameter, also mit gehob... ...keitsgrad.

v) x² + ... L= {b; ...

w) ... L= {−1/a; ...

... x + 1 = 0 = {−1; −1/a}...

Aufgabe 4.2

Erweiternde Betrachtungen: Wurzelgleichungen

Gleichung so umformen, dass alle Ausdrücke mit Wurzel auf einer Seite stehen.

$$\sqrt{2x+5} - x = 1$$
$$\sqrt{2x+5} = x+1$$
$$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = (x+1)^2$$
$$2x+5 = x^2+2 \ldots$$
$$x^2 = 4$$
$$x \ldots = \pm 2$$

Bei… Seiten … Gl…ng quad… Bi… …ch…!

Gl…ng nach x auflösen.

Probe:

$\sqrt{2 \cdot 2 \ldots} \Rightarrow \sqrt{9} - 2 = 1 \ldots 1 = 1 \quad \Rightarrow \ldots \{2\}$

$\ldots 2) + 5 - 2 = \ldots \Rightarrow \sqrt{1} - 2 = \ldots \Rightarrow -1 \neq 1$

Wichtige Informa…

Da … Quadrieren keine … valenzumformung ist, muss … Gle…ungen, … denen die Lösungen durch Quadrieren der Lös… variab… gefunden wurden, eine **Probe** durch …nse… …ebnisse in die Ausgangsgleichung, …genom… werden. … der Gleichung sind nur die E…bnisse, welche zu … wahren Aussage führen.

Übung 4.2

Lösen Sie die folgenden W… Ihrem Heft.

a) $\sqrt{3 \ldots}$

b) …

… $\ldots - 1 = 5$ — $L = \{2\}$

… $x = \sqrt{3x-2}$ — $L = \{2;1\}$

… $\sqrt{8x+9} - x = -7$ — $L = \{20\}$

f) $\sqrt{4(x+3)} = x \ldots$ — $L = \{6\}$

g) $3x + \sqrt{4 \ldots}$ — $L = \{-2\}$

h) $\sqrt{\ldots}$ — $L = \{0;8\}$

Aufgabe 4.3

Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen und lineare Ung…

Bei quadratischen Ungleichungen führt die Anwendung der p,q-Formel … zu Fehlern bei der Bestimmung der Lösungsmenge. Daher ist es günstig, wenn man hier als … methode die so genannte **quadratische Ergänzung** verwendet (Vgl. Kapit… Aufga…). Verdeutlichen Sie sich den Lösungsweg anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Für die quadratische Ergänzung wird der Teilterm $x^2 + 6x$ als Teil eines Binoms aufgef…

$$x^2 + 6x \ldots > 0$$

Schritt 1: Am besten … man die **quadratische Ungleichung** so um, dass auf der linken Seite der Teil steh… zum … ergänzen … Hier subtrahiert man also auf jeder Seite der G…ung …

$$x^2 + 6x > -5$$

Schritt 2: In die… Schritt führt man die quadratische Ergänzung durch. Man erhält auf der linken Seite ein Binom, wenn … addiert wird. Da… addiert man hier auf jeder Seite der …ung 9.

$$x^2 + 6x + 9 > -5 + 9$$

Schritt 3: Nun fass… man die linke Seite als Binom zusammen.

$$(x+3)^2 > 4$$

Schritt 4: Im nächsten Schritt zieht man auf beiden Seiten die Wurzel. Da man allerdings beachten mus… …eration, nämlich dem Quadrieren aus (x+3) und –(x+3) der … Seite der Ungleichung zunächst in Betragsstriche. … eine **lineare Ungleichung**.

Schritt 5: Weglassen der Betragsstriche. Hier gilt in G… …ngleichungen gilt folgende Regel.

Mer…

… von Gleichungen oder Ungl… …gsstriche weg, indem man den Au… …ragsstrichen in Klammern setzt und …mal ein Minus (–) vor die Klammer schr… erhält so z… lineare Ungleichungen.

$$+(x+3) > 2 \qquad -(x+3) > 2$$

Schritt 6: Beide Gleichungen getrennt voneinander lösen.

$x + 3 > 2 \quad \vee \quad -x - 3 > 2$

$-x > 5$

Lösung $x > -1 \quad \vee \quad x <$ …

Schritt 7: Darstellung der Lösungsmenge einer linearen U… …ung … …em Zahlen…

-6 -5 -4 -3 … 0 1 … 3 4 5

Beispiel 2:

$x^2 + 2x - 1 >$ …

$x^2 + 2x$ …

$(x+1)^2 >$ …

$\sqrt{(x+1)^2} > \sqrt{4}$

$|x+1| > 2 \quad \Rightarrow \quad (x+1) > 2 \quad$ oder $\quad -(x+1) > 2$

$x + 1 > 2 \quad$ oder $\quad -x - 1 > 2$

$-x > 3$

$x > 1 \quad$ oder $\quad x < -3$

Beim W…ziehen de… …etr… …nd dam… au… …po… …und neg… Lös… …chte…

Linke Seite so umformen, dass …inom entsteht, indem auf beiden Seiten der Gleichung 2 addiert wird.

Für beide Ungleichungen x getrennt be…nen.

Wichtige Info!

Bei der Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl, wird das Relationszeichen umgedreht.

…:

…en Sie die Lösungsmengen von Beispiel 2 aus Aufgabe 4.3 au… …trahl dar.

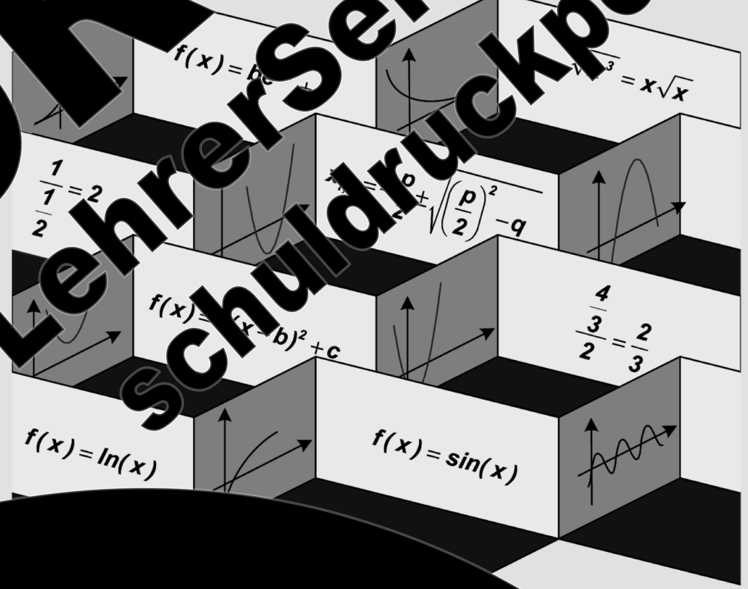
… 3 4 5

Erg… …ungen: ______________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend… zu Algeb…a und F…kt…onen … selb…organ…iert erlernen



Kapite…

Ganzrationale Funktion 2…

02-033-279

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 5: Ganzrationale Funktionen 2. Grades

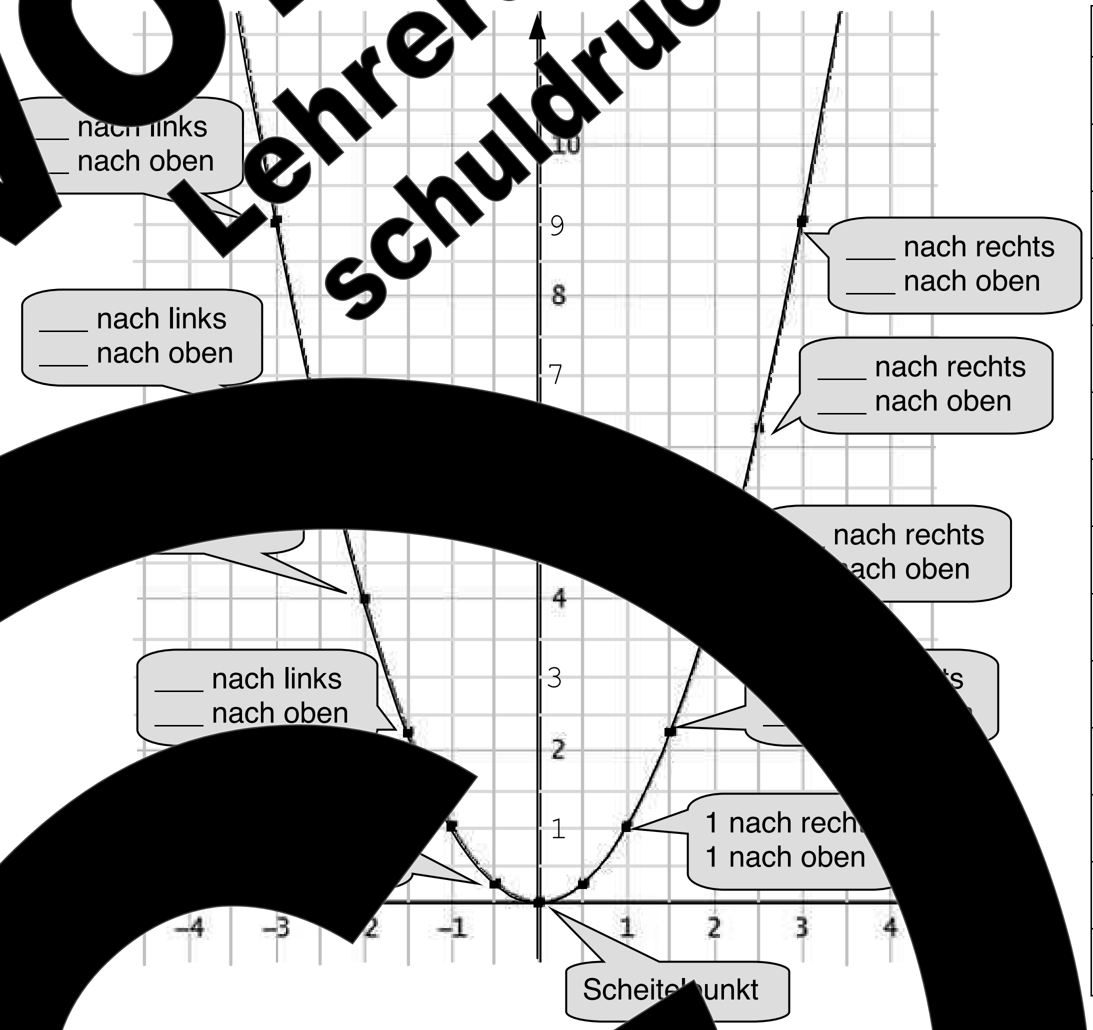
Die wesentlichen Inhalte dieses Kapitels dürften Ihnen schon aus der Sekunda[illegible] 1 b[illegible]nnt sein. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen diese Kenntnisse wiederholt und [illegible] werde[illegible]tlich der Eigenschaften von Potenzfunktionen höheren Grades, also Funktio[illegible]nen die Potenz von x größer als 2 ist, werden hier erweiternde Zusammenhänge erklärt. A[illegible]ses Kapitel daher auch dann durch, wenn Sie der Meinung sind, dass Sie üb[illegible]sreich[illegible]enntnisse zum Thema verfügen.

Aufgabe 5.1

Die Normalparabel $f(x) = x^2$

a) Die y-Werte der Normalparabel entspre[illegible] den [illegible]dratzahlen. [illegible]zen Sie [illegible]ertetabelle ohne Verwendung des Taschenrec[illegible]

b) Um eine Normalparabel zu[illegible]ötigt man keine [illegible]arabelschablo[illegible] häufig verlangt eine Aufgabenstellung, da[illegible]eine [illegible]germa[illegible] genaue Sk[illegible]ze einer Norm[illegible]bel erstellt werden muss. Dazu genügt es, [illegible] ausg[illegible]om Sch[illegible]kt auf jeder Se[illegible] der x-Achse, je nach gefordertem W[illegible]ere[illegible] zwei [illegible]rei weit[illegible]kte der Pa[illegible] in das Koordinatensystem einträgt und die[illegible]miteinander [illegible]det. Man mus[illegible]ch dann, egal an welcher Stelle der Schei[illegible]unkt [illegible]arab[illegible]egt, nur [illegible], wie die P[illegible] ausgehend von Scheitelpunkt einge[illegible]erd[illegible]gänzen Sie [illegible]ie Wertetab[illegible]fehlende Werte in den Sprechblasen.



Wertetabelle	
x	y
–3	
–2,5	
–2	
–1,5	
–1	
–0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	

Aufgabe 5.2

Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem

Für das Verschieben von Funktionen gibt es, unabhängig um welchen Ty[illegible]ktion[illegible] handelt, weitgehend einheitliche Regeln. Im Rahmen dieser Aufgabe werden die Z[illegible]ge beim Verschieben von Funktionen zunächst nur an der Parabel erläut[illegible] spät[illegible] bei der Behandlung von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Fu[illegible]en w[illegible] die hier gewonnenen Erkenntnisse zurückgegriffen. Bearbeiten Sie die folgende[illegible] Aufgab[illegible]her, [illegible]h wenn Sie schon Vorkenntnisse haben.

Information 5.1

Sie haben im Kapitel 4 gelernt, dass man quadr[illegible]che Glei[illegible]ungen sowohl i[illegible]olynomialer a[illegible] auch in faktorisierter Form darstellen kann. Dies gilt ana[illegible]uch fü[illegible]n Funktion[illegible] von Parab[illegible] kommt allerdings noch eine dritte Vari[illegible]e so[illegible]unktform, [illegible] allgemeine[illegible]orm kann man die Funktionsgleichung einer P[illegible]bel d[illegible] wie [illegible] darstellen.

Darstellung in polynom[illegible]rm:	$f(x)$ [illegible] $x^2 + px + q$
Darstellung in faktoris[illegible] Fo[illegible]	$f(x) = a($[illegible]$)(x - x_2)$
Darst[illegible]lu[illegible]n Sche[illegible]unktform:	$f(x) = a(x - b)^2 +$ [illegible]

Die V[illegible]ablen a, b und c[illegible] hier als **[illegible]rameter** bezeichnet.

Die Para[illegible]er a, [illegible] beeinfl[illegible] die Form [illegible] Lage der Parabel im Koordinatensystem. Ihre [illegible]tun[illegible] den einzelnen Dars[illegible]ungsformen ei[illegible] Parabelgleichung ist Gegenstand der nun folg[illegible]abe 5.2.

Aufgabe 5.2.1

a) Verschieben von Parabeln nach oben und nach unten

Die folgenden Normalpar[illegible] [illegible]it Hilfe eines Graphikprogrammes gezeichnet.

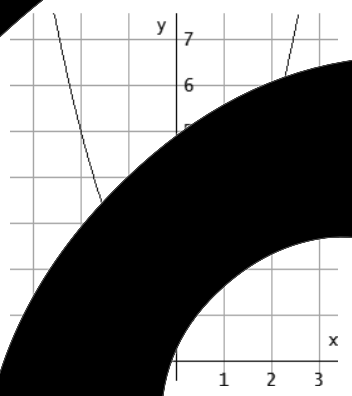
$f_1(x)$ [illegible]

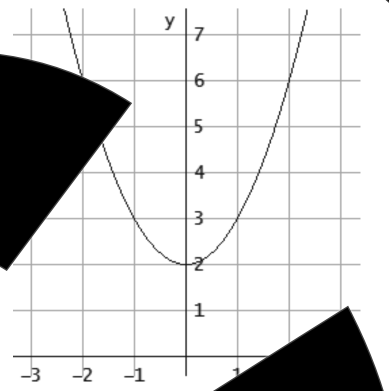
$f_3(x) = x^2 - 1{,}5$

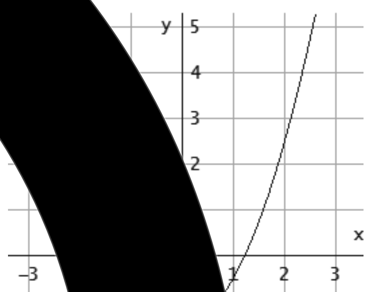
[illegible]and +1 [illegible]hiebt die Parabel um 1 nach oben.

Der Su[illegible] verschiebt di[illegible] um 2 nach oben.

Der Summand –1,5 verschiebt die Parabel um 1,5 nach unten.







Ergänzen Sie den Satz auf der folgenden Seite:

Addiert man zum Funktionsterm der Normalparabel f(x) eine positi[illegible] Zahl, [illegible]ird di[illegible]rabel nach

____________ verschoben. Addiert man eine negative Zahl, so [illegible]arabel nach ____________

verschoben. Durch die Verschiebung entsteht eine neu[illegible]nktion.

Die verschobene Funktion soll mit $\tilde{f}(x)$ (sprich [illegible]lan[illegible]) be[illegible]chnet werden. Allgemein gilt:

$\tilde{f}(x) = f(x) + c$ mit	**c > 0**[illegible]rschieb[illegible]n **positiver** Ri[illegible]ung nach **ob[illegible]** **c < 0:** ve[illegible]n in **neg[illegible]ver** Richtung nach **[illegible]ten**

b) Nullstellenbetr[illegible]schobenen [illegible]abeln

Im K[illegible]en S[illegible]lernt, dass [illegible]llen von Ge[illegible]en mit Hilfe des Ansatzes f(x) = 0 ber[illegible]net we[illegible] Die[illegible]gilt allgeme[illegible] für alle Funktio[illegible]pen, also auch für Parabeln. Weisen Sie [illegible]echnun[illegible]ach, dass sic[illegible] die oben ge[illegible]neten Funktionen folgende Nullstellen ergeben.

[illegible]$) = x$[illegible]	$f_2(x)$ [illegible]	$f_3(x) = x^2 - 1{,}5$
f[illegible]$= 0$	$f_2($[illegible]	$f_3(x) = 0$
$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + 2 = 0$	$\Rightarrow x^2 - 1{,}5 = 0$
$\Rightarrow$ _____ = _____	$\Rightarrow$ _____ = _____	$\Rightarrow$ _____ = _____
$\Rightarrow$ _____ = $\pm\sqrt{\_\_\_\_}$	$\Rightarrow$ _____ = $\pm\sqrt{\_\_\_\_}$	$\Rightarrow$ _____ = $\pm\sqrt{\_\_\_}$ = _______
	[illegible]Nullst.	$N_1(1{,}22/0)$, $N_2(-1{,}22/0)$

[illegible]Darstellung der Funktionsterme in polynomialer un[illegible]rm

(1) Polynomiale Form

- $f_1(x)$ [illegible]

Am Summanden ohne [illegible]ie y-Koordinate bzw. hier den[illegible]abschnitt der Parabel able[illegible] Achsenabschnitt, wie bei Ge[illegible] Einsetzen von 0 in den Funkt[illegible] also mit f(0), berechnet wird.

(2) Faktorisierte Form

- $f_1(x)$. lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_2(x)$ lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_3(x) = (x + \sqrt{1,5})(x - \sqrt{1,5})$ Faktorisieren durch Anwe… de… binomischen Formel (Vgl. Kapitel 1 A…)

Diese Klammer enthält die Nullstelle $x_2 = -\sqrt{1,5} \approx -1,22$

Di… mmer …thäl… Null… …22

Die Summ… n $\pm\sqrt{1,5}$ in d… Linearfaktoren entsp… hen den Null… n. D.h., aus … fakto… rten Form … man direk… …ellen ein… nktion ablesen.

Zur Erinnerung: Der An… (x) = 0 für die Berechnung der Nullst… n liefert die Gleichung $(x - \sqrt{1,5})(x + \sqrt{1,5}…$ mit den Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{1,5}$. (Vgl. Kapitel …, Aufgabe 4.1.5)

Aufgab… 2.2

a) …hieben von Parabel… nach links und rechts

$f(x) = (x - 1)^2$ oder $f(x) = (x - (+1))^2$

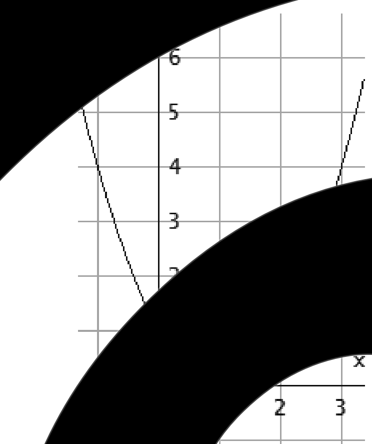
$f(x) = (x - 2)^2$ oder $f(x) = (x - (+2))^2$

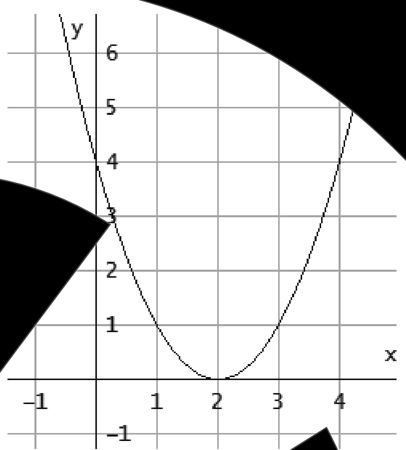
$f(x) = (x + 1,5)^2$ oder $f(x) = (x - (-1,5))^2$

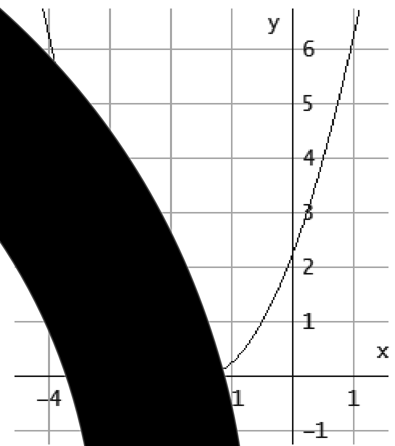
Subtrahiert man von x die Zahl +1 … Par…

Subtrahiert man von x … Zahl +2, wird die … 2 nach

Subtrahiert man von x die Zahl (–1,5) wird die Parabel um 1,5 nach links verschoben.







…ie den Satz auf der folgenden Seite…

Subtrahiert man vom Argument* x der Normalparabel f(x) eine positive Z… so wir… Parabel nach

____________ verschoben. Subtrahiert man vom Argument x ei… …ative … wird die

Parabel nach ___________ verschoben. Durch die Verschiebung …ste… neue Funktion.

Die verschobene Funktion soll wieder mit $\tilde{f}(x)$ (sprich: f-S… …ge …) bezeichnet werden.

Allgemein gilt:

$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{b})$	mit	**b > 0:** ve…ieben in **positi…** Richtung nach **rechts** **b…** vers…en in **negativer** Richtung nach **lin…**

***Anmerkung:** der A…ck, der bei de… unktionsschr…weise f(x) in der Klammer steht, wird als **Ar…e…** der Fu… bezeichnet.

b) Null… …chtu… bei den verschobenen Parabe…

…ie …en bere… gelernt, dass … Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Geraden auf nach oben …d u… ves… …ene Parab… …ertragen werden kann. Verdeutlichen Sie sich, dass die …llstel… …ach links und rechts verschobenen Parabeln genauso berechnet werden und e…nzen Sie fehlende A…aben.

…$(x-1)^2$	…$(x) = (x - 2)^2$	$f_3(x) = (x + 1,5)^2$
$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0$	$f_3(x) = 0$
$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$	$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$	$\Rightarrow$ _____ = 0
$\Rightarrow$ $x_{1,2}$=	… = _____	$\Rightarrow$ _____ = _____
		$N_{1,2}$ (/)

Wichtige Info!

… bei der Berechnung der Nu… der Lösung …chung zweimal das gleiche Erg… …pricht man …**oppelten Nullstellen.** Geometris… …as, dass … Scheitelpunkt der Parabel auf der x-A… …amit ist … gemeinsame Punkt von der Parabel u… …se kein Schnittpunkt, sondern ein **Berührpunkt**. W… …äter sehen, dass dies auch für andere Funktione…

c) Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und faktorisierter Form

(1) Polynomiale Form

- $f_1(x) = (x-1)^2 \quad = \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ + 1$
- $f_2(x) = (x-2)^2 \quad = \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ + 4$
- $f_3(x) = (x+1{,}5)^2 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ + 2{,}25$

Anhand der p… ialen …arstell… …n man den …chsen…chnitt der …el ab…en.

(2) Faktorisierte Form:

- $f_1(x) = (x-1)\,(x-1)$
- $f_2(x) = (x-2)\,(x-2)$
- $f_3(x) = (x+1…$

Wenn … die Nullstellen der Funkt…n mit de… faktorisierten …ung verglei… erkennen Sie, dass ma… die …ullstellen der Parabel aus der faktorisierten Form ablesen k…

Aufgabe 5.2…

a) Glei…zei… s Vers… ben einer Pa… nach links b… w. rechts und oben bzw. unten

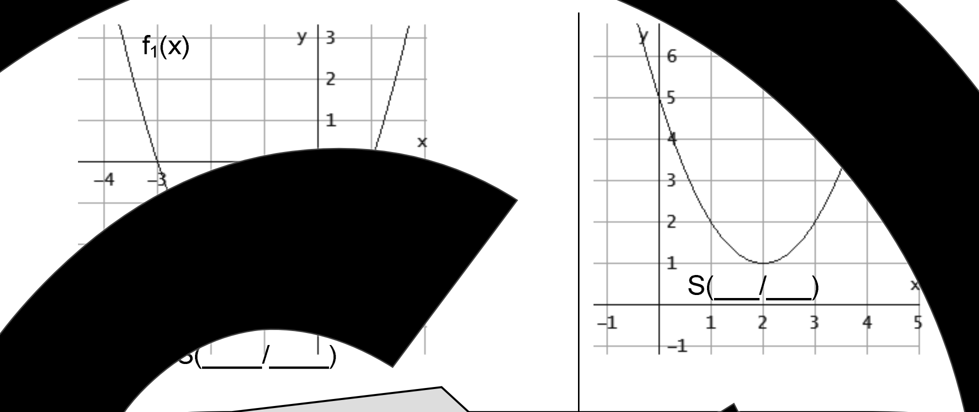
Sie h… in … 5.3.1 u… Aufgabe 5.3.2 … wie man Parabel nach unten und oben …wie … s und rechts verschie… kann. In dieser Aufgabe werden diese Erkenntnisse gleichzeitig …, so dass die fo…nden Funktio…gleichungen und die abgebildeten Funktionen ent… …rgänzen …ie die Sprechbla… und die Koordinaten der Scheitelpunkte.

$f_1(x) = (x+1)^2 - 4$ $\qquad$ $f_2(x) = (x-2)^2 + 1$

Verschieb… um …

Verschiebung …m 2 nach ___________.

Verschiebung um 1 nach ___________.



Die Koordinaten der Scheitelpunkte erschei… bereits in der Funktionsgleichung. Man nennt diese D… der Funktionsgleichung einer Parabel daher **Sch…**

Verallgemeinerung der Zusammenhänge:

Ergänzen Sie: Für die Verschiebung in ___-Richtung gilt die Beziehung $\tilde{f}(x) …(x-b…$ wobei der Paramter ___ angibt, wie weit die Parabel ausgehend vom Ursp… links … ___________ verschoben wird.
Aus der x-Koordinate des Scheitelpunkts folgt: Bei $f_1(x)$ is… ___ … bei $f_2(x)$ ist b = ___.

Die Variable c in der Beziehung $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ leg… …ersch…ng in ___-…ung fest. Aus der y-Koordinate der Scheitelpunkte folgt: … $f_1(x)$ ist c = ___ …d bei $f_2(x)$ … ____.

Allgemein kann man daher de… …m ei… …orma…rabel, di… g…zeitig in x- … y-Richtung verschoben wird in der Sch…elpu… …n mit $f(x) = f(x … \_\_\_) … \_\_\_$ angeb…

b) Nullstellenbe…nun…

Bestätig… Sie du… …echnung die Ex… …zw. Lage v… …stellen bei den abgebildeten Parab…

$f_1(x…x+1)^2…$ | $…(x) = (x-2)^2 + 1$

$…(x) = …$ | $f_2(x) = 0$

$… (x+1)^2 - 4 = 0$ | $\Rightarrow \quad (x-2)^2 + 1 = 0$

…tellen: $N_1(1\,/\,0)$ und $N_2(-3\,/\,0)$ | …da ____________________

c) Verglei… …nen

(1) … b)^2 +c

$…(x+1)^2 - 4$

$…(x) = (x-2)^2 + 1$

Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunkts S… **S(b / …**

(2) Polynomiale Form $f(x) = x^2 + px + q$

- $f_1(x)= x^2 + 2x – 3$
- $f_2(x)= x^2 – 4x + 5$

Ablesen des y-Achsenabschnitts.

(2) Faktorisierte Form $f(x) = (x – x_1)(x – x_2)$

- $f_1(x) = (x – 1)(x + 3)$

Erinne… : Die Lin…rfak…ren enthalte… x_1 = … d $x_2 = –3$ … Nulls… … nktion.

…en Sie … Ausmul… des Terms $(x – 1)(x + 3)$, dass … es Pro… der poly… …n Darstell… on $f_1(x)$ entspricht.

- $f_2(x)$ läss… fa…

…len besitzt, … …uch nicht in Linearfa… denen man Nullstelle… könnte.

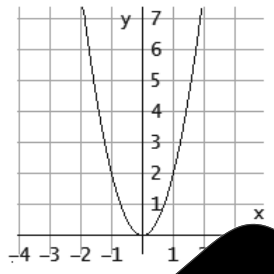
Aufgabe 5.2.4

Parabeln strecken oder stauchen

a) Zusammenhänge beim Strecken und Stauchen der Normal…

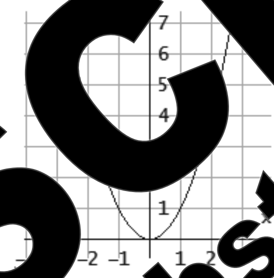
Die folgende Abbildung zeigt gestreckte und gestauchte Parabel… …e n… …n bzw. nach unten geöffnet sind. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenha… …wische… …treckungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Form der Parabel, und ergä… …Sie d… …lgenden Satz.

$f(x) = 2x^2$



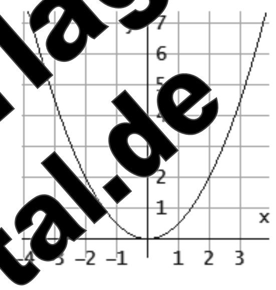
gestreckte No… …par…

$f(x) =$ …



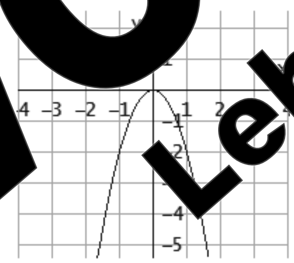
Normalpar…

f(… 0,5x²



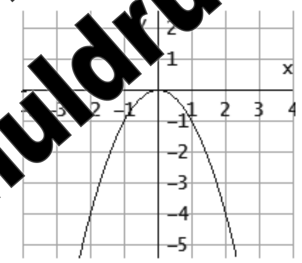
gestauchte Normalparabel

h(x) … x²



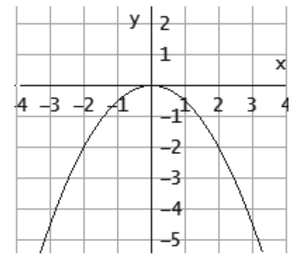
gestreckte Normalparabel nach unten …

h(x) = …



Normalparabel nach unten geöffnet

$h(x) = –0,5x^2$



gestauchte Normalparabel nach unten geöffnet

… einem Parameter a, so erhält man die …

… oben geöffnete Parabel

Die Parabel wird gestreckt, wenn gilt: a > ____

Die Parabel wird ge… …t, wenn gilt: ____ < a < ____

Nac… …x-Achse gespiegelte Parabel

… …chse gespiegelt und gestreckt, wenn gilt …

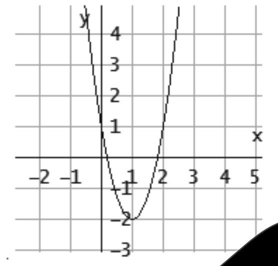
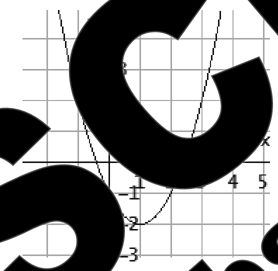
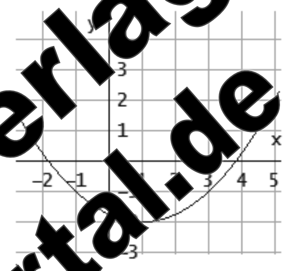
…ormalparabel ist an der x-Achse gespiegelt, wenn gilt :

… Parabel wird an der x-Achse gespiegelt u… …ucht, wenn gilt: … ____

b) Zusammenhänge beim Strecken oder Stauchen verschobener Normalpar… eln.

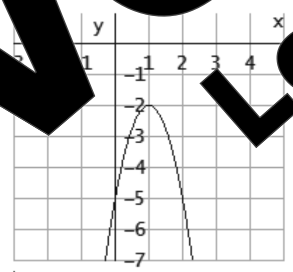
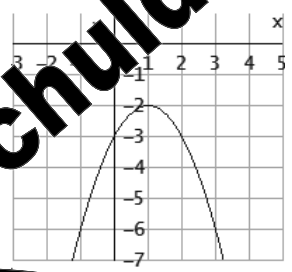
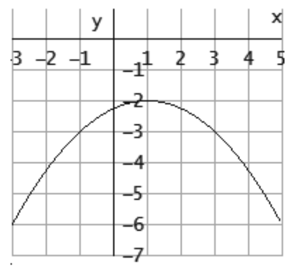
Die folgende Abbildung zeigt verschobene, gestreckte bzw. gestauchte Normalp… eln, di… ch oben und unten geöffnet sind und alle den Scheitelpunkt S(1/–2) habe… ese Par… en auch als **ganzrationale Funktionen 2. Grades** bezeichnet. Verdeutlichen … weils … Zusammenhang zwischen dem Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor a u… der… der Parabel, und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$f(x) = 3(x-1)^2 - 2$ | $f(x) = (x-1)$… | …$x) = 0{,}25(x$…$)^2 - 2$

gestreckte vers… ene Normalparab… | Verschobene Normalparabel | gestauchte verschobene Normalparabel

$f(x$… $2(x$… $)^2 - 2$ | $f(x) =$ … $1)^2 - 2$ | $f(x) = -0{,}25(x-1)^2 - 2$

gestrec… No… | … lparabel … | gestauchte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet bzw. Spiegelung an der Geraden y = –2

… 2

Um die Öffnungsrichtung einer verschobenen Parabel zu ändern, b… hobene Parabel zu strecken oder zu sta… cheitelpunktform der Parabel v… tischen Klammer ein Faktor a … den verschobenen Parabeln die ____ Wirkung wie beim … Normalparabeln. Bei einem negative… ist die Parab… ____ g… . Ein Vorzeichenwechsel von a spiegelt e… an einer wa… eraden durch den ____________________.

Information 5.2

Überblick Darstellungsformen der Funktionsgleichung ganzrationaler Fu… onen … rades

Darstellung in Scheitelpunktform: **f(x) = a(x**… **+**…

… des… Koordinaten … S… unkts: S(b / c)

a streckt, staucht und ä… die Öffnungsrichtung b… spiegelt die Parabel an … Geraden y = …

b ve… iebt die …arabel nach lin… nd recht…

c verschiebt die Parabel nach oben und unten.

Bei verschobe… malparabeln, … o bei einem Streckfaktor a … kann man die Funktionsgle… ng … r abg… en Par… be… onders einfa… bestimmen. Man entnimmt den Koordinaten … S… unktes die Werte b… c und setz… die beiden Werte direkt in die Formel $f(x) = (x-b)^2$ …

U… echne… n d… polynomia… n Form in die Scheitelpunktform

L… die Pa… elgleichung i… olynomialer Fo… or, so kann man die Scheitelpunktform mit Hilfe de… en Ergänz… g ermitteln.

…eispiel 1: $f(x) =$ … $+ 6x + 2$

$f($…$) = x^2 + 6x +$ … $+ 2$

$f(x) = (x^2 +$ … $9) - 9 + 2$

$f(x) = (x+3)^2 - 7$

Quadratische Ergänzung
$x^2 + 6x$ wird durch Addition von 9 zum Binom ergänzt. Damit kein Fehler entsteht, wird 9 sofort wieder subtrahiert.
Den Teilterm der faktorisiert werden soll in Klammern setzen und dann umformen.

Beispiel 2…

…er nach unten geöffneten Parabel …ischenrechnung das …usklammern. Sonst …eispiel 1.

$f(x) = -[(x^2 - 6x + 9) - 9 - 2]$

$f(x) = -[(x-3)^2 - 11]$

$f(x) = -(x-3)^2 + 11$

Da… **m:** **f(x) = ax² +px +q**

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktsform.

Der Su… e x gibt den y-Achse… it den Koordinaten … at die Funktion die Nulls… x_2, so enthält q das Pr…

Darstellung in faktorisierter Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktform.

und x… …ie Nullstellen …Funk… …mit den …inat… N_1(x… …und $N_2(x_2/0)$

Übungen

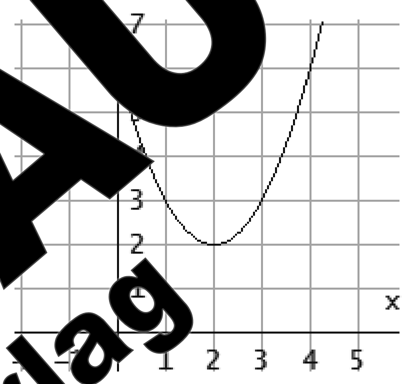
Ü5.1
Bei einer verschobenen …malp…abel si… …e Nullstel… …die Öffnu… …chtung bekannt. Ermitteln Sie jeweils die Funktions… …cheitelpunktform, …faktorisierter …e in polynomialer Darstellung.

a) $N_1(-2/0)$ u… $N_2(4/0)$ …ch o… geöffnet. (Ko…ollergebnis: $f(x) = (x - 1)^2 - 9$)

b) N_1(…) u… (2/0) …ch unten ge… (Kontrolle…s: $f(x) = -(x + 2)^2 + 16$)

…$N_{1,2}$(5/… nach unten geöffnet. (…ollergebnis: … $= -x^2 + 10x - 25$)

Ü5.2
Gegeben ist die rechts abgebildete verschobene Normalparabel.

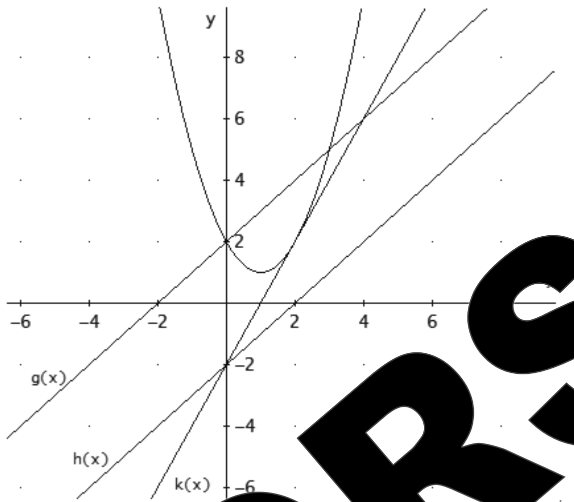


a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel in Scheitelpunktform, und zeigen Sie, dass für die polynomiale Darstellung gilt: $f(x) = x^2 - 4x + 6$

b) Begründen Sie anhand einer Rechnung und anhand des …ufs des Funktionsgraphen, dass keine faktorisierte D… …ellu… Funktionsgleichung existiert.

Aufgabe 5.3
Lagebeziehungen von Parabel und Gerade

Gegeben sind die Parabel $f(x) = (x-1)^2 + 1$ sowie die Geraden $g(x) = x+2$, … $x-2$ un… $k(x) = 2x-2$. Lässt man die drei Funktionen per Computer zeichnen, erhäl… …nde Abbildung.



Man erkennt, dass d… …rade… …e Parabel schneiden, … …hren… …nne… …meinsame Punkte zu ha… …hr w… …igehen kön…

Er… …n Sie anha… …eigneter … …mit w… …en Fachbegri… …man die i… d… Abbildung da… …stellten … …ebeziehungen … Parabel u… Ge… …bezo… …net.

g(x) ist ______________________ von f(x)

h(x) ist ______________________ von f(x)

k(x) ist ______________________ von f(x)

Übungen

Ü5.3
Berechn… Sie … Schnittpunk… der drei Gera… mit der Parabel.

Ü5.…
Zeichen Sie zu jeder Aufgabe die Parabel und die Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem. Entscheiden Sie dann aufgrun… …r Zeichnung, ob die Geraden Sekanten, Tangenten oder Passanten sind. Überprüfen Sie diese Ergebnisse jeweils durch Berechnung und ggf. mit Hilfe eines geeigneten Programms zum Zeichnen von Funktionen.

a) $f(x) = (x + 2)^2$ … $h(x) = x - 2$ $k(x) = -2x - 8$

b) f(… … 3 $k(x) = 0{,}5x - 5$

Ü5.5

Wenn man bei der Berechnung von Schnittpunkten die pq- Formel anwende…

(3) Eine Parabel und eine Gerade haben zwei Schnittpunkte, wenn … bei der p…

____________ unterschiedliche Lösungen erhält.

(4) Eine Parabel und eine Gerade haben einen Berü…punkt, … bei … pq- Formel eine

___________ unter der Wurzel auftritt und man da… __________ (dopp…lte) Lösung erhält.

(5) Eine Parabel und eine Gerade haben … e gemeinsam… unkte, w… der Ausdruck unter der

Wurzel bei der pq- Formel ________ ist u… man son… __________ L…ung erhält.

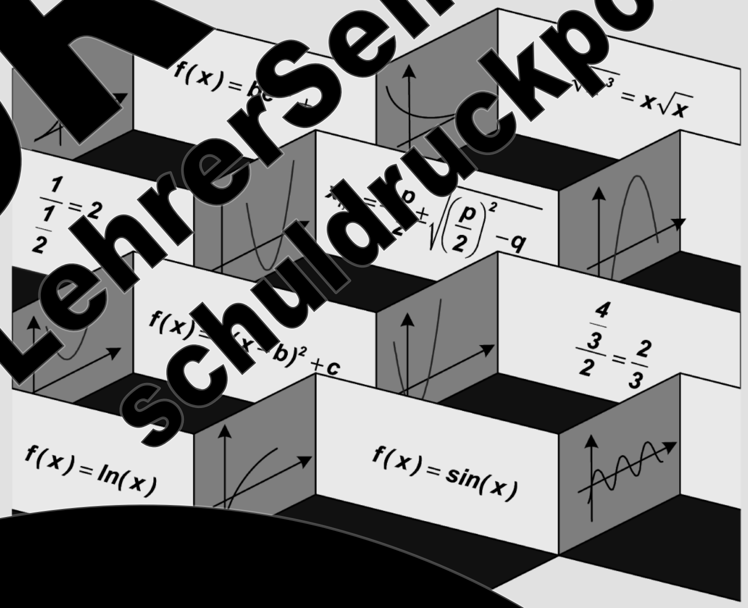
Ü5.6

Gegeben seien di… abe…) = – … + 6 u… … erade g(x) … x – 5. Bestimmen Sie die Schnittpunkte S_1 u… … bel und der Gera… n. Ermitteln Si… e Gleichungen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ der zu g(x) senkrechten … en … S_1 und S_2.

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Gleichungen 3. und höheren Grades

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

02-033-279

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]

St[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 6: Gleichungen 3. und höheren Grades

Die Lösungsverfahren für Gleichungen 3. und höheren Grades bauen auf den Kennt[illegible] zum Umgang mit quadratischen Gleichungen auf. Es kommen hier, bis auf das neu zu[illegible]de Ve[illegible] der Polynomdivision grundsätzlich die gleichen Lösungsverfahren zur Anwendung.

Aufgabe 6.1

Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktoris[illegible] vorlieg[illegible]

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x [illegible]) = 0$$

Lösung durch Ables[illegible]
$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Wie Sie bereits wissen, soll man die Klammern für das Lösen der Gleichung nicht [illegible]sen, sondern kann die Lösungen jeweils aus den Klammern bestimmen. (Vgl. Kapitel 4, Aufgabe 4.[illegible] und Kapitel 5 Aufgabe 5.2[illegible] und 5.2.3 c))

Beispiel:

Ermitteln Sie die Lösungen der Gleichung

$(x - 7)(\,[illegible]\,)[illegible] + 3)^2(x^2 + 3x - 10)(x^2 + 9) = 0$

1. Klammer $(x - 7)$ ⇒ $x_1 = 7$ Ablesen

2. Klammer $(2x + 4)$ ⇒ $x_2 = -2$ Berechnung $2x + 4 = 0$.

3. Klammer $(x^2 - 1)$ ⇒ $x_3 = 1$ Anwendung der 3. binomischen Formel, also $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$, liefert 2 Lösungen.

4. K[illegible] [illegible]kommt auf Grund des Quadrates [illegible] gibt es zwei gleiche Lösungen.

5. Klammer $(x^2 + 3x - 10)$ ⇒ $x_7 = 2$, $x_8 = -5$ Der Ansa[illegible]0 führt zu einer quadratische[illegible] mit Hilfe der p,q-Formel gelöst w[illegible]

6. Klammer $(x^2$[illegible]ng Der Ansatz $x^2 + 9 = 0$ [illegible] Widerspruch, da die Gleichungen $x^2 =$ [illegible]

Aufgabe 6.2

Lösen einer Gleichung, bei der man x^n ausklammern kann.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$$
$$x^2(ax^2 + bx + c) = 0$$

Kleinste Po[illegible]z au[illegible]mmern

$$x_{1,2} = 0$$
$$\text{oder}\quad ax^2 + bx + c = [illegible]$$

[illegible]getrennt [illegible]achte[illegible]

Übungen

Ü6.1
Berechnen Sie die Lösungen [illegible] Gleichungen. Achten Sie dabei insbesondere auf die Bedeutung von geraden und u[illegible] Exponenten bei der Lösungsvariablen für das Ergebnis.

a) $x^2 = 25$	[illegible]169[illegible]	[illegible] $x^3 = 6x$	d) $x^2 + 7x = 0$
e) $x^3 = 81x$	[illegible] $+ 144x = 0$	g) $x^4 = 27x$	h) $x^4 + 64x = 0$
i) $x^5 = 81x$	j) [illegible]121x = 0	k) $x^6 = 8$[illegible]	l) $x^6 + x = 0$

Lösunge[illegible] 0; [illegible] 0; 0; 0; 0; –1; 2; –3; 3; 3; –4; –5; 5; 6; [illegible] –9; 9; { }

Ü6.2
[illegible] die Lösungen der folgenden Gleichungen. Die Lösungen sind zur Kontrolle gegeben.

a) [illegible]=0		b) $6 - t^2 = 0$	$\pm\sqrt{6}$
[illegible] $8x + 4 = 0$	1	d) $x^2 - 5x = -6$	3 ; 2
[illegible]$(x + 5) =$	2 ; –5	f) $3x^2 + 9 - 2x = 0$	{ }
g) $0{,}2t^2 - 1{,}2t = 0$	0 ; [illegible]	h) $(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 + 3) = 0$	1; –1; –2
i) $4x^2 + x + 15 = 0$	[illegible]	j) $x^2 - x - 30 = 0$	6; –5
k) $2x5 - 8x^3 = 0$	0; ±2	l) $2x^2 - 4{,}2x - 0{,}76 = 0$	–0,17; 2,27
m) $9x^2 - 6x + 1 = 0$	[illegible]	n) $2(4v - 1)^2 = v - (2v - 1)^2$	$\frac{1}{4}; \frac{1}{3}$
o) 0,5[illegible]		[illegible] $3x^2 - \frac{1}{3}x^4 = 0$	0; ± 3
[illegible]		[illegible]$0{,}5x = 0$	0; $\frac{5}{4}$

[illegible]echnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen[illegible]ind zur Kontrolle gegeben.

a) $(1 - x^2)^2 = 0$	±1	[illegible]	0; 4
c) $(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$	{ }	d) [illegible]x	0; 5; 1
e) $100x^3 + 80x^2$[illegible]	[illegible]0; 0,1	f) x[illegible]0	± 3; ± 2
g) $0{,}4z^2$[illegible]		h) $(x^2$[illegible]3) = 0	–1; 3
i) 16[illegible]	[illegible]± 0,5	j) $(2x^2 -$[illegible]	± 3
k) [illegible]		l) 0,4(1,2[illegible]	–3
[illegible]8x	0; 4; –2	n) $8 - \frac{1}{6}x^2 -$[illegible]	6; –8
[illegible]$x - 0{,}8)^4 = 0$	4	p) $0{,}5(x - 3)^2$[illegible]	± 3
[illegible]$t^2 + 1{,}1t + t^3 = 0$	0; 2,2; 0,5	r) $32x^4 - 2x^2$[illegible]	$\pm\frac{3}{4}$

Information 6.1

Nicht jede Gleichung höheren Grades kann mit Hilfe der bisher erlernten Methoden … st wer… Bei Gleichungen 3. und höheren Grades kann es notwendig werden, das Ver… n der … sion anzuwenden.

Lösen von Gleichungen 3. und höheren Grades mit Polynom… ision

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Bei einer Gle… m kann man … nicht ausklammern u… ungs… eln, die ei… -Formel ähne… in de… xis schwierig a… en und me… nicht effizient. … Möglichke… Lösungen der hie… rliegen… Gleichung zu be… hnen, bietet … Ver… n der … lynomdi… sion.

Aufgabe 6.3

Mit Hilfe der **Polynomd…** … m schriftlichen Div… en, das Sie … eits in der Grundschule erlernt haben ähnelt, solle… … der in poly… ialer Darste… gegebenen Gleichung $18x^3 - 27x^2 - 1$… 0 be… et und aus d… ngen die … rte Form des Gleichungsterms ermittelt werd… Arbe… Sie … Beispiel 1 … end durch … wenden Sie das Verfahren anschließen… der Üb… 6.4 an.

Beispie… … $- 27x^2 - 17$… $= 0$

… das Verfahren d… Polynomdivis… anwenden zu können, benötigt man … erste Lösung de… Gleichung… n diese Lösung nicht geben bzw. nicht bekannt ist, vers… man die… sung durch Raten zu finden. Zum Raten geeignet sind ganzzahlige … des Summanden ohne x. Hier also ± 1 und ± 2. Diese Zahlen we… en in die Funktion eingesetzt. Wenn sich dabei, wie im 1. Schritt unten beim Einsetzen von x = 2 Null ergibt, hat man die erste Lösung gefunden und … Verfahren mit dem 2. Schritt fortsetzen.

1. …

$x = -1 \Rightarrow -18 - 27 + 1$…

$x = 2 \Rightarrow 144 - 108 - 34 - 2$… $= 2$

Erratene erste Lösung: $x_1 = 2$

Das Ergebnis des Ratevorgangs als Linearfaktor (x … Dieser Li… der gef… … = 2 die

$x = 2 \quad | -2$

$\Rightarrow x - 2 = 0$

2. Sc… …satz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor (x – 2) notieren.

$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) =$

3. Schritt: 1. Divisionsvorgang

1. Division
Nur der erste Summand $18x^3$ wird durch das x aus dem Linearfaktor (x – 2) dividiert. Der Zahlenwert, hier – 2, wird dabei nicht berücksichtigt.

1. Erg… is … $18x^3$… x^2

$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x -$ … $8x^2$

4. Schritt: 1. Multiplikationsvor…

$(18x^3 - 27x^2 - 1$… $2) = 18x^2$

$18x^3 - 3$…

18… wird mit dem … earfaktor multi… ert. … $x^2(x - 2) =$ … x… $- 36x^2$.

Das E… der Multiplik… n einer zweite… wie darg… notieren.

5. Schritt: … Subt… nsvorgang

$(18$… $27x^2 - 17x - 2) :$ … $2) = 18x^2$

18… $36x^2$

$9x^2$ … $7x$

… 2. Zeile von der 1. Zeile subtrahieren

$18x^3$	$-27x^2$
$-18x^3$	$-(-36x^2)$
0 (fällt weg)	$9x^2$

17… werden nach … geholt.

6. Schritt: 2. Divisionsvorgang

2. Ergebnis aus $9x^2 : x = 9x$

$9x^2 - 17x$

Nur den 1. Summanden wie… nur durch das x aus dem Linearfaktor (x – 2) dividieren.

7. Schrit…

… $2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x$

$18x^3 - 36x^2$

$9x^2 - 17x$

$9x^2 - 18x$

9x … Linearfaktor multi… $9x(x -$ … $8x$

Ergebnis dieser Multiplikati… der näch… en Zeile notieren.

8. Schritt: 2. Subtraktionsvorgang

$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x$
$18x^3 - 36x^2$
$9x^2 - 17x$
$9x^2 - 18x$
$x - 2$

Subtraktio[illegible] zum 5. [illegible]

(fäll[illegible]

Die 2 nach unten holen

9. Schritt: 3. Divisionsvorgang

$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = $ [illegible] $+ 9x +$ [illegible]
$18x^3 - 36x^2$
$9x^2 - 17x$
$9x^2 -$ [illegible]

[illegible] Ergebnis aus [illegible]

[illegible] den 1. Summanden wieder nur durch [illegible] aus dem Linearfaktor $(x - 2)$ dividieren.

10. Schritt: [illegible] Multiplikationsvorgang

[illegible] $- 17x - 2) : ($ [illegible] $) = 18x^2 + 9x$ [illegible]
$9x^2 - 17x$
$9x^2 -$ [illegible]
$x - 2$
$x - 2$

1 wird mit dem Linearfaktor multipliziert.
$1 \cdot (x - 2) = x - 2$

Ergebnis dieser Multiplikation in der nächsten Zeile notieren.

11. Schritt: 3. Subtraktionsvorgang

(18x[illegible] [illegible] 9x + 1
$9x^2 - 18x$
$x - 2$
$x - 2$
0

[illegible] letzten Zeilen muss [illegible] Ist das nicht der Fa[illegible] [illegible]uchen!

12. Schritt 1[illegible]

[illegible] Ergebnisterm der Division Null [illegible] [illegible]e entstandene Gleichung lösen.

[illegible]ormel liefert hier: $x_2 = -\frac{1}{3}$ und $x_3 = -\frac{1}{6}$

Faktorisierte Darstellung des Gleichungsterms:

Aus den Ergebnissen kann man nun analog wie bei den quadratischen Gleich[illegible]en eine [illegible]torisierte Darstellung der Gleichung aus der Aufgabenstellung angeben.

$$18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{6}) = 0$$

Information zum Rateverfah[illegible]
Beim Rateverfahren f[illegible] Polyn[illegible]division ist es nur sinnvoll mit ganzzahligen Wert[illegible] zu arbeiten. [illegible] sollte man nur Zahlenwerte einsetzen, die ganzzahlige Teil[illegible] des Summanden ohne x sind, da dieser Summand d[illegible] Produkt [illegible] Lösungen enthält.

Hier: 2 [illegible] 3 · 2 · 1 [illegible] 1

[illegible] Lösung[illegible]

Übungen
Ü6.4
Berechnen [illegible] die Lö[illegible]en der Gleichung x^3 [illegible] $6x^2 + 11x$ [illegible] $6 =$ [illegible] Geben Sie anschließend die Gleichu[illegible] [illegible]tori[illegible]en Darstellung an. (Kontrollergebnis: $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$)

Beispiel 2:

Im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich darges[illegible] Beispiel 1. Es tritt hier jedoch eine Besonderheit auf.

Im Gleichungsterm fehlt der Summand mit x^2.

Gleichung: $x^3+x-2=0$

1. Schritt Raten mit x =1 ⇒ 1 + 1 [illegible] 2 = 0 [illegible] 1

[illegible] erste Lösung.

2. Schritt Ansatz für Polynomdivisi[illegible] earfaktor (x – 1)

Aus der L[illegible] g x = 1 erhält [illegible] den Linea[illegible] faktor (x – 1).

3 bis 11. Schritt liefert f[illegible] s.

$(x^{[illegible]} \ldots 2):(\ldots) = x^2+x+\ldots$

$\underline{x^3-x\ldots}$

$\ldots x$

$\underline{x^2-x}$

$2x\ldots$

$\underline{2x\ldots 2}$

0

[illegible] x und –x² nicht subtrahieren kann, schreibt man d[illegible] Term [illegible] – (–x²) = x[illegible] x² + x in die nächste Zeile. Das [illegible] „Untenholen" des nächsten Summ[illegible] entfällt damit, da bereits zwei Summanden vorhanden sind. Alle weiteren S[illegible] te bei der Division wie in Beispiel 1.

Zusatzinfo zu alternativer Rechnung:
[illegible] alle Potenzen von x auftreten, kann man die [illegible] it folgendem Ansatz schreiben:
[illegible] + 2
und dann wie i[illegible]

[illegible] ritt $x^2+x+2=0$

$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25-2}$ ⇒ negative Wurzel ⇒ keine [illegible]

Faktorisierte F[illegible] g:

Für die fakt[illegible] eichung gilt dann: $(x-1)(x^2+x-2) = \ldots$

Der Ergebnisterm der Div[illegible] über[illegible] men, da dieser s[illegible] [illegible] torisieren lässt.

Beispiel 3:

Auch im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie i[illegible] ausführ[illegible] darge[illegible] ten Beispiel 1. Es tritt hier jedoch wieder eine Besonderheit bei der Re[illegible] auf.

Gleichung: $x^3+x^2+x+1=0$

1. Schritt Raten mit x = –1 ⇒ –1 + 1 –1 +1 = 0 [illegible]

Erratene erste Lösung.

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mi[illegible] m Linearfakt[illegible] + 1)

Aus [illegible] Lösung x = –1 e[illegible] man den Linearfaktor [illegible] 1).

3 bis 11. Schritt liefert folge[illegible]

$(x^3 \ldots +1):(x+1) = \ldots +1$

$x^2 \ldots$

$\ldots +1$

$\ldots 0$

B[illegible] ersten Sub[illegible] ergibt sich für beide [illegible] renzen Nu[illegible], in der nächsten Zeile gibt es [illegible] nen Sum[illegible] n mehr. Man holt dann die beiden folg[illegible] n Summanden aus der ersten Zeile gleichz[illegible] nach unten.

12. [illegible] hritt [illegible] +1 = 0 f[illegible] einem Wi[illegible] ch. Es gibt damit keine weitere Lösung.

Für die faktorisierte Form der Aus[illegible] gsgleichung gilt dann: $(x+1)(x^2+1) = 0$

Der Ergebnisterm der Division wird übernommen.

Üb[illegible]

[illegible] e die Lösungsmenge jeweils mit [illegible] on, indem Sie die erste Lösung [illegible] Die Lösungen sind in ungeordneter Reihenf[illegible] ngegeben.

a) $x^3-10x^2+29x-20=0$
b) 25[illegible] – 8 = 0
c) $x^3+6x^2+11x+6=0$
d) $4x^3-\ldots$
e) $2x^3+3x^2\ldots$
f) $4x^3-13x\ldots$
g) $x^5+\ldots$
h) $2x^5-11x^4+\ldots-4x+4=0$

Lös[illegible] olge:

[illegible]	-0,5; 1	–0,5; 2;1	2; 0,8; 0,2	[illegible] 1
[illegible]	–1; 0,5	1; 4; 5	0,5; 1,5; –2	

Information 6.2

Sie haben für das Lösen von quadratischen Gleichungen und Gleichungen höherer [illegible]ung [illegible] eine Reihe von Lösungsverfahren kennengelernt und es ist am Anfang oft sch[illegible] den Ü[illegible]er alle diese Lösungsmethoden zu behalten und souverän, ohne längeres Über[illegible]ichtige[illegible] finden. Um sich die Entscheidung, welches Lösungsverfahren zu wählen ist, zu erleic[illegible]n, k[illegible] Sie das Ablaufdiagramm auf der übernächsten Seite verwenden. Es ste[illegible]zipiel[illegible]aus im Kopf bei der Entscheidungsfindung für die Wahl des passenden Lösungsverfa[illegible] für e[illegible] Gleichung dar. Wenn Sie ohne Verwendung dieses Diagramms sofort entscheiden [illegible]nen, [illegible]e G[illegible]ung zu lösen ist und das gewählte Verfahren fehlerfrei beherrschen, ist es nich[illegible]g, [illegible]re Übungs[illegible]aben zum Lösen von Gleichungen zu bearbeiten.

Übungen
Ü6.6

In dieser Übungsaufgabe sind alle b[illegible]lten Gleichungs[illegible]pen vorhanden.

a) Notieren Sie mit Stichw[illegible]der zweiten [illegible]alte der Tabe[illegible]unten, welche[illegible] Lösungsverfahren man für die Lösung der G[illegible]ung[illegible]hlen [illegible]nd ggf. [illegible]e Umformun[illegible]vorher notwendig sind. Sie können dabei als Hil[illegible]gramm auf der [illegible]nächsten Sei[illegible] verwenden.

b) Berechnen Si[illegible]ösu[illegible] der Gleichung[illegible] Sie jeweils d[illegible] für die Aufgabenstellung günstigste[illegible]fah[illegible]ählen. Zur Ko[illegible]e sind die L[illegible]gen jeweils angegeben.

Aufga[illegible]st[illegible]g	Lösung[illegible]fahren	Lösung zur Kontrolle
a) [illegible]³ = [illegible]x²		*0; 0,75*
b) $(2x + 4)(3 – x)(5 – 10x) = 0$		*–2, 3; 0,5*
c) $12x^4 – 4$[illegible]		*2;–2*
d) [illegible]1x		*0, 1,08; –3,41*
e) $(x^2 + 4)(x^2 – 9) = 0$		*[illegible]; –3*
f) $3x^3 – 7$[illegible]		[illegible]
g) [illegible]$)^3 = 0$		

h) $(0,25x + 1)^2 = (0,5x + 1)^2$		[illegible]
i) $0,5x^3 + 3x^2 = 8$		*–2; –5,46; – 1,46*

Für $a \in IR^+, k \in IR^+$ und $t \in IR^+$ sind die folg[illegible]param[illegible]ierten Gleichung[illegible]ge[illegible]ben.

j) $ax(x^2 + a)(x + 2a) = 0$		[illegible]–2a
k) $x^4 – 2ax^3 + a^2x^2$[illegible]		*0, a*
l) (t + [illegible]		*0; 1/(2t) + 1/2*
m[illegible](2x[illegible] – 2k) = 0		$0; \pm\sqrt{2k}\ ; \pm\sqrt{\frac{k}{2}}$
n) [illegible] – (a + 1)x² + [illegible] 0		$1, –1, \sqrt{1/a}\ ; –\sqrt{1/a}$

Ablaufdiagramm für die Auswahl des Lösungsverfahrens bei Potenzgleichungen höherer Ordnung.

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen

Kapitel 7

Ganzrationale Funktionen ... höheren Grades

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Gesamtw[illegible] [illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible] iert erlernen
(Best[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 7: Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades

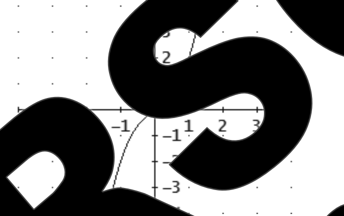
Aufgabe 7.1

Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung

In den nun folgenden Abbildungen ist jeweils der Graph ei[illegible] anzra[illegible] [illegible]ion dargestellt. Die Funktionsgleichungen sind dabei in der polynomialen Form [illegible]gebe[illegible] [illegible]itteln Sie zu jeder Funktion zunächst durch Ablesen die Nullstellen. Berechnen S[illegible] die N[illegible]en a[illegible]ließend exakt und geben Sie den Funktionsterm danach in faktorisierter Form [illegible] [illegible]ie anschließ[illegible] Ihr Ergebnis selbst anhand der abgelesenen Nullstellen.

a) Nullstellenbestimmung ganzrationaler F[illegible]ktionen, bei d[illegible] der größte Exponent **ungerade** ist.

(1) $f(x) = x^3 + x$



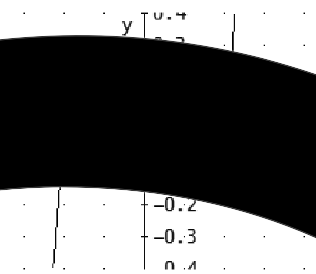
[illegible]stelle a[illegible]esen: N(/)

Funkti[illegible]erm in fakto[illegible]ierter Form angeben:

f(x) = ______________

Null[illegible] berech[illegible] f(x) = 0 ⇒ $x^3 + x = 0$

(2) $i(x) = x^5 - x^3$



Nullstellen ablesen:

N_1(/); N_2(/)

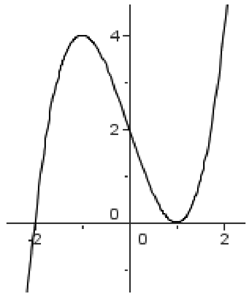
N_3(/)

[illegible]term in faktorisierter Form:

____

Nullstellen berechnen: $i(x) = 0 \Rightarrow x^5 - x^3 = 0$

(3) $g(x) = x^3 - 3x + 2$



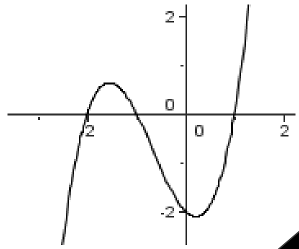
Nullstellen ablesen: $N_1($ / $)$ $N_{2,3}($ $)$

Funktionsterm in fakto… Form:

$g(x) =$ ____________

Nullstellen berechnen $g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2$ …

(4) $k(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$



Nullstellen abgele…

$N_1($ / $)$ …(/) …(/)

…tionst… faktorisierter Form:

Berechnen der Nullstellen: $k(x) = 0 \Rightarrow$ …² – … = 0

E…

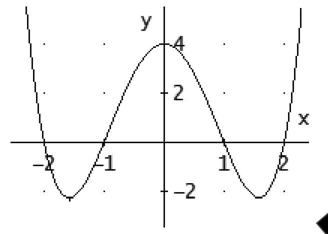
…ung der Nullstellen einer Funktion 3. Grades führt zu einer G… ______ Grades.

…nen 3. Grades haben mindestens ______ u… …chstens ________ … Daher gibt es

…eichungen 3. Grades ebenfalls minde… …nd höchstens ______ …ungen.

b) Untersuchungen bei ganzrationalen Funktionen, bei denen der größte Expone… gerade …

(1) $a(x) = x^4 - 5x^2 + 4$



Nullstellen:

$N_1($ / $)$ … / $)$

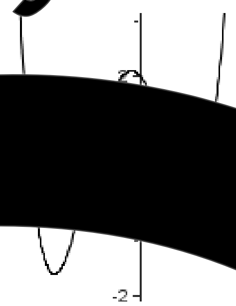
/ … (/ $)$

…unkt… …erm in fakt…is…rter Form:

…) = ______________________

Berechnen der Nullstellen: $a(x) = 0 \Rightarrow x^4$ … $^2 + 4 = 0$

(2) $b(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$



Nullstellen:

$N_1($ / $)$; $N_2($ / $)$

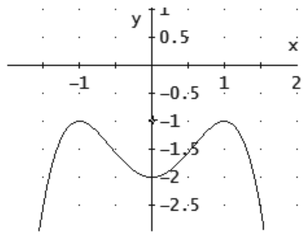
$N_{3,4}($ / $)$

…erm in faktorisierter Form:

____

Berechnen der Nullstellen: $b(x) = 0 \Rightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$

(3) $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$



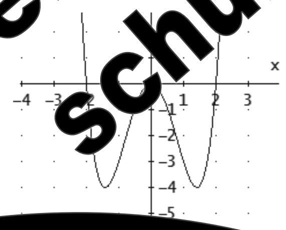
Nullstellen: ____________

Funktio... in fakt... Form:

c(x) = ________________________

Berechnen der Nullstellen: $c(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^2 - 2 =$ ...

(4) ... $- 4x^2$



Nullstellen:

$N_1($ / $)$ $N_2($ / $)$

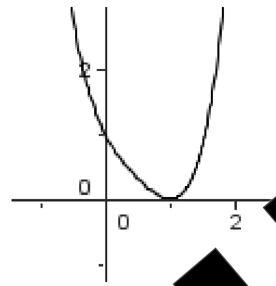
$N_{3,4}($ / $)$

Funktionsterm in faktorisierter Form:

...) = ________________________

...tellen: $d(x) = 0 \Rightarrow x$ ...

(5) $e(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$



Nullstelle... (/ ...

F... term in ... sierter Form:

e(x) ... (x ... + 1)

Weisen Sie hier durch Ausmultiplizieren der fakt...ten Fo... der Funktio...ichung nach, dass gilt: $(x - 1)^2(x^2 + 1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 -$ ...

Ergänzen Sie:

Die Berechnung der Nullstellen einer Funktion 4. Grades führt zu einer Gleichung ___ Grades. Da Funktionen ... ____________ Nullstellen haben können, gibt es bei Gl... ____________ Lösungen.

... Sie den allgemeinen Merksatz zur Anza... ... Funktionen.

Zusammenfassender Merksatz:

Fu... größte Potenz von x ungerad... immer ... ___ Nullstelle besitzen. Funktionen, ... ie ... ____________ ist, müssen keine Nullst... .

Allgemein hat eine Funktion n-ten Grades maximal ___ Nullstel...

Aufgabe 7.2

Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen Funktionen

Oft verlangen Aufgabenstellungen die Anfertigung einer Skizze für den V... einer Fu... dazu reicht es meist aus, die Nullstellen und den y-Achsenabschnitt zu kennen... es jedoch auch, wenn man die Funktion hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften untersu...

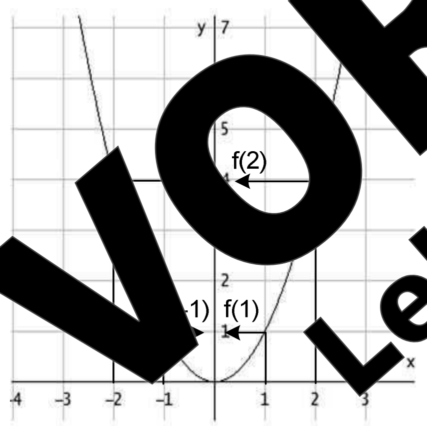
Beispielhafte Untersuchung auf Symmetrie anhand der einfachen ...funktione... $(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$
Füllen Sie jeweils die Wertetabelle aus, und vergleichen S... die F... ...wer... der Wertepaare f(x) und f(–x). Formulieren Sie jeweils einen Zusammenhang zwisc... ...paaren.

Symmetrie bei einer zur y-Achse symmetris... Funktion

Funktion | Wert...lle | ...ezie...g zwisc... ...Funktionswerten

Achsensymmetrie zur y-Achse

$f(x) = x^2$



x	f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

f(–3) = ______
f(3) = ______

f(–2) = ______
f(2) = ______

f(–1) = ______
f(1) = ______

Ergänzen Sie:
Bei einer zur y-Achse symmetrischen Funktion gilt für einen beliebigen Wert von x die folgende Beziehung:

f(–1) = f(1)

f(–2) = f(___)

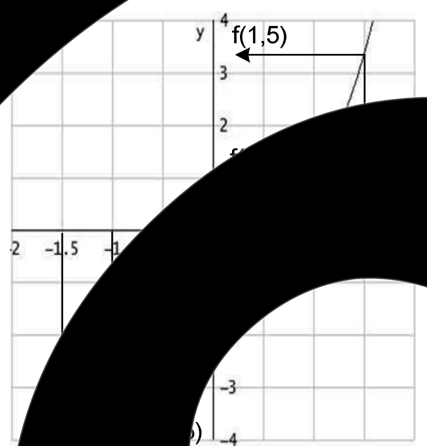
f(–3) = f(___)

f(–x) = f(___)

Symmetrie bei einer zum Ursprung symmetrischen Funktion

Funktion ... zwischen den Funktionswerten

Pu...



x	f(x)
-2	
1,5	
2	

f(–2) = ______
f(2) = ______

f(–1,5) = ______
f(1,5) = ______

f(–1) = ______
f(1) = ______

Ergänzen Sie:
Bei einer zum y-Achse symmetrischen Funktion ...r einen beliebigen ...n x die folgende ...:

... = f(1)

...(___)

... ___)

... ___)

Aufgabe 7.3

Rechnerische Untersuchung auf Symmetrieverhalten bezüglich der y-Ac... ...bzw. ... Ursprungs

Information 7.1

In jedem Tafelwerk kann man nachschlagen, dass die anhand der F...ion... x^2 und $f(x) = x^3$ verdeutlichten Beziehungen bei dem Vorliegen von Symme... für a... ...tionsklassen gültig sind. Die in Aufgabe 7.2 dargestellte Form der Zusammenhänge i... die r...erische Untersuchung auf Symmetrie günstig und wird daher im Folgenden ve...det.

Achsensymmetrie zur y-Achse:	**f(x)... ...–x)**
Punktsymmetrie zum Ursprung	**f(x) ... ...–x)**

Verdeutlichen Sie sich die Vorgeh...weis... ...m rec...rischen N...weis von Sym...e...n anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Nachweis, dass die F...g(x) = x... 3... 2 **kein**... Symmetrieeigens...ft hat.

a) Prüfen auf Achs... ...it dem Ansatz g(–x) = g(x)

g(... ...(–x)³ – 3(–x)... ...–x³ + 3x + 2... ⇒ keine Achsensymmetrie

...rall, w...i g(x) ein x ...as x durch ein (...) ersetzt.

Alle Klamm...n ...rden aufgelö... ...der ents... ...e Ausdruck wird mit ...rsprünglichen F...ion verglichen.

Keine Übereinstimmung mit g(x)
⇒keine Achsensymmetrie

b) Prüfen auf Punktsymmetrie ...dem Ansatz –g(–x) = g(x)

–g(–x)= – [–x³ + 3x + 2] = x³ – 3x – 2 ≠ g(x) ⇒ keine Punktsymmetrie

...ufgelöst ... ursprün... verglichen.

...e wird ein ...zeichen gesetzt.

Keine Übereinstimmung mit g(x)
⇒keine Punktsymmetrie

Beispiel 2:

Nachweis, dass die Funktion $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$ achsensymmetr... ...der Nachweis für Achsensymmetrie ... Untersuchung auf Punktsymme... ...notwendig.

...x)² – 2 = –x⁴ + 2x² – 2 = c(x) ...ensymmetrie

...n Auflös... ...Klammern auf der ...ten Seite vom Gleichheitszeichen ergibt ...h die Ausgangsfunktion. D.h. die Funktion ...st achsensymmetrisch.

Beispiel 3:

Nachweis, dass die Funktion $f(x) = x^3 + x$ punktsymmetrisch ist.

a) Prüfen auf Achsensymmetrie

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \neq f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{k… Achs…metrie}$$

Bei der Untersuchung auf Achsensymmetrie er… sich ein Widerspr…

b) Prüfen auf Punktsymmetrie

$$-f(-x) = -[-x^3 - x] = \ldots + x \ldots f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Punkt…metrie}$$

… der U…chung a…ktsymmetrie …ibt sich nach dem Auflö…n aller … auf der r…ten Seite vom … Gleichheitszei… … Ausgang…nk…n.

Übung 7…

a) …su…n Sie die ganzra…ialen Funktio…n aus Aufgabe 7.1, ohne Rechnung, alleine anhand des j… …dargestellt…n Ku…venverlaufs …f Zusammenhänge zwischen den Symmet…eigenschaften …d den auf…te…den Potenzen von x im Funktionsterm. Formulieren Sie entsprechende Regeln, indem Sie … …genden Sätze vervollständigen.

Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Potenzen von x ____________________ sind. (Ein Summand der Form $kx^0 = k$ zählt zu den geraden Potenzen von x.)

…ktion ist punktsymme… … alle Potenzen von x ____________________ sind.

…ine ganzrationale Funktion hat bezüglich der x-Achse und des U… …Symmetrie-eigenschaften, wenn ____________________ und ____________________ … x auftreten.

b) Weisen Sie … …er Funktionen aus Aufgabe 7.1 … …ach.

Raum … …eite.

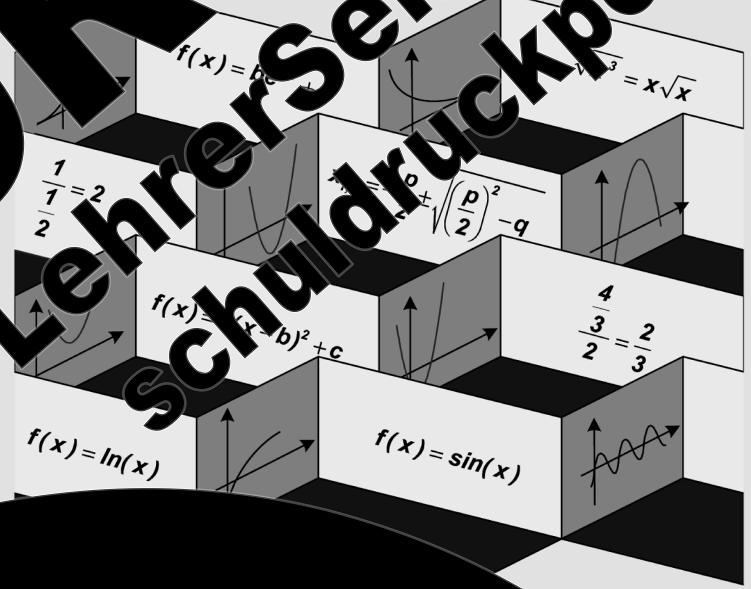
Raum für Rechnungen:

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Die Umkehrfunktion

02-033-279

Gesamtw... ...s zu Algebra und Funktionen ...iert erlernen
(Best...

S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de

...www.f-druck.de

Kapitel 8: Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1

Grundlegendes zu Umkehrfunktionen

In Ihrem bisherigen Mathematikunterricht haben Sie beim L... von G...ungen und bei der Berechnung von Winkeln, ohne dass hier die Begriffe Funktio... Um...rfunktion verwendet wurden, bereits eine wichtige Eigenschaft über Funktionen u... ...rige... Umkehrf...ktionen kennengelernt. Arbeiten Sie alle Beispiele durch, und ...en Si... ...bei fehlend... ...gaben.

Beispiel 1:

Lösen Sie die beiden Gleichung... ...n x a... ...ollständig... ...den folgen... Text:

$x^2 = 4$ $\sqrt{x ...} = ...$

____________ ____________

____

Um die ...adratis... Gleichung zu löse... muss man __________________________ und um die W...elgl... ...ösen, muss man ______________________

Dur... ...uadrieren eines ...drucks der Form $\sqrt{a}$ wird die Wurzel „vernichtet", und durch das Ziehen der Wur... aus einem A...druck a^2 fällt das Quadrat weg. Die Operationen Quadrieren und Wurzelziehen heben sich also gegenseitig au... ...d werden daher auch als Umkehroperationen bezeichnet.

Beispiel 2:

... der folgende Ansatz verwendet:

tan⁻¹ ist die Umkehroperation zu tan.

$\tan^{-1}(\tan(\alpha)) = ...$

$\alpha = \tan^{-1}(...)$

Info:
...tan⁻¹ wird auch als **...ctan** (sprich arcus-...ens) bezeichnet.

Aufgabe...

Zus... ...funktion und ihrer Umkehrfunktion

... ...n die Zusammenhänge von Beispiel 1 und Beispiel 2 unter fu... ...Gesichtspunkt, so ...ie Begriffe Operation und Umkehroperation au... die Begriffe **Funk... ...mkehrfunktion** ...n. In der Tabelle auf der folgenden Seite sin... ...e einfache Funkt... ...re zugehörigen ...nktionen angegeben. Verdeutlichen Sie ... Beispielen die Z... ...änge, und ... Sie dann in der Tabelle die fehlend...

Bei Betrachtungen zu Umkehrfunktionen muss meist ein Definitionsbereich angegeben werden. Bei der Umkehrfu… …ion $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ sind beispielsweise keine negativen Zahlen … erlaubt, da man im Zahlenbereich der reellen Zahlen IR a… einer negativen Zahl keine Quadratwurzel zieh… …nn.

Funktion	Umkehrfunktion	Anwenden der Um… ihr… Funktion	Defin…ionsbereiche
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$	$f^{-1}(f(x))$ … $(x^2)=\sqrt{(x^2)}$ …	…$_0$

Erinnerung:
Der Ausdruck, welcher bei der Funktionsschreibweise in der Klammer steht, hier das … wird als **Argument** d… Funktion bezeichnet.

…n Argument … die Funktion… eingesetzt.

…(x) wird … zugehörige Funktionsterm (hier: …) eingesetzt.

Für f… wird der zugehörige …nktionsterm (hier: $\sqrt{\ }$) eingesetzt.

$f(x)=\sqrt{x}$	$f^{-1}(x)$… ²	$f^{-1}(f(…$ … $(\sqrt{x})=(\sqrt{…$ …	IR_0^+
$f(x) =$ … (x)	…(x) … $an^{-1}(x)$	… $= f^{-1}$ (…) $= \tan^{-1}(\tan x) = x$	$x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) =$ …	$f^{-1}(x)$ … $in^{-1}(x)$	f^{-1}(…) $= f^{-1}(\sin x) =$	$x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) =$	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\quad) =$	
$f(x) = \cos(x)$	f^{-1}…	…$) =$	$x\in[0;\pi]$
$f(x)$…			

… Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt der … …nhang. Vervollständigen …

…endet man die Umkehrfunktion auf ihre zugehörige Funktion a… …an das ________ . Formelmäßig gilt: $f^{-1}(f(x))$…

Verdeutlichen … Beispiels, dass auch die Umkehr… …atzes gilt und ergänzen S…

Bsp.: ________________________________

W… die Funktion auf ihre zugehörige Umkehr…on an, so erhält … ________ der Umkehrfunktion. F… …ilt: ________

Aufgabe 8.3

Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunkti…

Im Folgenden sollen nun anhand der Potenzfunktionen $f(x) = x^2$ so… …^{3} und … zugehörigen Wurzelfunktionen weitere Zusammenhänge zwischen Funktion und …ke… …ion erarbeitet und formuliert werden.

a) Füllen Sie die beiden Wertetabellen aus, und beschreiben … welc… Zusammenhang zwischen den Argumenten von Funktion und Umkehrfunkt… …ils zugehörige… Funktionswerten besteht.

Funktion

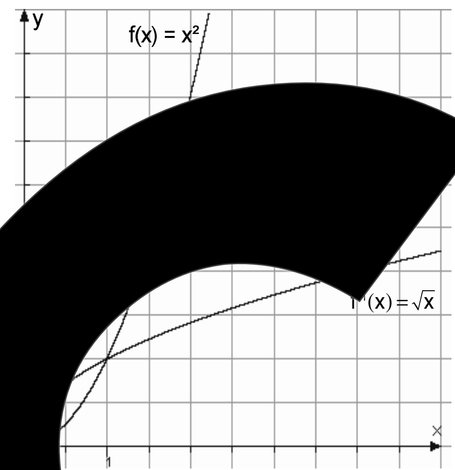
x	$f(x) = x^2$
0	
0,5	
[illegible]	
1,5	
[illegible]	
[illegible]	

Umkeh…ktion

x	$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
0	
0,25	
1	
2,2…	
4	
6,25	

____
____
____
____

… IR_0^+ die quadratische Funktion und als …funktion die Wu… …hen den beiden Funktionen besteht …metriebeziehung. Beschreiben Sie … …hung, und formulieren Sie dabei, …man mithilfe von rein graphischen Mitteln die … $f(x) = x^2$ ermitteln kann.



____
____
____
____
____
____

c) Die in Aufgabenteil a) und b) erarbeiteten Zusammenhänge sollen nun auf die …ktion f(… x^3 und die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ übertragen werden. Verdeutlichen S… …h anha… …der Wertetabelle auch hier den Zusammenhang zwischen den Argumenten … den F… …ten, indem Sie die fehlenden Werte ergänzen.

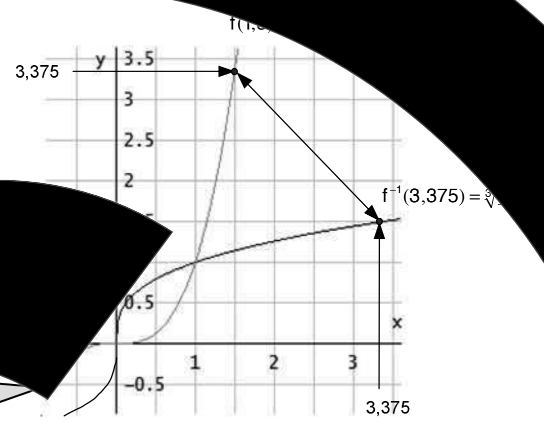
Potenzieren

Argument x der Funktion	Funktionsw… …tion
x	**$f(x) = x^3$**
–2	…8
–1,5	
–1	–1
	0
1	1
	…375
	…8
…$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	**x**
…ktionswert der Umkehr…nktion	**Argu… x der U…funktion**

Radizieren*

*Radizieren bedeutet Wurzel ziehen

Ergänzen Sie die S… …ng, und verdeutlichen Sie sich auch anhand der Graphik de… …kehrfunktion, indem Sie die fehlenden Zahl…

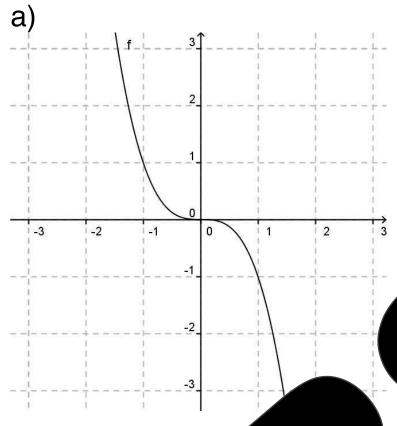


Die Umke… von f(x)… auch… W… … gilt:

Aufgabe 8.4

Ergänzen Sie, falls möglich, in den Abbildungen jeweils die Symmetri…gerade … …ine S…ze der Umkehrfunktion zu den dargestellten Funktionen. Begründen Sie d… warum … …erahmte Satz gültig ist.

a)



b)

Stetig hei… dass m… …eim Zeich… …ktion betra…eten In…ll de… …ift … absetz… muss.

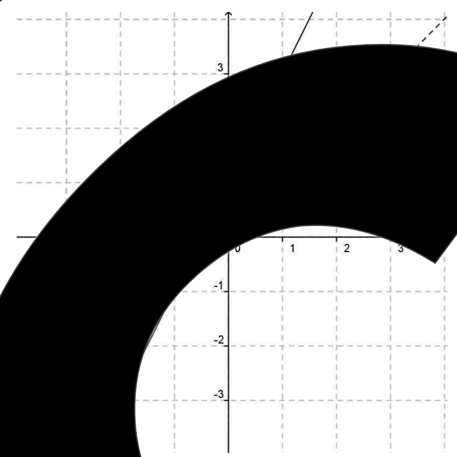
Wenn ma… …en gesamten …finitions-bere… …stetige… …on be-tra…t… …ann ist ei… …nktion nur um…ehrbar, wenn s… …n diesem Bereich …eng monoto… …igt oder fällt.

Streng monoton heißt, dass die Funktion nur fällt oder steigt.

Aufgab…

…hrfunktion am Beispiel f(x) = 2x + 1

…e die Umkehrfunktion zur Geraden f(x)… …f graphischem Weg, und …men Sie den Funktionsterm von $f^{-1}(x)$ durch Abl… …dung. Verdeutlichen Sie sich …schließend die Umformungsschritte bei der rechnerische… …Umkehrfunktion.



Funktionsterm: $f^{-1}(x)$ = ____________

Rechenschritte

$f(x) = 2x + 1$

Schritt 1:
Ersetzen von f(x) durch y.

$y = 2x + 1$

Schritt 2:
Gleichung nach x auflösen.

$-2x = -y$ …

$x = \frac{1}{2}y$ …

Zus…
Sollt… Gleichung nicht … nach … lösen lassen, so … istiert … der gegebenen … tion keine U… ehrfunktion.

Schritt 3:
Ist das Auflösen nach x gelungen, vertauscht man die Variablen x und y.

$= \frac{1}{2}x$ …

Schritt 4:
Man ersetzt y … f^{-1}(… und erhält so die … Umkehr… zu…

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ …

Übungen
(Raum für Rechnungen auf den Folgeseiten)

Übung 8.1

G… …nktion in ein geeignetes … und bestimmen Sie, wie im Bei… …rfunktion $g^{-1}(x)$ auf … und rechnerischem Weg. Begründen Sie an… …ten Funktionswertes, dass … b und $g^{-1}(b) = a$.

Übung 8.2

Bestimmen Sie d… …erischem Weg.
a) $f(x) = 2x +$ … $x \geq 0$ c) $f(x) = 2x^3$

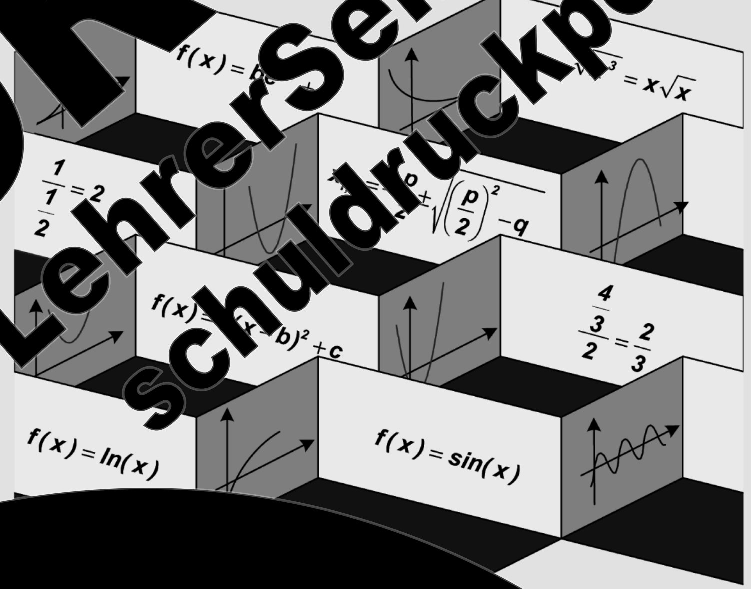
Übun…

In A… ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x$ abgebildet. Anhand von graphisch… …ungen ha… …ts erkannt, dass keine Umkehrfunktion existi… Zeigen Sie nun a… …sch, dass hi… …kehrfunktion ermittelbar ist.

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend... zu Algeb... und Fu...kt...nen

selb...orga...iert erlernen



Kapite...

Trigonometrische Fun...

Kapitel 9: Trigonometrische Funktionen

Sie haben bisher die Begriffe Sinus (sin α), Cosinus (cos α) und Tan[illegible] (tan [illegible] in [illegible]ndung mit der Berechnung von Winkeln und Seitenlängen im rechtwinkligen [illegible]ennen[illegible]. Falls Ihnen alle Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck geläufig sind, könn[illegible] [illegible]be 9.1 überspringen.

Aufgabe 9.1

Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Drei[illegible]

Definition der Winkelfunktionen

Entnehmen Sie aus der Abbildung rechts [illegible] Fachbegriffe, und ergänzen Sie:

Die Seite, die dem rechten Wi[illegible] ge[illegible]erlie[illegible] nennt man

____

Die Seite, die dem [illegible]erliegt, ne[illegible] man

____

D[illegible]eite[illegible] de[illegible]nkel α anli[illegible]t, nennt man

____

a) Ordnen Sie den angegebenen Seiten anhand der Dreiecke ABC und AB'C' bezüglich des Winkels α die die Begriffe Hypothenuse, Ankathete und Gegenkathete zu

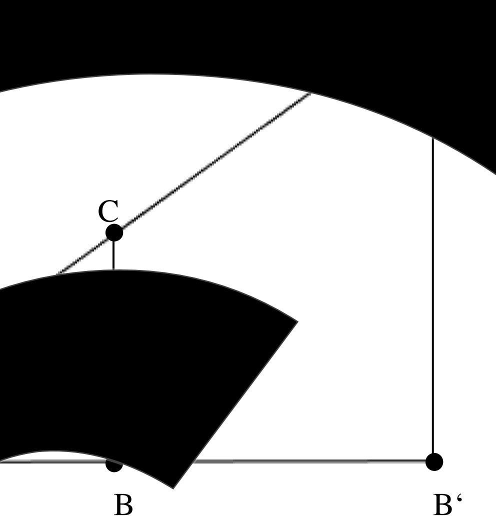


Abb. 9.1.1

[illegible]B: __________

AB[illegible]: __________

AC': __________

B'C': __________

b) Ermitteln Sie durch Messung aus der Abb. 9.1.1 den Winkel α und die angeg... Sei...ngen so genau wie möglich.

α = _____ $\overline{AB}$ = _____ $\overline{AB'}$ = _____ $\overline{AC}$ = _____ $\overline{AC'}$ = _____ ... ' = _____

Berechnen Sie die angegebenen Seitenverhältnisse und jew... die We... ...), cos(α) und tan(α) auf zwei Dezimalstellen gerundet. Achten Sie dabei da... dass ...schenrechner bei der Eingabe von Gradmaßen die Einstellung „deg“ haben ...ss.

(1) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ = ——— = _______ $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$ = ——— = _______ sin(α) = _______

(2) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ = ——— = _______ $\frac{\overline{AB'}}{\overline{A...}}$ = ——— = _______ cos(α) = _______

(3) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ = ——— = _______ ...'C... = ——— = _______ tan(α) = _______

Vergleichen Sie die E... aus d... ...nnung ... ...ngenverhältnisse in (1), (2) und (3) mit den entsprechende... ...erte... sin, cos und tan. Was ...llen Sie fe...?

____

Sie ...be ...her erk...t, dass die be...hneten Länge...hältnisse in (1), (2) und (3) mit den Werten von ...(α) ... cos... ...nd tan(α) übe...stimme... ...ndert sich der Winkel α so verändern sich auch diese ...nge... ...isse und ... die Werte v... ...in(α) bzw. cos(α) und tan(α). Diese Abhängigkeit der La...enverhältnisse vom Winkel α interpre...t man als funktionalen Zusammenhang und ... **sin(α), cos(α)** ... **tan(α)** als **W...funktionen**.

Dem Verhältnis von **Gegenkathete** zu **Hypothenuse** ordnet man den **Sinus** des Winkels α zu.

Dem Verhältnis von **Ankathete** zu **Hypothenuse** ordnet man den **Cosinus** des ... α zu.

Dem Verhältnis von **Gegenkathete** zu **Ankathete** ordnet man den **Tangens** des Winkels α zu.

sin... ...(von α)

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha)}{\text{Ankathete (von } \alpha)}$

...tion 9.1:

...e folgenden, häufig verwendeten Zusammenhänge zwischen sin, c... ...nen Sie in jedem Tafelwerk nachschlagen. ... ...keit der Betrachtungen werden ... ...nfalls angegeben.

tan(... **...metrischer Pythagoras** sin... ...) cos(x)

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ cos... – sin²(x)

...$(x + \frac{\pi}{2})$ sin(–x)...

cos(–x)...

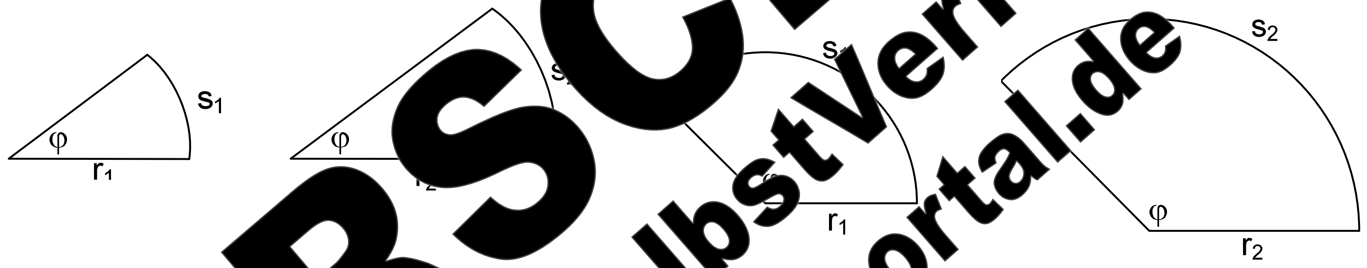
$\cos(x - \frac{\pi}{2})$ tan(–x)...

Aufgabe 9.2

Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß

Bei der Anwendung von Sinus, Cosinus und Tangens in Wissensch... ...nik erfolgt die Winkelangabe meist nicht mithilfe des Gradmaßes, sondern ...ber das ...ge... Was man unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht, soll anhand der folgend... ...ufgab... ...rt werden.

Verdeutlichen Sie sich anhand der im Folgenden ab... ...egmente, wie die Bogenlänge, die hier mit s bezeichnet wird, vom Winkel φ und dem Ra... ...bhäng... ...nd ergänz... ...e den nachfolgenden Text.



Es gilt:

Je grö... der Wi... desto ___________________ der Bogen.

J... ...öße... ...Ra..., desto ___________________ der Bogen.

...ie w...en bereits, dass ... beim Vollk... den Umfang bzw. die Bogenlänge s mit der Formel **s = 2πr** ... kann. A...sgeh... vom V... kann man auf die Bogenlänge bei einem Kreissegment schl...n. Ergänzen S... in der folg... Tabelle fehlende Berechnungen für die Bogenlänge zu den gegebenen Winkeln, sowie das V...ltnis Bogenlänge s zu Radius r.

Winkel im Kreissegment	360°	270°	180°	90°	1°	30°	60°	45°
					$\frac{\pi r}{180}$			
...is $\frac{s}{r}$ (Bogenmaß)	2π	$\frac{3\pi}{2}$						

Jeder Angabe im Winkelmaß mit Gradangabe kann man eine Ang... ...maß zuordnen, die den Wert π enthält. D... ...hen Bogenmaß und Winkelm... ...r die Beziehungen:

Winke... ...ß umrechnen: $\alpha = \frac{x \cdot \pi}{180}$ ...e im Bogenmaß T... ...er: **rad**

...n Bogenmaß ins Gradmaß umrechnen: $\alpha = x \cdot 180$ Win... ...m Gradmaß Tasc... **deg**

Aufgabe 9.3

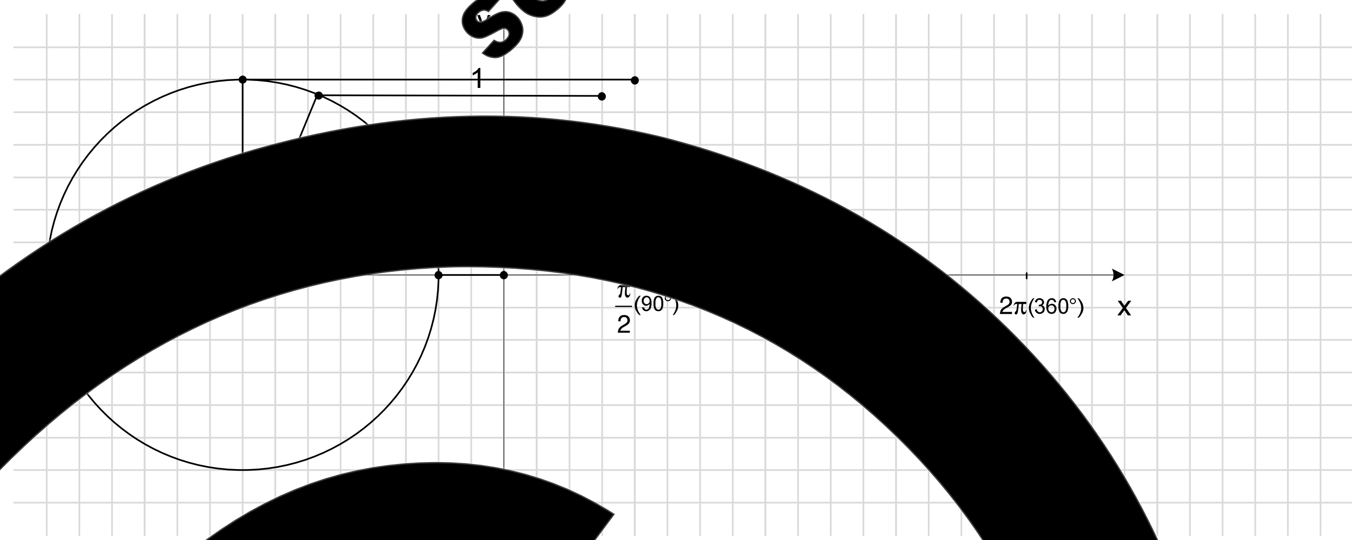
Die Sinusfunktion

In Naturwissenschaft, Technik und anderen Anwendungsgebieten, in denen bei weise Schwingungen und Wellen auftreten, ist der funktionale Charakter des Sinus ge für die formelmäßige Beschreibung der Zusammenhänge. Die Funktions diese usfunktion f(x) = sin x erhält man mit dem Taschenrechner, indem man für x entweder im - oder ogenmaß den Wert eines Winkel eingibt. Ergänzen Sie die folgende Tabelle, Funktionswerte mit dem Taschenrechner erzeugen . Achten Sie dabei auf die Einste „deg“ „rad“.

x	0°	30° oder $\frac{\pi}{6}$	5° oder π	60° oder $\frac{\pi}{3}$	90° oder $\frac{\pi}{2}$
f(x) = sin(x)		1	2	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	

Diese erte treten in uf stellungen häufig au st si , wenn man ich das gt.

Den Fu ons hen Sinusfunktion kann man mithilfe des Einheitskreises (Kreis mit Radius 1) auf graphisc n We ohne Wert belle erzeuge erdeutlichen Sie sich, wie die Koordinaten der te re s von der y-Achse erzeugt werden, tragen Sie, entsprechend zu diesen Punkten, alle we P te für den Vollk s ein. Verbinden e anschließend alle Punkte zu einem Graphen.



Der hier usfunktion **f(x) = sin(x)** bezeichnet.

Aufgabe 9.4

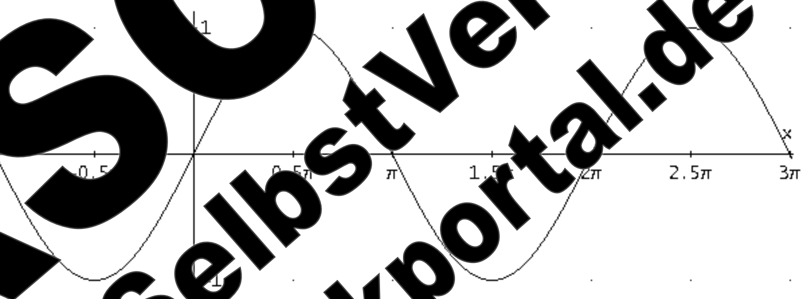
Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion

In den wenigsten Anwendungen tritt die Sinusfunktion in der Form f = si uf. Wie bei den Parabeln kann die Sinusfunktion verschoben, gestaucht oder gestrec sein. D e Sie im Kapitel 5 Aufgabe 5.2 gelernt haben, können weitgehend auf die Sin nktion agen werden.

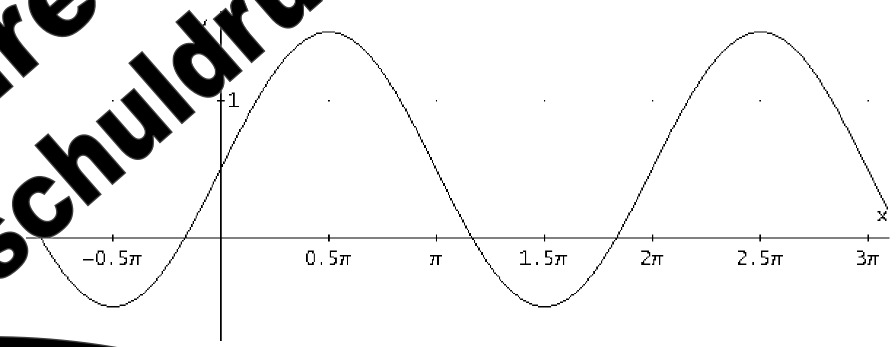
a) In den Abbildungen unten sind die Funktion f(x) di ner (x) bis f (x) dargestellt. Untersuchen Sie mithilfe der Abbildungen welche W die ablen a, b, d auf die Ausgangsfunktion $f_0(x) = \sin(x)$ haben. N Sie d irkung jeweils in hw ten.

Ausgangsfunktion:

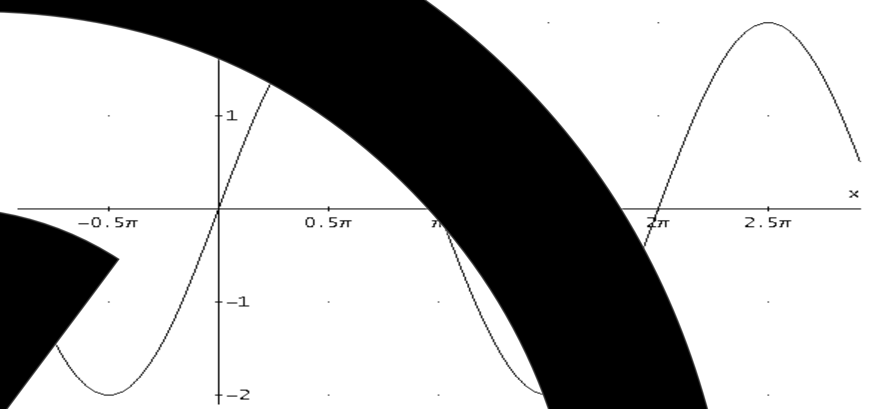
$f_0(x) = \sin(x)$



) = s ,5



in(x)



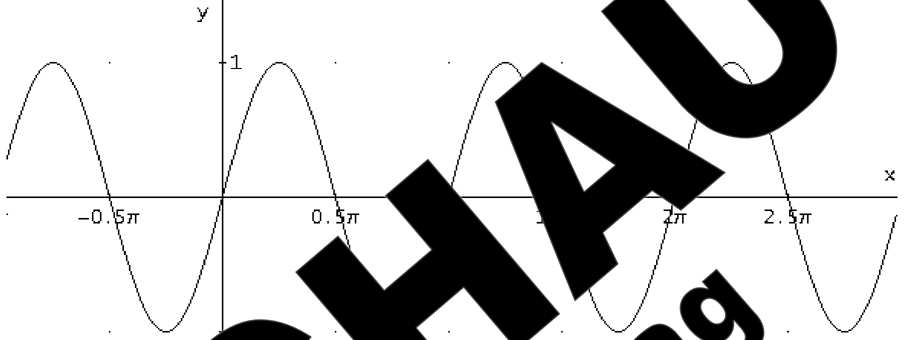
$f_3(x) = \sin(2x)$

____

____

____

____



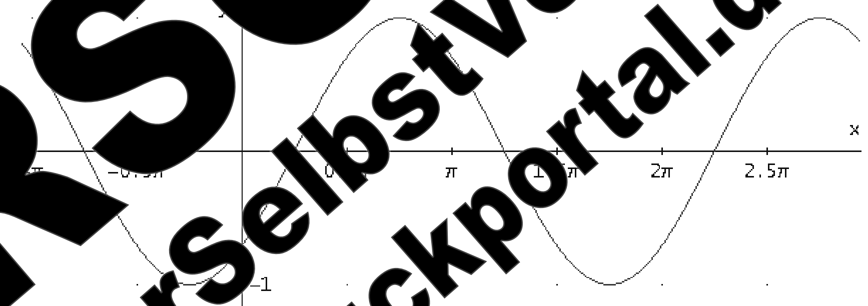
$f_4(x) = \sin(x - 0{,}25\pi)$

____

____

____

____



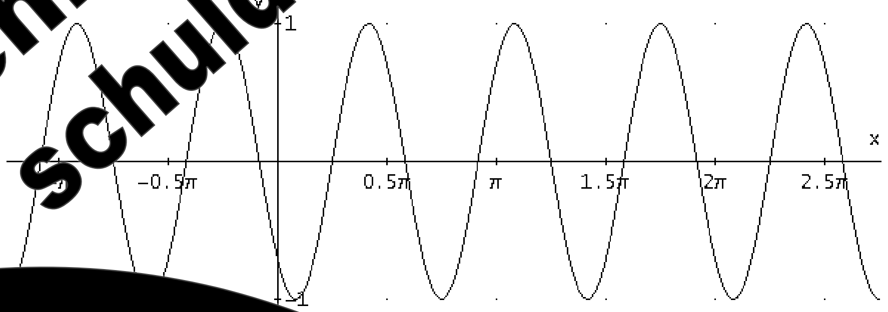
...) = ...3(x – 0,25π))

____

____

____

____



Um Verschiebungen und ... Stauchungen des Funktionsgr... der Funktionsgleichung erkennen ... muss man den Faktor vor dem x ausk...

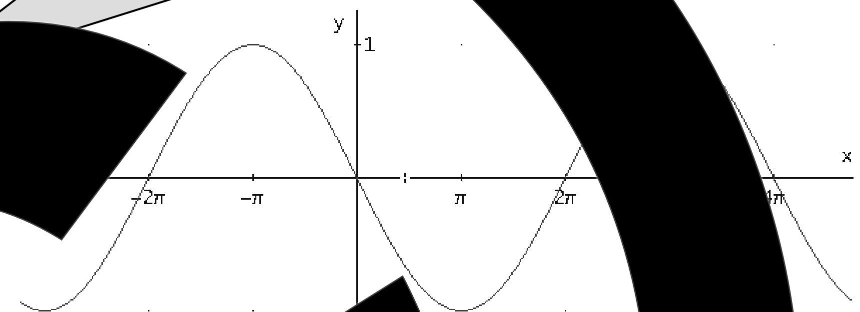
$f_6(x) = \sin(0{,}5x - \pi)$

$f_6(x) = \sin(0{,}5$...

____

____

____



b) Die allgemeine Form der Sinusfunktion kann wie folgt dargestellt werde... formulie... Sie, welche prinzipielle Wirkung die Parameter a, b, c und d bei der Sinusfunktion ha... indem ... die Texte in den Sprechblasen ergänzen. Zur Vereinfachung werden für die P...rameter ... d b... nur positive reelle Zahlen betrachtet.

f(x) = **a** sin(**d**(x – **b**... **c**.

a ∈ **IR⁺** streckt und staucht die Funktion in ___-Richtung.
a > 1 → **strecken**
0 < a < 1 → **stauchen**
Die Streckung bzw. Stauchung hat ________ Einfluss auf die Lage der Nullstellen.

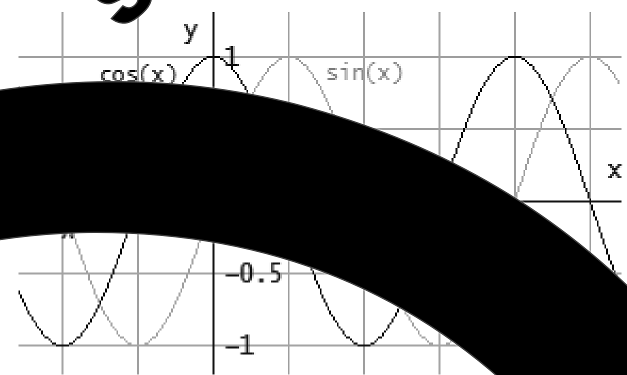
Wie bei Parabeln, verschiebt **c** ∈ **IR** die Funktion in ___-Richtung.

d ... **IR⁺** streckt und ... ...ht die F...ktion in ... ...htung.
d > 1 ... **stauchen**
... **d < 1** → **streck...**
Ergänzung: Ein nega... ...ver We... für d ...piegelt die Funkti... an der y-Ach...

Wie bei Pa...beln, verschi... ... **IR** di... Fun...n in ... ...Richtung.

Inform... 9.2

Al... ...etra... ...zum Ve...schie...en, Strecke... ...Stauchen der Sinusfunktion f(x) = sin(x) können auf die ...sinusfunktion f(x) = co...(x) übertragen ...rden. In der folgenden Abbildung wird deutlich, dass die ...funktion cos(x) = sin(x + $\frac{\pi}{2}$) (vgl. ...formation 9.1) durch Verschiebung mit b = $-\frac{\pi}{2}$ nach links aus der Sinusfunktion hervorgeht.



Information 9.3

Die Beg... ...elegte Funktionsnamen und kön... ...wendung der Umke... ...Argument getrennt werden. Treten ... ...e innerhalb von Brü... ...elne Buchstaben bzw. Variablen nicht k...

... **falsches** Kürzen: $\frac{\text{si}\cancel{n}\,(x)}{\cancel{n}} \neq \text{six}$ oder $\frac{\cos(\pi\cancel{x})}{\cancel{x}} \neq \cos(\pi)$

...ht's ...t

Aufgabe 9.5

Bestimmen der **Periodizität p** einer gestreckten bzw. gestauchten Sinusfunktion bzw. ... Cosinusfunktion.

Zur Information:
Funktionen, die in gleichen Abständen ... auf der ... che ... Funktionswerte haben, nennt man per... he Fu... en mit der Periode p. Formelmäßig drückt man das ... olgt ...: f(x+p) = f(x)

Wie Sie in Aufgabe 9.4 erkannt haben, beeinflusst ... Streck... Stauchfaktor d ... Funktionsgleichung f(x) = **a**sin(**d**(x – **b**) + **c**) die ...odizität eine... usfunktion. ...utlichen Sie sich anhand der Funktionen aus Aufgabe 9.4 und de... lgenden ...abelle, dass ma... die Periodizität p einer Sinusfunktion wie folgt berechnen kann. Ergänz... ie jew... den Faktor ...

P...dizität: $p = \frac{2\pi}{d}$

Funktion	...odizität ... der ...ildung bestimmen	...aktor d	Peri...izität p berechnen
$f_0(x) = \sin(x)$	p = 2...	1	...ht notwendig
$f_3(x) = \sin(2$...	... π	___	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$
$f_6(x) =$ ...(0,5...	p = 4π	___	$p = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$
... si... x – 0,25π))	Ka... man nicht ge...u ...lesen	___	$p = \frac{2\pi}{3} \approx 0{,}67\pi$

Aufgabe 9.6

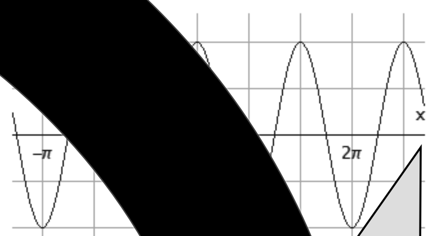
Lösen von trigonometrischen Gleichungen

Da das Lösen v... mit der Berechnung von Nullstellen bei Funktione... hungen anhand von Beispielen zu dieser Aufg...

...urch Rechnung gezeigt werden, dass die Funktion

... $= \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$ (s. Abbildung rechts) an den Stellen

$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2}$ mit n∈...



...ass bei trigono...etrischen ...ktionen beachten, dass es unendlich ...le Nullstellen geben kann, die ...eriodisch auftreten.

Info:
Es ist in ... ünstig, bei trigon... n Funktione... rung der x-Ach... hen von π anz...

Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung

f(x) ...

sin(2(... π)) ...

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren. (arcsin oder $\sin^{-1}$)

...2(x – ...4 ...) = arcsin0

2... $\frac{1}{2}\pi = 0$

2x ...

Achtung!
Aufgrun... der Periodizität gibt es ...ere Lösungen.

Schritt 3:
Gleichung nach ... lösen.

... $\frac{\pi}{4}$

S... 4:
Per... ät berechnen

Periodizi... $= \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Schrit...
...itere Lösungen bere...nen.
... die Funktion nic... y-Richtung ...choben ist, haben alle Nullst... bei einer Periode von π einen Abstand von $\frac{\pi}{2}$.

$x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

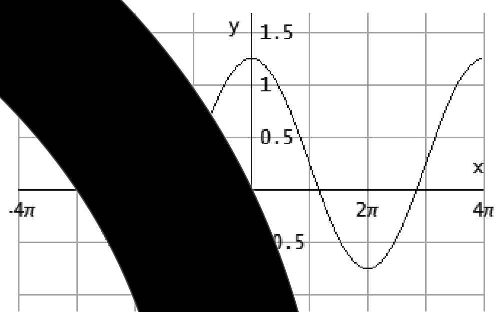
$x_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

oder allgemein

$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2}$ mit n∈IN

...piel 2:

Man kann der Abbildung rechts näherungsweise entnehmen, dass die dargestellte Cosinusfunktion für $x_{1,2} = \pm 1{,}2\pi$ und $x_{3,4} = \pm 2{,}8\pi$ Nullst... der Nullstellen dieser in x-Richtung ... verschobenen Cosinus...



f(x) ...

...ervall [-4π ;4π] rechnerisch bestätigt werden.

...chen Sie sich den Lösungsweg auf der folg... Seite.

Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung; alle Summanden ohne x nach rechts bringen.

f(x) …
$\cos(0$ … $,25 = 0$
… $\cos(0,5x) = -0,2$ …

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren.

$0,5x = \arccos(-0,2$ … $)$
… $\approx 1,82$

Achtung:
Aufgrund der Periodizität gibt es weitere Lösungen.

Schritt 3:
Gleichung na… auflösen

$x_1 \approx 3,6$ … $\approx 1,2\pi$

Schri…
P… rech…

Periodizität: $p = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$

Weitere Nullstellen im Intervall [-4π ;4π]

$x_2 \approx -1,2\pi$
$x_3 \approx -1,2\pi + 4\pi \approx 2,8\pi \approx 8,8$
$x_4 \approx 1,2\pi - 4\pi \approx -2,8\pi \approx -8,8$

Schri…
…iter… Lösungen berechn… die Funktion i… g verschoben i… haben hier jeweils drei a… nderfolgende Nullstellen nicht den gleichen Abstand (vgl. Abb. Bsp. 2). Aus dem Funktionsterm erkennt man, dass die Cosinusfunktion nicht in x-Richtung verschoben ist. Damit liegt, aus Symmetriegründen, zu $x_1 = 1,2\pi$ eine zweite Nullstelle bei … $1,2\pi$. Die weiteren N… Grund d… Nul…

Information 9.4

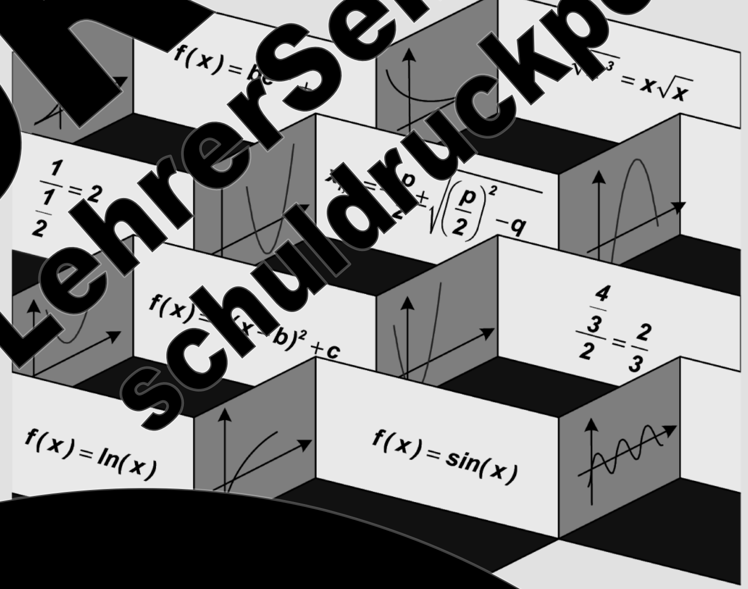
Wie Sie sicher erka… ometrischen Gleichungen de… die Umkehrfunktion… weitere Lösungen müssen ggf. … Überlegungen erfolgen, die … mmetrieeigenschaften, Streckung, … und Verschieb… ktionen voraussetzen.

Erg… ungen: ____________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel …

Exponential- und Logarithmusfunktionen

02-033-279

Gesamtw... ...zu Algebra und Funktionen ... ...iert erlernen
(Best...
...orbehalten. ...ghts reserved.

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 10: Exponential- und Logarithmusfunktionen

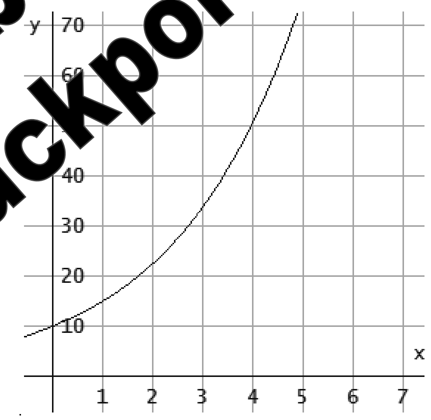
Da viele Zu- und Abnahmeprozesse in Natur und Technik nicht linea... ...er quad... ...ern exponentiell zu- und abnehmen, spielen Funktionen, die diese Proz... ...chreib... ...der angewandten Mathematik eine zentrale Rolle. Beispielhaft sind hier ...ich... ...esse, wie die Zunahme einer Population, die Abnahme der Konzentration eines Me... ...mente... ...lkohol im Blut oder auch die Abnahme der Menge eines radioaktiven Stoffes. In ... beide... ...genden Aufgaben wird jeweils an einem Beispiel die Herleitung einer Funktionsgleic... ...ng für ... Wa... ...tums- und Abnahmeprozess erarbeitet.

Aufgabe 10.1

Exponentielles Wachstum

Durch den weltweiten Handel mit Pf... ...zen ... ...den a... ...mmer w... ...Pflanzenscha... ...in Regionen eingeschleppt, in denen ein Sch... ...keine ... Fress... ...hat und sich u... ...ndert ausbreiten kann. Ein solcher Schädling w... ...ent... ...achdem er sich ... ...r Fläche v... 1... km² ausgebreitet hat. Um das Ausbreitungsverha... ...en zu können, ... die Ausbre... ...sfläche monatlich neu vermessen. Die Mess... ...erden in eine... ...abelle regis... ...und in ein... ...iagram dargestellt.

Zeit t in Monate...	F... ...in km²
0	... = 10
...	A... ...5
...	$A_2 = 22,5$
...	$A_3 = 33,7$
4	A... ...0,625
5	A...
6	$A_6 =$



a) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$\frac{A_1}{A_0} = \frac{15}{10...} = ...$ $\frac{A_3}{A_2} = \frac{33,7}{22,5} = \_\_\_\_$ $\frac{A_4}{A_3} = \frac{50,625}{33,7} = \_\_\_\_$

Information:
Es liegt **exponentielles W...** ...r **Quotient** $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ **von zwei aufeinander folgenden Messwe...** ...nd **größer** als **1** ist.

b) Überprüfen ... ...esswerte, dass dieser Wach... ...s mit der Funktion $f(t) = 1...$ ...ermitteln Sie mithilfe der Funkti... ...ße der Fläche na...

...ion:
...riable x oder hier t steht **im ...onenten**. Daher stammt auch der ...e **Exponentialfunktion**.

$f(5) = 10 \cdot 1,5^{\_\_} = \_\_\_\_$

$f(... = ...0 \cdot 1,5^{\_\_} = \_\_\_\_$

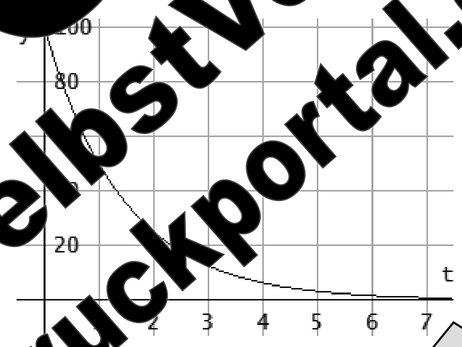
Aufgabe 10.2

Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse

Radioaktives Jod 131 entsteht in Kernkraftwerken und kann bei Reaktor… die … gelangen. Nach dem Supergau in Tschernobyl wurden in einigen Gebiete… D…land die Böden mit diesem radioaktiven Jod so stark belastet, dass beispielsweise fri…es Ge… verkauft werden durfte und Sandkästen auf Spielplätzen für die Kinder gesperrt w… Rad…ves Jod hat die Eigenschaft, dass nach etwa einer Woche jeweils die Hälfte des St… zerfa… ist, d.h. dass sich das Jod in das Edelgas Xenon umgewandelt hat.

a) Ergänzen Sie die Wertetabelle für eine Ausga… m… 100 kg radioakti… Jod 131 und überprüfen Sie die Richtigkeit ihrer Werte an… des Graph…

Zeit t in Wochen	Menge m in k…
0	$m_0 = 100$
1	$m_1 =$
2	=
3	
4	m_4
	$_5 =$
6	$_6 =$



Ergänzende Info:
Der Graph dieser Exponentialfunktion nähert sich der x-Achse nur an. Die Funktionswerte können den Wert 0 nicht annehmen und auch nicht negativ werden.

b) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$\frac{m_1}{m_0} =$ ______ … = ______ = ______ $\frac{m_6}{m_5} =$ ______ = ______

…en:
Es liegt eine **exponentielle Abnahme** vor, da d… **von zwei aufeinanderfolgenden Messewerten konstant** ist un… nd **1** liegt.

c) Überprüfen Si… werten, dass dieser Abnahmep… er Funktion $f(t) = 100$… gen Sie mithilfe der Funktion f(t), d… Wochen von der urs… weniger als 30g, nur noch weniger als… Ausg…handen sin… d zumindest durch Jod keine erhebliche … für die Be…hr gegeben war. (Nach dieser Zeit wurden auch die Spielplätze … wieder fr…

… $0{,}5^{12} =$ ______

Aufgabe 10.3

Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem Wa…stum

Die drei Abbildungen zeigen im gleichen Ausschnitt des Koordinate…ste… …ispielhaft den Verlauf von Funktionen, die im ersten Quadranten linear, quadratis… und ex…en…gen. Vergleichen Sie rein qualitativ anhand der drei folgenden Abbildungen das …, qua…che und exponentielle Wachstum.

f(x) = 2x   f(x) = …   f… = 2^x

In…te… [0;2], a… bei ______ …on x ist das Wachstum, also der Zuwachs der F…ions… …llen drei Funktionen in gro… …bschätzung ______.

Be…tet man jedoch die F…ktionswerte b…spielsweise an der Stelle x = 8, so erkennt man, dass der … bei der ______ F…k…n am kleinsten und bei der ______ am gr…ßten ist.

Anmerkung:
Tatsächlich wächst eine Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion.

Aufgabe 10.4

Expon…

… …sammenhänge und Eigenschaften von …ponentialfunktionen der Form f(x) … haben, kommen nun …tungen zur Umkehrfunktion bei diesem Funkti… …issen bereits, dass man …ispielsweise bei Gleichungen der Form $x^2 = 9$ die Umke… …den muss, um die Gleichung nach x aufzulösen. (Vgl. Aufgabe 8.1). Überträgt man diese … eine Gleichung der Form $a \cdot b^x = c$, stellt sich die Frage, mit welcher Umkehrfunktion man … g nach x auflösen kann, also wie man das x … nten herausbekommt.

Diese Pr… der beiden Funktionen f(x) = 10… ^{x} bearbeitet werden.

…formation:
e wird als **Eulersche Zahl** bezeichnet. Man kann den Zahle… …gen, indem man auf dem Taschenrechner die Taste e^x verwendet …en Wert 1 eingibt. Man erhält: e = 2,71..
Die Funktion $f(x) = e^x$ nimmt in de… …ten Mathematik …alen Stellenwert ein und wird aus d… …hwerpunktmäßi…

a) Die Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ und ihre Umkehrfunktion

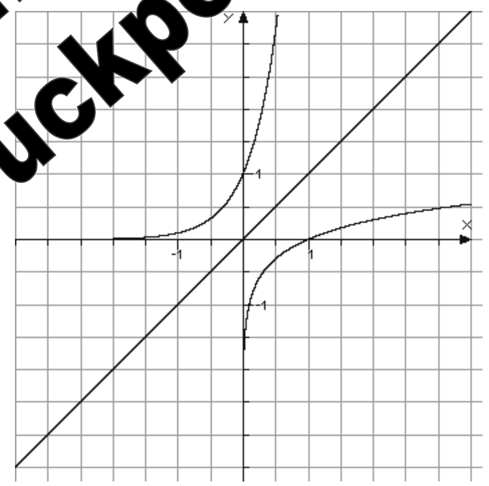
i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von links [illegible]h rechts [illegible] in [illegible]htung „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen Sie d[illegible]ktionst[illegible] richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit f(x) beschrifte[illegible]

ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Tast[illegible] mit de[illegible] a[illegible]echten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte erzeugen [illegible]n. No[illegible] Sie eine Bezeichnung für die erfolgte Rechenoperation unterhalb der Wertetabelle a[illegible]feil, d[illegible] von rechts nach links zeigt, und geben Sie den Funktionsterm der Umke[illegible]

Potenzieren

Argument der Funktion	**Funktions[illegible] der Fun[illegible]on**
x	[illegible]) = 10
–1,5	
–1	
–0,5	
0[illegible]	
0[illegible]	
0,5	
[illegible]	**x**
Funktionswert der Umkehrfunktion	**Argument der Umkehrfunktion**

Erinnerung: Zu ein[illegible] Funktion f(x) er[illegible] man die zu[illegible]örige [illegible]mke[illegible]nktion f[illegible](x) [illegible]dem man d[illegible] Funktion [illegible] der 1. W[illegible]halbierende[illegible]n [illegible]gelt. (Vgl. Kapitel [illegible] Aufgabe 8.3)



[illegible]gabenteile i) und ii) richtig bearbe[illegible] erkennen, dass man die [illegible]g auf dem Taschenrechner verwenden muss, u[illegible] Spalte der Wertetabelle [illegible] Werte der linken Spalte zu erhalten. Die Bezeichnung „log[illegible] für die mathematische Operation, die als **Logarithmieren** bezeichnet w[illegible]funktion zur Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ wird daher als Logarithmusfunktion zu[illegible]o $\mathbf{f^{-1}(x) = \log_{10}(x)}$, bezeichnet.

[illegible] Basis gibt an, welcher Zahlenwert [illegible] mit [illegible]potenziert wurde. Wenn 10 die Basis is[illegible]net man den Logarithmus mit einer indizierte[illegible] Gelegentlich findet man in der Literatur als [illegible] für „$\mathbf{log_{10}}$“ auch die Bezeichnung „**lg10**“ für de[illegible] dekadischen Logarith[illegible]

b) Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und ihre Umkehrfunktion

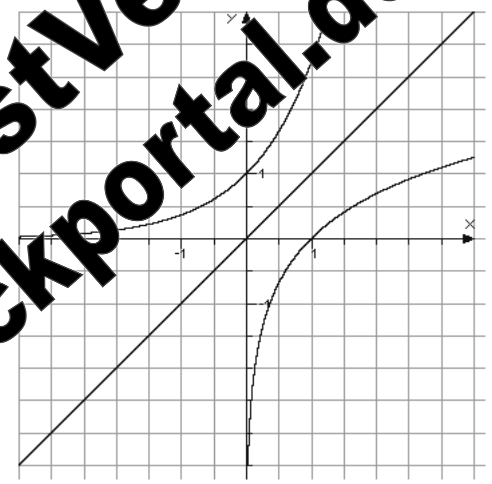
i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von li[illegible] nach [illegible]ts, al[illegible] Richtung „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordne[illegible] Funk[illegible] dem richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit f(x) besc[illegible]

ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Taste, m[illegible] der rechten Spalte der Wertetabelle durch Logarithmieren die Werte de[illegible] Spa[illegible]eugen können, und geben Sie anhand der Bezeichnung der Taste auf dem Tasch[illegible]ne[illegible] Funktionsterm der Umkehrfunktion an.

Potenzieren

Argument der Funktion	**Funktionswert [illegible]**
x	[illegible](x)
–1,5	
–1	
–0,5	
[illegible]	
[illegible]	
0,5	
[illegible]	
[illegible](x) =	**x**
[illegible]ktionswert der [illegible]kehrfunkt[illegible]	**Argument [illegible] Umkehr[illegible]**

Logarithmieren



Falls Sie die Aufgabenteile i) und ii) richtig bearbeitet haben, konnten Sie erkennen, dass man die Taste $\boxed{\ln}$ [illegible] muss, um aus der rechten Spalte der Wertetabelle die W[illegible] zur Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die

Da der Exponentialfunkti[illegible] außerordentliche Bedeutung zukommt, und der Logarithm[illegible]h als **„natürlicher Logarithmus“** oder „**Logarithmu**[illegible]eichnet wird, wurde vereinbart, dass man für „$\mathbf{log_e}$“ die A[illegible]erwendet.

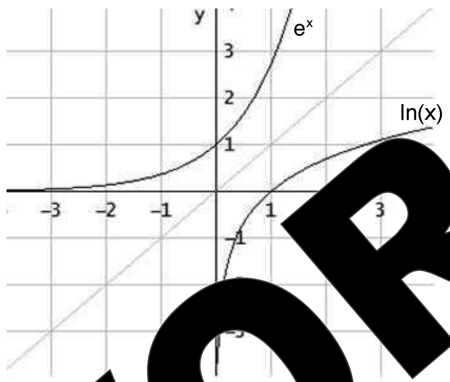
Aufgabe 1[illegible]

Begr[illegible] und $e^{\ln x} = x$ (Vgl. Kapitel 8 Aufgabe [illegible]

Information 10.1

Regeln zum Umgang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen speziell zu sis e

Da Exponentialfunktionen zur Basis e, wie wir noch sehen werden, beisp ise hin er Differenzial- und Integralrechnung günstige Eigenschaften haben, spielt lle Exponential-funktion, auch einfach **e-Funktion** genannt, in Wissenschaft und Technik he obene Rolle. Daher beziehen sich die folgenden Regeln insbesondere auf die ktione e^x und f(x) = ln(x). Beweise für die Regeln können in der Fachliteratur nachgelesen w n.

Wichtige nswe		
	$= e^x$ $f(0) = e^0 =$___	$f(x) = \ln(x)$ $f(1) = \ln(1)$___ $f(e) = \ln(e) =$___ $f(0) = \ln(0) =$___
Merke:	$e^0 = 1$ $e^1 = e$	$\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$

Zusammenhang Funktion und Umkehrfunktion	
	$e^{\ln(x)} = x$

g der Regeln be l und Logarithmengleichungen zur Ba	
$e^x = a$ $\ln(e^x) = \ln(a)$ $x = \ln(a)$	a

nformungen bei Logarithmen		
ln(a)	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$	ln n(b)

Aufgabe 10.6

Umrechnen einer Exponentialfunktion mit einer beliebigen Basis b in ei xpone lfunktion zur Basis e

In Naturwissenschaft und Technik ist es üblich, exponentielle Zusa mithilfe von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ so umzuformen dass m ei on zur Basis e erhält. Begründen Sie den Ansatz (1) und erläutern Sie die Umfor sch

Erinnerung: Exponentialfu mit der Basis e den der Regel als **e-Fu** bezeichnet.

Aufgabenstellung: $f(x) = a \cdot b^x$ umgef en, das für f(x) einen nderten Funktionsterm der Form $f(x) =$

(1) $a \cdot e^{z(x)} = a \cdot b$ (1) ______________________

____

____

____

____

$e^{z(x)} = b^x$ (1)→(2) ______________________

(3) $\ln(e^{z(x)}) = \ln(b^x)$ (2)→(3) ______________________

____

(4) z(x)

____

____

$z(x) = x\ln(b)$ (4)→(5) ______________________

(6) $f(x) = a \cdot e^{x\ln(b)}$ (5)→(6) ______________________

____

n den folgenden Zusammenhang ein.

tialfunktion mit beliebiger u einer e-Funktion umformen.:	$f(x) = a$	$f(x) = a \cdot e^{x\ln(b)}$

Übungen

Ü10.1

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne de… …chenre…** verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die … Information 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel: $e^{-\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln(a)}} = \frac{1}{e^{\ln(a)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

Anwe… des Zusamme…gs zwische… …nktion und …hrfunktion: *„e… d ln …eißen sich …egenseitig we…“*

a) $e^{\ln(2)}$ = ____

b) $e^{\ln(a)}$ = ____

c) $e^{\ln(1)}$ = ____

d) $e^{\ln(e)}$ = ____

e) $e^{-\ln…}$ = ____

f) ____

g) $e^{2\ln(3)}$ = ____

h) $e^{3\ln(e)}$ = ____

i) $e^{-2\ln(4)}$ = ____

j) ____

k) = ____

l) $e^{\frac{1}{2}\ln(e)}$ = ____

m) $e^{-\frac{1}{2}\ln(1)}$ = ____

n) $e^{-\ln(\frac{1}{3})}$ = ____

Lös… …sortierter Reihenfolge:

1, … $\frac{…}{6}$, e, e^3, $\sqrt{e}$, a, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ungültiger A…

Ü10.2

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne den …enrec…** zu verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Rege… Info…tion 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\ln(e) = -\frac{1}{3}$

a) $\ln(e)$ = ____

b) $\ln(e^2)$ = ____

c) $\ln(e^a)$ = ____

d) $\ln(1)$ = ____

e) $\ln(e^0)$ = ____

f) $\ln(e^{-4})$ = ____

g) $\ln(e^{-2})$ = ____

h) $\ln(e^{-a})$ = ____

i) ln(e… = ____

j) … $e^{\frac{1}{2}}$) = ____

k) …) = ____

l) $\ln(\sqrt{e})$ = ____

m) $\ln(\sqrt{e^k})$ = ____

n) $\ln\left(\frac{1}{…}\right)$ = ____

o) ____

p) … $\sqrt{e}$) = ____

q) $\ln\left(-\frac{1}{e}\right)$ = ____

r) $\ln\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ = ____

s) ____

…n unsortierter Reihenfolge:

…r Ausdruck, 0, 0, 1, 1, –1, –1, 2, –2, –2, –… $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\ln 2 - …$

Aufgabe 10.7

Lösen von Exponentialgleichungen zur Basis e

Wie bei Potenzgleichungen (vgl. im Kapitel 6) gibt es auch bei der Lösung entialgleichungen unterschiedliche Lösungsverfahren. Einige häufig auftretende Ver hren w en mplarisch jeweils an einem Beispiel vorgestellt. Es handelt sich hierbei led um L vorschläge, da meist auch alternative Vorgehensweisen möglich sind. Erläutern Sie für den spielen vorgestellten Lösungswege die von Zeile zu Zeile erfolgten Umformung

Beispiel 1:

Die Lösungsvariabele kommt nur in einem e entiel Term vor

Form: $e^{ax+b} = b$

(1) $3e^{2x+1}-6=0$

(2) $3e^{2x+1}=6$

(3) e^{2x+1}

(4) $\ln(e^{2x}$ $\ln(2)$

(5) $x +$ (2)

(6) $2x =$

$x = \frac{\ln(2)-1}{2} \approx -0$

((2): ____________________

(2)→(3 ____________________

(3)→(4): ____________________

(4)→(5 ____________________

)→(6) : ____________________

(6)→): ____________________

Beispiel 2:

Die Lösun l rationalen Term der Gleichung.

In rm von Glei r exponentielle Teil vom en Faktorisieren getrennt werden k Umformungen und gen ein Summand mit einem exponentiellen u der Summand der **x^n** übrig, kann diese Gleichung algebraisch **nicht** gelös uss man dann mit n Näherungsverfahren oder zeichnerischen Methoden arbeiten.

Algebraisch **ni**
Exponential

$e^x - x$

In

Die Anwendung von ln auf beiden Seiten ng führt dazu, dass das x nun nicht mehr im E von e erscheint, dafür aber im Argument de t kann die Gleichung ni nach x aufgelöst w

Lösung durch Faktorisieren

(1) $xe^x + 4x = 0$

(2) $x(e^x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

(3) $e^x + 4 = 0$

(4) $e^x = -4 \Rightarrow$ keine weitere Lösung

(1)→(2): ____________________

(2)→(3): ____________________

(3)→(4): ____________________

____

Beispiel 3:

Die Lösungsvaria ko in m n expon llen Summan en vor, ein rationaler Term fehlt

Form: $= 0$

e^2 $e^{-x} = 0$

(3 $e^{3x} = 4$

$\ln(e^{3x}) = \ln(4)$

(5) $3x = \ln(4$

(6) $x = \frac{\ln(4)}{3} \approx 0{,}46$

(1) (2): ____________________

→(3): ____________________

(3)→(4 ____________________

→(5): ____________________

(5)→(6): ____________________

rgleichungen nie durch x dividieren darf, da x Im Gegensatz dazu darf m gleichungen durch den Faktor, der x enthält, nämlich e n **e^{ax+b}** nicht Null wird.

Form: $ae^{bx} + ce^{dx}$

(1) e^3

(2

)→(2): ____________________

(2)→(3): ____________________

____

Ergänzung zu Beispiel 3:

Man kann diese Gleichung auch lösen, indem man den exponentiellen Teil ausklamm... Dies... aufwendigere Lösungsvariante ist bei Exponentialgleichungen jedoch me... notwe...

(1) $e^{3x} - 3e^{2x} = 0$
(2) $e^{2x}(e^{x} - 3) = 0$

(3) $(e^{x} - 3) = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$
(4) $e^{x} = 3 \quad \Rightarrow$ Widerspruch
(5) $\ln(e^{x}) = \ln(3)$
(6) $x = \ln(3)$

(1)→(2): ____________________
(2)→(3): ____________________
(3)→(4...: ____________________
(4)→(5...: ____________________

Beispiel 4:

Die Lösungs... mehreren ex...ntiellen Sum...n vor, der rationale Summand is... Ko...nte ...0

...rm: a... + ce... = k

(1) ...$4 - 5e^{-x} = $...
(2) e... $- 4e^{x} - 5 = 0$
(3) $(e^{x})^2 - 4e^{x} - 5 = 0$
(4) $z^2 - 4z - 5 = 0$
(5) $z_{1,2} = 2 \pm$ ...
(6) z...
... $x = \ln(-1)$
...,61 keine Lös.

(1)→(2): ____________________
(2)→(3): ____________________
(3)→(4): ____________________
(4)→(5): ____________________
(7)→(8): ____________________
(8)→(9): ____________________

Übung 10...

Lösen ... den Gleichungen nach x auf, und geben Sie das Ergebnis gg... Dezi... rundet, an.

a) ... b) $e^{2x} = 1$ c) ... $= 0$ d) ... 0
e) ... f) $3e^{4x} - 8 = 3$ h) ...

i) $e^{2x} = 4e^{x}$ j) $2e^{2x} - 4e^{x} = 0$ k) $e^{x} - e^{-x} = 0$ ... $2e^{2}$...
m) $x \cdot e^{x} - 1 = 0$ n) $e^{2x}(x^2 - 4x - 5) = 0$ o) $x^2 \cdot e^{x} + 2x \cdot e^{x} = 0$ ... $4x \cdot e$ ... $4e^{-2x} = 0$
q) $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0$ r) $2e^{2x} + 5e^{x} = 3$ s) $e^{x} = 6 -$ ... t) ... $e^{-2x} = 4$

Lösungen in unsortierter Reihenfolge:

$x = 0$	$x = 0$	$x_2 =$ ...3)	...$= 5$; $x_2 = -1$
$x = \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx 0{,}15$	$x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{11}{3}\right)$	$x_2 =$ ...$\ln(2)$	$x = -\frac{1}{3}$
$x = \ln(4)$	$x = \ln($...	...$\frac{\ln(2)}{2} \approx$ 3...	$x =$ ...$\frac{1}{3} \approx 0{,}64$
algebraisch nicht lösbar	x ... 0,...	$x_1 = 0$; x... -2	...$= 1$
$x = 0$	...(3)	...keine Lösung	$x = \frac{-\ln(2)}{3} \approx -0{,}23$

Aufga... 0.8

Lö... vo... ...mengleich...gen

Da n... in der praktische... ...endung in d... Naturwissenschaften, der Technik und auch bei den ...ftswissens...hafte... ...der Re... ...-Funktionen arbeite,t sollen auch bei der Lösung von Loga...mengleichu... hier nur Glei...ungen, die den natürlichen Logarithmus ln, also den Logarithmus zur Basis e, enthalte... ...handelt werden. Anhand von gängigen Beispielen sollen einige Lösungsverfahren vorgestellt w...en. Erläutern Sie bei den Beispielen jeweils die Umformungsschritte.

Beispiel 1:

Der log...

...m: ln(ax² + bx +c) = d

Definitionsbereich:
$D = \{x | x^2 + 2x$ ...
$= \{x | (x$ ...
$=$ ...

...tion: ...i Gleichungen, die einen ...halten, wie auch bei ... den **Definitionsbereich** bea... ...rithmus nur für die positive... IR^+ definiert ist.

...druck im Argument des ln() da... ...men. Für die Bestimmung des De... ...ichs muss man ...eine quadratische Ungleichung löse... ...l 4 Aufg.4.6).

(1) $\ln(ax^2+bx+c)=d$
(2) $e^{\ln(ax^2+bx+c)}=e^d$
(3) $ax^2+bx+c=e^d$
(4) $ax^2+bx+c-e^d=0$

(1)→(2): ______
(2)→(3): ______
(3)→(4): ______
Entstandene Gleichung mit her... ...lichen ...oden lösen, hier beispielsweise mit der ______For...

Beispiel 2:

Die Gleichung besteht aus einem Produkt mi... ...em rat...nlen und ein... ...garithmisc...en Faktor. Beide Faktoren enthalten die Lösung... ...able.

a) **Form: $ax\cdot\ln(bx+c)=0$**

Definitionsbereic...
$D=\{x|bx+c>0\}$
$=\{x| ...\frac{}{b}\}$

(1) a... $=0$
(2) ... $=0 \vee \ln(bx+c)=$ ...
$e^{\ln...}=e^0$
(4) ...$x+c=1$
(5) $x_1=0 \vee x_2=$ ...

(1)→(2) ______
______
(2)→(5) ______
______
______

b) ...sbereich:
$\{x|bx>0\}$

(1) $ax\cdot\ln(bx)=0$
(2) ax...
(3)
x...
...n zu D $x_2=\frac{}{b}$

______
______
(2)→(3): ______
______
______
______
______

Beispiel 3

Die Gleichung hat keinen konstanten, jedoch mehrere logarithmische Su... ...nden, ...elche die Lösungsvariable enthalten.

Form: ln(2 – x) + ln(x) = 0

Definitionsbereich:
$D=\{x|2-x>0 \wedge x>0\}$
$=\{x|0<x<2\}$

Beide Terme ...n() b... ...n un... D so angeben, ...beid... ...ermen kein un... ...r Au...ck ent...hen kan...

Diese Gleichung kann man a... ...edenen Wege... ...sen:

Lösungsw... ...1:

(1) ln... + ln(2 – ...) ...0
... (2 – ...) ...0
(3) e... ...)) $=1$
(4) $2x-x^2=1$
(5) x^2-2x+ ...0
(6) $x_{1,2}=1$

(1)→(2) ...Regel ______ anwenden
(2)→(3): ______
______
(3)→(4) ______
(4)→(5): ______
______
(5)→(6): ______

______
______
(1) $\ln(2-x)+\ln(x)=0$
(2) $e^{\ln(2-x)+\ln(x)}=1$
(3) $e^{\ln(2-x)}\cdot e^{\ln(x)}=1$
(4) (2...
(5)
(6)
... $x_{1,2}=1$

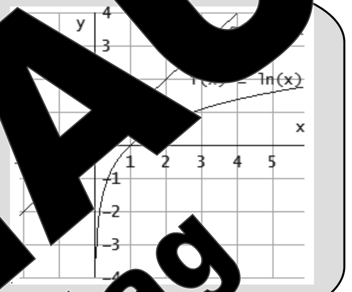
(2)→(3): Reg... ______ anwenden
(3)→(4): ______
(4)→(5): ______
(5)→(6): ______
(6)→(7): ______

Beispiel 4:

Algebraisch **nicht lösbare** Logarithmengleichung

$$\ln(x) - x = 0$$
$$\ln(x) = x$$
$$e^{\ln(x)} = e^x$$
$$x = e^x$$

Anhand der graphischen Darstellung erkennt man, dass es … Lösung gibt. (Verglei… auch … Aufgabe …)



Übung 10.4

Ermitteln Sie den Definitionsbereich … die folgenden Gleichungen nach x auf. Geben Sie das Ergebnis ggf. auf zwei De…stellen gerun… an.

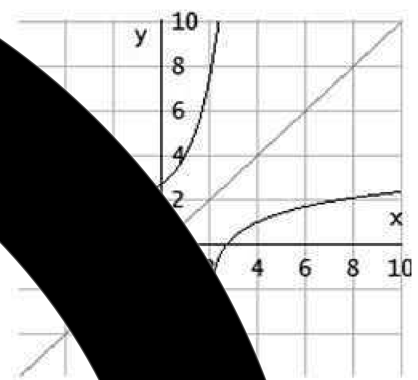
a) $\ln(x) = 3$	b) $\ln(x) = -2$	… $\ln(x) = 0$	d) $\ln(4x) = 0$
e) $\ln(e^x) = 0$	f) $\ln(x-1)$ …	g) … $= 0$	h) $5\ln(x-7) = 1$
i) $\ln(x+1)$ … $x^2-1)$ …	j) $\ln(4x)$ … $4\ln(x)$	… $+ \ln(x) = 0$	l) $\ln(x^2) + \ln(8x) = 0$

Lösunge… uns… Reihenfolge:

…	keine Lösung	… $= 1$	$x = e^{-2} \approx 0{,}14$
$x_1 = -2$; … -4	… ,5	$x = 2$	$x = e^3 \approx 20{,}09$
$x = 2$	$x = \sqrt[3]{4}$	$x = 0{,}25$	$x = \sqrt[5]{e} + 7 \approx 8{,}22$

Übung 10.5

Die A… f(… …ph der zugehörigen … (x).
… Sie die Funktionsgleichung der Umkehr… …on $f^{-1}(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von f(x) …d $f^{-1}(x)$ an.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass der y-Achsenabschnitt von f(x) und die Nullstelle von $f^{-1}(x)$ … Zahlenwert haben.



Zur Kontrolle: … wert gerundet: 2,74

Er… …ungen: ______________________________

____

Aufgabe 10.9

Verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln der e-Funktion

Sie haben die Regeln, die beim Verschieben, Stauchen und Streck… …tionen zu beachten sind, bereits bei den quadratischen Funktionen (Parabeln) und be…den trig… … Funktionen kennen gelernt und mit Sicherheit festgestellt, dass die Parameter … Fun… …eichungen weitgehend gleiche Wirkungen haben. Anhand von geeigneten Beispiele… nun …eigt werden, dass dieses Regelwerk, mit kleinen Unterschieden, auch auf Ex… …en …ertragen werden kann.

a) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ i… …ichtung

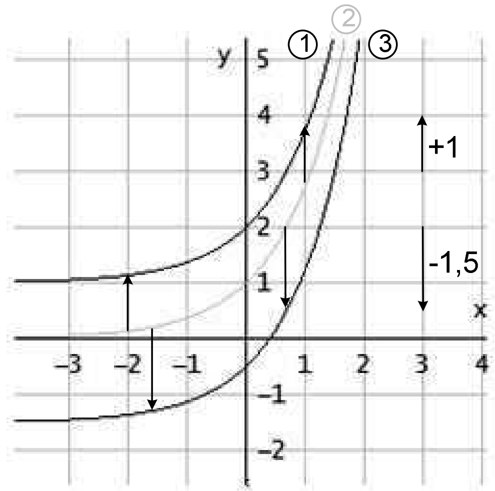
Zur Erinnerung:
$f(x) = x^2 + c$ ist eine … verschobe… …malparabel.
$f(x) =$ si… + c … eine … …tung versch… … …funktion.

We… man d… …ür Parabeln u… …igonometrische …unk…n gült… Zusammen…g auf die …unk… … e^x an, … man die Funktion … **$= f(x) + c = e^x + c$** m… …IR.

… Abbildung rechts sind die …ionen

① $h_1(x) = e^x + 1$
② $f(x) = e^x$
③ $h_2(x) = e^x - 1{,}5$

dargestellt. Er… Abbil…



…ktionsgleichung von $f(x) = e^x$ wird der … hinzugefügt, so dass die Funktion …$(x) = e^x + c$ entsteht. Für $c > 0$ wird die Funktion f(x) … und für $c < 0$ wird die Funktion f(x) nach _________ verschoben. Damit gelten für das Vers… Funktionen in y-Richtung ______________________ Regeln wie beim Verschieb… …ln oder trigonomet… Richtung.

b) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in x-Richtung

Zur Erinnerung:
$f(x) = (x - b)^2$ ist eine in x-Richtung verschobene Normalparabel.
$f(x) = \sin(x - b)$ ist eine in x-Richtung verschobene Sinus...ktion.

Wendet man den für Parabeln und trigonometri... Funktionen gültigen Zusammenhang auf die e-Funktion $f(x) = e^x$ an, so erhält man die Fu...n **$h(x) = e^{x-b}$** mit $b\in$ IR. In der Abbildung recht... die Funktionen

① $h_1(x) = e^{x-2}$
② $f(x) = e^x$
③ $h_2(x) = e^{x+\ln(10)}$

dargestellt. Ergänzen ... Abbildung die folgenden ...

Im ... der F...ionsgleichung von $f(x) = e^x$ ... Parameter b mit $b\in$ IR hinzugefügt, sodas... $(x) = e^{x-b}$ ...tsteht. Für b > ... die Funktion $f(x) = e^x$ nach _________ und für ...0 w... die Funktion $f(x)$ ... nach _______ ...erschoben. Damit gelten für das Verschieben von e-F... in x-Richtung ...nzipiell d... Regeln wie beim Verschieben von __________________ oder ____ in x-Richtung.
Man muss jedoch die folgende Bes...derheit beachten.

Besonderheit b... ...n in x-Richtung!

Erlä... ...he Wirkung ein Vorfaktor vor dem ... Kasten vervollständigen.

$\cdot e^{-b}$

$(x) = \frac{1}{e^b}e^x$

$f(x) = k\cdot e^x$ mit k...

Bei der e-Funktion be... **$\in$ IR$^+$ vor dem Term e^x eine Verschiebu... ...ung,** während bei den Parabeln u... ...chen Funktionen durch einen entspre... ...ktor ... Streckung in ___ -Richtung e...

Steller... ...n der Schreibweise $h(x) = k\cdot e^x$ dar.

h... ____

...(10) = ____

c) Spiegeln von e-Funktionen an einer Geraden y = c

Wie Sie in Aufgabenteil b) erkannt haben, bewirkt ein positiver re... Vorfa... ...or d... Funktionsterm e^x eine Verschiebung der Funktion in x-Richtung ...un ... werden, wie sich ein negatives Vorzeichen vor diesem Vorfaktor auswirkt.

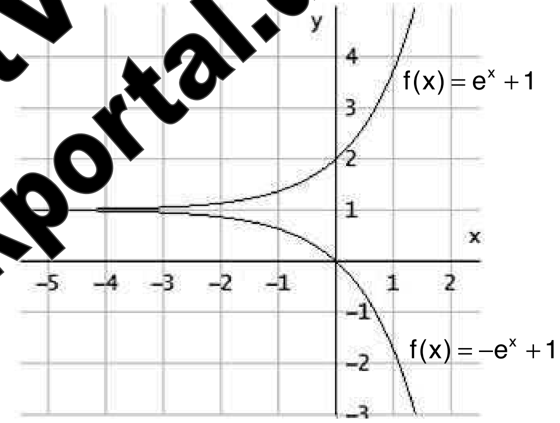
Begründen Sie, warum bei der folgenden Umformung d... ...nusze... vor dem Faktor $k\in$ IR$^+$ nicht in den Exponenten der Funktion übernommen wer...den ka...

$f(x) = -ke^x = -e^{\ln(k)}e^x = -e^{x+\ln(k)}$ mit $k\in$ IR$^+$

____

____

Erläutern Sie anhand der A... ...s die Wirkung des Minusz...ns.



____

____

____

____

____

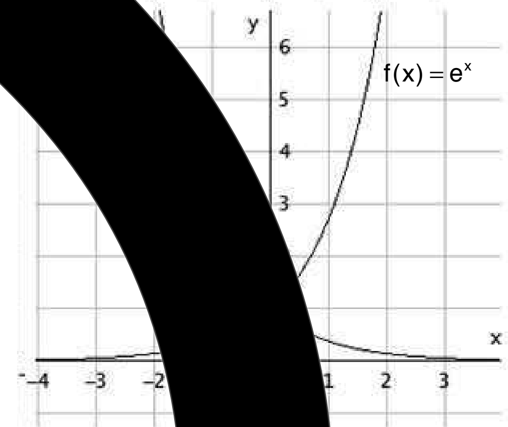
d) Spiegeln an der y-Achse ...ie Strecken und Stauchen bei e-Funktionen

Wie Sie unter Aufgabenteil b) erkannt haben, können die Eigenschaften hinsichtlich des Streckens und Stauchens v... ...d trigonometrischen Funktionen nicht direkt auf die e-Funktionen übertrag...

... Zusammenhänge beim Spiegeln an der ...

...egeln an der y-Achse

Durch ein negatives Vorzeichen im Exponent wird eine e-Funktion a... ...elt. Man muss dabei ... ...n mit einem ne... ______________ ...en kann.



Strecken und Stauchen in y-Richtung

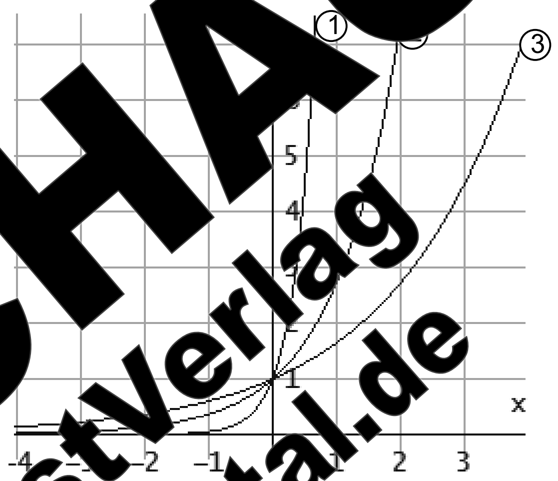
In der Abbildung rechts sind die Funktionen

① $h_1(x) = e^{3x} = \left(e^x\right)^3$

② $f(x) = e^x$

③ $h_2(x) = e^{0,5x} = \sqrt{e^x}$

dargestellt.
Ergänzen Sie in der Abbildung rechts zunächst die Funktionen



④ $h_3(x) = e^{-3x} = \frac{1}{e^{3x}} = \frac{1}{(e^x)^3} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^3$

⑤ $h_4(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

⑥ $h_5(x) = e^{-0,5x} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

und danach den folge... Te...

Im Exponenten der Fu... (x) ... ird der Fa... a mit $a \in IR$ h... gefügt, so dass die Funktion $h(x) = e^{ax}$ e... ch e... positiven Par... er a wird die ... ktion ________________ und ________________. ... Vorzeichenwe... l beim Param... a bewirkt eine ________________ der ... ktio... der ... hse.

...sam... nfassung der Eige... haften der ...-...nktion hinsichtlich des Streckens, Stauchens u... ...elns. Ergänzen ... die Texte in ... Sprechblasen.

Strecke... ...tauchen und Spiegeln
$|a| >$ ... →strecken in __- Richtung
$0 < |a| < 1$ →stauchen in __- Richtung
...chsel von **a** bewirkt eine ______________
...se.

$\mathbf{f(x) = e^{ax-b} + c}$ ...

Wie bei anderen ...nktionsklassen ...hiebt der ...eter **c** die ... in __-

b verschiebt die Funktion in Richtung __-Achse:
b > 0 → ver... ______
b < 0 ... ______
Ein ... ...ponentiellen Ausdruck ... ______ die ... ktion an der Geraden y = **c**, ... beachten, dass gilt: $-\mathbf{b}e^{ax}+c = -e^{ax+\ln(b)} + c$

... Übungen: ________________________________

Aufgabe 10.10

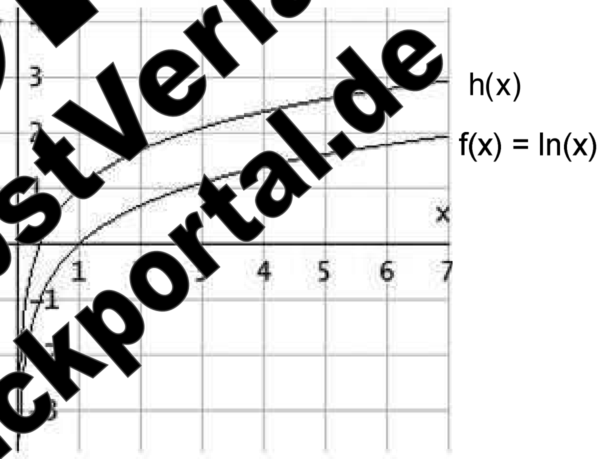
Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln der Funktion f(x) = ln(x)

Bereits gewonnene Erkenntnisse hinsichtlich des Verschiebens, St... Stauc... d Spiegelns bei Parabeln, trigonometrischen Funktionen und e-Funktionen könn... we... nd auch auf das Verhalten der Logarithmusfunktionen übertragen werden. W... bei e-... kti... ssen allerdings einige Besonderheiten beachtet werden. Zur Veranschaulichung d... sam... änge sind für $x \in IR^+$ in den Abbildungen jeweils die Funktion f(x) = ln(x) und eine weitere ... rithm... unktion gegeben.

a) Verschieben von f(x) = ln(x) in y-Richtung

Verdeutlichen Sie sich die folgende Re... ung:

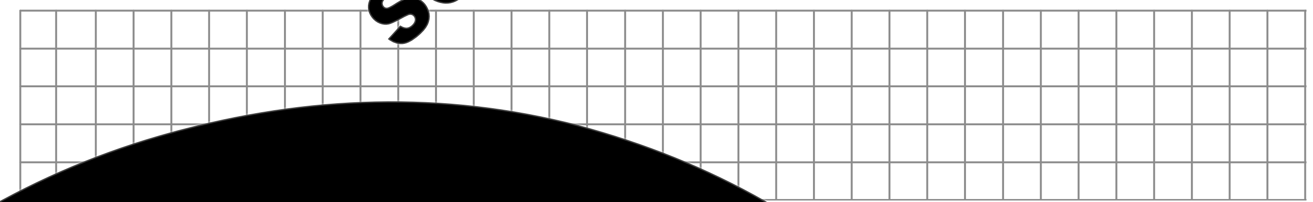
$h(x) = f(x) + c$ mit $c \in IR$
$h(x) = \ln(x) + c$
$h(x) = \ln(x) + \ln(e^c)$
$h(x) = \ln(e^c \cdot x)$
$h(x) = \ln(k \cdot x)$ mit k...



Ermitteln Sie ... Abl... aus der Abbildung die Funktionsgle... ...on h(x) in ... Form f(... ...) + c ...ie $h(x) = \ln(k$ ...

...(x) ______________ = ______________

u... ergänzen Sie die ...nktion $h_2(x) = \ln$ ... x) ... Abbildung. Formen Sie dazu ... Funktionsterm in geeigneter W... um.

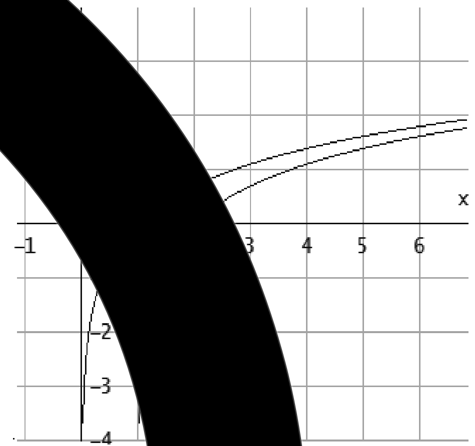


... (x) = ln(x) in x-...

...eutlichen Sie sich die folgende Rechnung, un... ermitteln Sie die Funktionsgleichung von h(x) durch Ablesen aus der Abbildung rechts. Beschriften Sie zuvor die abgebildeten Graphen mit f(x) und h(x).

h(x) = f(x – ...
h(x) = ...

E...

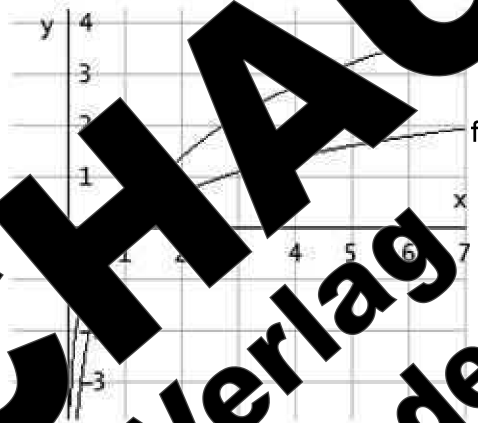


______) = __________ für x > ___

...en Sie in der Abbildung den Graph der Funkt... ... ln(x + 1) für x >–1.

c) Strecken und Stauchen der Funktion f(x) = ln(x) in y-Richtung

Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und ermitteln Sie die Funktionsgleichung von $h_1(x)$ durch Ablesen aus der Abbildung rechts.



$h(x) = a\,f(x)$ für $a \in \mathbb{R}^+$
$h(x) = a\ln(x)$
$h(x) = \ln(x^a)$

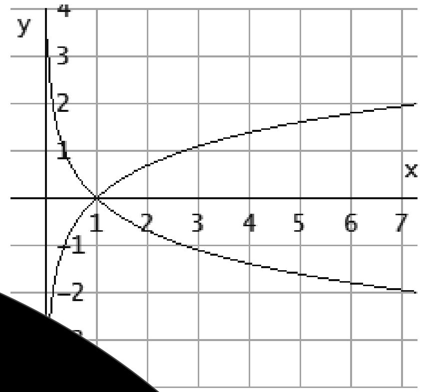
Funktionsgleichung $h_1(x)$ in beiden Darstellungsarten:

$h_1(x) =$ ___________ = ___________

Ergänzen Sie in der Abbildung de[…] Grap[…] Funktion $h_2(x) = \ln(\sqrt{x})$. Formen […] den Funktionsterm in ge[…] Weise um.

d) Spieg[…] der […]on f(x) = […] bzw. h(x) = a f(x) an der x-Achse

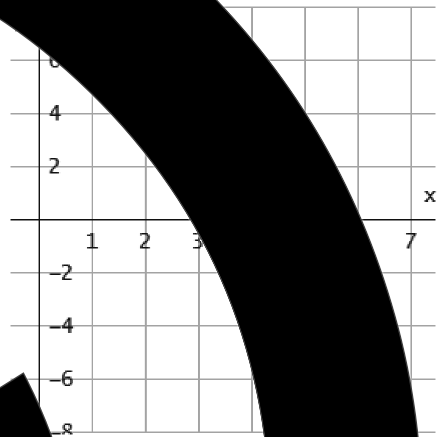
[…]en Sie sich die [...]nde Rechnung und besc[…] Sie die Gr[…]hen in der Abbildung mit f(x) und h(x).



$h(x) = -f(x)$

$h(x) = -\ln(x) = \ln(x^{-1}) = \ln(\frac{1}{…})$

[…]eren Sie die Funktionen
$h_1(x) = \ln(x^3)$ und $h_2(x) = \ln(x^{-3})$
im Koordinatensystem rechts. Ergänzen Sie den anschließenden Satz. […] mit $a \in \mathbb{R}$, in der Funktion h(x) = […]



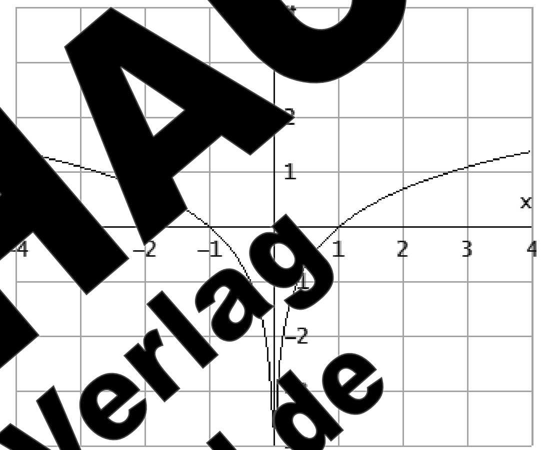
$|a| > 1$ ___________

$0 < |a|$ ___________

Ei[…]wechsel vor dem Betrag von a bewirkt […]ung an der ___-Achse.

e) Spiegeln der Funktion f(x) = ln(x) an der y-Achse

Da der Logarithmus für $x \le 0$ nicht definiert ist, arbeitet man bei der Logarithmusfunktion oft mit Beträgen im Argument der Logarithmusfunktion.



Betragszeichen kann man weglassen, wenn man den Ausdruck, der in Betragsstrichen steht, einmal mit einem positiven und einmal mit einem negativen Vorzeichen versieht. (Vgl. Aufgab[…]

$f(x) = f(|x|) = \ln(|x|) \Rightarrow f(x) = …$ für x […] $(-x)$ […] $x < 0$

Ergänzen Sie in der A[…]bildung […] Gra[…] zur Funktion $h(x) = \ln(|x| - …)$

$h(x) = \ln(|x| - …)$ […]n(x) ______ für ______
______ für ______

f) […]sa[…]fas[…]g der Eige[…]schaften de[…] L[…]garithmusfunktion hinsichtlich des Streckens, […]uch[…] Spiege[…] Ergänzen Sie […] Texte in den Sprechblasen.

Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ streckt bzw. staucht die Funktion.
$|a| > 1$ **strecken […]___-Richtung**
$0 < |a| < 1$ **stauchen in ___-Richtung**
[…]r c = 0 wird die […]
[…]ten Sie dass gilt: $-a\ln(|x|) = …$

$h(x) = \mathbf{a}\ln(|x - \mathbf{b}|) + \mathbf{c} = \ln(|x - …$

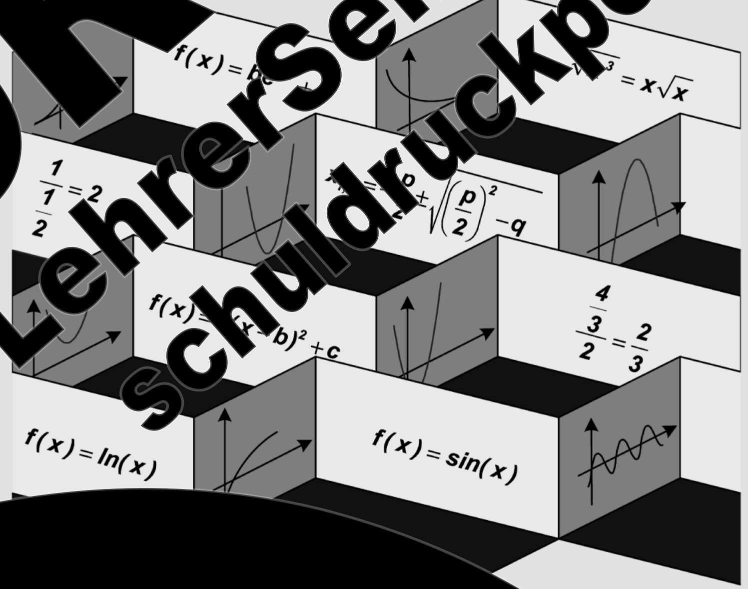
[…]on in […]
→ **verschieben nach** _________
→ **verschieben nach** _________

Wie bei ande[…]klassen verschiebt der […]mit $c \in \mathbb{R}$ die Funktion in __-R[…]
Beachten Sie, das[…] bei Logarithmusfunktionen gilt:
[…]k(x – b)) = ln(x – […] ln(x – b) + **c**

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend…s zu Alge…a und F…kt…nen

selb…organ…iert erlernen



Kapitel

Vertiefende Betrachtun…
…gsungleichungen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 11: Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichun...en

Während in Kapitel 4 die Betragsungleichungen nur gestreift wurden, sollen h... nun ...führlichere Betrachtungen angestellt werden, wobei ein Schwerpunkt in der g...chen D... ...der Lösungsmenge anhand von Diagrammen liegt.

Aufgabe 11.1

Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betra... ...uftrit...

a) Verdeutlichen Sie sich die Vorgehenswei... ...im L... anhan... ...er drei B...sp... und verfahren Sie bei den folgenden Aufgabe analog daz...

Beispiel 1: Betragsungleichung $|x-2|$...

Algebraische Lösung

$|x$... ≥ 1

$-(x$...$)\geq 1$ ∨ ...$-2)\geq 1$

...$2\leq -1$ $x-2\geq 1$

...1 x...

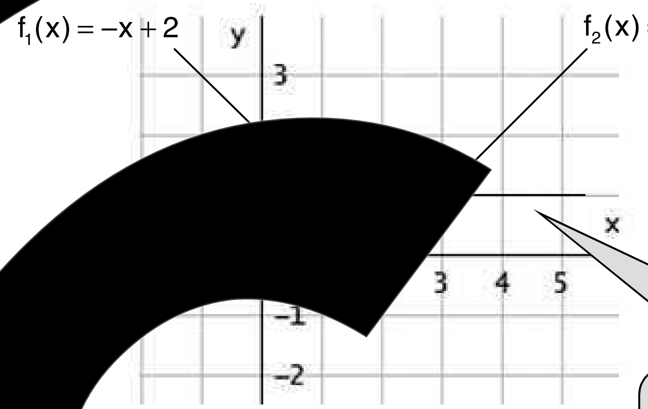
$\mathbb{L}=(-\infty;1]$...$\infty)$

Fall...terscheidu... ...m Weglassen der Betragsstriche
...enn man di... ...etragsstriche weglässt, erhält der gesam... ...m, der zwischen den Betrag...n steht einmal ein positives und einma... ...negatives Vorzeichen.
V... Kapitel 4 Aufgabe 4.3

Die ...ösungsmenge kann dann in ... ...genden Form mit Hilfe von ...ntervallen angegeben werden.

R...de Klammer:
Das Intervall ist auf dieser Seite nicht begrenzt.

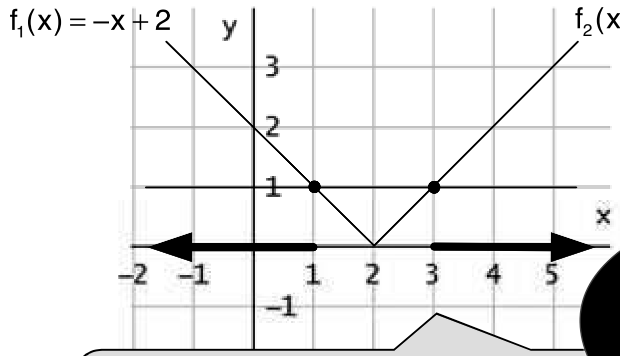
Eckige K...mer:
Das Inte...all endet mit ...w. beginnt bei 3.



Man fasst die linke Seite der Ungleichung als lineare Betragsfunktion ...$(x)=|x-2|$ auf. Durch das ...assen der Betragsstriche ...n die beiden Geraden ...2 und $f_2(x)=x-2$
... werden in einem Dia... ...n ersten und zweiten Qua... ...zeichnet, denn die Funkt... ...ssen wegen des Betrags... ...iv sein.

Di... ...echte Seite der U... ...wird ...lls als Funktion, ...sst und ist hier e... ...tale ...durch A(0/1).

2. Schritt



Die Schnitt[illegible] der Ge[illegible] (x) und $f_2(x)$ mit [illegible] g bestimmen die [illegible]renzen [illegible] L[illegible]ervalle.

[illegible]sintervalle [illegible]prechen [illegible]er alge[illegible]isch ermitte[illegible] Lösung.

$IL = (-$[illegible]$\cup [3; \infty)$

Man kann nun auf der x-Achse [illegible] Bereiche markieren, für die [illegible] ilt, dass die Funktionswerte de[illegible] Geraden größer gleich 1 sin[illegible]

Beispiel 2: Bet[illegible]ungle[illegible]g $|x - [illegible]| < 2$

Aus der Betragsungleichung entstehen die Funktionen:
$f_1(x) = -(x - 1) = -x + 1$
$f_2(x) = x - 1$
und
$g(x) = 2$.

Alge[illegible]e Lösung

$|x - 1| < 2$

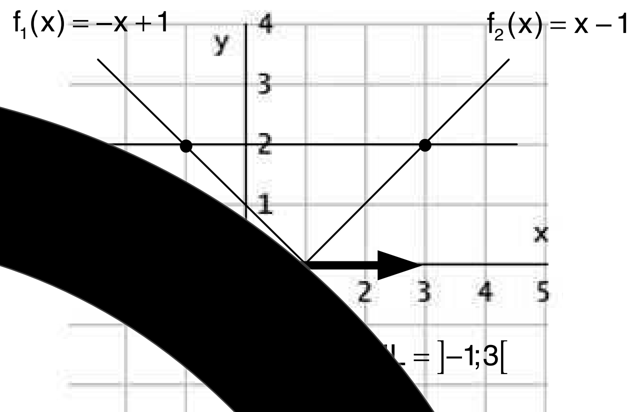
$-(x - 1) < 2$

$x - 1$[illegible]

[illegible]$=]-1;3[$

Die offenen eckigen Klammern geben an, dass –1 und 3 ni[illegible] Lö[illegible]

Graphische Lösung



$IL =]-1;3[$

Anhand der grap[illegible]ung erkennt man sofo[illegible] Lösungsmenge be[illegible]abe nur aus einem Intervall [illegible]

Beispiel 3: Betragsungleichung $|2x - 2| \le x$

Es spielt für die Vorgehensweise keine Rolle, ob auf der rechten Seite der Gleichung eine Konstante oder ein von x abhängiger Term steht.

Algebraische Lösung

$|2x - 2| \le x$

$-(2x - 2) \le x \quad \vee \quad +(2x - 2) \le x$

$2x - 2 \ge -x \quad \vee \quad 2x -$[illegible]

$3x \ge 2 \quad \vee$

$x \ge \frac{2}{3} \quad \vee \quad x \le 2$

$IL =$[illegible]

[illegible]geschl[illegible]enen eckigen K[illegible]ben an, das[illegible] sowo[illegible] als auch [illegible] Lösungsmenge d[illegible]hören.

Graph[illegible] Lös[illegible]

Wenn man aus der graphischen Lösung die Grenzen nicht exakt ablesen kann, muss man ggf. durch Berechnung der entsprechenden Schnittpunkte die Grenzen berechnen.

Berechnung der Schnittpunkte

$f_1(x) = g(x) \qquad f_2(x) = g(x)$

$-2x + 2 = x \qquad 2x - 2 = x$

[illegible]$\frac{2}{}$ $\qquad x = 2$

[illegible]b die Werte 2/3 und 2 zum [illegible]ungsintervall gehören, hängt [illegible]ab, ob in der Aufgaben[illegible] [illegible]die Relationszeichen [illegible]der $\ge$ bzw. $\le$ [illegible]erden.

Übung 1[illegible]

Er[illegible] der folgenden Betragsungleichung[illegible]t Hilfe des [illegible]nen Lösungsverfahrens.

[illegible]2 b) $|3x - 1| < 2$ [illegible]$x + 1| \le x$

[illegible]nde Übungen

Aufgabe 11.2

Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen

Bei diesen Betragsungleichungen wird ein algebraischer Lösungsweg of[illegible] ist anfällig für Rechenfehler. Daher wird hier eine Lösungsstrategie verfolgt, die über[illegible] der graphischen Vorgehensweise beruht, die schon in Aufgabe 11.1 angewendet [illegible]rde. Da[illegible] der Vorgehensweise übersichtlich dargestellt werden kann, werden d[illegible]zelne[illegible]sungsschritte aufbauend aufeinander in mehreren Diagrammen gezeigt, [illegible] Schritt für Schritt ergänzt werden.

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte bei [illegible]ittlung [illegible] Lösung und bea[illegible] Sie die anschließenden Übungsaufgaben mit dem glei[illegible] Verfahren.

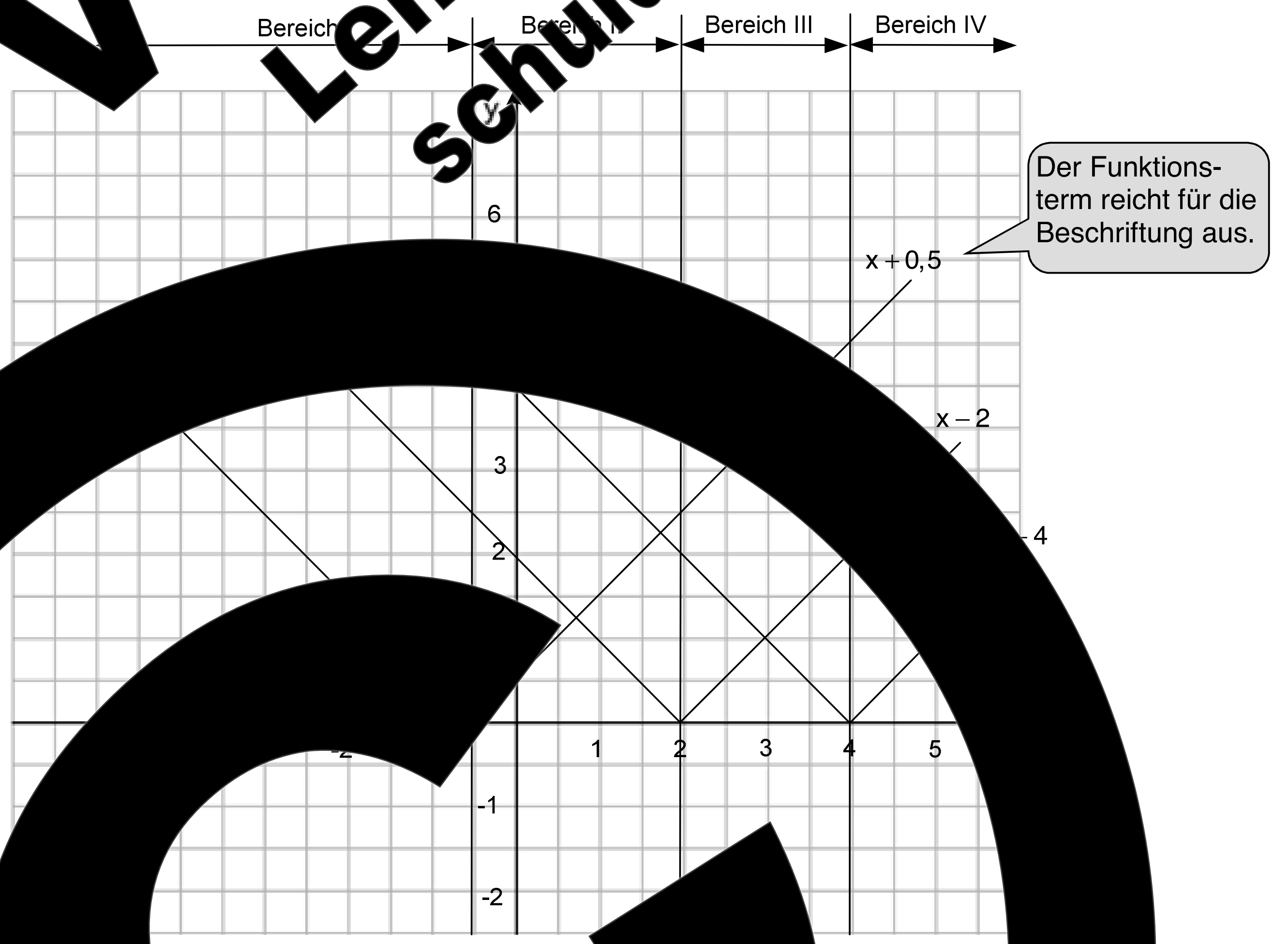
Beispiel: $|x+0{,}5|+|x-2|-|x-4|\le 2$

1. Schritt:

Entsprechend zu Aufgabe [illegible]den die [illegible] aus [illegible]ngleichung jeweils linearen Funktionen zugeordnet, [illegible] im 1. [illegible]d 2. [illegible]nten [illegible] Diese Fu[illegible]en werden in einem geeigneten Koordinaten[illegible]chnet und mit [illegible] zugehörigen [illegible]tionstermen beschriftet.

2. Schritt:

An den Stell[illegible] an dene[illegible] eingezeichne[illegible] Geraden Nu[illegible]ellen besitzen, mit Hilfe von vertikalen Gerad[illegible] das [illegible]dinat[illegible]ystem in Be[illegible] einteilen.



3. Schritt

Eine Tabelle erstellen, in der für jeden Bereich angegeben wird, welcher Fun[illegible]sterm [illegible]g ist.

Eintragen der Betragsterme aus der Betragsungleichung

Eintragen, ob Betragsterme addiert oder subtrahiert werden.

Eintrag[illegible] Fu[illegible]sterm der eingeze[illegible] Geraden in den Bereichen I, [illegible] Bereich gültig ist.

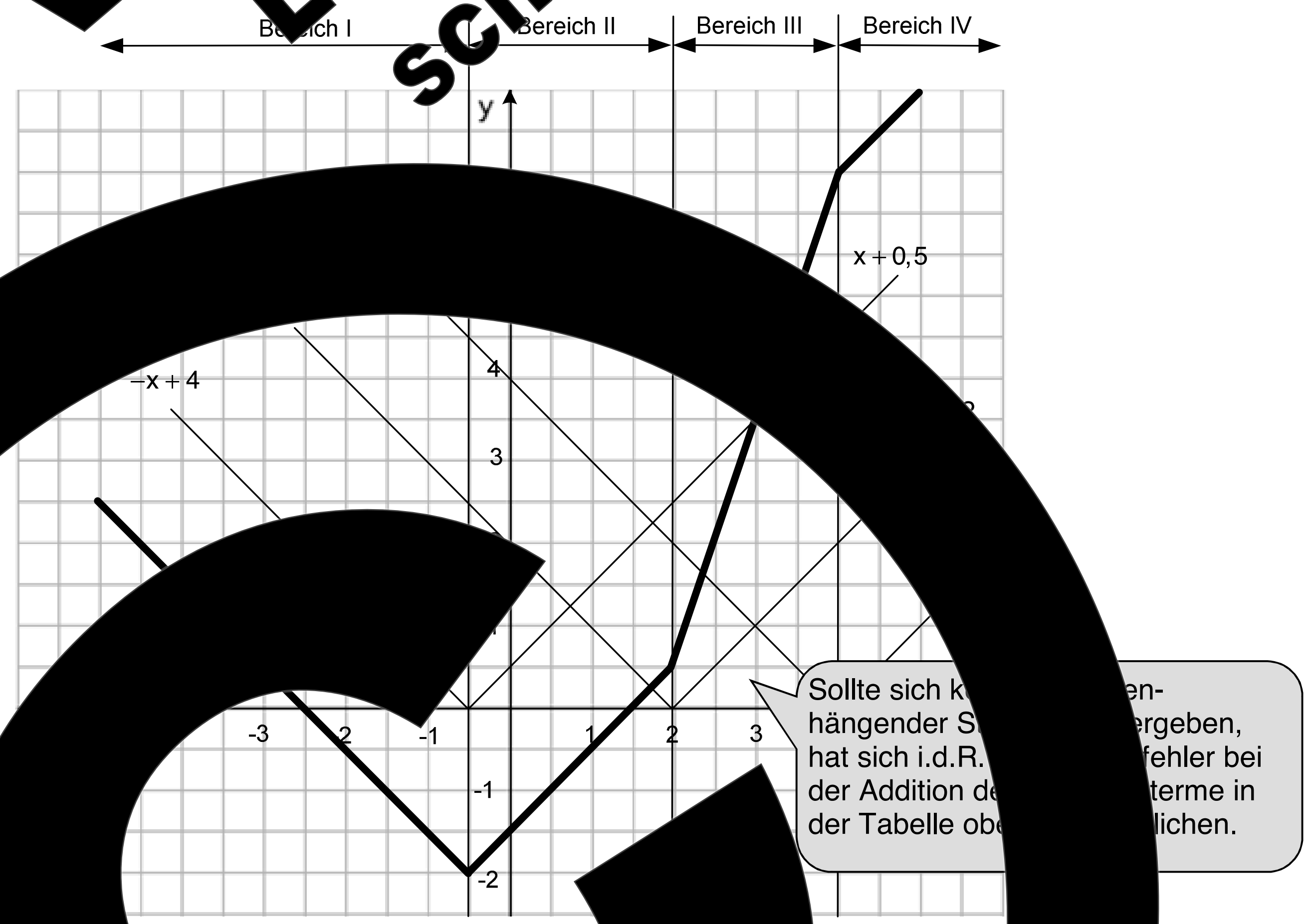
Betragsterm	Operation	I	II	III	IV
$\lvert x+0{,}5\rvert$	+	– x – 0,5	[illegible]	[illegible]0,5	x + 0,5
$\lvert x-2\rvert$	+	–x + 2	–x + 2	x – [illegible]	x – [illegible]
$\lvert x-4\rvert$	–	[illegible]	[illegible]	–x + 4	[illegible]4
	Summe:	[illegible]	x – 1,5	3x [illegible]5,5	x + 2,5

Anhand der angegebenen Operationen die Funktionsterme in jeder Spalte addieren bzw. subtrahieren.

In der u[illegible] Ze[illegible] erscheinen für jeden Be[illegible] die durch Addition bzw. Subtraktion entstande[illegible]tionsterme [illegible] zugehörigen Geraden. Diese Geraden [illegible] im n[illegible]ten Schritt abs[illegible]se in den [illegible]gen Bereichen [illegible]net. [illegible] ergibt einen zusammenhängenden Streckenzug, mit dem dann die Lös[illegible]menge der urspr[illegible]glichen Betrags[illegible]chung ermittelt werden kann.

4. [illegible]ritt

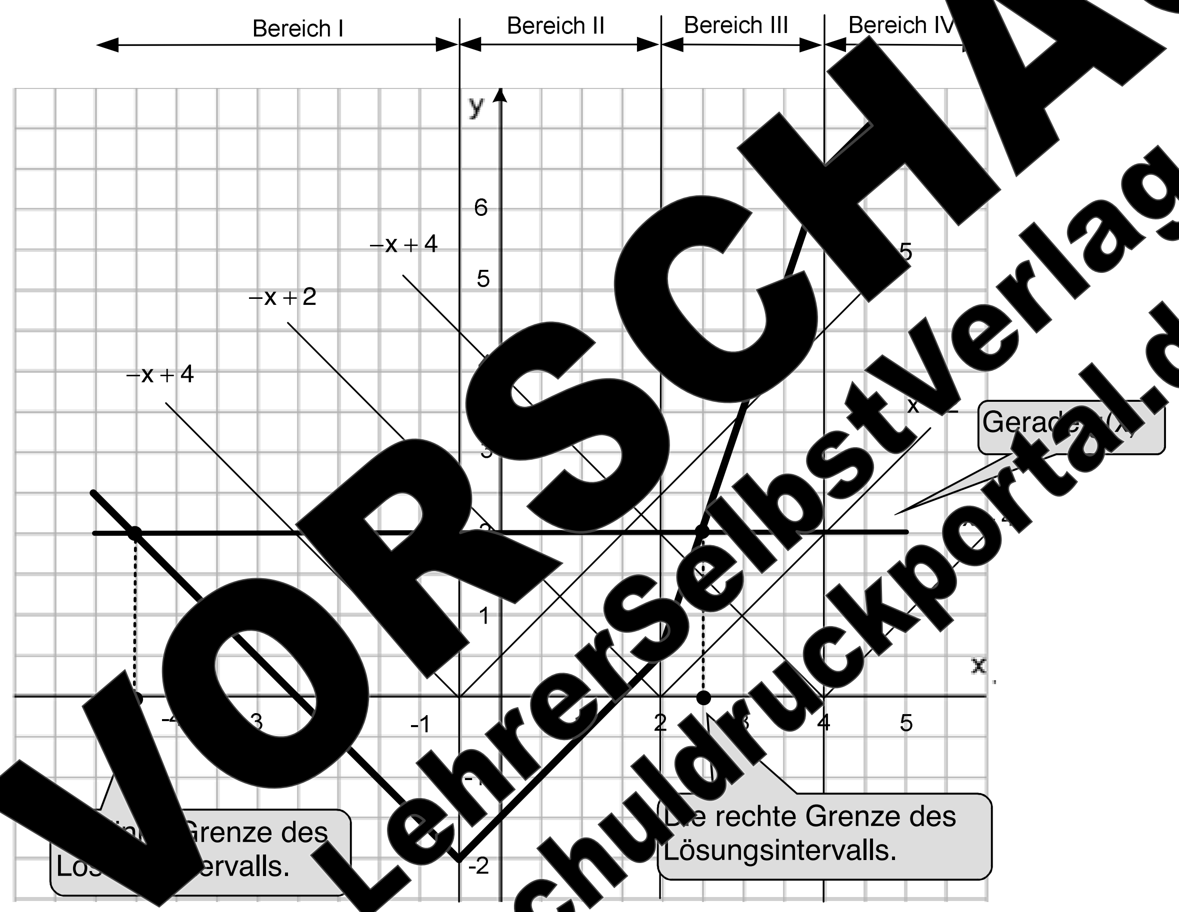
[illegible]nen des Linienz[illegible] anhand der Funktionsterme in der untersten Zeile der Tabelle von Schritt 3.



VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

5. Schritt

Einzeichnen der Geraden, die dem Term auf der rechten Seite der ursprünglichen …gsung…hung entspricht, hier also der Geraden g(x) = 2.



6. Schritt

Man ermittelt das Lösungsin… die Schnittpunkte der Geraden g(x) mit dem Streckenzug im entsprechende… …tpunkte des Streckenzugs mit der Geraden x genau auf … Lösungsintervalls auch aus der Zeich…

…Schnittpunkt von g(x) mit der dem B… Funktion f(x) = –x – 2,5

$f(x) < g(x) \Rightarrow x - 2{,}5 < 2 \Rightarrow x < 4{,}5$

…chte Grenze: Schnittpunkt von g(x) mit der dem Bereich II zugeo… f(x) = 3x – 5,5

$f(x) < \ldots < 2 \Rightarrow x < 2{,}5$

Lösungsinter…

Übung…

Ermit… ösungsintervalle der folgenden Betragsungleichungen

a) … $2| \le 5$ b) $|x-2| - |0{,}5x+1| < 1$ c) $|x-3| - |x+1$ …

E… ungen: ____________________

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen