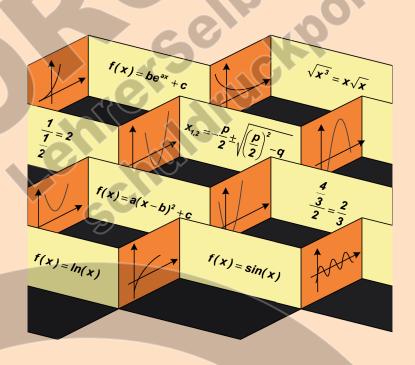
Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl



Umschlag Vorderseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen



Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichung der Sichunge	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hörren Ges	104
Kapitel 7 Ganzrational Ank then The höherek Grues	115
Kapitel 8 Die Lank	127
Kajul 9 rig metri de Funktion	135
titel 16 E nential- und Ganthmusfanktionen	145
Navitel 11 Vertiefende Betrachturg v. Betragsungleichungen	169

Gesamtw iert erlernen (Best

5*

A, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de





OR Schuldruckportal.de Cehrerschuldruckportal.de

Stand: 01.09.2015

Alle Rechte vorb

Nachdruck
die sick

Alle Rechte vorb

Alltlich der Rechte,
nicht gestattet.

eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2014 erselbstverlag.de

www.f-druck.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	
Aufgabe 1.1 Arbeiten mit Brüchen	<u>S</u>
Aufgabe 1.2 Potenzgesetze	19
Aufgabe 1.3 Multiplizieren und Faktorisieren von Sum	36
Aufgabe 1.4 Binomische Formeln	41
Aufgabe 1.5 Quadratische Ergänz	48
Aufgabe 1.6 Ergänzende Betra	55
Kap Grinnlegend zu Greichungen ufg 1 Jen haus zuchungen zuch Veichungen, der Vistineare Gleichungen führen	59
Augabe 2.2 Augabe 2.3	
Ergänzendes Vertiefungsthem Recongleichungen	60
Lineare Funktioner	
Aufgal	63
ingen zwischen Geraden	66
gabe 3.3 Schnittpunkte von Geraden	67
Aufgabe 3.4 Nullstellen bei Geradon	68
Aufgabe 3 F Rechn Ag einer Geraden	69
	72

14 Lehrerselbstverlag

Inhaltsverzeichnis Inhaltsverzeichnis

Kapitel 4:
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 4.1 Lösungsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen	7
Aufgabe 4.1.1 Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$	7
Aufgabe 4.1.2 Quadratische Gleichungen der Form ax² + bx = 0	79
Aufgabe 4.1.3 Anwenden der pq-Formel bei quadratischen	
Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$	8
Aufgabe 4.1.4 Lösen einer biquadratischen Gleichten der Form ax	8
Aufgabe 4.1.5 Lösen einer quadratischen ang in raktorisi ar Form	8
Aufgabe 4.2 Erweiternde Betrachtun	8
Aufgabe 4.3 Erweiterne zurach en: satische Ungleicht gen	
und Paear gleichul	8
Kaplus 5: Sanzi spnale Funktioner 2. Studes	
At Die No. parabel $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tchnen	8
Aufgabe 5.2 Verschieben von Normalparabeln im Fordinatensystem	8
Aufgabe 5.2.1	
a) Verschieben von Parakeit b) Nullstellenk	8
c) Da	8
enbetrachtung bei den verschobenen Parabeln	9
stellung der Funktionsterme in Scheitelpunktform, polynomia	9
Aufgabe 5.2.3 Verschieben von Parabeln in x- und v-Richtung	9:
Aufgabe 5.2.4 Parabeln stre	9
Aufgabe / Lageb / e	10

Kapitel 6: Gleichungen 3. und höheren Grades	
Aufgabe 6.1 Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktorisierter Form vor	104
Aufgabe 6.2 Lösen einer Gleichung, bei der man x ⁿ ausklammern kann	105
Aufgabe 6.3 Lösen einer Gleichung mit der Polynomdivision	106
Kapitel 7: Ganzrationale Funktionen 3. und harren Grass	
Aufgabe 7.1 Verlauf von Ganzrationale Fu	115
Aufgabe 7.2 Symmetriebetracht ganzra Funktions	122
Aufgabe 7.3 Rechnerischer Naturale der Strie bei Fur & Shen	123
Kary 8: Univerfunkt en	
Indles and Umkeit for the len	127
menhang wisch einer Funkta and ihrer Umkehrfunktion	127
Augabe 8.3 Zusammenhang zwischen der Erprien von Funktion und Umkehrfunktion	129
Aufgabe 8.4 Umkehrbarkeit von Funktionen	131
Aufgabe 8 5 Reel Schrfunktion	131
etrische Funktionen	
ngabe 9.1	
Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck	135
Bogenlänge, Grad- und hande gegen bei der	137
Aufgabe 9 Die Sir	138
en der Sinusfunktion	139
en der Periodizität	142
le 9.6	
von trigonometrischen Gleichungen	142

rselbstverlag Alge en © Ursula Pirkl

Kapitel 10:

Stichwortverzei

xponential- und	l Logarithmusfunktionen
-----------------	-------------------------

	-
Aufgabe 10.1 Exponentielles Wachstum	145
Aufgabe 10.2 Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse	146
Aufgabe 10.3 Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem	147
Aufgabe 10.4 Exponentialfunktionen und ihre Umkehrfunktion	149
Aufgabe 10.6 Umrechnen einer Exponentialfunktion er beliebigen Basis b in eine Exponential MKNOD zur Ba	151
Aufgabe 10.7 Lösen von Exponentialgleich zur basis e	154
Aufgabe 10.8 Lösen von Logarithmel	157
Aufgabe 10.9 Verschiebe auch Street and Spiegeln der et unktion	161
Aufgrie 1 Verlandbetwecken wuchen und Still est der Funktion in = ln(x) Kapit 1 Lange und Betrachtung von Betragsundh knungen	165
Aufgas 1.1 Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Biltrag auftritt	169
Aufgabe 11.2 Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen	172

Vorwort

Grundlegende Kenntnisse zur Algebra und zu Funktionen sind Voraussetzung für das Verständnis der Mathematik an weiterführenden Schulformen und an Hochschulen und damit der Schlüssel zum Erfolg auf einem eingeschlagen Bildungsweg. Erfahrungen an Schule und Hochschule zeigen allerdings, dass gerade hinsichtlich dieser Thematik häufig Kenntnisse fehlen oder verschüttet sind und Lernende das Verständnis neuer mathematischer Zusammenhänge nicht gelingen kann, da sie an elem Umformungen, die beispielsweise Brüche, Poter in und Binome enthalten, scheitern.

Das Ziel des vorliegenden Arbeitsburg aus dan der lende Grundkenntnisse aufzuarbet und zwergän. Dabei werden die zentralen Zusam auch und zwergän. Dabei werden die zentralen Zusam auch der wielen wi

Zien pen und Hit wase zur Hand all ung des Arbeitsbuchs

Die einzelnen Themen des Arbeitsburgs bauen aufeinander auf, so dass eine systematische Bearbeitung der einzelnen Kapitel in der vorgegebenen Reihenfolge sinnvoll ist. Die Lernenden seinerten Ler

rren bzw. ergänzen oder beschreiben. bzw. Curricula eine Behandlung von wiedernden Themen in weiterführenden Schulformen übliherweise nicht vorsehen und Schulbücher diese Themen ebenfalls nicht beinhalten, ist diese Lernform hervorragend dazu geeignet, da chülerinnen anhand des Arbeit toffs selbständig bey folg selbst kontroll heft in Form g. Dass dieses einer er Schülerin:

ch angefangen zu arbeiten und alles verlabe für das Buch 12,50 € ausgegeben und n 120,00 € im Monat für Nachhilfe sparen."

sierten Zugangsvoraussetzungen zu Hochscheben der Erlangung der Fachhochschul

Hochschulreif berufh wese einschließen, führt zwangs der im Progress, dass für angehende Studierend der Studier

Das von unde kreitsbuch bildet für diese Zielgrupau der sie sie den Anforderungen der schulm amatik nähe. In. Erste Erfahrungen ihn unden eines Vorkussa Machematik an einer Hochschluscheinen diese Vernutung zu bestätigen. In der nedbackrunde der Vorkurses wurd auch durchweg positive ewertung in Das Arbeiten auch Buch abgegeben:

- "Gwie 🚭 egsmöglich. it für Lingzeit-Mathe-
- Abs senzier
- Jurch-Buch gute Me le nolung und Auffüllung
- Für Ex-Schi Mathe Leistungskurs gute
- "Guta Culbenarbeit"
- "B. a. nur zuhören.

pitel :

Die Themen in diesem Kapitel beziehen sich auf die Themen Bruchrechnung, Potenzen und binomische Formeln und sind damit Grundlage für die folgenden Kapitel.

Kapitel 2

Da das Lösen linearer Gleichungen den Lernenenden in der Regel keine größeren Probleme bereitet, ist dieses Kapitel knapp gehalten. Die Gleichungen sind unter folgenden Gesichtspunkten ausgewählt worden:

- Anwenden und Wiederholen von Bruchrechnung und binomischen Formeln.
- Thematisieren von parametrisierten Gleichungen.
 gänzende Betrachtungen von Bruchgleichungen.
- eare Gleichungen und Ungleichungen wird im les Lösens von quadratischen Ungleichungen.

Kap

Da vielt in der Lage sind, ohne Taschenrechner und salso alleine aus den Informationen zum von Zuzeichnen, worden im der Lage sind, ohne Taschenrechner und zur Steigung Geraden zu zeichnen, worden im ausführlich behandelt. Zudem werden im ausführlich behandelt. Zudem werden im der Lage sind, ohne Taschenrechner und zur Steigung Geraden zu zeichnen, worden im der Lage sind, ohne Taschenrechner und zur Steigung Geraden zu zeichnen, worden im der Lage sind, ohne Taschenrechner und zur Steigung Geraden zu zeichnen, worden zu zeichnen zu zeichne

Kapitel 4

Quadratische Gleichung

Lösung mithilfe der
Allerdings ist die Anung alternativer Lö
s rein rechnerisch
nel bereitet oft e

Lösung mithilfe der
Allerdings ist die Anlen meist Neuland,
er Anwendung der
bleme. Eine klein-

schrittige Erläuterung der Lösungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von der Form der Gleichung und umfangreiche Übungen dazu stehen hier im Mittelpunkt. Das Lösen von Wurzelgleichungen und quadratischen Ungleichungen wird erweiternd betrachtet.

Kapitel 5

Für die Kenntnisse rund um Parabeln gilt Ähnliches wie für die quadratischen Gleichungen. Grundlagen sind meist vorhanden, jedoch treten häufig schon beim Zeichnen einer verschobenen Normalparabel ohne Erstellung einer Wertetabelle Schwierigkeiten auf. Die hier notwo digen Techniken und die Gesetzmäßigkeiten hinsicht des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiege von Parabeln werden an Beispielen vermitte dazu wird die Darstellung des Funktionste punktform, polynomialer und faktorisiel deren Bedeutung und das Umred lungsform in eine andere th der Diskriminanten bei de und bei Schnittpunktprobl werden ebenfalls beha

Kapitel 6 und 7

In diesen eid Themer rend in R

onalen Funktionen 3. und h n Gra tt, wobei auch hier der Zusammenhar die Be ung von Funktionsgleichungen polyno brisierter Form thematisiert

Kapitel 8 bi

Vertiefend ie ∡usammenhänge zwizugehörigen Umkehrfunkschen Funkt e Regeln hinsichtlich des Ver Spiegeln, bilden rigonometrische elt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Par Gleicht agen 3. und geübt ver len, findet in gebe gewardt.

Kapitel 1: Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome

Sie haben in der Sekundarstufe I bereits die Gesetze zum Umgang maßrüche Vurzeln und binomischen Formeln kennen gelernt. Allerdings zeigt es sich häuf endung erad dieser elementaren algebraischen Zusammenhänge immer wieder ten bereitet. Daher soll in diesem Kapitel die Möglichkeit gegeben werden, die wese wiederholen.

Aufgabe 1.1

Arbeiten mit Brüchen

Im Rahmen dieser Aufgabe sollen grundle Aufgaben und Kapiteln zurückgegriffen wi Die Zahrougebenen in sine.

Die Zahrougebenen in sine. gelegt, die einzelnen Rechnungen in Teils automatisiert im Kopf ablaufen. in den Sprechblasen verdeutlig d wenden Sie die Verfahren jeweils auf die Übur

a) Definition

Bsp.:

Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs wird als Nenner bezeichnet.

unechter Bruch:

Bsp.: $\frac{16}{9}$

ze Zahl in einen unechten Bruch mit dem Nenner 1 versieht.

und einem gebrochenen Teil und ein unechter Bruch.

Bsp.: $2\frac{4}{9}$

Achtung!

Bei gemischten Zahlen steht nzen Zahl, hier 2, und dem Bruch ein unsichtbare) und kein

ationszeichen (

t den Kehrwert eines Bruches, indem m Bruch "umdreht".

at der Bruch $\frac{3}{4}$ Bsp.: Der Kehrwert des Br

Ursula Pirkl hrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

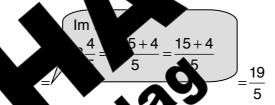
b) Unechte Brüche und gemischte Zahlen umwandeln

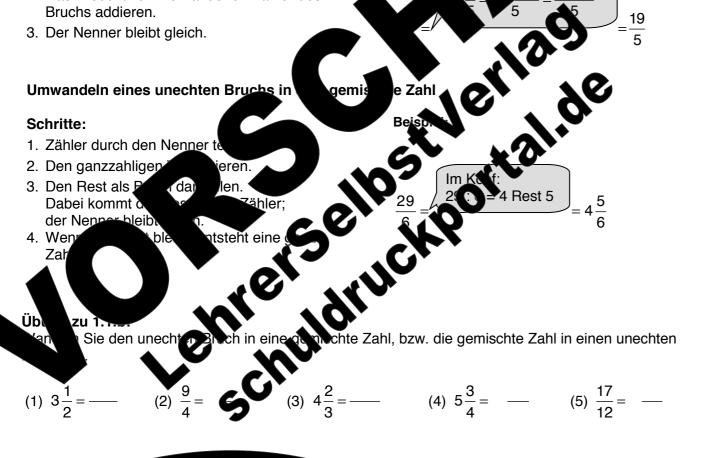
Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

Schritte:

- 1. Den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl vor dem Bruch multiplizieren.
- 2. Das Produkt zum vorhandenen Zähler des Bruchs addieren.

Beispiel:





(1)
$$3\frac{1}{2} = ---$$

(2)
$$\frac{9}{4}$$
 =

(3)
$$4\frac{2}{3} = ---$$

(4)
$$5\frac{3}{4} = -$$

(5)
$$\frac{17}{12} = -$$

ationen in der Mathematik

Verwendung gemischter Zahlen

Gemischte Zahlen werden in der Mathematik praktisch Bei der Anwendung von Mathematik wird diese Darstellung bei Bru

bei Multiplikation und Divis Nota

oben schon erläutert, ein Pluszeich elassen. der Mathematik meistens das Malsym (*) nicht schreibt man anstatt 3 · x oder 3*x einfach

Division wird das Geteiltzeichen fast nie durch (:) dargestellt. M et hier erechte Bruchstriche oder den Schrägstich statt y:5 schreil er y/5.

c) Erweitern eines Bruchs auf einen vorgegebenen Nenner

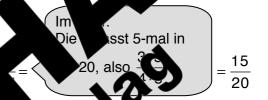
Schritte:

Kapitel 1

- 1. Wie oft passt der gegebene Nenner in den neuen vorgegebenen Nenner?
- 2. Zähler und Nenner mit der gefundenen Zahl multiplizieren.

Beispiel;

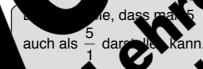
ner 20



Übung zu 1.1.c:

Erweitern Sie auf den angegebe

- (1) $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ auf den Nenno
- (2) $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ au



d) Kürzen von Brüchen

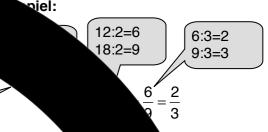
Method veise kürzen

Zähler und Nenner solange jeweils durch die gleiche Zahl dividieren bis es keinen gemeinsamen Teiler mehr gibt.

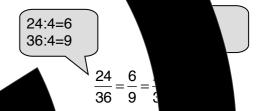
bolt durch

ilbar ist. (Die ne 0 oder 5

ob die Zahl durch 3 geteilt werden kann. (Ist die Quersumme durch 3 teilbar, dann ist es auch die Zahl.)



oder auch kürz



Ursula Pirkl hrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

Methode 2: Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen

Schritte Methode 2:

1. Die Zahlen im Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen.

2. Die einzelnen Faktoren paarweise im Zähler und Nenner streichen (kürzen).

Beispiel:

Primfaktor 3, 5, 7,11...

$$\frac{\cancel{4}}{36} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \cancel{\cancel{3}} = \frac{\cancel{2}}{3}$$

iii) Methode 3: Den größt

Schritte Methog

- 1. Den größten g ggT

iller (ggT) valvenden

ei vii :

cui Newner unt gabenteil e)

durch dieser men Teiler aller $\frac{2}{36} = \frac{2}{3}$

iv) Kürzen

r Methode 1, 2 oder 3

Gleiche Variable im Zähler und Nenner paarweise kürzen. Wenn Potenzen auftreten, aaf Potenzgesetze (s. 4

m Kopf: ggT von 18 ist 9.

Übung

Kürz egebenen Brüche so weit wie möglich.

(2)
$$\frac{22}{1}$$

20ab (3)48ac

(4) 75xyz

405xy (5)1080x

- 112uv 210vw

e) Hauptnenner ermitteln

Met Lee 1: Hawhenner durch Ko, frechnung ern trein

Bit an mit einem Zahlet kaum man da k W bzw. den Hauptnenner ohne viel Aufwand im Kopf in tellin.

Per Bit an mit der größeret Zinlauswählen.

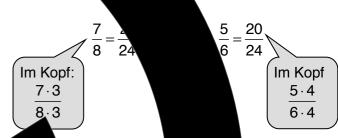
Pie Reihe dieser Zinlauswählen.

- Kopf hochzähle

8-ter Reihe: 8, 16, 24, 6 passt nicht in 8 6 passt 4-mal in 24 8 passt 3-mal in 24 ıptnenner der

3. Merk Bruch nenner hat.

14 Lehrerselbstverlag



unktionen © Ursula Pirkl

15

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

s kaum

hen und

m Nenner

diche Vorgehensweisen

Methode 2: Ermitteln des Hauptnenners über die Zerlegung in Primfaktor

Schritte:

- 1. Alle Brüche, sofern es geht, so weit wie möglich kürzen.
- 2. Alle Nenner in Primfaktoren zerlegen. Dabei mit dem kleinstmöglichen Primfaktor beginnen. Wenn vorhanden, gleiche Primfaktoren in Spalten untereinander schreiben.
- 3. Aus jeder Spalte den Primfaktor einmal übernehmen und das Produkt dies Zahlen bilden.
- 4. Jeden Bruch so erweitern, da dem kgV bzw. dem H entspricht.

Beispiel:



$$168 \cdot 3 = 3 \Rightarrow \frac{168}{56 \cdot 3} = \frac{9}{168}$$

$$168 \cdot 42 = 4 \Rightarrow \frac{7 \cdot 4}{48 \cdot 4} = \frac{28}{168}$$

$$168 \cdot 42 \cdot 14 \Rightarrow \frac{5 \cdot 14}{12 \cdot 14} = \frac{70}{168}$$

Übung zu 1.1.e

Bringen Sie die fo

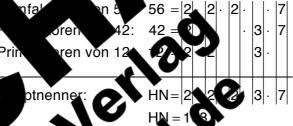
(3)
$$\frac{4}{5}$$
, $1\frac{2}{3}$, $\frac{9}{10}$

(4)
$$\frac{1}{2}$$

16

$$\sqrt{\frac{25}{42}}$$

Hauptnenner



Beispiel 1: Addition bei Bruchtermen

f) Brüche addieren oder subtrahieren

Man kann alle ganzen Zahlen und alle Brüche get voneinander addieren, da bei gemischter der ganzen Zahl und dem Bruch ein un Pluszeichen (+) steht.

beim Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen exem

Auch wenn die Addition und Subtraktion von Brüchen beim Einsatz eines

Probleme bereitet, ist es unbedingt notwendig, die entsprechende

anwenden zu können, da der Taschenrechner spätesten beim A

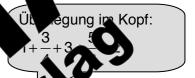
keine allzu große Hilfe mehr darstellt. Im Rahmen dieser Aufgabe

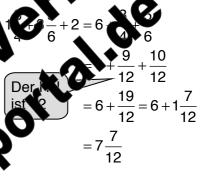
Schritte:

- 1. Alle ganzen Zahlen addig
- 2. Den Hauptnenner HN s erweitern.
- 3. Die Zähler der gleich.
- 4. Ergebnis ver

ßer ist als der

- 3. Die Summe bzw. Differe Nenner bleibt gleich.
- 4. Ergebnis, wenn möglich, noch kürzen bzw., wenn es die Aufgabenstellu eine gemischte Zahl





$$1\frac{5}{9} - 3\frac{5}{6} + 2 = \frac{14}{9} - \frac{23}{6} + 2$$

$$= \frac{28 - 69 + 36}{18}$$

$$= -\frac{5}{18}$$
Im Kopf erweitern:
$$\frac{14 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{23 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 18}{1 \cdot 18}$$

riablen enthalten

rerme Variablen enthalten, kann aler Taschenrechner nicht mehr weiteres eingesetzt werden.

> 5.5 3.6 1·10x $5x \cdot 6 \quad 6x \cdot 5 \quad 3 \cdot 10x$

Schritte:

- 1. Falls in unechte
- und Brüche zum
- me im Zähler bilden. Der Nenner bleibt
- ebnis, wenn möglich, kürzen bzw., wenn ordert, in eine gemischte Zahl umwand

Der HN ist 30x 18 - 25 + 10x30x 10x - 7

Achtuna!

Hier darf man 1 vie das **x** auf keinen Fall kürz ähler eine umme und keir rhanden ist.

30x

17

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

Übung zu 1.1.f

Berechnen Sie die angegebenen Summen zunächst ohne Verwendunges Tas stellen Sie das Ergebnis, so weit wie möglich, gekürzt dar. Überprüft möglich, mit dem Taschenrechner.

- $(1) \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \frac{1}{3} =$
- (2) $1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{7} 1\frac{1}{14} =$
- (3) $\frac{4}{5a} + \frac{7}{15} + \frac{7}{10} =$

merme, dia en e Variable le trialten, multiplizieren

Sin schte Zahlen in trinechte Brüche umwandeln.

Schritte:

- 1. Alle
- meiben und vor dem ⊿eren so weit wie möglich kürzen. e Zahlen im Zähler multiplizieren. Alle Zahlen im Nenner multiplizieren
- 4. Ergebnis, wenn möglich, bzw., wenn gefordert, in eine umwandelp
- erst ku

Übuŋ

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, multiplizieren

6a kann man als dann unteredem ge ichstrich weg.

Schritte:

Kapitel 1

- 1. Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- 2. Alle Zähler und alle Nenner auf ein Bruchstrich schreiben.
- 3. Vor dem Multiplizieren so y kürzen
- 4. Alle verbleibenden Zah Zähler multiplizierer Variablen und
- 5. Ergebnis, gemischte'



h) Brüche die

ne gemischten und ganzen Zahlen als

- unechte Brüche darstellen. 2. Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des
- Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu mul
- 3. Weite



lividieren

ksatz

Merke: Man dividiert eine ganze Zahl oder einen Bruch durc Bruch, indem man mit dem der hinter dem Divisionszeich

14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, dividieren

Schritte:

- 1. Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- 2. Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu multiplizieren.
- 3. Weiter mit 2. Schritt beim Multiplizieren.

4a 2a s (:) wird (.) wird $\frac{2a}{3}$

Beispiel 3: Bruchterme mit Doppelbrüche

3. Weiter mit 2. Schritt beim Multiplizieren.

Beispiel 3: Bruchterme mit Doppelbrücher

(1)
$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 1 \cdot 2 = 2$$

Die Gleicher Mit 2 no Nit 2 no Nit zeren odes ...

(2) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 = 2$

Nes weis Doppels und smultiplizieren.

(3) $\frac{2x}{\frac{3}{x}}$
 $\frac{3x}{x}$
 $\frac{3}{x}$
 $\frac{3}{x}$

(2)
$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$$

(2) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(3) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(4) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(5) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(6) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(7) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(8) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(9) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(10) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(11) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(12) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(13) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(14) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(15) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

(16) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$
(17) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$
(18) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$
(19) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$
(19) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$
(19) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$
(19) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$
(19) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(19) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(19) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(20) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(21) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(21) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(22) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(23) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(24) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(24) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(25) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(26) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(27) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(27) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(28) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(28) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(29) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(29) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 =$
(20) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(20) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(21) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(21) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(21) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(21) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(22) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(23) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(24) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(25) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(26) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(27) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(28) $\frac{2}{\frac{1}{2}} =$
(28) $\frac{2}{\frac{1}} =$
(28) $\frac{2}{\frac{1}} =$
(

(3)
$$\frac{2x}{3}$$
 $\frac{3}{x} = \frac{2}{x}$ $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$

15 24

20

(5)
$$9y: \frac{3y}{2} =$$

Aufgabe 1.2

Potenzgesetze

Information: Definition des Begriffs Potenz

Bei der Additon von Summanden ist Ihnen mit Sicherheit Abkürzung mit Hilfe eines Vorfaktors zusammenfassen ka Multiplikation gibt es einen ähnlichen Zusammenhar rodukt aus gleichen Faktoren So k wie folgt zusammenfassen: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$. Allgemein



Vor eing

Bsp.:
$$-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$$

 $-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

 $-\mathbf{a}^{\mathsf{n}} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \dots \cdot \mathbf{a}$

unktionen © Ursula Pirkl

ıng getroffen wie bei der Multiplikation

1 wird $1 \cdot a = a$ otiert. $a^1 = a$

Übung zur Definition des Begriffs Potenz

Verdeutlich verfahren Sie analog dazu.

14 Lehrerselbstverlag

Kapitel 1

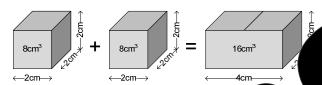
Kapitel 1

 $+3^2 \neq 3^4 = 81$

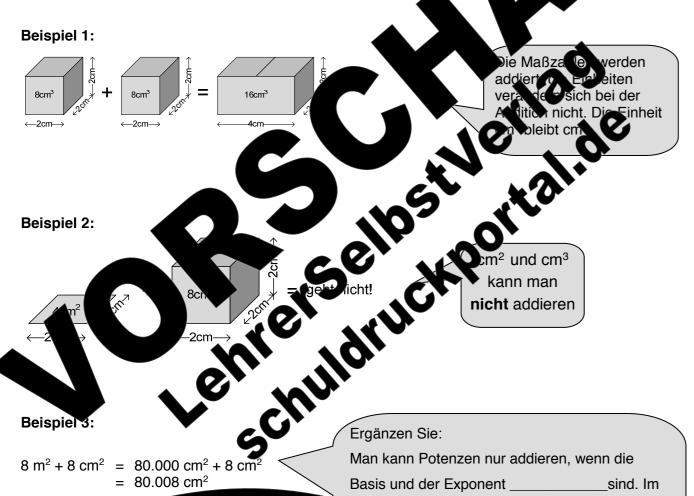
a) Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Anhand der Berechnung von Einheiten (Dimensionen) lassen sich die Potenzge Addition anschaulich darstellen. Größen kann man nur addieren oder gleiche Einheit haben, bzw. wenn die Einheit die gleiche Potenz besitz Flächen und Längen oder Flächen und Volumina weder addiert noch st

Beispiel 1:



Beispiel 2:



Beispiel 3:

22

 $8 \text{ m}^2 + 8 \text{ cm}^2 = 80.000 \text{ cm}^2 + 8 \text{ cr}^2$ $= 80.008 \text{ cm}^2$

Basis und der Exponent _ sind. Im

Einheitensystem* muss man dazu ggf. die

rd der Exponent

Allgemein kann man die Addition bzw. Subtraktion von Potenzen w

ubtraktion von Potenzen

$$a^n \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^n = (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}^n$$

n: Internationales Einheitensystem (frz. **S**ystème **i**nternational c ößen. Basiseinheiten sind: Meter, Kilogramm kunde, Kelvin, Ar Candela. phy

Übungen zur Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Verdeutlichen Sie sich jeweils die Beispiele und verfahren Sie entsprechei

Beispiel 1: $2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2^3 = 16$

$$a^3 + a^3 = 2a^3$$

$$(2) \quad 5^3 + 5^3 - \cdots + \cdots - \cdots$$

(3)
$$4^2 + 4^2 + 4^2 = \underline{} + \underline{} = \underline{} \cdot \underline{}$$

(4)
$$x^2 + x^2 =$$

(5)
$$b^2 + b^2 + b^2$$

Beispiel 2:

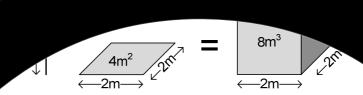
(1)
$$6x - x^3 - 10x^7$$

$$2x^2 + 5x^2 - 3x^2 - x^2 =$$

ittung: $x^2 + x^2 = x$ $x^3 - 10x^2 = x$ $x^2 + 5x^2 - 3x - 2x^2 = x$ which bei Potent of pleicher Basis

Thei der Additte Kann man august die frunk der Additte Kann man august der Additte Kann ma Wie bei der Additie kann man auch die Multiplikation von Potenzen anhand der Berechnung von Flächen und Volumen anschaften.

Beispiel 1:



Rechnung

Ergänzen Sie:

Die Zahlenwerte d n werden

kponenten der

Einheiten werden

sind. neiten

Ursula Pirkl

hrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

Beispiel 2:

 $3m \cdot 50cm = 3m \cdot 0.5m = 3m^{1} \cdot 0.5m^{1} = 1.5m^{2}$ Einheiten müssen ggf. umgerechnet werden.

In verallgemeinerter Form lässt sich die Regel zu veranschaulichen.

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a \cdot a} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{a \cdot a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a \cdot a} = \underbrace{a \cdot a}_{a \cdot a} = \underbrace{a \cdot a}_{a \cdot a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a \cdot a} = \underbrace{a \cdot a}_{a \cdot a}$$

Ergänzen Sie den folgenden Merk



zusamme lassen.

(1)
$$x^3 \cdot x^5 =$$

(2)
$$2z^2 \cdot 6z^3 \cdot 3z^5 \cdot 4z =$$

(3)
$$3a^2 \cdot 4b^3 \cdot 2b^5 =$$

(4)
$$7v^{5a} \cdot v^{4a} =$$

 $(5) v^{3a+1}$

(10) 30cm²

in Aufgabenstellungen ist oft auch der umgekehrte Rechenweg wich Formen Sie die Terme ss keine Summen in den Exp

$$(11) x^{a+b} =$$

(12)
$$z^{a+3b} =$$

(13)

(14)
$$x^{5a+b+c} =$$

$$(16) \quad 2x^{2a+b} \cdot 3x^{a+2b} =$$

c) Potenzen, Brüche und negative Exponenten

In Aufgabe 1.1 haben Sie gelernt, wie man Variablen in Brüchen kürzen ka ltnisse sollen im folgenden Beispiel verwendet werden, um zu begründer henten sinnvoll sind. Verdeutlichen Sie sich die Überlegungen.



Man erkennt aus diesem Bessel, dass negative Exponenten eine neue Schreibweise für Brüche beinhalten, und man kann die olgende Regel formulieren.

Ergänzung: Dieser Zusammenhang wird auch beim Exponenten 1 angewandt. Es gilt:

Ergänzung z er Exponenten

ann man Brüche so darstellen. chstrich mehr

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

Übungen zu Potenzen, Brüchen und negativen Exponenten

Beispiel 1:
$$\frac{x^4}{x^3} = x^4 \cdot x^{-3} = x^{4-3} = x$$
 bzw. $\frac{3x^4}{x^6} = 3x^4 \cdot x^{-6} = 3x^{4-6} = 3x^{-2} = \frac{3}{x^{4-6}}$

Zusatzinfo: Man kar Nie Pour August wie P

Kürzen Sie die angegebenen Brüche schreiben Sie das Ergebnis ggf. ohr

(1)
$$\frac{z^5}{z^3} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\frac{u^2}{u^3} = \frac{1}{u^3} = \frac{$$

(3)
$$\frac{2c^5}{c^4} =$$

Beispi

Expone

Sie, unter Angabe des Fehlers, warum die Umfor

26

Die Umformung ist falsch, weil

As lautet: $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{-1}$

d) Der Exponent 0

Warum irgendetwas hoch Null immer die Zahl 1 ergibt, ist eine häufig geste Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang anhand der folgende

Aus der Bruchrechnung ist bekannt, dass gilt:

$$\frac{a}{a} = \frac{\cancel{a}^1}{\cancel{a}^1} = \frac{1}{1} = 1$$

ist bekannt.



nterschiedliche Basis, jedoch den eklammert werden.

Beispiele: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1.000.000$

Bei der An Regel lassen Rechenvorteile

rmation:

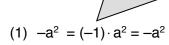
14 Lehrerselbstverlag

chen muss man Klammern setzen denn es

Diese Regel ist vor allem auch dann wichtig, wenn es um Potenzen mit negative geht. Verdeutlichen Sie sich dazu die beiden folgenden Beispiele.

Zur Erinnerung:

Ein negatives Vorzeichen kann man immer als Multiplikation mit dem Vorfaktor (-1) interpretieren. Da Quadrat wirkt dann nur auf das a und nicht auf (-1).



(2)
$$(-a)^2 = (-1 \cdot a)^2 = (-1)^2 \cdot a^2 = (+1)^2 \cdot a^2$$

.hen in ein Klamper stern wird der eren da da da G. 16, it hinter de sen in der Klamme wekt.

Ind einer ausfübnit en chend zu (1) (1) (2), dass sekt v. 4)3 = -a3

In Sie die name de verallgen vinerte Merkregel

In beim Potenzieren

Zahl ist gilt:

Vorzeichen beim Potenzieren

Wenn n eine

Wenn na $(-a)^{n} = -a^{n}$

igen zum Produkt bei Potenzen mit ungleicher Basis u. ponenten

Vereinfachen Sie die Terme, ohne Verwendung des Taschenrechnen nöglich. Stellen Sie dabei all Exponenten dar.

- (2)

Ursula Pirkl

hrerselbstverlag

$$(4) \frac{(-3)^4}{-3^4} =$$

$$(5) \ \frac{(-5)^3}{-5^3}$$

(6)
$$(-2)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$$

f) Potenzieren von Potenzen

whether the variety must be an interest of the contract of th Verdeutlichen Sie sich anhan wenn eine Potenz potenzier

$$(2^2)^2 = (4)^2 = 16$$

$$(2^3)^2 = (8)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{3 \cdot 2}$$

$$(2^2)^3 = (4)^3 = 2^{2^3}$$

$$(2^5)^2 = 224$$
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^{10} = 2^5$

$$(2^2)^5$$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 2$

$$(\mathbf{a}^{\mathsf{m}})^{\mathsf{n}} = \mathbf{a}^{\mathsf{m} \cdot \mathsf{n}} = \mathbf{a}^{\mathsf{n} \cdot \mathsf{m}} = (\mathbf{a}^{\mathsf{n}})$$

$$\left(a^{2}\right)^{3} \neq a^{2^{3}}$$
, denn $a^{2\cdot 3} = a^{6}$ und $\left(a^{3}\right)^{2} \neq a^{3^{2}}$, denn $a^{3\cdot 2} = a^{6}$ und $a^{3^{2}} = a^{6}$

Übungen zu

a) B

14 Lehrerselbstverlag

b) Kreuzen Sie an:

- $x^4 + x^3 = x^7$ richtig O falsch O
- $(x^4)^3 = \begin{cases} x^7 & \text{richtig O falsch O} \\ x^{12} & \text{richtig O falsch O} \\ x^{64} & \text{richtig O falsch O} \end{cases}$
- O falsch O 3 falsch 3 ichtig O falsch O
- (5) $-x^{2} \cdot x^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{ falsch } \circlearrowleft \\ -1 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{ falsch } \circlearrowleft \\ 1 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{ falsch } \circlearrowleft$

g) Potenzen



(5) $-x^2 \cdot x^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ -1 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 1 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 1 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 1 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 1 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 2 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 4x^3 = \begin{cases} 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \text{falsch } \circlearrowleft \\ 7x^3 & \text{richtig } \circlearrowleft \\$ herangezogen.

 $\sqrt[3]{8}$ und auch $2 = 8^{\overline{3}}$ gilt, gelten: $\sqrt[3]{8} = 8^{\overline{3}}$. xponenten habe deutung wie Potenzgesetz die bish notenzieren verwendet hen.

uadratwurzeln die folgende Vereinbaru Ergän wurde:

> Bei der Quadratwurzel wird die 2 nicht notiert, bzw., wenn über der Wurzel nichts steht, handelt es sich um eine Quadratwurzel.

 $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Ursula Pirkl hrerselbstverlag Der Zusammenhang zwischen gebrochenem Exponent und Wurzelzeich veiteren Beispielen überprüft werden. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

$$\sqrt[4]{625} = 5$$
 und $625^{\frac{1}{4}} = \left(\underline{}^{4} \right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\square} = 5$

$$\sqrt[5]{32} = \underline{}$$
 und $(32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\square} \right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\square \frac{1}{5}} = 2^{1} = \underline{}$

$$\frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{\boxed{}}$$
 und $49^{-\frac{1}{2}} = (7^2)^{-\frac{1}{2}} = 7^{\boxed{} \cdot (-\frac{1}{2})} = 7^{\boxed{}}$



h) Potenzieren von

whenten by the order working of the problem of the

$$a^{n} = (a^{n})^{m}$$
 $a^{m \cdot n} = a^{m \cdot n}$ $a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m}$ $a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m}$ $a^{m \cdot n} = a^{m \cdot m}$

algenden Zusammenhang, den man sich

Potenzieren v $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{n}} = (\sqrt[n]{a})$

häufig auftretende Aufgabens Verde folgenden Beispiele. en Rechnungen analog dazu. und

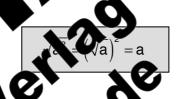
Treten unter der

Beispiel 1: Sonderfall $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$



(1)
$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^1 = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$



(1)
$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a^1$$
(2) $\sqrt[3]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt$$

$$= \forall a \qquad \forall a = a \qquad = =$$

$$\sqrt{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{3 \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a \cdot a^{\frac{1}{2}} = a \cdot a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^{2+1}} = \sqrt{a^2 \cdot a} = (a^2 \cdot a)^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} \sqrt{a} = a\sqrt{a}$$



ke: "Zerschneiden" von Wurzeltermen bzw. parti

Wenn in einem Wurzelterm mehrere Faktoren auftreten, darf getrennt voneinander mit einem eigenen Wurzelzeichen versehen und die auch getrennt voneinander zieb las auch als partielles Wurz

$$=\sqrt{a^m}\sqrt{a^n}$$

die kurze Version des partiellen Wurzelziehers in folgenden Bei ndem Sie ungen vervollständigen.

$$\sqrt{a^{\square} \cdot a} = \sqrt{a^{\square}} \sqrt{a} = a^{\square} \sqrt{a}$$

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

(2)
$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \sqrt{\underline{}} = 6\sqrt{\underline{}}$$

(4)
$$\sqrt{8x} = \sqrt{2x} = \sqrt{2x} = \sqrt{2x}$$

(5)
$$\sqrt{288x} =$$
____=

(6)
$$\sqrt{125x^3} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{}$$

kann eine parth seel ges. Freden, wenn die Zahl in his street werden kann, besteen als skir understatellen auftreten. In güns seeden quadratischen Faktor die gr. Nuffs de (2) auch so lösen:
$$\sqrt{125x^3} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2}$$

(6) $\sqrt{125x^3} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2}$

(7) $\sqrt{98z^3} = \sqrt{2}$

(8) $\sqrt{128x^5} = \sqrt{2}$

(8) $\sqrt{128x^5} = \sqrt{2}$

(9) $\sqrt{128x^5} = \sqrt{2}$

(10) $\sqrt{128x^5} = \sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(32) $\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{2}$

(5) $\sqrt{2}$

(6) $\sqrt{125x^3} = \sqrt{2}$

(7) $\sqrt{98z^3} = \sqrt{2}$

(8) $\sqrt{128x^5} = \sqrt{2}$

(9) $\sqrt{2}$

(11) $\sqrt{2}$

(12) $\sqrt{2}$

(13) $\sqrt{2}$

(14) $\sqrt{2}$

(15) $\sqrt{2}$

(16) $\sqrt{125x^3} = \sqrt{2}$

(17) $\sqrt{98z^3} = \sqrt{2}$

(18) $\sqrt{128x^5} = \sqrt{2}$

(19) $\sqrt{2}$

(19) $\sqrt{2}$

(19) $\sqrt{2}$

(19) $\sqrt{2}$

(19) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(31) $\sqrt{2}$

(41) $\sqrt{2}$

(52) $\sqrt{2}$

(53) $\sqrt{2}$

(64) $\sqrt{2}$

(75) $\sqrt{2}$

(76) $\sqrt{2}$

(77) $\sqrt{2}$

(78) $\sqrt{2}$

(79) $\sqrt{2}$

(79) $\sqrt{2}$

(79) $\sqrt{2}$

(70) $\sqrt{2}$

(70) $\sqrt{2}$

(71) $\sqrt{2}$

(71) $\sqrt{2}$

(72) $\sqrt{2}$

(73) $\sqrt{2}$

(74) $\sqrt{2}$

(75) $\sqrt{2}$

(76) $\sqrt{2}$

(77) $\sqrt{2}$

(78) $\sqrt{2}$

(79) $\sqrt{2}$

(79) $\sqrt{2}$

(80) $\sqrt{2}$

(90) $\sqrt{2}$

(17) $\sqrt{2}$

(18) $\sqrt{2}$

(18) $\sqrt{2}$

(18) $\sqrt{2}$

(18) $\sqrt{2}$

(18) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(22) $\sqrt{2}$

(23) $\sqrt{2}$

(24) $\sqrt{2}$

(25) $\sqrt{2}$

(26) $\sqrt{2}$

(27) $\sqrt{2}$

(27) $\sqrt{2}$

(28) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(22) $\sqrt{2}$

(23) $\sqrt{2}$

(24) $\sqrt{2}$

(25) $\sqrt{2}$

(26) $\sqrt{2}$

(27) $\sqrt{2}$

(28) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(21) $\sqrt{2}$

(22) $\sqrt{2}$

(23) $\sqrt{2}$

(24) $\sqrt{2}$

(25) $\sqrt{2}$

(26) $\sqrt{2}$

(27) $\sqrt{2}$

(27) $\sqrt{2}$

(28) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(29) $\sqrt{2}$

(20) $\sqrt{2}$

(20)

$$2 \cdot 8 = 4 \cdot 2 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$$

richtig:
$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

falsch:
$$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4=7$$

Mehrfache Wurzeln tsprechen dem Potenzieren

Verfahren Sie wie im Beispiel:

(1)
$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[12]{a}$$
,

 $\frac{}{32a^5} = \sqrt{2a}$, denn

14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

35

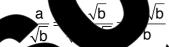
Beispiel 4: Rationalmachen des Nenners

Treten in Brüchen Wurzeln auf, so wird ein Bruch in der Regel so angegeben, d keine Wurzel erscheint. Dies ist auch bei den gängigen Modellen der Tasc

Wenn man im Taschenrechner beispielsweise den Term etaste betätigt.

erhält man $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

enden, ermumfrans, sond machen a rational. In al. Alganzende und Verdeutlichen Sie sich diesen Zusammenhang Sie anschließend die Nenner der gegebener vertiefende Übungen zu Kapitel 1)



(1)
$$\frac{5}{\sqrt{3}} =$$

(2)
$$\frac{6}{\sqrt{2}} =$$

$$(3) \quad \frac{3a}{\sqrt{2a}} =$$

$$(4) \qquad \frac{a}{2a}$$



Kommen vei Rechnunger, beispielswass bei der Lösung von Gleichungen, Wurzeln vor, lassen sich die Ergebnisse nicht exakt mit der Gebenenrechner darstellen, sondern man erhält immer ein auf die Anzahl der Stellen des Taschenrech ers gerundetes Ergebnis.

Beispiel: $2\sqrt{2} \approx 2,8284... \approx 2.83$

Entsprechendes chen Dezimalbrüchen, wie

14 und der Eulerschen Zahl

n Ergebnis für nachfolgende Rechnungen ist es ungünstig, mit dem en Zahlenwert weiterzurechnen. Hier kann der Auf be am Taschenrechner ngreich werden und es können sich Eingabefehler einschle nnen aufgrund von rundeten Zwischenergebnissen ungenaue Endergebnisse auftre ematik spielt der gerundete Zahlenwert zudem häufig keine Rolle.

Aus diesen Grü in einer "möglichst vereinfa alisierten" Form, ohne n explizit auszurechnen, wobei erium darin besteht. nis am Ende gut lesbar ist bzw. die Übungsas Normalisieren muss daher keine eil oder K stellung eines

- wie möglich kürzen und als unechte Brüche darstellen.
- von Brüchen möglichst ohne Wurzeln darstell
- mit Zahlen und Variablen oder Konstanten e) wird, beginner d sortiert.
 - reten komplexer Zahlen soll im Nen ire Einheit auftr

Überblick Gesetze und Definitionen bei der Potenzrechnung

	G	rundlegende Zusammenhän	
Der Expo	onent Null	Der Exponent	De $\frac{1}{n}$
a ⁰ = 1	00 = 1	a ¹	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
	Pot	tenzen mit gleich	, ,
Addi	ition und Subtraktion	on Mul	tipliks on 1 d Division
			$a \cdot b = (a \cdot b)^n$
u∙a	$a^n \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^n = (\mathbf{u} \pm \mathbf{v})$		<u>a</u> n (a)
			$b^n = \frac{\overline{b}}{b}$
		it negativer Exponent	ten L
. 14		103	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$		a ⁻ⁿ a ⁿ	$\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
	M Vikation u	nd F weight on Potov en vit	gleicher Basis
			_{m -n m-n} 1
	$^{m} \cdot a^{h} = a^{m+n}$	$\overline{a^n}$	$=a^{m}\cdot a^{-n}=a^{m-n}=\frac{1}{a^{n-m}}$
	101	Potenzia n on Potenzen	
nzzahlige	Exponente.	r tic are Exponenten	potenzierte Exponenten
$\left(a^{m}\right)^{n}=\left(a^{m}\right)^{n}$		$a = a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}m} = (\sqrt[n]{a})^{m}$	$a^{m^n} = a^{(m^n)} \neq \left(a^m\right)^n$

Vermischte Übu

Fassen Sie zusammen oder n Sie, warum nicht weiter vereinfac

(1) $8m^2 + 7m^2 =$

(2) 5cm²

 $(2 \text{ m})^2 =$

Ursula Pirkl hrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl b) Notieren Sie jeweils die verwendeten Potenzgesetze, bzw. erläutern Sie die er Termumformungen in Stichworten.

(1)
$$\frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{18x^3}{2x}} = \sqrt{9x^2} = 3x$$

Potenzgesetz:

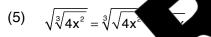
Umformungen:

(2)
$$t^4 \cdot t^3 = t^7$$

Potenzgesetz

(3)
$$z^{1+3a} = z \cdot z^{3a}$$

(4)
$$u^{2v-1} = u^{2v} \cdot u^{-1} = \frac{u^{2v}}{u}$$



(6)
$$\frac{1}{1-1}$$
 $c^{1-n} = c^{n+1}$

(2) t⁴ · t³ = t⁷ Potenzgesetz:

(3) z^{1+3a} = z · z^{3a} Poten esetz:

(4) u^{2v-1} = u^{2v} · u⁻¹ = u^{2v}/u Potenzgesetz

(5) √³√4x² = ³√4x Potenzgesetz

Umc ng:

(6) √²ⁿ To 2 · c¹⁻ⁿ = 20 · 1-n = cⁿ⁻¹ Potenzgesetz

Potenzgesetz

Potenzgesetz

Value flung:

(7) Die Potenzrechnung bildet unter Correm eine Grundlage für Umformungen, die beispielsweise bei der Differenzial- und Integralrechnding notwendig werden. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben im Hinblick auf später folgende Problemstellungen, indem Sie auch hier wieder Umformungsschritte erläutern bzw. die verwoord in estze angeben Hinblick auf später folgende Problemstellungen, indem Sie auch hier wieder Umformungsschritte erläutern bzw. die verwe angeben.

(1)

Potenzges

Potenzgesetz:

(2) $\frac{3}{2}(3x+1)$ rmung:

^Dotenzgesetz:

 $2\sqrt{3x+1}$

Potenzgesetz:

Al	Ursula	Pirk
----	--------	------

(3) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Umformung:

$$\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

Potenzgesetz:

$$=\frac{1}{3x^{2\cdot\frac{1}{3}}}$$

Umformung:

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Ergänzen Sie die fehlenden Exponente

(4)
$$2x^{\frac{1}{2}+1} = 2x^{-} = 2\sqrt{x^{-}}$$

$$\frac{1}{x} = 2x\sqrt{\lambda}$$

Formen Sie entsprechend :

$$(5) 4x^{\frac{1}{2}-1} =$$

achen Ste sower wie mögt in truem Sie partielle Wurzelr die Exponents in der Terme dir is Summen darstellen.

(1)
$$\sqrt{288x^3}$$
 =

$$(4) \quad \frac{5x}{\sqrt{x}} = \frac{5x}{x}$$

(5)

de Übungen:

Aufgabe 1.3

Multiplizieren und Faktorisieren von Summen

Information 1.3.1

Multiplizieren von Summen – Distributivgesetz

Multipliation \ Multiplikation iner Summe it iner Summe

Jeder Schrönden in der einen mit jedten vormanden der vivisiten Krimmitisk kleren.

Distributivgesetz

$$a (b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + b$$

(1)
$$2\sqrt{3}\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{12}} + \frac{z}{\sqrt{27}}\right)$$
 (2) \Rightarrow

$$(2) = \frac{2\sqrt{3} x}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3} y}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{$$

Beispiel 2:

(1)
$$(\sqrt{2x} +$$

$$(2) = \sqrt{2} \Rightarrow (3)$$

$$3\sqrt{xy} + 2y\sqrt{2}$$

(1)
$$(\sqrt{2x} +$$

$$(2) = \sqrt{2}$$

Beispiel 3:

$$(1) \rightarrow (2)$$

$$(2) \rightarrow (3)$$

(1)
$$(2x+1)(3x+2)(x-2)$$

(2) =
$$(6x^2 + 4x + 3x + 2)(x - 2)$$

(3) =
$$(6x^2 + 7x + 2)(x - 2)$$

$$(4) = 6x^3 - 12x^2 + 7x^2 - 14x + 2x - 4$$

$$(5) = 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$$

$$=6x^3-5x^2-12x-4$$

Merk

s der Multiplikation aus dem ersten Schritt

manden der ersten Klammer mit jedem Summanden der as Beispiel oben gilt:

$$(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$$

4. Sch manden zusammen.

Zusatzinformation:

Dieses Verfahren lässt sich au Summanden in einer Klammer er

Beispiel 4:

Ergänz

Übungen zu 1.3.1

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit wie möglich, zusamme

- 3z(5x + 3y + 7z + 1) =
- (2u + 3v)(a + 2b) =
- $2\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \frac{y}{\sqrt{8}} + \frac{z}{\sqrt{18}}\right) =$
- $(\sqrt{5x} + \sqrt{10y})(\sqrt{2x} + \sqrt{5y}) =$

(3x - 5z)(

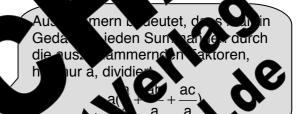
Lehrersellaruckhortalide Lehrersellaruckhortalide

- $(x^2 + 2x + 1)(x^2 2x + 1) =$
- $b^{-2x}(b^x + 1 b^{2x}) =$

Information 1.3.2

Faktorisieren von Summen

Summen, bei denen in jedem Summanden gleiche Faktoren vorkol Ausklammern dieser Faktoren zu einem Produkt aus den ausgekla ren und einer Summe umformen. Dieses Verfahren, das auch als Faktorisieren an auch als Umkehrung der Multiplikation einer Summe mit einem Fakto



Ausklammern von Faktoren

Beispiel 1: x+3xz+xy

enritt 1:

Die einzelnen Summanden in Gedanken in gleiche Faktoren zerlegen.

 $2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2xx + 2 \cdot 6x$

Schritt 3:

Nicht markierte Faktoren verbleiben in der Klammer. f. auf eine 1 achten.

Schritt >

Gleiche Fak in Gedanken ma

 $2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2$

... und vor die Klammer schreiben.

 $12x^{2} + \sqrt{24}x^{2} + \sqrt{27}x^{3} = 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}\sqrt{3}x \cdot x + 3\sqrt{3}x \cdot x^{2} = \sqrt{3}x(2)$

Partielle Wurzeln ziehen.

14 Lehrerselbstverlag

n Summand tritt

 $\sqrt{3}$ x auf.

Übungen zu 1.3.2

Faktorisieren Sie die Summen so weit wie möglich. Achten Sie beim Ausklammer Endergebnis in der Klammer keine Brüche bzw. negative Exponenten o

a)
$$9a + 18ab + 3a^2 =$$

b)
$$yz + 3yz^3 - y^3z =$$

c)
$$25x^3 - 15x^2 + 5x$$

d)
$$\sqrt{8t^2} + \sqrt{72}t^2 - \sqrt{32}t^3 =$$



f)
$$c^{x} + 1 + \frac{1}{c^{x}}$$

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

Aufgabe 1.4

Binomische Formeln

Eine besondere Bedeutung beim Multiplizieren und Faktorisieren von binomischen Formeln zu. Die Anwendung dieser Formeln zieht sich durch alle Ge thematik. Daher sind eingehende Kenntnisse im Umgang mit diesen Formeln ung ob Ihnen diese Thema bearbeiten. Formeln geläufig sind, sollten Sie zumindest die Übungsauf Fehlende Kenntnisse können Sie dann ggf. anhand d tionen aufarbeiten.

Information 1.4

1. binomische Formel	2	omisc Formel	. bincmi 🗪 Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(a -	ab + b ²	$(a + b)(3 - b) = a^2 - b^2$

autgabe

a) In Founder verblie Entstehung le binomischen owell dargestellt. Erläutern Sie die enfor agssche ein (1), (2) an (2). Versuchen Wadabei, so weit wie möglich, Ausdrücke der their achsprache zu verwender.

Erläuterungen

(1) (a + b)² = (a + b) (a + b)

(1)

(1)
$$(a + b)^2 = (a + b) (a + b)$$



(3)
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Führen S erechnungen bzw. Rechensch binomische Formel durch

c) Führen Sie nun die entsprechenden Berechnungen bzw. Rechenschritte für d Formel durch.

$$(1) (a + b)(a - b) =$$

Aufgabe 1.4.2

Ausmultiplizieren von Summen mit Hilfe de

inon ven Formel

2. Schritt

Man order

Man order Binomische Formeln treten bei Aufgal (a + b)(a - b) auf, sondern es ersch lernen, wie man die binomischen F zeitaufwändig schrittweise au verwendet, um effektiv up

a) Anwenden

festlegen von Vorzeichen. Hier: 1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vorzeichen zu achten, die Variablen a und b zu.

aritt Kopf den ersten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und

Ergebnis notieren Hier: a2:

4. Schritt

Kopf 2ab berechnen und s notieren.

 $2ab := 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$

f den zweiten nden einschließlich guadrieren und tieren.

$$y)^2 = 9y^2$$

hreibweise: "a:=" bedeutet, dass man der blen a den Ausdr hts vom Gleichheitszeichen steht,

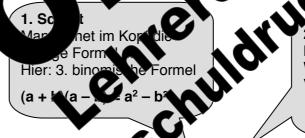
Ursula Pirkl ehrerselbstverlag

b) Anwenden der 2. binomischen Formel

Berechnen Sie den Term (5u – 7v)² wie in Aufgabenteil a). Achten Sie dara binomischen Formel der mittlere Summand 2ab ein negatives V Schritte, die im Kopf durchgeführt werden zunächst noch ausfüh nenen Stellen.



c) Anwenden de



b := s

 $(4r + s)(4r - s) = 16r^2 - s^2$

notieren Hier: $a^2 := (4r)^2 = 16r^2$

14 Lehrerselbstverlag

4. Schritt Im Kopf den zweiten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren Hier: **b**² := **s**²

Berechnen_S ie im Beispiel:

Schritte im

1. Schritt: Formel

2. Schritt: a :=

Schritt: a² :=

chritt:b2 :=

unktionen © Ursula Pirkl

Übung zu 1.4.2

Lösen Sie die Klammern auf. Notieren Sie bei den Binomen direkt das Endergebn Zwischenschritte im Kopf berechnen.

a)
$$(a - 3b)^2$$

b)
$$(a + 1)^2$$

c)
$$(3x + 2y)(3x - 2y)$$

d)
$$(u + 1)(1 - u)$$

e)
$$(\frac{1}{3} w + v)^2$$

f)
$$(\frac{3}{5}x - 5y)$$

$$(\frac{4}{9}r + \frac{3}{4}s)^2$$

k)
$$(\frac{1}{5}a - \frac{3}{5}b)(\frac{1}{5}a + \frac{3}{5}b)$$

1)
$$(\sqrt{10} \text{ a} + \sqrt{5} \text{ b})^2$$

o)
$$(\sqrt{3} \times - \sqrt{3})$$

$$q) \qquad \qquad s)(\sqrt{3t} + \sqrt{2s}) =$$

$$(a-b)^2$$

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

Aufgabe 1.4.3

Faktorisieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formeln

Genau wie beim Ausmultiplizieren von binomischen Formeln kann ei der Ernkehrung dieser hrittweise vorgehen. Rechnung, nämlich aus einer Summe auf eine binomische Ermel z Man sollte dazu die binomischen Formeln auswendig im k en soll hier ebenfalls aben. anhand von Beispielen gezeigt werden.

a) Faktorisieren mit der 1. binomischen E

Zu Faktorisieren ist die Summe 25u2 +

1. Schritt

Man ordnet im Kopf anh der Anzahl der Sug und deren Vorz

Summanden und ordnet das Ergebnis der Variablen b zu.

Hier: **b** := $\sqrt{4}$ **w**² = **2w**

variable a zu.

tiel a = √25u² = 5t.

1 + 20uw → 4w² ≥ (5u + 2w)²

4. Schritt

Man proit im ropf, ob da
tem Sunt anden in
ier: 2ab Hier: 2ab := 2 · 5u ·

Falls das nicht geht, kann die Summe nicht zum Binom umgeformt werden und

5. Schritt

Man notiert, wenn möglich, das Ergebnis.

Hier: (5u + 2w)²

 $4x^2 - 4x + 1 =$ _

1. Schritt. e Formel ist möglich

2. Schritt: a :=

3. Schritt: $b := \sqrt{$

4. Schritt: 2ab :=

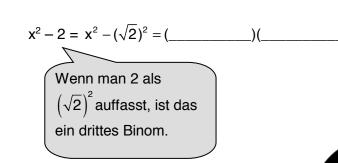
5. Phom notieren

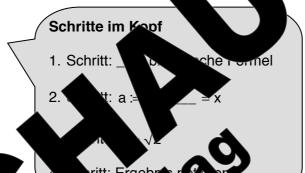
14 Lehrerselbstverlag

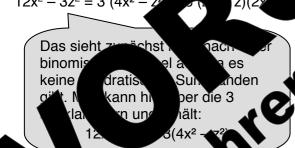
unktionen © Ursula Pirkl

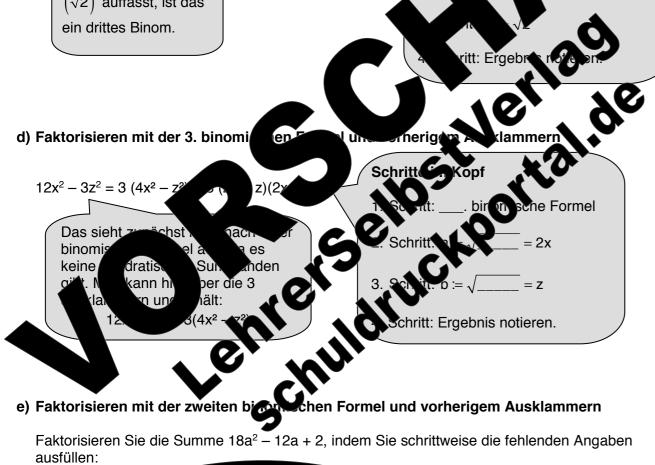
ehrerselbstverlag

c) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel









Faktorisieren Sie die Summe 18a² – 12a + 2, indem Sie schrittweise die fehlenden Angaben ausfüllen:

$$18a^2 - 12a$$

- el ist möglich 1. Schritt: 2. Schritt: a:=
- 3. Schritt: b:=
- 4. Schritt: 2ab := _
- 5. Schritt: Ergebnis notieren.

Übung zu 1.4.3

Faktorisieren Sie die folgenden Summen so weit wie möglich, indem Sie Aus oder die binomischen Formeln anwenden. Vereinfachen Sie das Ergebnis § Hinweis: Bei einer Aufgabe gibt es kein Ergebnis, da keine binomis nd nicht ausgeklammert werden kann. 12g³ - 36g²h + 27gh² = 5 3 ax + 3/4 bx - 3/4 x =

b)
$$6a^2b + 12ab^2 - 18 ab =$$

c)
$$4a^2 + 40ab + 25b^2$$

d)
$$49x^2 - 42xy^2 + 9y^4$$

e)
$$k^4 - 2k^2 + 1$$

$$v^6 - 8v^2$$

i)
$$12g^3 - 36g^2h + 27gh^2$$

j)
$$\frac{3}{4}$$
 ax $+\frac{3}{4}$ bx $-\frac{3}{4}$ x

$$\sqrt{12a}$$

(n)
$$\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{15}xy + \frac{1}{9}y^2$$

n)
$$\frac{4}{9}$$
 u² – 1

$$\frac{1}{2}$$

Ursula Pirkl

Kapitel 1

Aufgabe 1.5

Quadratische Ergänzung

Aufgabenstellungen, wie beispielsweise die Ermittlung der Scheitelpunkt Lösungsverfahren bei quadratischen Ungleichungen, erfordern offeinen Binom umzuformen. Man bezeichnet dieses Verfahren als quad ie schrittweise Vorgehensweise bei der quadratischen Ergänzung wird wieder an. ispiels dargestellt. Die einzelnen Schritte können auch hier bei ein wenig Übung en Sie Schritt für Schritt jeweils die Zwischenergebnisse aus den Sprechblasen an

In diesem Beispiel soll aus dem Term 16x² + 48

1. Schritt

Zuordnen einer passenden binomischen Formel. Anb + vor 48 erkennt man

1. binomische Form

$$16x^2 + 48xy = ($$

gegeberanden a² chi chnen var lee Wertzeichheit zeiten eintragen.

Hier: $a = \sqrt{18x^2} = 4x$ Zienergebnis: $x^2 = 4x$

Hier:
$$a = 4x$$

3. Schritt

Mit Hilfe des zweiten Summanden, der aus 2ab besteht, auf den Wert von b. schließen. Man dividiert dazu den m

4. Schritt

Aus dem Ergebnis von Schritt 3 durch Quadrieren b² ermitteln und das Ergebnis notieren.

Hier: $b^2 := 36y^2$

enis in der Klammer rechts vom chheitszeichen eintragen.

Übung 1.5.1

Ergänzen Sie zum Binom: x² – x + _____. Notieren Sie als Hilfestellung zunäch Rechenschritte, die im Kopf ablaufen, in der Sprechblase. (Kontrol



Übung 1.5.2

Ergänzen Sie zu

e)
$$9p^2 + 6p + ___ =$$

f)
$$x^2 - 6x +$$
 =

$$n$$
)

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag

14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

Ergänzende und vertiefende Übungen

Um die Regeln zur Potenzrechnung und den Umgang mit Binomen zu festigen und Sie die folgenden ergänzenden Übungen bearbeiten. Dies ist besonderg Leistungskurs in Mathematik belegen wollen oder ein Studienfach wählel lem vonesungen in Mathematik obligatorisch sind.

Übung 1.6

Formen Sie die Brüche so um, dass im Nenner keine Wur Terme dabei so weit wie möglich. (Vergl. Aufgabe

- $\sqrt{\frac{a}{b}}$

- Vereinfalte. Sie die

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

Übung 1.8

Kapitel 1

Kürzen Sie den Bruch so weit wie möglich.

a)
$$\frac{(x^n + x^{n+1})^2}{x^{2n}}$$

b)
$$\frac{x^{2n+1}-x^{2n+3}}{x^{n+1}+x^{n+2}}$$

Übung 1.11

gung entstehen. Die Aufgabenstellung dort nnen sicherlich, dass das jedoch zu erten Ausdruck führt, da iuıll erscheint, wodurch eine Division usteht. Man muss diese Terme daher so Nenner vollständig asgekürzt werden kann oder im Nenner ein Ausdru gleich Null wird. Erläutern Sie nhand der Beispiele die Rechenschritte, und wenden Sie nn auf die anderen Aufgaben an.

Beispiel 1

Rech n der Umformungen:

- $(2) \rightarrow (3)_{-}$

14 Lehrerselbstverlag

(3)
$$\frac{2xh + h^2}{h} =$$

$$(3) \rightarrow (4)$$

(4)
$$\frac{h(2x+h)}{h} =$$

$$(4) \rightarrow (5)$$

(5)
$$2x + h$$

Beispiel 2

Rechenschritte

(1)
$$\frac{(x+h)^2 - (x+h) - (x^2 - x)}{h} =$$

(2)
$$\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h}$$

(3)
$$\frac{2xh + h^2 - h}{h} =$$

$$(4) \frac{h(2x+h)}{4h}$$

Für h = 0 ergibt sich der Te
$$\sim 2x$$

tte

Erläutern con Imformatien:

$$\frac{-(x+h)-(x^2-x)}{h} = \longrightarrow (2) \longrightarrow (2) \longrightarrow (4) \longrightarrow (2) \longrightarrow (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow$$

$$(4) \rightarrow (5)$$

Rechenschitte

(1)
$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} =$$

$$(1) \rightarrow (2)_{\perp}$$

$$\frac{x}{x(x+b)} - x+b$$

$$(2) \frac{x(x+b)}{x}$$

 $(3) \rightarrow (4)$

$$\frac{1}{1}$$

$$(4) \rightarrow (5)_{-}$$

(a)
$$\frac{-h}{h x(x+h)} =$$

$$(5) \rightarrow (6)$$

$$(6) \frac{-1}{x(x+h)}$$

sich der Term $-\frac{1}{v^2}$

Beispig

Rech

Erläutern der Umformungen:

$$(1) \to (2)$$

Ursula Pirkl

(2)
$$\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = (2) \rightarrow (3)$$

(3)
$$\frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

Kapitel 1

$$(3) \rightarrow (4)$$

$$(4) \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$(4) \rightarrow (5)$$

$$(5) \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$(5) \rightarrow (6)$$

$$(6) \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

a)
$$\frac{2(x+1)^{-1}}{(x+1)^{-1}}$$

b)
$$\frac{(x+h)^{5}}{}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x+h+1}{h} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$3x^2$$
; $-\frac{1}{(x+1)^2}$; $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$; $4x$; $-\frac{2}{x^3}$; $-\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$





Aufgabe 1.6

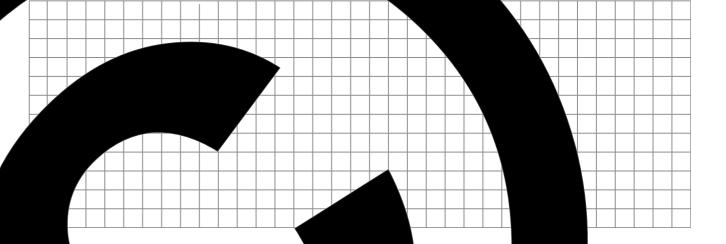
Ergänzende Betrachtungen zu Binomen höherer Ordnung

a) Multiplizieren Sie den Term (2x + 3)4, ohne Verwendung von Hilfs Fuß aus. Wenn Sie alles richtig umgeformt haben, erhalten Sie als Ergebnie



 $(a + b)^3 =$

echnungen.



- 54 -

c) Ergänzen Sie die Tabelle, indem Sie das für $(a + b)^0$, $(a + b)^1$ und $(a + b)^2$ begannte anhand Ihrer Ergebnisse aus b) fortsetzen.

$(a + b)^0$	=					1			
$(a + b)^1$	=				а	+	b		
$(a + b)^2$				a²	+	2ab	+		
$(a + b)^3$	=			+		+		-	
$(a + b)^4$	=		+		+				•
$(a + b)^5$	=	 +		+					 +

Geben Sie an, wie sich die Potenzen, gelese

- (1) Potenzen von a:
- (2) Potenzen von b

Die Koeff indem

Man nennt dieses Dreied elsche Dreieck" und die Zahlei

Binomialkoeff ezeichnet. Die Zahlenwerte en Dreieck

Summenbildung ermittelt werden, können z mit dem Tasch nCr .

 $\binom{9}{5} = 9 \text{ nCr} = 126$

Ursula Pirkl

Tastenbezeichnung nCr stammt von der edeutung des B fizienten er Wahrscheinlichkeitsrechnung, vol

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kenntnis über die Koeffizienten und Potenz folgendes Produkt.

$$(a + b)^{10} =$$

Information 1.5

Berechnet man den Ausdruck (a + b)ⁿ

Algemeine Formulierung

$$(a + b)^{n} = \binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{n} a^{n-1}$$

$$+ \dots + \binom{n}{n-1} a^{1} b^{n}$$

$$+ \dots + \binom{n}{n} b^{n} = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{n} a^{n-1} b^{n}$$

über die Binomialreihe auf die Anfangsaufgabe (2 + 3x)⁴ und berechnen Sie anschließend mit dieser Methode ebenfalls

$$(2+3x)^4 = \binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}2^3 \cdot 3x + \binom{4}{2}2^2 \cdot (3x)^2 + \binom{4}{3}2 \cdot (3x)^3 + \binom{4}{4}(3x)^4$$

$$^{3} + 1.81x^{4}$$

hrerselbstverlag

59

Raum für Notizen





02-033-279

Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichung die Sichunge	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör er Gres	104
Kapitel 7 Ganzrational Ank hen Zamanöherek Ganzes	115
Kapitel 8 Die Praction	127
Kajul 9 rigumetri de Funktion	135
nitel 10 E vnential- und @anthmusfr.n. vonen	145
Nazitel 11 Vertiefende Betrachturg von Betragsungleichungen	169

zu Algebra und Funktionen Gesamty iert erlernen (Best

ghts reserved.

, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen

- 59 -

63

Kapitel 2: Grundlegendes zu Gleichungen

Aufgabe 2.1

Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare @

Das Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare G en, haben Sie bereits in der Sekundarstufe I gelernt. Hier wenden Sie nun die Ih erfahren an. Die Aufgabe ist gleichzeitig eine Übung zur Wiederholung der B and der binomischen Formeln. Versuchen Sie bei der Lösung vollständig auf den E ners zu verzichten. Zur Kontrolle ist die Lösungsmenge jeweils angegeben.

a)
$$2x = x$$
 (0)

c)
$$(x-1)^2 = x^2 - 1$$
 {-24}

e)
$$\frac{3}{4}v - 2 = 1$$
 {-9}

g)
$$2x + (9-x)^2 - 1 - (12-x)^2 + 2x = 0$$
 {6} $h = -\frac{x}{3} = -\frac{x}{3} = \frac{x}{3} = \frac{$

i)
$$2(4\frac{1}{2}x + 2\frac{3}{4}) = \begin{cases} 7 \\ 2x \end{cases}$$
 10 x $(5\frac{3}{2}x) = 2(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})$ $\{-\frac{1}{5}\}$

k)
$$(1,5)$$
 $(1,5)$ $(1,5)$ $(2)^2 - 38,08$ (-2) $(3,\frac{\pi}{3})^2 - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}x$ { }

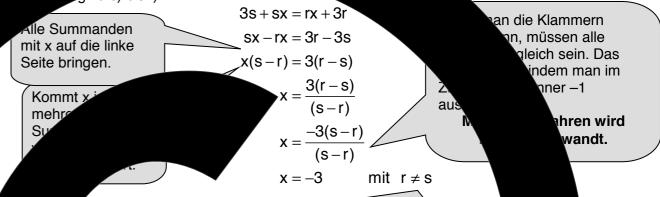
Be an olgenden deichungen sindt aben der Lösungsvariablen x weitere Variablen, sog. Parameter, enthalten. D.h., in der neisten Fäller besteht die Lösung nicht nur aus einer Zahl, sondern enthält auch noch den Parameter. Lösen Sie Gleichungen wie gewohnt jeweils nach x auf. Decken Sie dabei das Beispiel unten ab, und versuchen Sie die Gleichungen zunächst ohne diese Hilfe zu bearbeiten. Die Lösungen sind jeweils als Kontrollergebnis gegeben.

a)
$$3x + 7 = 62$$
 b) $6x - 2a = 2x + 2a + 4b$ $x = a + b$

c)
$$3m$$
 $x + 5b = 5a + xb$ $x = 5$

$$t = 3sx - 7rt \qquad x = -\frac{t}{3}$$

zu c) bis f):



man beim Kürzen den Zähler und Nenner lie Klammer r) dividiert, darf die Klammer nicht Nu so dürfen r nd s nicht den gleichen Wert annehr

14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

Aufgabe 2.3

Ergänzendes Vertiefungsthema Bruchgleichungen

In dieser Aufgabe werden Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichunge Sie sich anhand des Beispiels die prinzipielle Vorgehensweise bei diesen typ und erläutern Sie anschließend den Lösungsweg im Beispiel auf der folgender

Information 2.1: Beispielaufgabe zu Bruchgleichungen

	Rechnung	Bemer	en à Chnun
(1)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2x-10}$	(1) 2) Ne	en soweit wie mäg, h faktorisier
(2)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2(x-5)}$	(3) ***	enn möglich, Euche kürzen.
(3)	$\frac{5-2x}{5-x}-1 = 2-5$	(4) Al	le Prücke auf den Haup venner bringen. V 5 x
(4)	$\frac{5-2x}{5-x} = \frac{5-x}{5-x}$	(4) (£ 6) A(1) g: B	eichung m*t u. v. HN multiplizieren. Bei Minus vir Bruch → Klammer setzen
(5)	$5 \cdot 2(-5 - x)$ -5	(s → (6) Kl	amin a uuflösen.
(6)	2x5	(6) - (8)	echung nach x auflösen.
	-x = -5		
(8)	x = 5	A htung:	 x = 5 darf als Lösung nicht in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, da sich Null im Nenner ergibt. Daher muss ein Definitionsbereich angegeben werden.

Definitionsbereich nung durch Nullsetzen des Nenners.

ıng überschneiden sich.

 $\Rightarrow L=\{\}$ Es existien eine Lösung!

Zusammenfassen der Schritte bei der Lösung von Bruchgleichun

- nen so weit wie möglich fakt Die Summen in pegebenenfalls kürzen.
- Den Ha Summanden auf den Hauptnenn
- 3. Die multiplizieren.
- 4. Di
- 5. sbereich bestimmen.
- 6. ereich mit dem Ergebnis vergleichen und die Lisungsmenge ang

Erläutern Sie jeweils die einzelnen Lösungsschritte:

(1)
$$\frac{8+x}{15+5x} - \frac{5}{9+3x} = \frac{4}{15}$$

(2)
$$\frac{8+x}{5(3+x)} - \frac{5}{3(3+x)} = \frac{4}{3.5}$$

(3)
$$\frac{3(8+x)}{15(x+3)} - \frac{5\cdot 5}{15(x+3)} = \frac{4(x+3)}{15(x+3)}$$

$$(4) 3(8+x) - 25 = 4(3+x)$$

$$(5) 24 + 3x - 25 = 2$$

Kapitel 2

(3) $\frac{3(8+x)}{15(x+3)} - \frac{5 \cdot 5}{15(x+3)} = \frac{4(x+3)}{15(x+3)}$ (4) 3(8+x) - 25 = 4(3+x)(5) 24 + 3x - 25 = 2(6) -1 $1L = \{-\frac{2}{2}\}$ IL = $\{-\frac{2}{2}\}$ $\frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-3}$ (a) $\frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-3}$

a)
$$\frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-2}$$
 L= {4}

b)
$$\frac{4}{}$$

$$\frac{x-1}{4 + 2x} - \frac{x}{3x + 6} = \frac{x}{4x + 8}$$

e)
$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x-3}{x-1}$$
 L= {-5}

f)
$$\frac{2x+2}{x^2+2}$$

$$\frac{24x+6}{18x+6} + \frac{3x-6}{9x^2-1}$$
 L = $\frac{2}{3}$

-62-





Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichul und Greichunge	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör er Ges	104
Kapitel 7 Ganzrational Ank men an höheret Grues	115
Kapitel 8 Die Land unk	127
Kajul 9 rig metri de Funktion	135
itel 16 E nential- und Ganthmusfanktonen	145
Natitel 11 Vertiefende Betrachtur Betragsungleichungen	169

Gesamtw (Best

Si

ghts reserved.

A, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ

lehrerselbstverlag.de

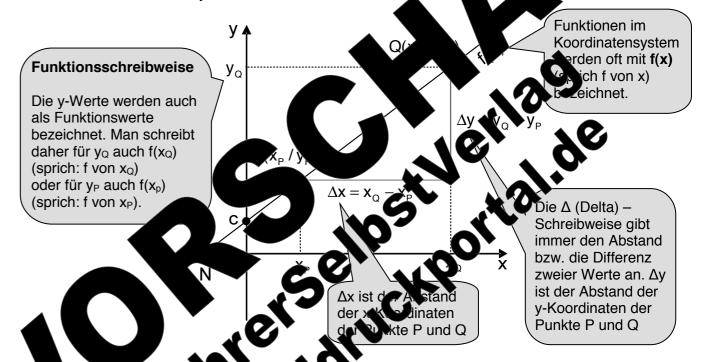
www.f-druck.de

Kapitel 3 Lineare Funktionen - 63 -

Kapitel 3: Lineare Funktionen

Aufgabe 3.1

Verdeutlichen Sie sich die folgenden grundlegenden Informationen Stationen bz. aren Funktionen im Koordinatensystem.



Be hnunger

Tin Koordinater, væm, bei dem die Achsen senkrecht zueinander verlaufen wird 's kartesisches Koordinatensystem bezeichnet.

Die honzentale Achse, hier die x-Achse, wird auch als Abzisse begeltstet.

Die **vertikale Achse**, hier die y-Achse, wird auch als **Ordinate** bezeichnet. Diese Achse kann auch mit dem Namen der abgebildeten Funktion, hier werden.

verwendet man oft a.
Schreibweise aus, dass a.
Wertes für x in die Funktionsy oben)

Ten, werden in der Regel mit f(x)
Funktionen unterscheiden zu können,
vn drückt durch diese
Nettion durch Einsetzen eines
Tet wird. (Vgl. Sprechblasen

Abstände: $\Delta x = x_0 - x_0$

 Δ y der y-Koordinaten der Punk Δ y = y_Q - y_P

stand d der Punkte P und Q (Pythagora $= \Delta x^2 + \Delta y^2$

abschnitt c: Die Stelle c, an der die Gerant die y-Achse schlichen dieses Schnittpunktes sie er A(0/c)

14 Lehrerselbstverlag

69

Steigung m:

Die Steigung einer Funktion ist durch das folgende Ve

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

Verdeutlichen Sie sich anhand der A



Funkti durch die Steigung m und den y-

y = mx + c oder f(x) = mx + c

(Oft wird anstelle von c auch ein b ve

Nullstelle N

70

an der Stelle x₀ von einer G sen Punkt als **Nullstelle** N y-Koordinate annimmt, können die Koordina telle mit dem f(x) = 0 berechnet werden.

Man sagt auch: "Die Funktion wird Null gesetzt".

Um die Nullstelle zu erhalter tehende aus dem Ansatz Gleichung mx + c = 0 na

Zeichnen von Geraden:

Kapitel 3

Um eine Gerade in einem Koordinatensystem 2 tigt man hnen. keinen Taschenrechner und auch keine Wertetab ine Gerade direkt aus der Kenntnis von Achsenabs nen kann, wird im Folgenden an zwei Beispielen Sie sich die der Übung 3.1 an. Vorgehensweise, und wenden Sie die M

Beispiel Zeichnen von f(x) = -2x + 1Geraden

$$f(x) = -2x + 1$$
$$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$$



abschnitt c im Koordinatensystem.

en Wert für die Steigung m als Bruch dar. Ein orzeichen kann man dann dem Zähler oder Nenner den. Bedenken Sie dabei, dass man jede Zahl als Bruch mit

$$m_{_{f}} = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y - Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x - Richtung}} \right)$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y - Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x - Richtung}} \right)$$

Schritt 3: Zeichnen Sie n y-Achsenabschnitt c durch ahl von Kästchen jeweils das Abzählen der en lie danach die Steigungsdreieck ein angegebenen Geraden

Übung

des Taschenrechners oder einer Werl Funktionen

auf der folgenden Seite gegebene Kog em ein

- b) Zeichnen Sie die Gerade ebenfalls in diesem Koordinatensystem ein. x = -2
- c) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem, die Schreibweise Δx ?



The Bedeutung hat, because automorphism in English einem Ko Chatensystem de Guotient m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

In zwis kin Geraden

Leichnen dur graden die Perschriften, und füllen Sie die jeweiligen Lücken

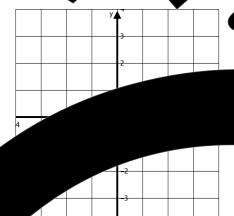
— Crade

Zeichnen d) Welche Bedeutung hat, but

Aufgabe 3.2

Lageba

Ergänze



Geraden zueinander verlaufen.

Merke: Zy $nd h(x) = m_h x + c_h sind$ ür die Steigungen gilt: m_h = m_a Geraden



Zeichnen Sie Koordinatens Sie an, wie die Geraden zueil

$$g(x) = 3$$

Wenn Sie ebenf

Lineare Funktionen

 $\frac{2}{2}$ und m_h=

Aufgabe 3.3

Schnittpunkte von Geraden

Die beiden Schpi

Schnittpunkt zu berechnen, verwendet me Gleichsetzungsverfahren. Man auch mit dem Additions- bzw. Einsetzungsverfahre

okts zwischen zwei Funktione Bereche Merke: = g(x)

Schritte bei der Berechnung des Sch weier Geraden. Verd g entsprechender Aufgaben im Heft, d lie Dokumentation egs stets den satz notieren.

72

Berechnen des Schnittpunktes:

Schritt 1: Notieren des Ansatzes. g(x) = h(x)-2x + 3 = 0,5x + 1Schritt 2: Gleichsetzen der Funktionsterme.

Schritt 3: Auflösen der Gleichung nach x.

Schritt 4:

Berechnen des Schnittpunkts d Funktion

Aufgab

Nullste inung der Nullstellen der schon angeführte Punktionen $g_1(x) = -2x + 3$ und $g_2(x) = 0.5 x + 1$, und mit der Zeichnung von Aufgabe 3.2 a).

Gerade g₁(x)

Gerade $g_2(x)$

Nullstelle g₂: N₂(_

Schritt 1: Schritt 1:

Schri

Rechnerische Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus zwei gegel

Beispiel 1:

Gegeben sind die Punkte P(-2 / 3) und Q(2 / 1)

Schritt 1

Die x- und y-Koordinate des gegebenen Punkts notieren, bzw. bei zwei gegebenen Punkten denjenigen mit den einfacheren Zahlen auswählen. (Es spiel das Ergebnis keine Rolle w Punkt man verwendet.)

Schritt 3

Die allgemeine

Gerag

$$=\frac{2}{-4}$$

$$x - mx = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 1 - (-1) = 2$$

ne gesuchte Chung erg sich, wenn man m und call allgemeine Form y = mx einsetzt.

Funktion:
$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

en sind die Punkte A(3/2) und B(2/4).

14 Lehrerselbstverlag

Nulls

Hier ist die Information über die

Steigung in der Angabe, dass

die Gerade g parallel zur

Geraden h sein soll, verst

Daher verwendet man d

Ansatz: $m_h = m_a$

b) Gegeben ist die Gerade h(x) = -3x + 5. Gesucht ist die zu h parallele Gerade g/a den Punkt P(2/2).

x = ____

y = ____

 $m = m_h =$ ____

c = y - mx = 0

Funktion: g(x) = -3x + 8

c) Gegeben ist die Gerade h(x

x = ___

Punkt P(2 / 3,5).

Funktion: $g(x) = \frac{5}{4}x + 1$

d) Gesus rade g(x) durch den

 m_{w1}

C = V

halbierende leichuna f(x) =nd damit die Stel

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag

e) Gesucht ist die zur zweiten Winkelhalbierenden parallel verlaufende Gera Punkt P(-1 / -3).

x = ____

y = ____

c = y - mx =

Funktion: $g(x) = \frac{1}{2}$

Raum für Notizen



Ergänz

14 Lehrerselbstverlag Funktionen © Ursula Pirkl

-73-

Aufgabe 3.6

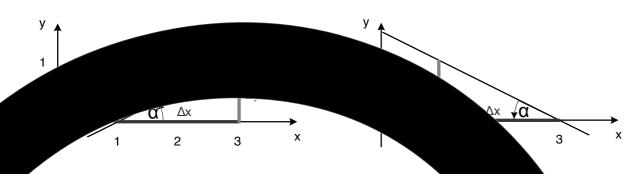
Winkel bei Geraden

a) Wiederholung Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Recherchieren Sie die Definition von sin, cos und tan im rech illen Sie die entsprechenden Felder aus.



Bei den beiden abgebildeten Gerade. (x) = 0.5 x - 1 und h(x) = -0.5 x + 1.5 stellt das eingezeichnete Steigungsdreieck jeweils ein rechtwinkliges Dreieck dar.



Ordnen Sie in de \triangle y jeweils die Ankathete $\widehat{\mathbf{A}}$ athete Gk zu und begründ ung gilt, wenn m die Steigung

$$tan(\alpha) = m$$

Be

78

Der Zahlenwert von α lässt sich dann mit dem Taschenrechner und der Faktion erechnen. (Bei den meisten Taschenrechnern über der tan-Taste mit shift oder involgen.) Taschenrechner auf "deg" einstellen).

Aus der Beziehung oben folgt:

$$\alpha = \tan^{-1}(m)$$

für h(x) gilt dann: $\alpha = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.6^{\circ}$

$$x(x) g = \tan^{-1}(-0.5) \approx -26.6^{\circ}$$

inse auch mit Bonspat.

ad xonses: α = ta 2 jn

ad xonses: α = ta 2 jn

ad xonses: α = ta 2 jn

and xonses: α = ta 2 jn

Übung 3.3

Kapitel 3

Gegeben ist die @

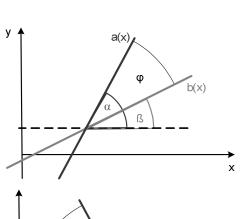
a) Berechnen Sie

Information 3.1

Schnittwip

Wenr entstehen paarweise zwei Winkel, ner kleiner als 90° sich zu 180° ergänzen. Als Schnittwin und Ilgemeinen der einer als 90° bezeichnet. Man kann die zwischen den ilfe der Steigungswinkel berechnen.

a) Beide Geraden steigen oder fallen:

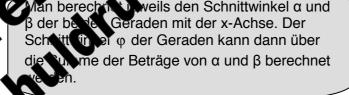


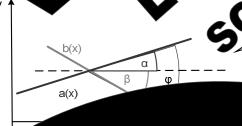
Man berechnet jeweils den Schnittwi und β der beiden Geraden mit

Der Schnittwinkel φ der beid kann dann über die 🛭 berechnet werden.

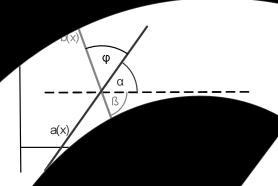
steigt | Alan berecht | Sinweils den Schnittwinkel α und β der base | Geraden mit der x-Achse. Der Schnitt | Tale | ϕ der Geraden kann dann über die Sin me der Beträge von α und β berechnet | α in β h. | Schnittwinkel zwischen a(x) | α |

b) Eine Gera





$$\varphi = |\alpha| + |\beta|$$



Schnittwinkel zwi

$$\phi = 180^{\circ} - (| a)$$

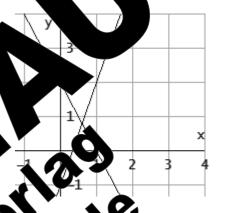
Übung 3.4

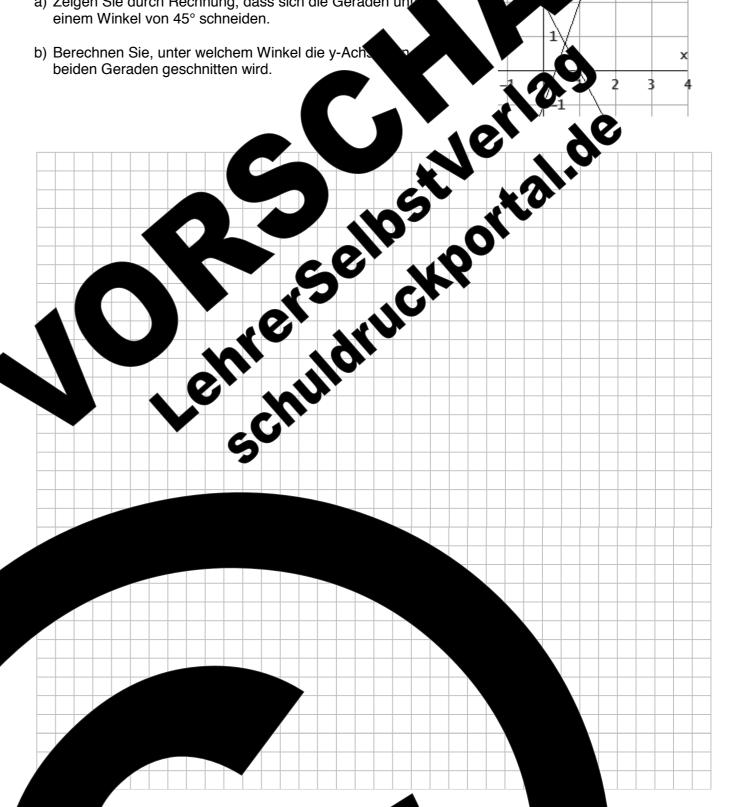
Kapitel 3

Gegeben sind die beiden Geraden

$$a(x) = -2x + 2$$
 und $b(x) = 3x - 1$

- a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Geraden un einem Winkel von 45° schneiden.
- b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die y-Ac beiden Geraden geschnitten wird.





nde Übungen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkl Grundlegend zu Algeb und Franks, onextoselb corga. At externer.

(x)= (x) - (x) $f(x) = \sin(x)$ Kapite Quadratische und biquad n und Ungleich

83

Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome Kapitel 2 59 Grundlegendes zu Gleichungen Kapitel 3 Lineare Funktionen 63 le Funktion le Funktion le Funktion vential- und Conthmusfrontenen Assitel 11 Vertiefende Betrachture van Betr

zu Algebra und Funktionen Gesamty iert erlernen (Best

ghts reserved.

, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

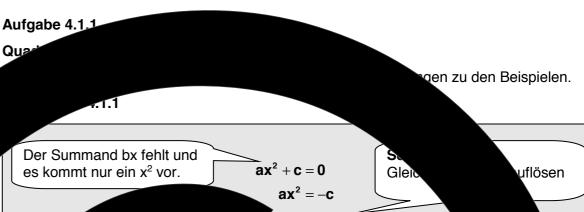
Kapitel 4: Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ut

In der Sekundarstufe I haben Sie bereits Lösungsverfahren für diese lernt. Sie wissen sicherlich, dass für die Lösung quadratischer Gleichungen abc-Formel und die quadratische Ergänzung angewandt werden kann. Dieser V nicht immer notwendig. Im Folgenden lernen Sie, wie man quadratische veils einfachsten und damit für Rechenfehler am wenigsten anfälligen Verfal

Quadratische Gleichungen können in unterschiedlich



einzelnen Verfahren vorgestellt.



14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

Begründung, warum es eine positive und eine negative Wurzel gibt.

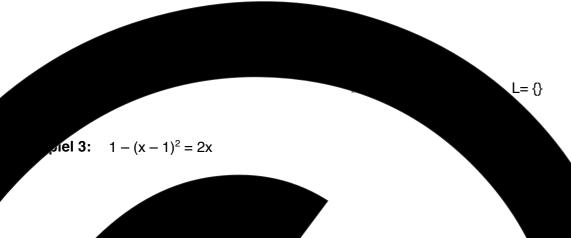


In den beiden f angegebene

Beispi

-78 -

Beispiel 2: $3x^2 + 6 = 0$



 $L = \{0\}$

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

Aufgabe 4.1.2

Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

Lesen Sie die Information zum Lösen dieses Gleichungstyps, und gsweg auf die Aufgabenstellung von Beispiel 2 an.

Information 4.1.2



3x = 9

e Gleichung $\frac{1}{2}x^2 = 2x$

rechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung. (Kontrollergebnis $x_1 = 0$; $x_2 = 4$)

b) Be m man bei der Lösung der teilen darf. Gleich

14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

Aufgabe 4.1.3

-80-

Anwenden der pg-Formel bei quadratischen Gleichungen der Form ax + bx +

Lesen Sie die Information, und arbeiten Sie anschließend die Beispiele d fehlende Angaben. Auf die Anwendung der abc-Formel wird im Rahmen en verzichtet, da es für das Lösen von quadratischen Gleichung dieser Form ausz eine l zu kennen.

Information 4.1.3



Beispiele

a)
$$x^2 + 6x = 36 = 0$$

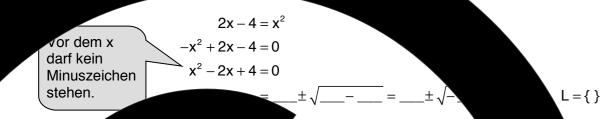
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\left(--\right)^2 + 1} - \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = 8 - \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} + - - = 3 \quad \forall \quad x_2 = -\frac{3}{2} - - = -6$$

$$L = \{3; -6\}$$

Anmerkung:

ungsmenge hier leer ist.



Begründung

c) Bestät 2 ösung x = 3 ergibt, indem sie fehlend rgänzen.

$$x^{2} - 6x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \underline{\pm} \sqrt{\underline{}$$

$$x_{1,2} = \underline{\pm} 0$$

$$x_{1,2} = \underline{}$$

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag

Aufgabe 4.1.4

Kapitel 4

Information 4.1.4



Beispiel:

$$2x^4 - 6x^2 + 4 =$$

Substitution $x^4 = z^2$ $x^2 = z$

ormel anwenden

 \wedge $z_2 = 2$ \Rightarrow $z_1=1$

gen für z

titution $z = x^2$ rechnen

 $x_{3,4} = \pm \sqrt{2}$

 \Rightarrow $x_{1,2}=\pm 1$

 $\sqrt{2}$

14 Lehrerselbstverlag

Aufgabe 4.1.5

-82-

Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form

Lesen Sie die Information, und bearbeiten Sie die Beispiele.



direktes Ablesen: $\Rightarrow x_1 = -4$; $x_2 = -4$

b)
$$(3x + 6)(2x - 1) = 0$$

 $3x + 6$

Achtung

Da man den Tel n der Form $(x-5)^2=0$ (x - 5) (x - 5) schre ennt man, dass die Lösung dop $x_{1,2} = 5$

Achtung!

Hier geht keine Fallunterscheid der rechten Seite des Gleichhei keine 0 stek Man muss die Kla Zeigen Sie, das ausmu leichung ist.

Übung 4.1

ingen durch Bestätigen Sie die angegebenen Lösungen der quadratischen und Rechnung.

a) $5-3x^2=22$ b) $x^2-7x+2=10$ c) $(x+2)(x-5)=0$ d) $(x+5)(x+4)=20$ e) $4x^2+12x=0$ f) $9x^2+12x+4=0$ g) $3x^2=5x$ h) $0,5x^4-x^2=0$ i) $x(2x+12)=0$ j) $x(3x^2+12)=0$ l) x				
c) $(x + 2)(x - 5) = 0$ d) $(x + 5)(x + 4) = 20$ e) $4x^2 + 12x = 0$ f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ g) $3x^2 = 5x$ h) $0,5 x^4 - x^2 < 0$ i) $x(2x + 12) = 0$ j) $7 > 5x = 0$ L= $\{0; 5/2\}$ L= $\{0; 5/2\}$ L= $\{0; 5/2\}$ i) $x(2x + 12) = 0$ j) $x > 5x = 0$ L= $\{\pm 3; \pm 2\}$ L= $\{\pm 3; \pm 2\}$ L= $\{\pm 3; \pm 2\}$ L= $\{-5/6; \pm 1/2\}$ q) $(x + 4)^2(x - 4)^2 = 0$ L= $\{4; -4\}$ L= $\{-5/6; \pm 1/2\}$		a)	$5 - 3x^2 = 22$	= {}
d) $(x + 5)(x + 4) = 20$ e) $4x^2 + 12x = 0$ f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ g) $3x^2 = 5x$ h) $0.5 x^4 - x^2 = 40$ i) $x(2x + 12) = 0$ j) $(x + 3x) = 0$ L= $\{\pm 2\}$ L= $\{\pm 2\}$ L= $\{\pm 3, \pm 2\}$ L= $\{0, 5/4\}$ L= $\{\pm 0, 5/4\}$ L= $\{\pm 1, 6/4\}$ L= $\{\pm 1, 6/4\}$ L= $\{4/4\}$ L=		b)	$x^2 - 7x + 2 = 10$	
e) $4x^2 + 12x = 0$ f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ g) $3x^2 = 5x$ h) $0.5 x^4 - x^2 < 0$ i) $x(2x + 12) = 0$ j) $2x + 3x = 0$ l. $(3x^2 + 1) = 0$ l. $(3x^2$		c)	(x+2)(x-5)=0	L= {\-2;5}
f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ g) $3x^2 = 5x$ h) $0.5x^4 - x^2 = 0$ i) $x(2x + 12) = 0$ j) -6 i) $x(2x + 12) = 0$ L= $\{\pm 3; \pm 2\}$ L= $\{0; 5/4\}$ L= $\{\pm 3; \pm 2\}$ L= $\{\pm 3; \pm 2\}$ L= $\{\pm 3; \pm 2\}$ L= $\{0, 25; -0.5\}$ L= $\{1/6; -1\}$ L= $\{0\}$ D) $(x + 4)^2(x - 4)^2 = 0$ L= $\{4; -4\}$ D) $(x + 2)^2(x - 2)^2 = 9$ L= $\{\pm 7; \pm 1\}$ L= $\{0\}$ L= $\{-5/6; 1/2\}$		d)	(x + 5)(x + 4) = 20	L= {0; -9
g) $3x^2 = 5x$ h) $0.5 x^4 - x^2 = 0$ i) $x(2x \pm 12) = 0$ j) $2x + 1 = 0$ l. $(3x^2 + 1) = 0$ l. $(3x^2 + 1)$		e)	$4x^2 + 12x = 0$	16) Y
h) $0.5 \times ^4 - \times ^2 \times 20$ i) $x(2x + 12) = 0$ j) $2 \times 3x = 0$ $13x^2 + 0$ l) $x(8)$ $1 \times (8)$ $1 \times (8)$		f)	$9x^2 + 12x + 4 = 0$	2/3}
i) $x(2x \pm 12) = 0$ j) (-6) L= $\{\pm 2\}$ L= $\{\pm 3;\pm 2\}$ l) $x(8)$ L= $\{0,25;-0,5\}$ L= $\{1/6;-1\}$ h) $x^2 - 3(a^2 + 1) = 8a^2 + 9a$ L= $\{0\}$ o) $(x + 4)^2(x - 4)^2 = 0$ p) $(x + 2)^2(x - 2)^2 = 9$ L= $\{\pm 7;\pm 1\}$ q) $(x + 5)^2(x = 5)^2$ L= $\{-5/6; 1/2\}$		g)	$3x^2 = 5x$	L= {0; 5/
j) $(x + 3)^2 = 0$ $(x + 4)^2 + 3 = 0$ $(x + 2)^2 + 3 = 0$ $(x + 5)^2 + 3 = 0$ $(x + 2)^2 + 3 = 0$ $(x + $		h)	$0.5 x^4 - x^2$	L=
L= $\{\pm 3;\pm 2\}$ L= $\{0,25;-0,5\}$ L= $\{1/6;-1\}$ L= $\{0\}$ O) $(x + 4)^2(x - 4)^2 = 0$ D) $(x + 2)^2(x - 2)^2 = 9$ C= $\{\pm 7;\pm 1\}$ L= $\{0\}$ L= $\{4;-4\}$ L= $\{\pm 7;\pm 1\}$ L= $\{\}$ C= $\{-5/6;1/2\}$		i)	x(2x + 12) = 0	(); –6}
I) $x(8)$ (2x + 1)(3x + 1) = 2 (3x + 1)(3x + 1)		j)		L= {±2}
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		4	$13x^2 + 100$	L= {±3;±2}
The second seco		I)	x(δ)	L={0,25; -0,5}
o) $(x + 4)^{2}(x - 4)^{2} = 0$ $L = \{4; -4\}$ p) $(x + 2)^{2}(x - 2)^{2} = 9$ $L = \{\pm 7; \pm 1\}$ q) $(x + 5)^{2}(x - 5)^{2}$ $L = \{-5/6; 1/2\}$		77)	(2x + 1)(3x + 1) = 2	L= {1/6; -1}
p) $(x + 2)^2(x - 2)^2 = 9$		Пу	$(a^2 - 3(a^2 + 1) - 8a^2 + 9a)$	L= {0}
q) $(x + 5)^{2}(x - 5)^{2}$ r) $L = \{-5/6; 1/2\}$		0)	$(x + 4)^2(x - 4)^2 = 0$	L= {4; -4}
r) L= {-5/6; 1/2}		p)	$(x+2)^2(x-2)^2=9$	$L = \{\pm 7; \pm 1\}$
		q)	$(x + 5)^2(x - 5)^2$	L= {}
- {6; 0}		r)		L= {-5/6; 1/2}
	1			-{6; 0}

Quadratische Gleichungen mit einem Parameter, also mit gehobe keitsgrad.



90

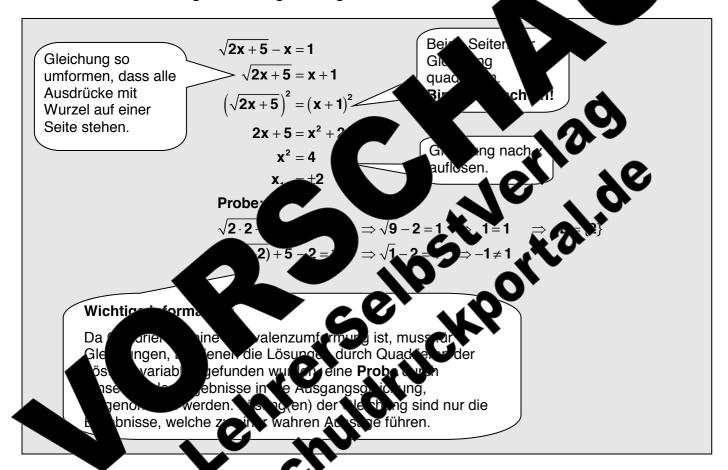
 $5)^2 - c(2c + 3) = c + 1$

(1+t)(2+t)(3+t) - (t-1)(t-2)(t-3) = 1

Aufgabe 4.2

-84 -

Erweiternde Betrachtungen: Wurzelgleichungen



Übuna 4.2

Lösen Sie die folgenden

a)
$$\sqrt{2}$$

$$L = \{2\}$$

$$\sqrt{3x-2}$$

$$L = \{2;1\}$$

$$\sqrt{8x+9}-x=-7$$

$$L = \{20\}$$

f)
$$\sqrt{4(x+3)} = x$$

$$L = \{6\}$$

g)
$$3x + \sqrt{}$$

$$L = \{-2\}$$

$$L = \{0;8\}$$

Aufgabe 4.3

Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen und

Bei quadratischen Ungleichungen führt die Anwendung der p,q-Forl Fehlern bei der Bestimmung der Lösungsmenge. Daher ist es günstig, wer genannte quadratische Ergänzung verwendet (Vgl. Kapit Verdeutlichen Sie sich den Lösungsweg anhand der folgenden Beispiele.

$$x^2 + 6x > 0$$

$$46x > -$$

$$-6x + 9 > -5 + 9$$

$$(x+3)^2 > 4$$

Am besten forman die guar vitsche Und saung so um stat auf der linken Seite de. Teil steht vien in zum der ergänzte im vine. Hier sus einert man also auf jeder Seite der Ground

**A-6x >=

Schrit*

In diese Schwit führt man ist guadratische Undanzung durch. Man erhält auf der linken Seite er sinorm, wenn ist stiert wird. It am addiert man hier auf jeder Seite der ung 9.

**A-6x + 9 > -5 + 9

**Nun fass man die linke beiterals Binom zusammen.

(x+3)² > 4

chsten Schritt zieht man auf beirb ine lineare Ungleichung.

at 5: Weglassen der Betragsstriche. Hier gilt in G ngleichungen gilt folgende Regel.

> von Gleichungen oder Ungl sstriche weg, indem man den A agsstrichen in Klammern setzt und nal ein Minus (-) vor die Klammer sch erhält so 2 neare Ungleichungen.

$$+(x+3) > 2$$
 $-(x+3) > 2$

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

14 Lehrerselbstverlag

Schritt 6: Beide Gleichungen getrennt voneinander lösen.

$$x + 3 > 2$$
 \forall $-x - 3 > 2$
 $-x > 5$

Lösung

$$x > -1$$

Schritt 7: Darstellung der Lösungsmenge einer linearen



Beispiel 2:



$$(x+1)>2$$
 oder $-(x+1)>2$
 $(x+1)>2$ oder $-x-1>2$
 $-x>3$

en Sie die Lösungsmengen von Beispiel 2 aus Aufgabe 4.3 au rahl dar.



Ursula Pirkl hrerselbstverlag Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend zu Algeb

selb

Kapite

 $f(x) = \sin(x)$

Ganzrationale Funktion 2

02-033-279

Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichunge de Sichunge de Sichunge	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör gen Gres	104
Kapitel 7 Ganzrational Ank hen Anöherek Grues	115
Kapitel 8 Die Praga Vink	127
Kajul 9 rig metri le Funktion	135
nitel 10 Ennential- und Oganthmusft autonen	145
Vertiefende Betrachtur Betragsungleichungen	169

zu Algebra und Funktionen Gesamty iert erlernen (Best

ghts reserved.

k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Gerg

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 5 Ganzrationale Funktionen 2. Grades

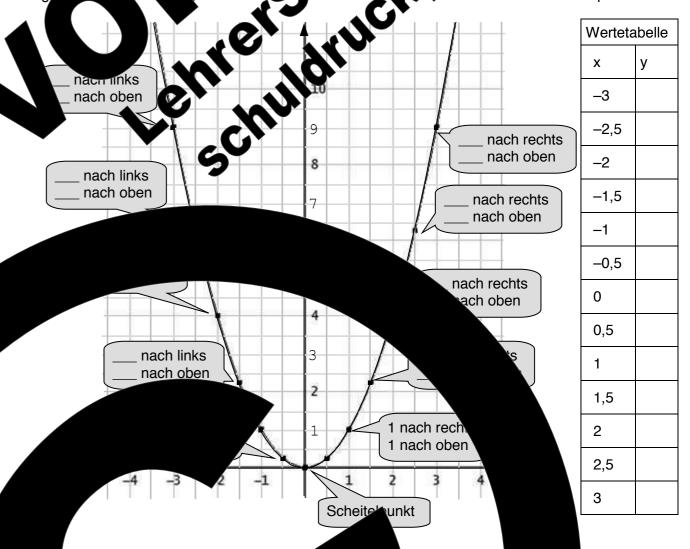
Kapitel 5: Ganzrationale Funktionen 2. Grades

Die wesentlichen Inhalte dieses Kapitels dürften Ihnen schon aus der Sekunda hnt sein. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen diese Kenntnisse wiederholt und lich der Eigenschaften von Potenzfunktionen höheren Grades, also Funktio otenz von x größer als 2 ist, werden hier erweiternde Zusammenhänge klärt. A es Kapitel daher auch dann durch, wenn Sie der Meinung sind, dass Sie üb sreich en nisse zum Thema verfügen.

Aufgabe 5.1

Die Normalparabel $f(x) = x^2$

- dratzahlen. Ega zen Sie die Vertetabelle ohne a) Die y-Werte der Normalparabel entspre Verwendung des Taschenreg
- b) Um eine Normalparabel zu Aufgabenstellung, d Dazu genügt es, der x-Achse, je nach gefordertem V in das Koordinatensystem einträgt und die ch dann, egal an welcher Stelle usgehend von Scheitelpunkt der Sche fehlende Werte in den Sprechblasen.



14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

-87 -

Aufgabe 5.2

Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem

Für das Verschieben von Funktionen gibt es, unabhängig um welchen T weitgehend einheitliche Regeln. Im Rahmen dieser Aufgabe werden die Z ae beim Verschieben von Funktionen zunächst nur an der Parabel erläute Behandlung von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Fu die hier gewonnenen Erkenntnisse zurückgegriffen. Bearbeiten Sie die folgender wenn Sie schon Vorkenntnisse haben.

Information 5.1

Sie haben im Kapitel 4 gelernt, dass man quadi faktorisierter Form darstellen kann. Dies gil kommt allerdings noch eine dritte Var man die Funktionsgleichung einer P

Darstellung in polynom

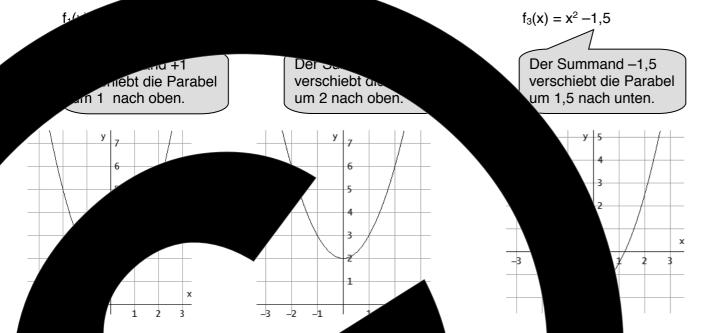
Darstellung in faktori

age der Parabel im Koordinatensystem. Ihre arabelgleichung ist Gegenstand der nun abe 5.2.

Aufgabe 5.2.1

a) Verschieben von Parabeln nach oben und nach unten

Die folgenden Normalpar Lilfe eines Graphikprogrammes gezeichnet.



Ergänzen Sie den Satz auf der folgenden Seite:

Addiert man zum Funktionsterm der Normalparabel f(x) eine positive Zahl rabel nach

verschoben. Addiert man eine negative Zahl, so

verschoben. Durch die Verschiebung entsteht eine net

Die verschobene Funktion soll mit $\tilde{f}(x)$ (sprich net warden. Allgemein gilt:

b) Nullstellenbet

Die verschobene Funktion soll mit
$$f(x)$$
 (sprich is plant of the beautiful worden. Allgemein gilt:

 $c > 0$ verschieb in positiver Pick ung nach ob p
 $c > 0$ verschieb in negotifuer Fichtung nach inten

Nullstellenbetrie schobene schobene schoben

Im like verschieb in negotifuer Fichtung nach inten

Nullstellenbetrie schobene schobene schoben

Im like verschieb in positiver Fichtung nach inten

Nullstellenbetrie schobene schobene schoben

Im like verschieb in positiver Fichtung nach inten

Nullstellenbetrie schobene schoben

Schobene schobene schoben

Schobene schobene schoben

 $N_1(1,22/0), N_2(-1,22/0)$

arstellung der Funktionsterme in polynomialer un

Polynomiale Form

Am Summanden ohne Koordinate bzw. hier den abschnitt der Parabel able Achsenabschnitt, wie bei G Einsetzen von 0 in den Funkt also mit f(0), berechnet wird.

Faktorisierte Form

- f₁(x). lässt sich nicht faktorisieren.
- f₂(x) lässt sich nicht faktorisieren.

• $f_3(x) = (x + \sqrt{1,5})(x - \sqrt{1,5})$ Faktorisieren durch Anwe

 $x_2 = -\sqrt{1,5} \approx -1,22$

Diese Klammer enthält die Nullstelle

inomischen Formel (Vgl. Kapitel 1 A

oder $f(x) = (x - (+1))^2$

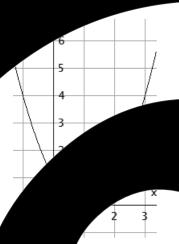
Subtrahiert man von x die Zahl-

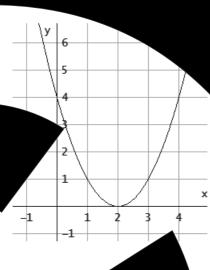
Ganzrationale Funktionen 2. Grades

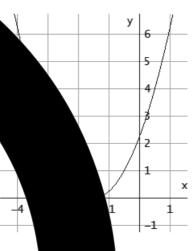
Subtrahiert man von x abl +2, wird die

 $f(x) = (x + 1.5)^2$ oder $f(x) = (x - (-1,5))^2$

> Subtrahiert man von x die Zahl (-1,5) wird die Parabel um 1,5 nach links verschoben.







ie den Satz auf der folgenden Seite

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag Subtrahiert man vom Argument* x der Normalparabel f(x) eine positive Σ Parabel nach

verschoben. Subtrahiert man vom Argument x e ative ird die

verschoben. Durch die Verschiebung peue Funktion.

Die verschobene Funktion soll wieder mit $\tilde{f}(x)$ (sprich: f-() bezeichnet werden.

Allgemein gilt:

Kapitel 5

f(x) = f(x - b)

*Anmerkung:

b) Nul

Hichtung nach lines.

der Accept, der bei de unktionsschen weise f(x) it set stammer steht, wird als Accepte fur the ezeichn.

chts sei den verscho enen Parabe.

lelernt, dass (x) verfahren zu. N. Vistellenbestimmung von Geraden auf nach oben vene Parabinn bertragen wie den kann. Verdeutlichen Sie sich, dass die ch links ach ochts verschotzen Parabeln genauso berechnet werden und unde An aben. $(x) = (x-2)^2$ $f_a(x) = (x-2)^2$

$$(x-1)^2$$

$$I_{12}(x) = 0$$

$$f_2(\mathbf{x}) = 0$$

$$f_3(x) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

 $f_1(x) = 0$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$X_{1,2}$$

Wichtige Info!

bei der Berechnung der Nu der Lösung hung zweimal das gleiche En richt man ppelten Nullstellen. Geometrisch as, dass scheitelpunkt der Parabel auf der x-A amit ist gemeinsame Punkt von der Parabel u se kein schnittpunkt, sondern ein Berührpunkt. W äter sehen, dass dies auch für andere Funktione

c) Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und faktorisierter Form

Polynomiale Form

- $f_1(x) = (x-1)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + 1$
- $f_2(x) = (x-2)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + 4$
- $f_3(x) = (x + 1,5)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$

Faktorisierte Form:

- $f_1(x) = (x-1)(x-1)$
- $f_2(x) = (x-2)(x-2)$
- $f_3(x) = (x + 1)^{-1}$

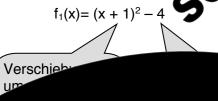
Aufgabe 5.2

a) Glei rechts und oben bzw. unten

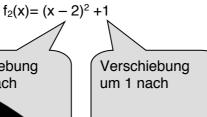
die Nullstellen
den mit de fa Prisien.
Lang verste het, erkennen
die, dass mandle tullstellen de
Parabel aug de fakorisierten fortin
ablesen kan

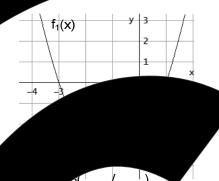
ben einer Parazennach links b. v. re

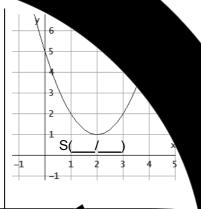
1 und Aufgabe 5.2.2 re mit, "
1 sankann. In die struuter
1 Funktionst eich"
1 mind di Sie h wie man Parabel nach unten und oben ifgabe werden diese Erkenntnisse gleichzeitig chungen und die abgebildeten Funktionen



Verschiebung 2 nach







Die Koordinaten der Scheitelpunkte ersche ereits in der Funktionsgleichung. Man nennt diese der Funktionsgleichung einer Parabel daher Sch

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag

Verallgemeinerung der Zusammenhänge:

Ergänzen Sie: Für die Verschiebung in ____-Richtung gilt die Bezighung f(X Paramter angibt, wie weit die Parabel ausgehend vom Ursp verschoben wird.

Aus der x-Koordinate des Scheitelpunkts folgt: Bei $f_1(x)$ bei $f_2(x)$ ist b = 1

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabel, did g Schzeitig in x-1 in Richt.

Horms trabell trabelled in x-1 in Richt.

Horms trabe

$$((x + 1)^2 - 4 = 0)$$

$$(x-2)^2 +1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+1=0$$

ellen: $N_1(1 / 0)$ und $N_2(-3 / 0)$

c) Vergleig

$$(x) = (x-2)^2 + 1$$

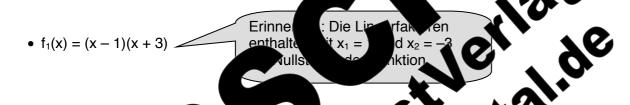
Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunkts

14 Lehrerselbstverlag

(2) Polynomiale Form $f(x) = x^2 + px + q$



(2) Faktorisierte Form $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$





f₂(x) läss

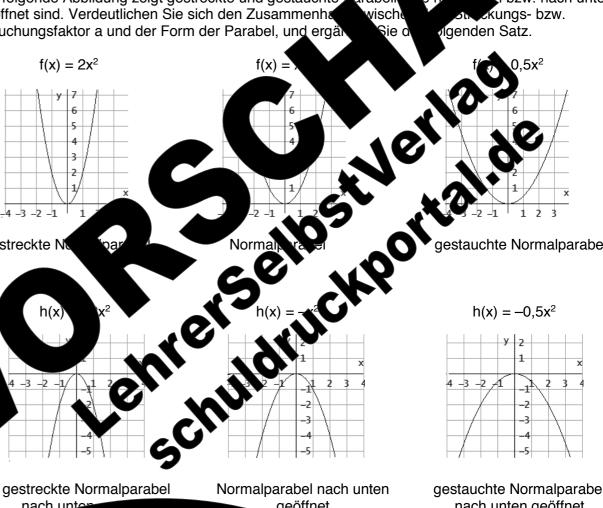
besitzt, r nicht in Lineana denen man Nullstelle könnte.

Aufgabe 5.2.4

Parabeln strecken oder stauchen

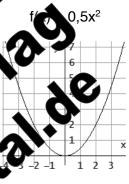
a) Zusammenhänge beim Strecken und Stauchen der Normal

Die folgende Abbildung zeigt gestreckte und gestauchte Parabell n bzw. nach unten geöffnet sind. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenha visch kungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Form der Parabel, und ergäl

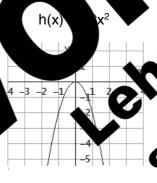


gestreckte N

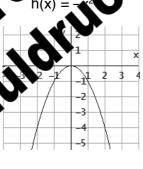




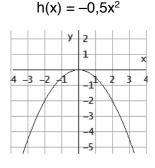
gestauchte Normalparabel



gestreckte Normalparabel nach unto



Normalparabel nach unten geöffnet



gestauchte Normalparabel nach unten geöffnet

einem Parameter a, so erhält man die

oben geöffnete Parabel

Die Parabel wird gestreckt, wenn gilt: a >

Die Parabel wird wenn gilt:

Achse gespiegelte Parabel Nac

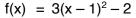
hse gespiegelt und gestreckt, wenn gilt

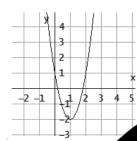
rmalparabel ist an der x-Achse gespiegelt, wenn gilt :

Parabel wird an der x-Achse gespiegelt w ucht, wenn gilt:

b) Zusammenhänge beim Strecken oder Stauchen verschobener Normalpar

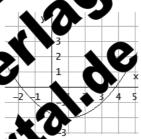
Die folgende Abbildung zeigt verschobene, gestreckte bzw. gestauchte Normal oben und unten geöffnet sind und alle den Scheitelpunkt S(1/-2) haber n auch als ganzrationale Funktionen 2. Grades bezeichnet. Verdeutlichen Zusammenhang zwischen dem Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor a der Parabel, und ergänzen Sie den folgenden Satz.





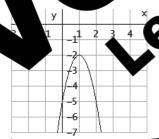


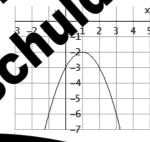
Kapitel 5

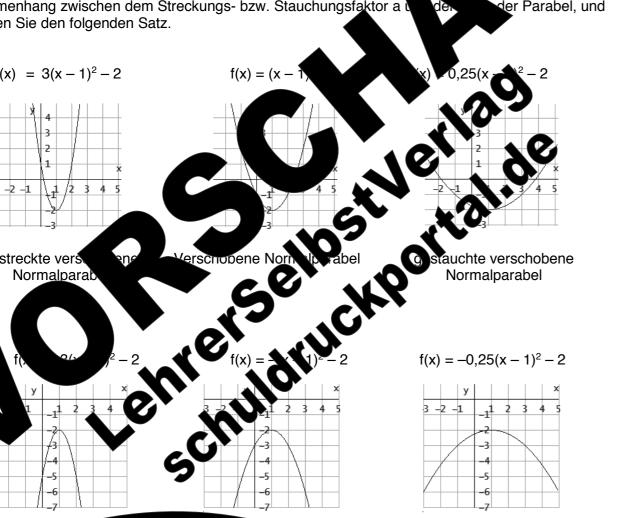


gestreckte vers









gestre

gestauchte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet bzw. Spiegelung an der Geraden y = -2

Um die Öffnungsrichtung einer verschobenen Parabel zu ändern, b obene Parabel zu strecken oder zu sta eitelpunktform der Parabel tischen Klammer ein Faktor a en verschobenen Parabeln di Wirkung ormalparabeln. Bei einem negative wie bein ist die Para Ein Vorzeichenwechsel von a spiegelt e an einer eraden durch den

Information 5.2

Kapitel 5

Überblick Darstellungsformen der Funktionsgleichung ganzrationaler F rades

Coordinaten nkts: S(b / c)

Darstellung in Scheitelpunktform: f(x) = a(x)

> a streckt, staucht und die Öffnungsrichtung b spiegelt die Parabel ar Geraden v =

em en ekkann man die De onders einfact bestimmen. Man entnimmt den lac und setzi die beiden Werte direkt in die Formel n de polynomia en form in die Chertelpunktform

Ugleichung in Comminater Fein vor, so kann man die Scheitelpunktform mit Hilfe en Ergänz ag ermitteln. Bei verschober Funktionsgl Koordinate $f(x) = (x - b)^2$

$$(x) = 2 + 6x + 2$$

$$x^2 + 6x + 6y - 3 + 2$$

$$f(x) = (x^2 + 9) - 9 + 2$$

$$f(x) = (x+3)^2 - 7$$

ergänzt. Damit kein Fehler entsteht, wird 9 sofort wieder subtrahiert.

Den Teilterm der faktorisiert werden soll in Klammern setzen und dann umformen.

Beispiel

 $f(x) = -[(x^2 - 6x + 9) - 9 - 2]$

$$f(x) = -[(x-3)^2 - 11]$$

$$f(x) = -(x-3)^2 + 11$$

nach unten geöffneten Parabel chenrechnung das usklammern. Sonst eispiel 1.

Da $f(x) = ax^2 + px + q$

> a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktsform.

Der Si e x gibt den y-Achse it den Koorat die Funktion dinaten die Nulls x₂, so enthält q das Pro

Ursula Pirkl hrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

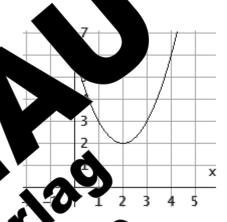
107

 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Ü5.2

Gegeben ist die rechts abgebildete verschobene Normalparabel.

- a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel in Scheitelpunktform, und zeigen Sie, dass für die polynomiale Darstellung gilt: $f(x) = x^2 - 4x + 6$
- b) Begründen Sie anhand einer Rechnung und anhand des des Funktionsgraphen, dass keine faktorisierte Funktionsgleichung existiert.



Übungen

Darstellung in faktorisierter Form:

a entspricht dem Streckfaktor bzw.

Ü5.1

Bei einer verschobene Sie jeweils die Funktion Darstellung.

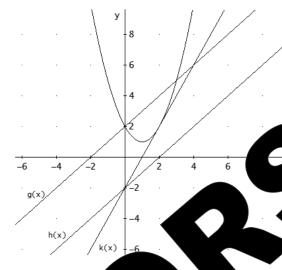
- a) $N_1(-2/0)$





Aufgabe 5.3 Lagebeziehungen von Parabel und Gerade

Gegeben sind die Parabel $f(x) = (x-1)^2 + 1$ sowie die Geraden g(x) = x+2k(x) = 2x-2. Lässt man die drei Funktionen per Computer zeichnen, erhäl



Man erkennt, dass d



Übungen

Ü5.3 Berech



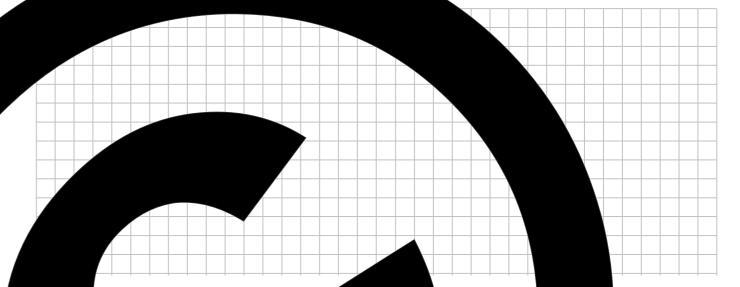


Programms zum Zeichnen von Funktionen.

a)
$$f(x) = (x + 2)^2$$
 $h(x) = x - 2$

$$k(x) = -2x - 8$$

$$k(x) = 0.5x - 5$$





Wenn man bei der Berechnung von Schnittpunkten die pg- Formel anwend

(3) Eine Parabel und eine Gerade haben zwei Schnittpunkte, wenn

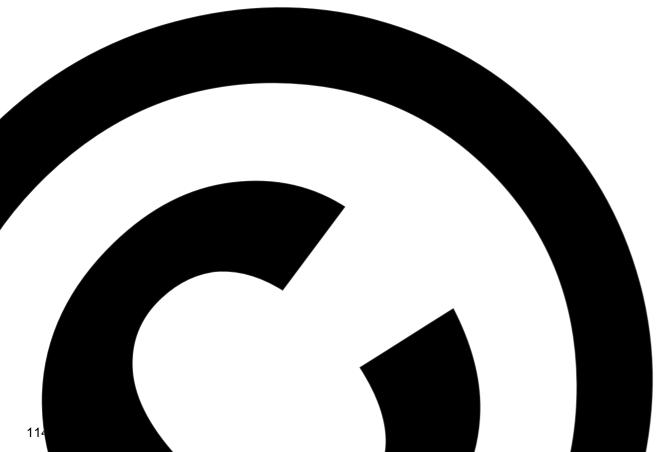
unterschiedliche Lösungen erhält.





- 102 -







Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichul und Gerichunge	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör er er es	104
Kapitel 7 Ganzrational ANK hen a nöhere. G hues	115
Kapitel 8 Die Lieuwink	127
Kajul 9 rigumetri de Funktion	135
titel 10 En mential- und Carithmusft n tionen	145
Nextiel 11 Vertiefende Betrachtung v. Betragsungleichungen	169

Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe in Gesamtwe iert erlernen iert

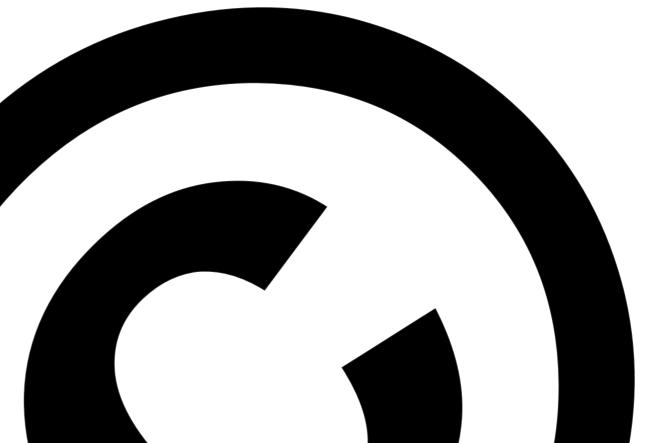
<u>Ş*</u>

Appehalten. A. Ights reserved.

K., auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet SelbstVerlag tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germelehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de





116

Kapitel 6: Gleichungen 3. und höheren Grades

Die Lösungsverfahren für Gleichungen 3. und höheren Grades bauen auf Leichungen 3. und höheren Grades bauen auf ngang mit quadratischen Gleichungen auf. Es kommen hier, bis auf das neu zu Polynomdivision grundsätzlich die gleichen Lösungsverfahren zur Anwend

Aufgabe 6.1

Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktoris



Beispiel:

$$(x - \lambda)^2 (x^2 + 3) - 10)(x^2 + 9) =$$

2. Klammer (2x + 4)

3. Klammer $(x^2 - 1)$

 \Rightarrow $x_3 = 1$

Anwendung der 3. binomischen Formel, also $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$, liefert 2 Lösungen.

ommt auf Grund des Quadrates gibt es zwei gleiche Lösungen.

 $(x^2 + 3x - 10) \implies x_7 = 2$ $x_8 = -5$ Der Ans führt zu einer mit Hilfe der p,qquadratisch Formel gelöst

6. Klammer (x

Der Ansatz $x^2 + 9 = 0$ Widerspruch, da die Gleichungen x²

Aufgabe 6.2

Lösen einer Gleichung, bei der man xⁿ ausklammern kann.

$$ax^{4} + bx^{3} + cx^{2} = 0$$

$$x^{2}(ax^{2} + bx + c) = 0$$

$$x_{1,2} =$$

Übungen

Ü6.1

Berechnen Sie die Lösungen Bedeutung von geraden ir das Ergebnis.

a)
$$x^2 = 25$$

d)
$$x^2 + 7x = 0$$

e)
$$x^3 = 81x$$

i) $x^5 = 81x$

k)
$$x^6 = 32$$

h)
$$x^4 + 64x = 0$$

l) $x^6 + x = 0$

0) 0,5

Die Lösungen sind zur Kontrolle gegeben.

k) $2x5 - 8x^3 = 0$

$$48x + 4 = 0$$

g)
$$0, x^2 - 1, 2t = 0$$

i)
$$4x^2 + x + 15 = 0$$

I)
$$2x^2 - 4.2$$

 $\pm \sqrt{6}$ 3;2 { }

1; -1;-2

m)
$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

n)
$$2(4v-1)^2 = v - (2v-1)^2$$

$$\frac{1}{4}$$
; $\frac{1}{3}$

$$3x^2 - \frac{1}{3}x^4 = 0$$

$$0.5x = 0$$

$$0; \frac{5}{4}$$

0; 4

0; 5; 1

 $\pm 3; \pm 2$

 $0; \pm 3$

chnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen nd zur Kontrolle gegeben.

a)
$$(1 - x^2)^2 = 0$$

c)
$$(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$$
 { }

e)
$$100 x^3 + 80x^2$$

g) $0.4 z^2$

0; 2,2; 0,5

$$(x - 0.8)^4 = 0$$

14 Lehrerselbstverlag

$$t^2 + 1,1t + t^3 = 0$$

h)
$$(x^2 - 1)$$
 3) = 0 -1; 3

n)
$$8 - \frac{1}{6}x^2 - 6$$
; -8

p)
$$0.5(x-3)^2$$
 ± 3

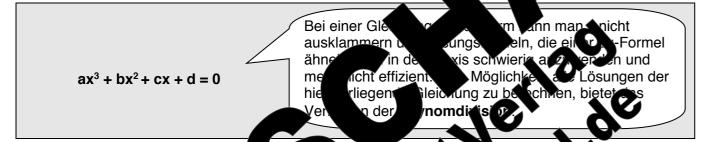
r)
$$32x^4 - 2x^2 - \pm \frac{3}{4}$$

Kapitel 6

Information 6.1

Nicht jede Gleichung höheren Grades kann mit Hilfe der bisher erlernten Methoder Bei Gleichungen 3. und höheren Grades kann es notwendig werden, das Ver anzuwenden.

Lösen von Gleichungen 3. und höheren Grades mit Polynomia



Aufgabe 6.3

Mit Hilfe der Polynoma erlernt haben ähnelt solle $18x^3 - 27x^2$ e Form des Gleichungsterms ermittelt werg anschließen

Beispie
$$-27x^2 - 17 - 2 = 0$$

diese Lösung nicht geben bzw. nicht bekannt ist, verschit man die et beung durch Raten zu finden. Zum Raten geeignet sind ganzzahlige der des Summanden ohne x. Hier also ±1 und ±2. Diese Zahlen werden in die Funktion eingesetzt. Wenn sich dabei, wie im 1. Schritt unten beim Einsetzen von x = 2 Null ergibt, hat man die erste Lösung gefunden und kann des Verfahren mit dem 2. Schritt fortsetzen.

1
$$x = -1 \Rightarrow -18 - 27 + 12$$
 Erratene erste Lösung: $x_1 = 2$ $x_2 = 2$

Das Ergebnis des Ratevorgangs als Linearfaktor (x x = 2 | -2Dieser $\Rightarrow x-2=0$ 2 die

2. Sg satz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor (x - 2) notieren.

$$18x^3 - 27x^2 - 17x - 2$$
): (x - 2) =

3. Schritt: Divisionsvorgang

1. Division

Nur der erste Summand 18x3 wird durch das x aus dem Linearfaktor (x - 2)dividiert. Der Zahlenwert, hier - 2, wird dabei nicht berücksichtigt.

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2)$$
: $(x - 8x^2)$

4. Schritt: 1. Multiplikationsvor

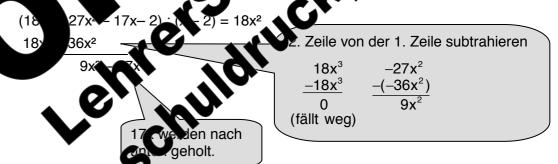
$$(18x^3 - 27x^2 - 1)$$

$$2) = 16x^2$$

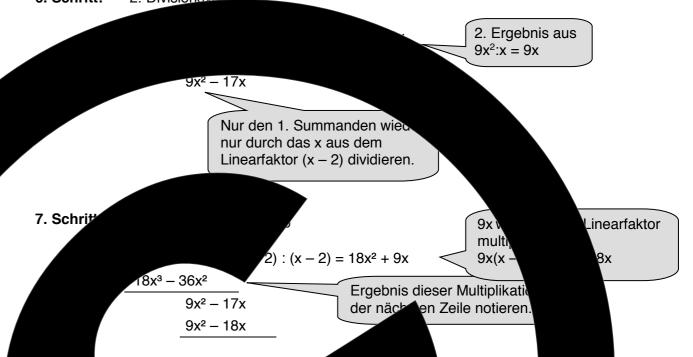
$$2x^2(x - 2) = 8x - 36$$

$$2x^2(x - 2) = 8x$$

5. Schritt



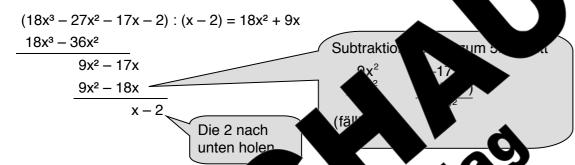
6. Schritt: 2. Divisionsvorgang



Ursula Pirkl

ehrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag

8. Schritt: 2. Subtraktionsvorgang



9. Schritt: 3. Divisionsvorgang

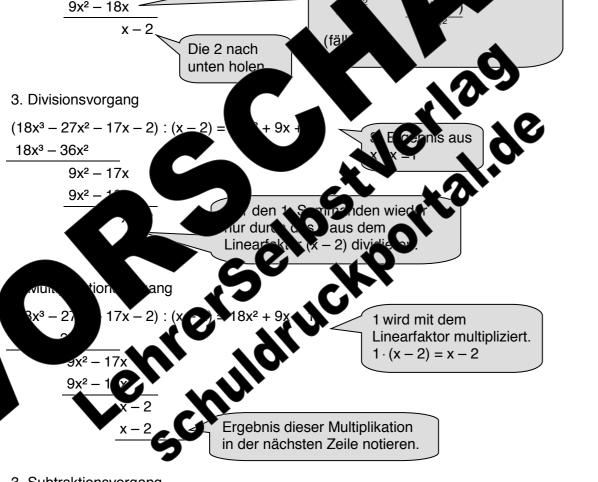
$$\frac{18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = x^2 + 9x + 9x + 10$$

$$\frac{18x^3 - 36x^2}{9x^2 - 17x}$$

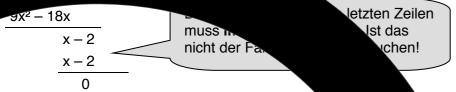
$$\frac{9x^2 - 17x}{9x^2 - 17x}$$

$$\frac{9x^2 - 17x}{10x^2 - 10x^2}$$

10. Schritt:



11. Schritt: 3. Subtraktionsvorgang

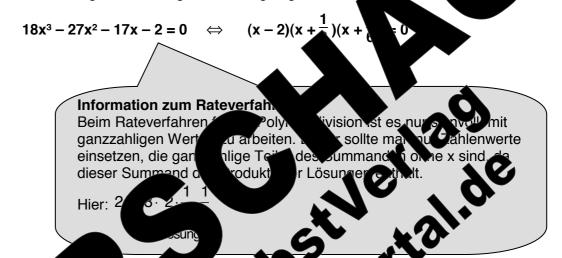


12. Schritt Ergebnisterm der Division Null e entstandene Gleichung lösen.

ormel liefert hier:
$$x_2 = -\frac{1}{3}$$
 und $x_3 = -\frac{1}{3}$

Faktorisierte Darstellung des Gleichungsterms:

Aus den Ergebnissen kann man nun analog wie bei den quadratischen Gleich torisierte Darstellung der Gleichung aus der Aufgabenstellung angeben.





Beispiel 2:

Im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich darges Es tritt hier jedoch eine Besonderheit auf.

> Im Gleichungsterm fehlt der Summand mit x2.

Gleichung:

$$x^3 + x - 2 = 0$$

- **1. Schritt** Raten mit $x = 1 \Rightarrow$
- 2. Schritt Ansatz für Polynomdivis

3 bis 11. Schritt liefert

$$(x^2 + x + 0)$$



en vorhanden sind. Alle weiteren bei der Division wie in Beispiel 1.

Zusatzinfo zu alternativer Rechnung:

Potenzen von x auftreten, kann man die tfolgendem Ansatz schreiben:

und dann wie in

itt $x^2 + x + 2 = 0$

$$x_{12} = -0.5 \pm \sqrt{0.25 - 2}$$
 \Rightarrow negative Wurzel \Rightarrow keine

Faktorisierte E

schung gilt dann: $(x - 1)(x^2 + x - 2) =$ Für die fak

> Der Ergebnisterm der Div men, da dieser s torisieren lässt.

Beispiel 3:

Auch im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie inausfüh Beispiel 1. Es tritt hier jedoch wieder eine Besonderheit bei der Re

 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ Gleichung:

1. Schritt Raten mit $x = -1 \implies -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

Erratene erste

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mi m Linearf<u>a</u>kt

3 bis 11. Schritt liefert folgen

$$(x^3 + 1) : (x + 1) + 1$$

in der nächsten Zeile gibt es n mehr. Man holt dann die Summanden aus der ersten Zeile

h. Es gibt damit keine weitere Lösung.

sgleichung gilt dann: $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

Der Ergebnisterm der Division wird übernommen.

e die Lösungsmenge jeweils mit n, indem Sie die erste Lösung Jie Lösungen sind in ungeordneter Reihenie gegeben.

- a) $x^3 10x^2 + 29x 20 = 0$
- $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$
- e) $2x^3 + 3x^2$
- g)

- b) 25
- d) $4x^3 -$
- f) $4x^3 13x$
- h) $2x^5 11x^4 +$ -4x + 4 = 0

14 Lehrerselbstverlag

•					
-0,5; 1	-0,5; 2;1	4		2; 0,8; 0,2	1
-1; 0,5	1; 4; 5		\	0,5; 1,5; –2	

Information 6.2

Sie haben für das Lösen von guadratischen Gleichungen und Gleichungen böherei Reihe von Lösungsverfahren kennengelernt und es ist am Anfang oft sc diese Lösungsmethoden zu behalten und souverän, ohne längeres Über finden. Um sich die Entscheidung, welches Lösungsverfahren zu wählen ist, zu erleic ie das Ablaufdiagramm auf der übernächsten Seite verwenden. Es stell im Kopf bei der deichung dar. Wenn Sie Entscheidungsfindung für die Wahl des passenden Lösungsverfal ohne Verwendung dieses Diagramms sofort entscheiden das gewählte Verfahren fehlerfrei beherrschen, ist es nich Lösen von Gleichungen zu bearbeiten.

Übungen Ü6.6

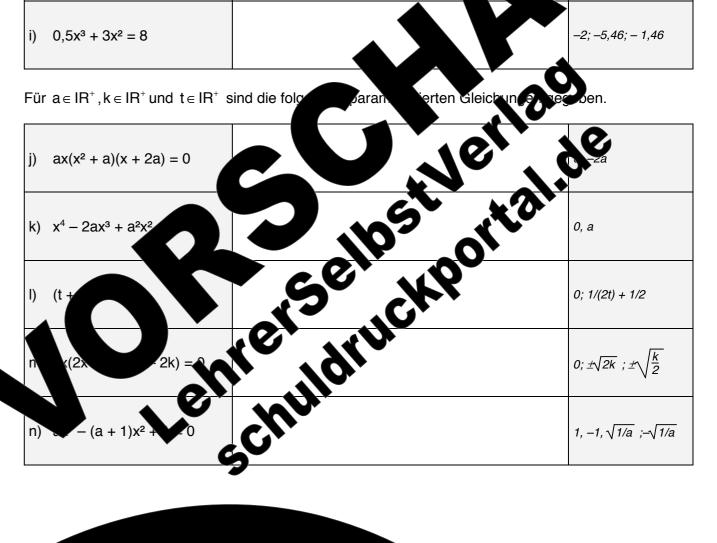
In dieser Übungsaufgabe sind alle b

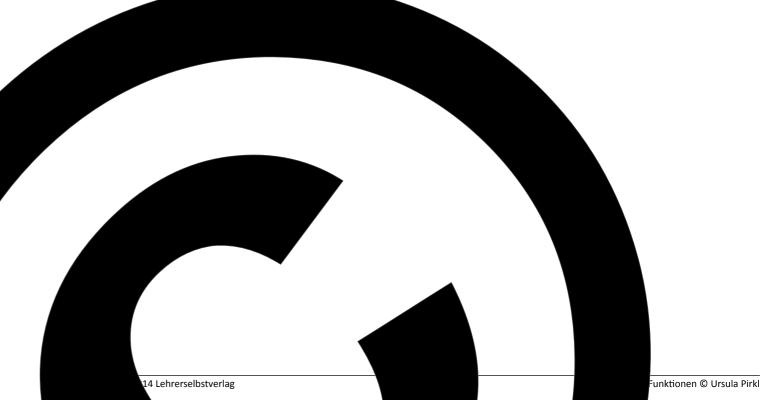
- a) Notieren Sie mit Stichw ungsverfahren man für die Lösung der G her notwendig sind. Sie können dabei als Hi
- b) Berechnen S Aufgabenstellung günstigste weils angegeben.

Aufgå ist q	Lösung a fahren	Lösung zur Kontrolle
a,	Chilly.	0; 0,75
b) $(2x + 4)(3 - x)(5 - 10x)$) = 0	-2, 3; 0,5
c) 12x ⁴ – 44		2;-2
TIX		0, 1,08; –3,41
$(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$		7: –3
f) 3x ³ – 7		
g) $y^3 = 0$		

h) $(0.25x + 1)^2 = (0.5x + 1)^2$	
i) $0.5x^3 + 3x^2 = 8$	-2; -5,46; - 1,46

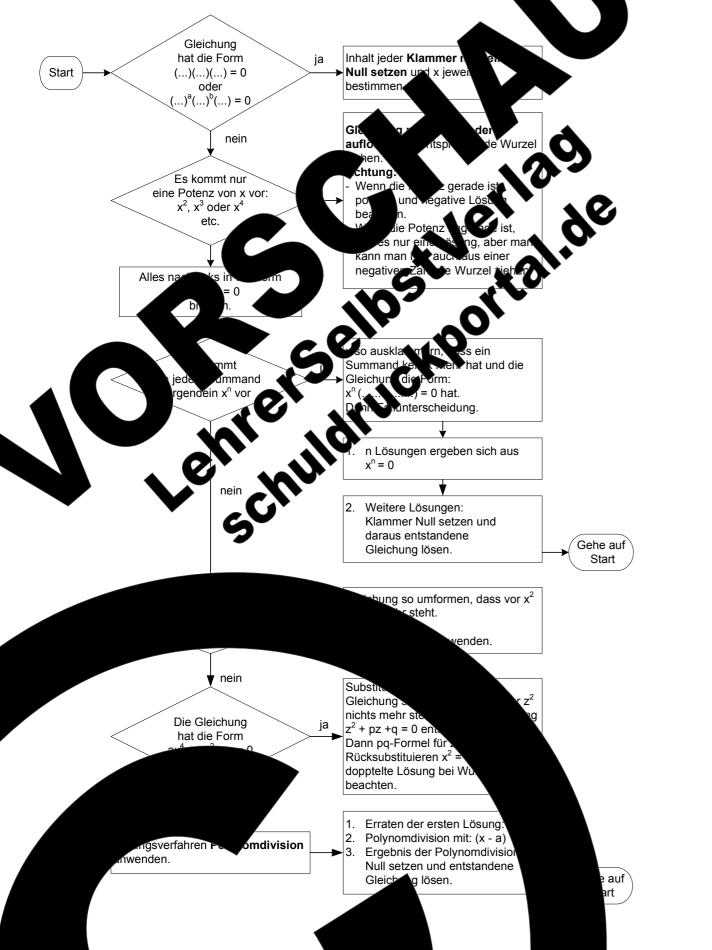
Für $a \in IR^+$, $k \in IR^+$ und $t \in IR^+$ sind die folg





ehrerselbstverlag

Ablaufdiagramm für die Auswahl des Lösungsverfahrens bei Potenzgleichung ung.





02-033-279

Ursula Pirkl

Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichuk	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör er Ges	104
Kapitel 7 Ganzrational and the nen and the nöheren Grudes	115
Kapitel 8 Die Walter unk	127
Kajul 9 rig metri de Funktion	135
itel 10 Ennential- und Canthmusfren ionen	145
Newitel 11 Vertiefende Betrachtur Betragsungleichungen	169

zu Algebra und Funktionen Gesamty iert erlernen (Best

ghts reserved.

k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Gerg

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 7: Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades Aufgabe 7.1

Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung

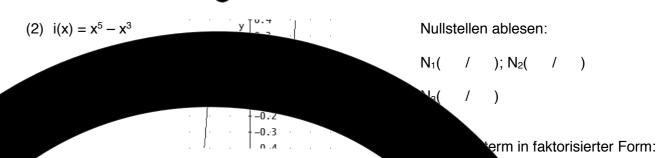
In den nun folgenden Abbildungen ist jeweils der Graph ein on dargestellt. Die nitteln Sie zu jeder Funktion Funktionsgleichungen sind dabei in der polynomialen Form zunächst durch Ablesen die Nullstellen. Berechnen St Sie den Funktionsterm danach in faktorisierter Form selbst anhand der abgelesenen Nullstellen.

a) Nullstellenbestimmung ganzrationaler l

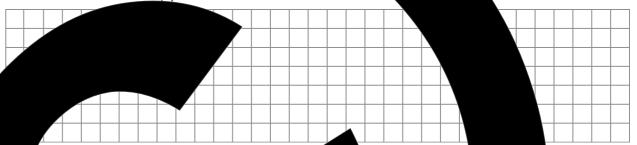
(1)
$$f(x) = x^3 + x$$
 Celle a less $n = x^3 + x$

Funktions erm in faktor siener Form and



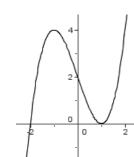


Nullstellen berechnen: $i(x) = 0 \implies x^5 - x^3 = 0$



14 Lehrerselbstverlag

(3) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

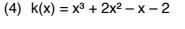


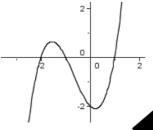
Nullstellen ablesen: N₁(

Funktionsterm in fakto

Nullstellen berechnen $g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x +$







Nullstellen abge

Berechnen der Nullstellen: k(x) = 0



rung der Nullstellen einer Funktion 3. Grades führt zu einer G Grades.

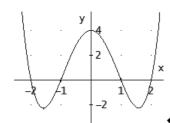
hen 3. Grades haben mindestens chstens Daher gibt es

nd höchstens eichungen 3. Grades ebenfalls minde ungen.

14 Lehrerselbstverlag

b) Untersuchungen bei ganzrationalen Funktionen, bei denen der größte Exponer

(1)
$$a(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$



Nullstelle

Berechnen der Nullstellen: $a(x) = 0 \Rightarrow x^4$



(2) $b(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

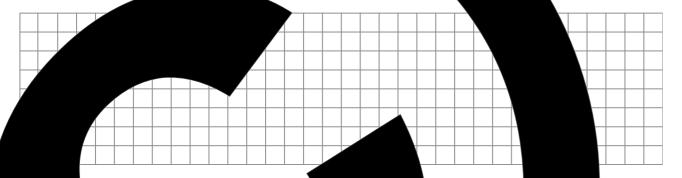


$$N_1(/); N_2(/)$$



erm in faktorisierter Form:

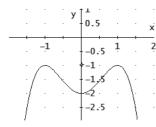
Berechnen der Nullstellen: $b(x) = 0 \Rightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$



Ursula Pirkl hrerselbstverlag



(3)
$$c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$$



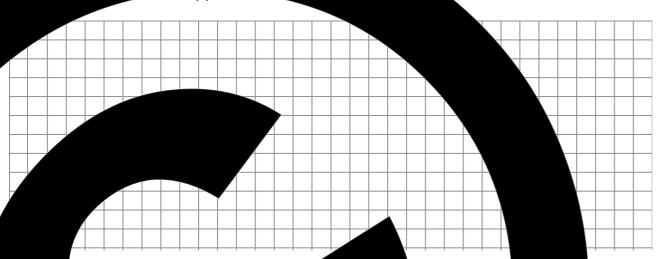
Nullstellen:

Berechnen der Nullstellen: $c(x) = 0 \implies x^4 + 2x^2$

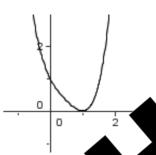




Funktionsterm in faktorisierter Form:



(5) $e(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$



ierter Form:

Weisen Sie hier durch Ausmultiplizieren der fak qilt: $(x-1)^2(x^2+1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2$



Ergänzen Sie:

Die Berechnung der Nullstellen einer Funktion 4. Grades führt zu einer Gleichung ___ Grades. Da Funktioner Nullstellen haben können, gibt es bei Lösungen.

ole den allgemeinen Merksatz zur Anza-Funktionen.

Zusammenfassender Merksatz:

rößte Potenz von x ungerad immer

Nullstelle besitzen. Funktionen.

ist, müssen keine Nullst

Allgemein hat eine Funktion n-ten Grades maximal ___ Nullstel

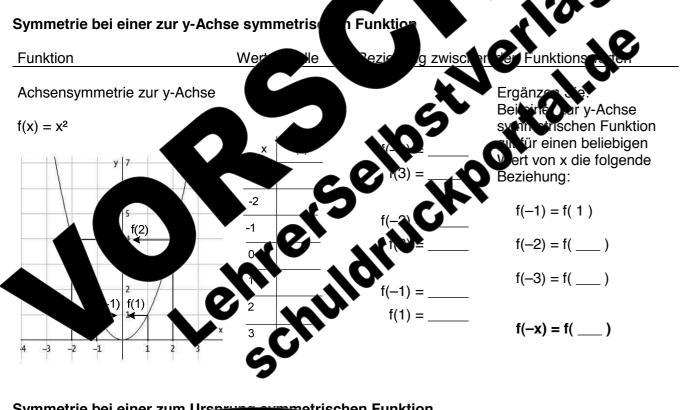
Aufgabe 7.2

Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen Funktionen

Oft verlangen Aufgabenstellungen die Anfertigung einer Skizze für den V es jeuoch auch, reicht es meist aus, die Nullstellen und den y-Achsenabschnitt zu kennen wenn man die Funktion hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschafter

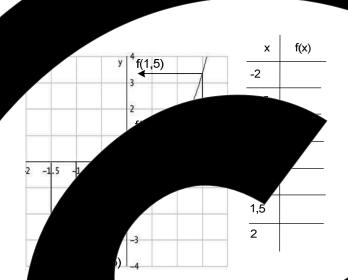
Beispielhafte Untersuchung auf Symmetrie anhand der einfachen $= x^2 \text{ und } h(x) = x^3$ Füllen Sie jeweils die Wertetabelle aus, und vergleichen er Wertepaare f(x) und f(-x). Formulieren Sie jeweils einen Zusammenhang zwisch

Funktio Symmetrie bei einer zur y-Achse symmetris



Symmetrie bei einer zum Ursprung symmetrischen Funktion

Funktion zwischen den Funktionswerten



Ergänzen Sie: Bei einer zum y-Achse metrischen Funktion einen beliebigen f(-2)n x die folgende f(2) =

Aufgabe 7.3

Rechnerische Untersuchung auf Symmetrieverhalten bezüglich der y-Ad zw. 🛊 Ursprungs

Information 7.1

In jedem Tafelwerk kann man nachschlagen, dass die anhard der Fl x^2 und $f(x) = x^3$ verdeutlichten Beziehungen bei dem Vorliegen von Symm ന്റ് പടിklassen gültig sind. Die in Aufgabe 7.2 dargestellte Form der Zusammenhänge is erische Untersuchung auf Symmetrie günstig und wird daher im Folgenden ver

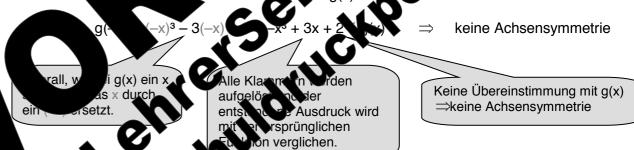
	sensymmetrie zur y-Achse: ktsymmetrie zum Ursprung	(X)	(x)
ruii	kisyiiiileiile zulli Orsprung	(\mathbf{x})	X)

Verdeutlichen Sie sich die Vorgel folgenden Beispiele.

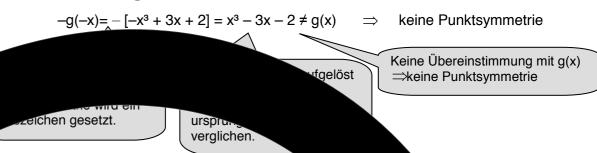
Beispiel 1:

Nachweis, dass die

a) Prüfen auf Ach



b) Prüfen auf Punktsymmetrie dem Ansatz -g(-x) = g(x)



Beispiel 2:

Nachweis, dass die Funktion $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$ achsensymmet der Nachweis für Achsensymmetrie etersuchung auf Punktsymme notwendig.

$$(x)^2 - 2 = -x^4 + 2x^2 - 2 = c(x)$$
 ensymmetrie

Klammern auf der en Seite vom Gleichheitszeichen ergibt n die Ausgangsfunktion. D.h. die Funktion st achsensymmetrisch.

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag

Beispiel 3:

- 124 -

Nachweis, dass die Funktion $f(x) = x^3 + x$ punktsymmetrisch ist.

a) Prüfen auf Achsensymmetrie

b) Prüfen auf Punktsymmetrie

$$-f(-x) = -[-x^3 - x] : + x - (-x)$$
 Prox. metrie

Symmet Leigenschafter Lid den auf ete den Potenzen von x im Funkt entsprechende Regeln, indem Sie Lie Legenden Sätze vervollständigen.

Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Potenzen von x (Fin Cummand der Form kx⁰ = k zählt zu den geraden Potenzen von x.)

alle Potenzen von x sind.

ne ganzrationale Funktion hat bezüglich der x-Achse und des UN symmetrieeigenschaften, wenn auftreten.

b) Weisen Sie er Funktionen aus Aufgabe 7.1 ach.

Raum

Raum für Rechnungen:



Ursula Pirkl

hrerselbstverlag

14 Lehrerselbstverlag





02-033-279

Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichung der Sichunge	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör er Ges	104
Kapitel 7 Ganzrational Ank then 2 Höherer Grues	115
Kapitel 8 Die Unik	127
Kajul 9 rig metri de Funktion	135
itel 10 Ennential- und Ganthmusfanktonen	145
Natitel 11 Vertiefende Betrachturg von Betragsungleichungen	169

zu Algebra und Funktionen Gesamty iert erlernen (Best

ghts reserved.

, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Gerg

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 8 Umkehrfunktionen **- 127 -**

Kapitel 8: Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1

Grundlegendes zu Umkehrfunktionen

In Ihrem bisherigen Mathematikunterricht haben Sie beim ngen und bei der Berechnung von Winkeln, ohne dass hier die Begriffe unktid rfunktion verwendet wurden, bereits eine wichtige Eigenschaft über Funktionen d Jmkehranktionen kennengelernt. Arbeiten Sie alle Beispiele durch und

Beispiel 1:

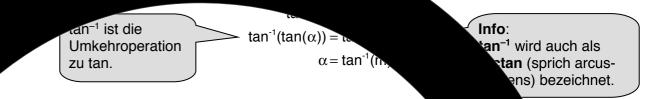
Lösen Sie die beiden Gleichung



heben sich also gegenseitig auch dwerden daher auch als Umkehroperationen bezeichnet.

Beispiel_2

der folgende Ansatz verwendet:



Aufgab

Zuş unktion und ihrer Umkehrfunktion

die Zusammenhänge von Beispiel 1 und Beispiel 2 unter fur iesichtspunkt, so ile Begriffe Operation und Umkehroperation aud die Begriffe Funk nkehrfunktion . In der Tabelle auf der folgenden Seite sig e einfache Funkt re zugehörigen nktionen angegeben. Verdeutlichen Sig Beispielen die 2 änge, und Sie dann in der Tabelle die fehlend

14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

145

Aufgabe 8.3

Bei Betrachtungen zu Umkehrfunktionen muss meist ein Definitionsbereich angegeben werden. Bei der Umkehrf $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ sind beispielsweise keine negativen Zahlen erlaubt, da man im Zahlenbereich der reellen Zahlen IR einer negativen Zahl keine Quadratwurzel zieh

Funktion	Umkehrfunktion	Anwenden der Un Funktion	Ęp	ihr	Deficionsbereiche
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$f^{-1}(f(x))$ $(x^2) = \sqrt{(x^2)}$	x ²) -	•	

Erinnerung:

Der Ausdruck, welcher bei der Funktionsschreibweise in Klammer steht, hier das wird als Argument Funktion bezeichnet

_				
	$f(x) = \sqrt{x}$	f ⁻¹ (), 2	$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^{-1}$	IR_0^+
	f(x) = (x)	1(v) (n-1 (x)	$f^{-1}(t(x)) = f^{-1}(x(t(x))) = tan^{-1}(tan x) = x$	$X \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
	f(x) =	$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$	$f^{-1}(x^{-1}) = f^{-1}(\sin x) =$	$X \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
	$f(x) = x^3$	f ⁻¹ (x) =	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}() =$	
	$f(x) = \cos(x)$	f-1/-) =	x∈[0;π]
	f(x)			

Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt de nhang. Vervollständigen

endet man die Umkehrfunktion auf ihre zugehörige Funktion an das Formelmäßig gilt: f⁻¹(f(x))

Verdeutliche Beispiels, dass auch die Umkehrt atzes gilt und ergänzen

W	The state of the s	ie Funktion auf ihre zugehörige Umkehr	n an, so erhält	
-		der Umkehrfunktion. Fo	ilt:	

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag

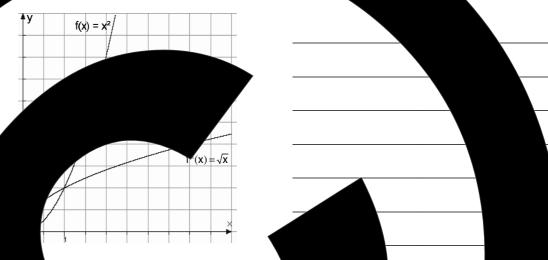
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunkt

Im Folgenden sollen nun anhand der Potenzfunktionen $f(x) = x^2$ so gehörigen Wurzelfunktionen weitere Zusammenhänge zwischen Funktion und on erarbeitet und formuliert werden.

a) Füllen Sie die beiden Wertetabellen aus, und beschreiben Zusammenhang zwischen den Argumenten von Funktion und Umkehrfunkt ehörige Funktionswerten besteht.

Funktion	Umkeh@fu_kmon
$f(x) = x^2$	$x \leftarrow (x) = \sqrt{x}$
0	
0,5	0,25
	101
1,5	76, 156
	6,25
- W	<i>10.</i>
10.10	

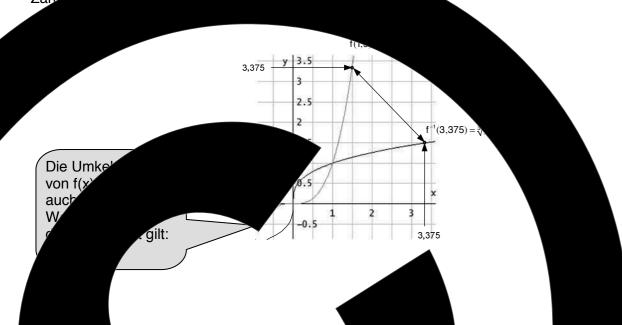
 \mathbb{R}_0^+ die quadratische Funktion und als gen den beiden Funktionen besteht etriebeziehung. Beschreiben Siehung, und formulieren Sie dabei, nan mithilfe von rein graphischen Mitteln die $f(x) = x^2$ ermitteln kann.



14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl c) Die in Aufgabenteil a) und b) erarbeiteten Zusammenhänge sollen nun auf die die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ übertragen werden. Verdeutlichen S Wertetabelle auch hier den Zusammenhang zwischen den Argumente indem Sie die fehlenden Werte ergänzen.



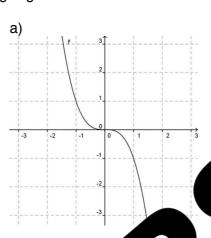
Ergänzen Sie die und verdeutlichen Sie sich auch anhand der Graphik d hrfunktion, indem Sie die fehlenden Zah



Ursula Pirkl

Aufgabe 8.4

Ergänzen Sie, falls möglich, in den Abbildungen jeweils die Symmetringerade ke der Umkehrfunktion zu den dargestellten Funktionen. Begründen Sie rahmte Satz gültig ist.





Stetig h abset

gesamter of imition stetiges function because ann ist eige tynktion nur um ehrbar, wenn soch diesem Bereich eigen monoton steigt oder fällt.

Streng monoton heißt, dass die Funktion nur fällt oder steigt.

- 131 -

Aufgab

hrerselbstverlag

arfunktion am Beispiel f(x) = 2x + 1

e die Umkehrfunktion zur Geraden f(x) f graphischem Weg, und men Sie den Funktionsterm von f⁻¹(x) durch Abr lung. Verdeutlichen Sie sich schließend die Umformungsschritte bei der rechnerische Jmkehrfunktion.

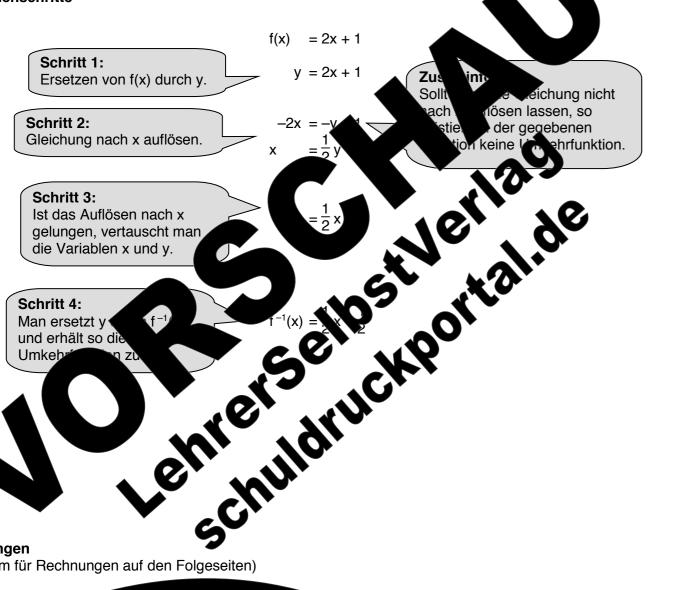


Funktionsterm: $f^{-1}(x) =$

unktionen © Ursula Pirkl 14 Lehrerselbstverlag

Umkehrfunktionen Kapitel 8 Kapitel 8 **- 132 -**

Rechenschritte



Übungen

(Raum für Rechnungen auf den Folgeseiten)

Übung 8.4

ktion in ein geeignetes and bestimmen Sie, wie im be funktion $g^{-1}(x)$ auf and rechnerischem Weg. Begründen Sie an ten Funktionswertes, dass b und $g^{-1}(b) = a$.

Jbung 8.2

Bestimmen Sie rischem Weg.

a) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

c) $f(x) = 2x^3$

Übun

ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x$ abgebildet. Anhand von graphisch In A ıngen ts erkannt, dass keine Umkehrfunktion existi Zeigen Sie nun au sch, dass ehrfunktion ermittelbar ist.

Umkehrfunktionen

- 133 -





02-033-279

152

Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichung der Sichunge Common der Sichunge C	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör er Gles	104
Kapitel 7 Ganzrational Ank nen Anöhere Grues	115
Kapitel 8 Die L'array unk	127
Kajul 9 rigumetri de Funktion	135
itel 10 E vnential- und 🏿 🖋 arithmusft volitionen	145
Newitel 11 Vertiefende Betrachtur & Betragsungleichungen	169

zu Algebra und Funktionen Gesamty iert erlernen (Best

ghts reserved.

k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 9 Trigonometrische Funktionen

Kapitel 9: Trigonometrische Funktionen

hdung mit Sie haben bisher die Begriffe Sinus (sin α), Cosinus (cos α) und Tang s (tan t der Berechnung von Winkeln und Seitenlängen im rechtwinkligen I alls Ihnen alle Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck geläufig sind, könn be 9.1 überspringen.

Aufgabe 9.1

Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreit

Definition der Winkelfunktionen

Entnehmen Sie aus der Abbildung rechts Fachbegriffe, und ergänzen Sie:

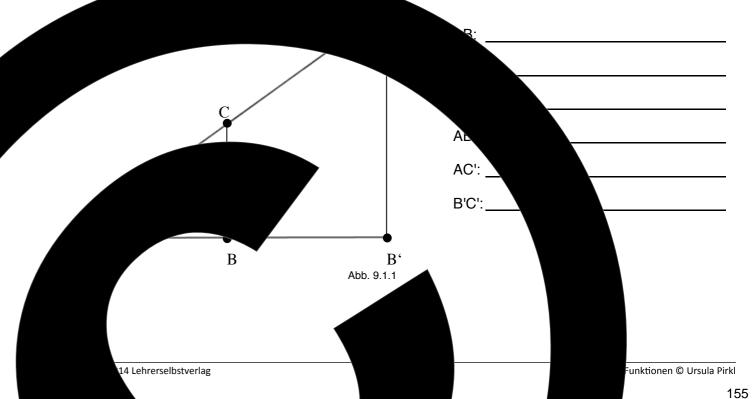
Die Seite, die dem rechten Win nennt man

Die Seite, die dem man



- 135 -

a) Ordnen Sie den angegebenen Seiten anhand der Dreiecke ABC und AB'C' bezüglich des Winkels α die die Begriffe Hypothenuse. Ankathete und Gegenkathete zu



b) Ermitteln Sie durch Messung aus der Abb. 9.1.1 den Winkel α und die anged igen so genau wie möglich.

 $\alpha = \underline{\hspace{1cm}} \overline{AB} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{AB'} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{AC'} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{AC'} = \underline{\hspace{1cm}}$

Berechnen Sie die angegebenen Seitenverhältnisse und jew cos(α) und tan(α) auf zwei Dezimalstellen gerundet. Achten Sie dabei da schenrechner bei der Eingabe von Gradmaßen die Einstellung "deg" haben

$$(1) \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = -$$

$$sin(\alpha) =$$

$$(2) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

Vergleichen Sie die E den entsprechende

 $\sin(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$ $\cos(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$ $\sin(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$ $\sin(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$ $\sin(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$ $\cos(\alpha) = \frac{1}$ an als funktionalen Zusammenhang und

Dem Verhältnis von Gegenkathete zu Hypothenuse ordnet man den **Sinus** des Winkels α **ZIL**

em Verhältnis von Ankathete zu **Hypothenuse** ordnet man den Cosinus des

Dem Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete ordnet man den Tangens des Winkels α zu.





Gegenkathete (von α) Ankathete ($von \alpha$)

tion 9.1:

le folgenden, häufig verwendeten Zusammenhänge zwischen sin, d gen Sie in jedem Tafelwerk nachschlagen ligkeit der Betrachtungen werden nfalls angegeben.

metrischer Pythagoras tanc

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{2})$$

sin cos(x)

 $-\sin^2(x)$ cos

sin(-x cos(-x

tan(-x)

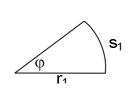
Aufgabe 9.2

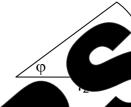
Kapitel 9

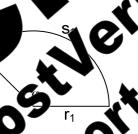
Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß

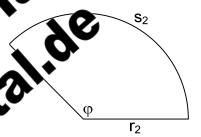
Bei der Anwendung von Sinus, Cosinus und Tangens in Wissensch Winkelangabe meist nicht mithilfe des Gradmaßes, sondern Nas man unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht, soll anhand der folgen

Verdeutlichen Sie sich anhand der im Folgenden als hier mit s bezeichnet wird, vom Winkel φ und dem Ra nachfolgenden Text.









- 137 -

Es gilt:

der Wil

Vin Volkstagen Umfarr

'om Vilkstagen Umfarr The Lorentz of the Deim Vollkras den Umfang bzw. die Bogenlänge s mit der Formel s = 2πr in kann. Ausgehand vom V. Va. verkann man auf die Bogenlänge bei einem Kreissegment schlichen. Ergänzen Vann der folgenen Tabelle fehlende Berechnungen für die Bogenlänge zu den gegebenen Winkeln, sowie das Verbaltnis Bogenlänge s zu Radius r.

Winkel im Kreissegment	360°	270°	180°	90°	1°	30°	60°	45°
					πr 180			
$\frac{1}{r}$ ogenmaß)	2π	$\frac{3\pi}{2}$						

Jeder Angabe im Winkelman mit Gradangabe kann man eine Ang naß zuordnen, die den Wert π enthält. ben Bogenmaß und Winkelm die Beziehungen:

Wink B umrechnen:

e im Bogenmaß er: **rad**

Bogenmaß ins Gradmaß umrechnen: $\alpha = x \cdot 180$

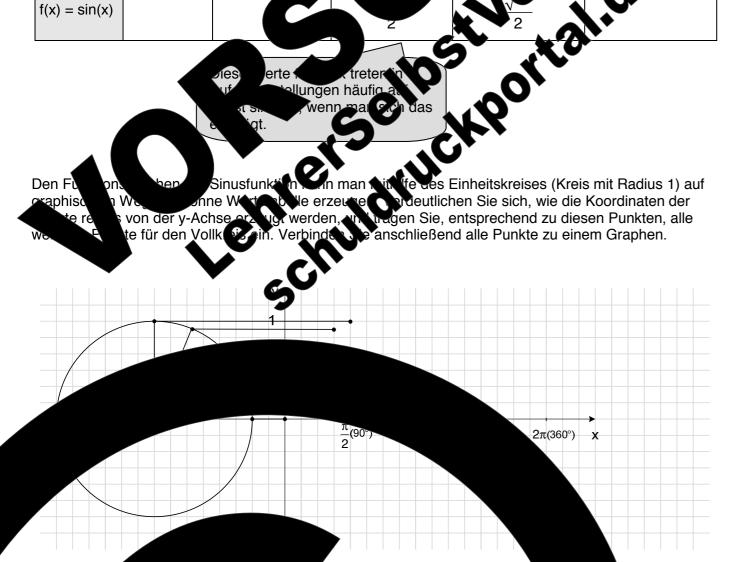
Win m Gradmaß Tasd deg

Aufgabe 9.3

Die Sinusfunktion

In Naturwissenschaft, Technik und anderen Anwendungsgebieten, in der Schwingungen und Wellen auftreten, ist der funktionale Charakte formelmäßige Beschreibung der Zusammenhänge. Die Funktion astunktion f(x) = sin xerhält man mit dem Taschenrechner, indem man für x entwoder im genmaß den Wert eines Winkel eingibt. Ergänzen Sie die folgende Tabelle, werte kait dem Taschenrechner erzeugen . Achten Sie dabei auf die Einste

х	0°	30° oder $\frac{\pi}{6}$	5° oder π	60° odex $\frac{\pi}{2}$ 90° oder $\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \sin(x)$			Y	



Der hier usfunktion f(x) = sin(x) bezeichnet.

Aufgabe 9.4

Kapitel 9

Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion

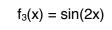
In den wenigsten Anwendungen tritt die Sinusfunktion in der Form i . Wie bei den Parabeln kann die Sinusfunktion verschoben, gestaucht oder gestreg Sie im Kapitel 5 Aufgabe 5.2 gelernt haben, können weitgehend auf die Sir agen werden.

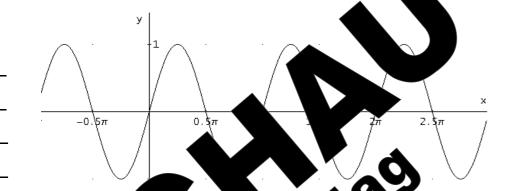
a) In den Abbildungen unten sind die Funktion f(x) Untersuchen Sie mithilfe der Abbildungen welche Ausgangsfunktion $f_0(x) = \sin(x)$ haben. N



unktionen © Ursula Pirkl

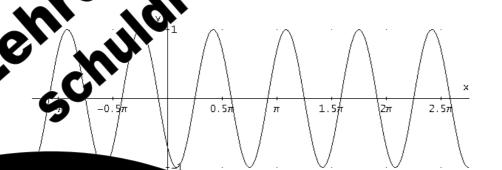
hrerselbstverlag





$f_4(x) = \sin(x - 0.25\pi)$

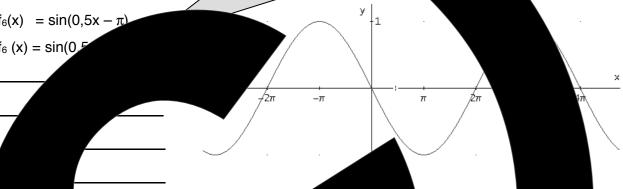




Um Verschiebungen un Stauchungen des Funktionsg der Funktionsgleichung erkennen muss man den Faktor vor dem x aus

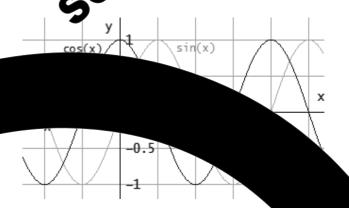
$$f_6(x) = \sin(0.5x - \pi)$$

 $f_6(x) = \sin(0.5x - \pi)$



b) Die allgemeine Form der Sinusfunktion kann wie folgt dargestellt werder ie, welche prinzipielle Wirkung die Parameter a, b, c und d bei der Sinusfunktion ha die Texte in den Sprechblasen ergänzen. Zur Vereinfachung werden für die Parameter ur positive reelle Zahlen betrachtet.





Information 9.3

Die Bea legte Funktionsnamen und kön vendung der Umke Argument getrennt werden. Treten e innerhalb von Brü ne Buchstaben bzw. Variablen nicht k

falsches Kürzen:
$$\frac{\sin \pi'(x)}{\pi'} \neq \sin \operatorname{oder} \frac{\cos(\pi \pi')}{\cot(\pi x')} \neq \cos(\pi)$$

Aufgabe 9.5

Bestimmen der **Periodizität p** einer gestreckten bzw. gestauchten Sinusfunktion bzw. Cosinusfunktion.

Zur Information:

Funktionen, die in gleichen Abständen auf der geber de Funktionswerte haben, nennt man pen he Funktionswerte haben h

Wie Sie in Aufgabe 9.4 erkannt haben, beeinflusst auchteck auchtekter d'a Ver-Funktionsgleichung $f(x) = a\sin(d(x-b)+c)$ die auchteck auch

$$zitar. p = \frac{2\pi}{d}$$

Funktion	dizitä der a or d	Periodatät p berechnen
$f_0(x) = \sin(x)$		ht notwendig
$f_3(x) = \sin(2x)$		$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$
$f_6(x) = 0.3$	p = 4 π	$p = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$
$x - 0.25\pi)$	Kala i wan nicht gelau Gulesen —	$p = \frac{2\pi}{3} \approx 0,67\pi$

Aufgabe 9.6

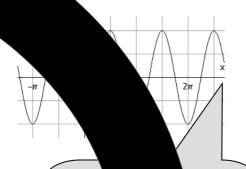
Lösen von trigonometrischen Gleichungen

Da das Lösen von Nullstellen bei Funktione Sungen anhand von Beispielen zu dieser Aufgr

arch Rechnung gezeigt werden, dass die Funktion = $\sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$ (s. Abbildung rechts) an den Stellen

$$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{R}$$

Atrischen Atrischen Atrischen Atrischen Beachten, dass es unendlich Bellen Geben kann, die eriodisch auftreten.



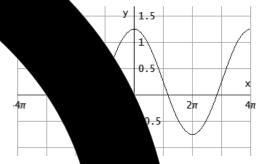
Info: Es ist in ünstig, bei trigon Funktione der x-Ach hen von π anz

Lösungsweg:



न्हा 2:

Man kann der Abbildung rechts näherungsweise entnehmen, dass die dargestellte Cosinusfunktion für $x_{1,2}=\pm 1,2\pi$ und $x_{3,4}=\pm 2,8\pi$ Nullet der Nullstellen dieser in x-Richtung erschobenen Cosinus



163

(X)

ervall [-4 π ;4 π] rechnerisch bestätigt werden.

chen Sie sich den Lösungsweg auf der folge eite.

Ursula Pirkl 02-0 ehrerselbstverlag

14 Lehrerselbstverlag

Schritt 1:

Ansatz für die Gleichung; alle Summanden ohne x nach rechts bringen.

Schritt 3: Queichung nach viflösen

Periodi (***) $p = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{15} \Rightarrow \pi$ Schritt 3: Weitere Nullstellen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$ issungen berechn 1. L. die Funktion 1. Weitere Nullstellen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$ $x_2 \approx -1, 2\pi$ $x_3 \approx -1, 2\pi + 4\pi \approx 2, 8\pi$ $x_4 \approx 1.2\pi$ issungen berechn 2. L. die Funktion 1. V. M. Weitere Nullstellen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$ $x_2 \approx -1, 2\pi$ $x_3 \approx -1, 2\pi + 4\pi \approx 2, 8\pi$ $x_4 \approx 1.2\pi$ issungen berechn 3. L. die Funktion 1. V. M. Weitere Nullstellen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$ $x_4 \approx 1.2\pi$ $x_4 \approx 1.2\pi$ $x_5 \approx -1, 2\pi$ $x_6 \approx 1.2\pi$ $x_7 \approx -1, 2\pi$ $x_8 \approx -1, 2\pi$ $x_8 \approx -1, 2\pi$ $x_8 \approx -1, 2\pi$ $x_8 \approx -1, 2\pi$ $x_9 \approx$ gleichen Abstand (vgl. Abb. Bsp. 2). Ur dem Funktionsterm erkennt man, das Gr Cosinusfunktion nicht in x-Richtung verschoben ist. Damit liegt, aus Symmetriegründen, zu $x_1 = 1.2 \pi$ eine zweite Nullstelle Die weiteren M Grund

$$x_3 \approx -1,2\pi + 4\pi \approx 2,8\pi \approx 8,8$$

$$K_4 \approx 1,2\pi - 4\pi \approx -2,8\pi \approx -8,8$$

formation 9.4

Wie Sie sicher erka metrischen Gleichungen de veitere Lösungen müssen ggf. Umkehrfunktio berlegungen mmetrieeigenschaften, Streckung, erfolgen, die und Verschieb tionen voraussetzen.

ungen:

Ursula Pirkl hrerselbstverlag Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend zu Algeb und F

selb TO TOTAL

Kapite

Exponential- und hmusfunktione

 $f(x) = \sin(x)$

02-033-279

Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2 Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3 Lineare Funktionen	63
Kapitel 4 Quadratische und biquadratische Gleichuk	77
Kapitel 5 Ganzrationale Funktion 2. Grade	87
Kapitel 6 Gleichungen 3. und hör er Ses	104
Kapitel 7 Ganzrational Ank nen Anöherek Grues	115
Kapitel 8 Die Walter unk	127
Kajul 9 rig metri de Funktion	135
itel 10 Exprential- und @arithmusfton tonen	145
Natitel 11 Vertiefende Betrachturgen Betragsungleichungen	169

zu Algebra und Funktionen Gesamty iert erlernen (Best

pehalten., ghts reserved.

k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Gerg

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 10: Exponential- und Logarithmusfunktionen

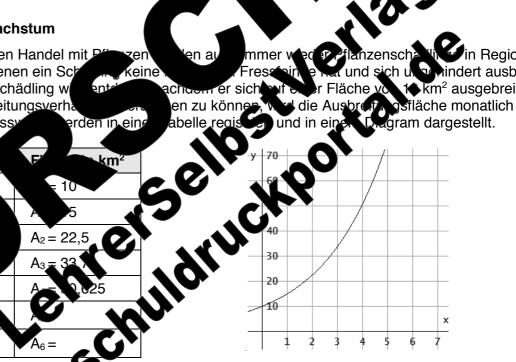
Da viele Zu- und Abnahmeprozesse in Natur und Technik nicht linea r quad exponentiell zu- und abnehmen, spielen Funktionen, die diese Proz angewandten Mathematik eine zentrale Rolle. Beispielhaft sind hier esse, wie die Zunahme einer Population, die Abnahme der Konzentration eines Ma kohol im Blut oder auch die Abnahme der Menge eines radioaktiven Stoffes. It enden Aufgaben wird jeweils an einem Beispiel die Herleitung einer Funktionsgleig tums- und Abnahmeprozess erarbeitet.

Aufgabe 10.1

Exponentielles Wachstum

Durch den weltweiten Handel mit eingeschleppt, in denen ein Sc kann. Ein solcher Schädling w Sfläche monatlich neu hat. Um das Ausbreitungsverh vermessen. Die Mess





a) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{15}{10} =$$

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{33.7}{22.5} = \underline{\hspace{1cm}}$$

Information:

 $\frac{A_{n+1}}{2}$ von zwei Es liegt exponentielles W aufeinander folgenden Messwei d größer als 1 ist.

b) Überprüfer esswerte, dass dieser Wach mit der Funktion rmitteln Sie mithilfe der Funktio f(t) =ße der Fläche

ion:

iable x oder hier t steht im nenten. Daher stammt auch der he Exponentialfunktion.

$$f(5) = 10 \cdot 1,5 - =$$

14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

Kapitel 10

Aufgabe 10.2

Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse

Radioaktives Jod 131 entsteht in Kernkraftwerken und kann bei Reaktor gelangen. Nach dem Supergau in Tschernobyl wurden in einigen Gebiete land die Böden mit diesem radioaktiven Jod so stark belastet, dass beispielsweise fr kauft werden durfte und Sandkästen auf Spielplätzen für die Kinder gesperrt w Eigenschaft, dass nach etwa einer Woche jeweils die Hälft des St Jod in das Edelgas Xenon umgewandelt hat.

a) Ergänzen Sie die Wertetabelle für eine Ausgar überprüfen Sie die Richtigkeit ihrer Werte an

Zeit t in Wochen	Menge m in
0	$m_0 = 100$
1	m ₁ =
2	
3	
4	m ₄
	;=
8	6= 4



b) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$$\frac{\mathsf{m}_{\scriptscriptstyle 1}}{\mathsf{m}_{\scriptscriptstyle 0}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

s liegt eine exponentielle Abnahme vor, da b von zwei aufeinanderfolgenden Messewerten konstant ist un nd 1 lieat.

c) Überprüfen S erten, dass dieser Abnahme r Funktion f(t) = 100gen Sie mithilfe der Funktion f(t), d Wochen von weniger als 30g, nur noch weniger al der urs Ausg d zumindest durch Jod keine erhebliche für die r gegeben war. (Nach dieser Zeit wurden auch die Spielplätz wieder

Aufgabe 10.3

Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem Waarstum

Die drei Abbildungen zeigen im gleichen Ausschnitt des Koordinate spielnaft den Verlauf von Funktionen, die im ersten Quadranten linear, quadratis en. Vergleichen Sie rein qualitativ anhand der drei folgenden Abbildungen das he und exponentielle Wachstum.



Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion.

Aufgabe 10.4

ammenhänge und Eigenschaften von nentialfunktionen der Form tox haben, kommen nun nungen zur Umkehrfunktion bei diesem Funktion ssen bereits, dass man spielsweise bei Gleichungen der Form x2 = 9 die Umke den muss, um die Gleichung nach x aufzulösen. (Vgl. Aufgabe 8.1). Überträgt man diese 🕽 eine Gleichung der Form $a \cdot b^x = c$, stellt sich die Frage, mit welcher Umkehrfunktion man g nach x auflösen kann, also wie man das ten herausbekommt.

Diese Pr der beiden Funktionen f(x) = 1 bearbeitet werden.

4 Lehrerselbstverlag

e wird als Eulersche Zahl bezeichnet. Man kann den Zahle indem man auf dem Taschenrechner die **T**aste e^x verwendet Wert 1 eingibt. Man erhält: e = 2,71. Die Funktion $f(x) = e^x$ nimmt in de ten Mathematik

llen Stellenwert ein und wird aus hwerpunktmäßi

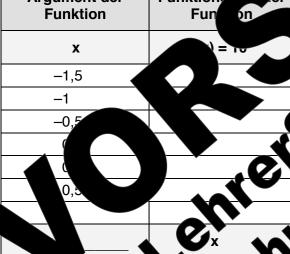
unktionen © Ursula Pirkl

171

a) Die Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ und ihre Umkehrfunktion

- i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von links "Potenzieren" auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen Sie 6 ichtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit f(x) beschrifte
- ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Tast chten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte erzeugen sie eine Bezeichnung für die erfolgte Rechenoperation unterhalb der Wertersbelle on rechts nach links zeigt, und geben Sie den Funktionsterm der Umket

Potenzieren					
Argument der Funktion	Funktions en				
x	1=10				
-1,5					
-1					



Funktionswert der

Umkehrfunktion



gabenteile i) und ii) richtig bearbe erkennen, dass man die auf dem Taschenrechner verwenden muss. Spalte der Wertetabelle Verte der linken Spalte zu erhalten. Die Bezeichnung "log a für die athematische Operation, die als Logarithmieren bezeichnet w unktion zur Exponential funktion $f(x) = 10^x$ wird daher als Logarithmus funktion zu bezeichnet.

> Basis gibt an, welcher Zahlenwert n mit otenziert wurde. Wenn 10 die Basis is net nan den Logarithmus mit einer indizierte Gelegentlich findet man in der Literatur als für "log₁₀" auch die Bezeichnung "lg10" für de dekadischen Logaritt

b) Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und ihre Umkehrfunktion

- i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von Richtung ks nach "Potenzieren" auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordner dem richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit f(x) beso
- ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende der rechten Spalte der Wertetabelle durch Logarithmieren die Werte de eugen können, und geben Sie anhand der Bezeichnung der Taste auf dem Tasch Umkehrfunktion an.

Potenzieren

Argument der Funktion	Funktionswert Funktionswert
x	(X)
-1,5	
-1	
-0,5	

	Â		
	U,=		.7
	0,5		
		40	
¹ (x		W	1

tionswert der ehrfunk





Falls Sie die Aufgabenteile ib und iit richtig bearbeitet haben, konnten Sie erkennen, dass man die Taste la auss, um aus der rechten Spalte der Wertetabelle die zur Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die

> Da der Exponentialfunkti ußerordentliche Bedeutung als "natürlicher zukommt, und der Logarithm eichnet wird, wurde Logarithmus" oder "Logarithmu vereinbart, dass man für "loge" die A erwendet.

Aufgabe 2

und e^{lnx} = x (Vgl. Kapitel 8 Aufgabe Beg

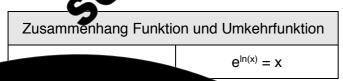
Ursula Pirkl hrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

Information 10.1

Regeln zum Umgang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen speziell zu

Da Exponentialfunktionen zur Basis e, wie wir noch sehen werden, beist Differenzial- und Integralrechnung günstige Eigenschaften haben, spielt funktion, auch einfach e-Funktion genannt, in Wissenschaft und Achnik pbene Rolle. Daher beziehen sich die folgenden Regeln insbesondere auf die d f(x) = ln(x).Beweise für die Regeln können in der Fachliteratur nachgelesen W





und Logarithmengleichungen zur ba $e^{x} = a$ $ln(e^x) = ln(a)$

	nformungen bei Logarithmen		
J In(a)	$ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b)$	In (n(b)

Aufgabe 10.6

Umrechnen einer Exponentialfunktion mit einer beliebigen Basis b in el lfunktion zur Basis e

In Naturwissenschaft und Technik ist es üblich, exponentielle Zusal Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ so umzuformer on zur Basis e erhält. Begründen Sie den Ansatz (1) und erläutern Sie die Umfor

e^{z(x)} = b^x (1) \rightarrow (2) (3) Aufgabenstellung: $f(x) = a \cdot b^x$ Funktionsterm der Form f(x)

 $ln(e^{z(x)}) = ln(b^x)$

 $z(x) = x \ln(b)$

 $(4) \to (5)$

 $f(x) = a \cdot e^{x \ln(b)}$ $(5) \to (6)$ (6)

den folgenden Zusammenhang ein.

tialfunktion mit beliebiger einer e-Funktion umformen.:

 $f(x) = a \cdot e^{x \ln(b)}$ f(x) = a

Übungen

Ü10.1

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, ohne de verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die ສາດກ 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel:
$$e^{-\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln(a)}} = \frac{1}{e^{\ln(a)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

des Zusammen in gestellt in weißen sicht legenseitig war seine sei

ortierter Reihenfolge:

 $\frac{1}{6}$, e, e³, \sqrt{e} , a, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ungültiger

Ursula Pirkl

Ü10.2

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, ohne den enrec verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Rege tion 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(e\right) = -\frac{1}{3}$

- a) ln(e)
- c) In(e^a)
- d) ln(1)

f) ln(e⁻⁴)

- g) ln(e⁻²)
- h) ln(e^{-a}

- n) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

unsortierter Reihenfolge:

- r Ausdruck, 0, 0, 1, 1, -1, -1, 2, -2, -2,
- 14 Lehrerselbstverlag

Aufgabe 10.7

Lösen von Exponentialgleichungen zur Basis e

Wie bei Potenzgleichungen (vgl. im Kapitel 6) gibt es auch bei der Lösun entiagreichungen unterschiedliche Lösungsverfahren. Einige häufig auftretende Verahren w mplarisch jeweils an einem Beispiel vorgestellt. Es handelt sich hierbei led orschläge, da meist auch alternative Vorgehensweisen möglich sind. Erläutern Sie für spielen vorgestellten Lösungswege die von Zeile zu Zeile erfolgten Umformung

Beispiel 1:

Die Lösungsvariabele kommt nur in einem e



Beispiel 2:

Die Lösu rationalen Term der Gleichung.

exponentielle Teil vom r Faktorisieren getrennt werden k Imformungen und en ein Summand mit einem exponentiellen er Summand der nübrig, kann diese Gleichung algebraisch **nicht** gelo uss man dann mit Näherungsverfahren oder zeichnerischen Methoden arbeite

Algebraisch ni Exponentia ie Anwendung von In auf beiden Seiten führt dazu, dass das x nun nicht mehr im E von e erscheint, dafür aber im Argument de ach x aufgelöst w kann die Gleichung nie

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag Lösung durch Faktorisieren

- $xe^{x} + 4x = 0$
- (2) $x(e^x + 4) = 0 \implies x_1 = 0$
- $e^{x} + 4 = 0$
- (4) $e^x = -4 \implies keine$
- (2)→(3):
- $(3) \rightarrow (4)$:

Beispiel 3:

Die Lösungsvaria fehlt



gleichungen nie durch x

dividieren darf, da 7 Im Gegensatz dazu dari n leichungen durch den eax+b nicht Null wird. Faktor, der x enthält, nämlich

Form: aebx + cedx

- $(2)\rightarrow(3)$:

Ergänzung zu Beispiel 3:

Man kann diese Gleichung auch lösen, indem man den exponentiellen Teil aufwendigere Lösungsvariante ist bei Exponentialgleichungen jedoch mit

(1)
$$e^{3x} - 3e^{2x} = 0$$

(2)
$$e^{2x}(e^x - 3) = 0$$

$$(3)(e^{x}-3)=0 \quad \lor \quad e^{2x}=0$$

$$(4) \qquad e^{x} = 3 \qquad \Rightarrow \text{Widerspru}$$

(5)
$$ln(e^x) = ln(3)$$

(6)
$$x = \ln(3)$$

Beispiel 4:

Die Lösungs Summand is

min to mehreren extra mitellen Sun vor, der rationale ne ku sante vor (2) – (3): (3) (4) – (4) – (5): (2) $(e^x)^2 - 4e^x - 5 = 0$ (3)(4)(5)(6)zx=ln(-1)(7)→(8):_ keine Lös. $(8)\rightarrow (9)$:

Übung 10

den Gleichungen nach x auf, und geben Sie das Ergebnis go Lösen Dezi undet, an.

- b) $e^{2x} = 1$
- d)

- $3e^{4x} 8 = 3$
- h)

 $e^{2x} = 4e^{x}$

Kapitel 10

- $2e^{2x} 4e^x = 0$
- k) $e^{x} e^{-x} = 0$

- $x \cdot e^x 1 = 0$
- $e^{2x}(x^2-4x-5)=0$
- o) $x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = 0$

- $e^{2x} 2e^{x} + 1 = 0$
- $2e^{2x} + 5e^{x} = 3$

Lösungen in unsortierter Reihenfolge:

$$x = 0$$

x = ln(4)

$$X = 0$$

$$x = \frac{ln(2)-1}{2} \approx 0,15$$

$$x = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{11}{3} \right)$$

$$=\frac{\ln(2)}{2}\approx$$

$$x = 1$$
 $\approx 0,64$

algebraisch nicht lösbar

$$=\frac{-\ln(2)}{2}\approx -0.23$$

ichs muss man

l 4 Aufg.4.6).

 $x_2 = \sqrt{(2)} \qquad \qquad x = -\frac{1}{3} \qquad \qquad x = -\frac{1} \qquad \qquad x = -\frac{1}{3} \qquad \qquad x = -\frac{1}{3} \qquad \qquad x = -\frac{1}{3} \qquad \qquad x = -\frac{$ an der praktische der endung in den Naturwissenschaften, der Technik und auch bei den itswissenschafte der Robe der Der Punktionen arbeite,t sollen auch bei der Lösung von Loga unengleichung hier nur Glob bungen, die den natürlichen Logarithmus In, also den Logarithmus zur Basis e, enthalten behändelt werden. Anhand von gängigen Beispielen sollen einige Lösungsverfahren vorgestellt von en. Erläutern Sie bei den Beispielen jeweils die Umformungsschritte.

Beispiel 1:

Der log

1: $ln(ax^2 + bx + c) = d$

Gleichungen, die einen alten, wie auch bei den **Definitionsbereich** ithmus nur für die R+ definiert ist. positive

Definitionsbereich:

$$D = \{x \mid x^2 + 2x\}$$

druck im Argument des In() de $=\{x|(x)$ men. Für die Bestimmung des De eine guadratische Ungleichung lösel

unktionen © Ursula Pirkl

(1)
$$ln(ax^2 + bx + c) = d$$

(2)
$$e^{\ln(ax^2+bx+c)} = e^d$$

(3)
$$ax^2 + bx + c = e^d$$

(4)
$$ax^2 + bx + c - e^d = 0$$

Beispiel 2:

Die Gleichung besteht aus einem Produkt mit Beide Faktoren enthalten die Lösung



spereich:

$$\left\{ x \middle| bx > 0 \right\}$$

- (1) $ax \cdot ln(bx) = 0$
- (2)
- (3)
 - zu D

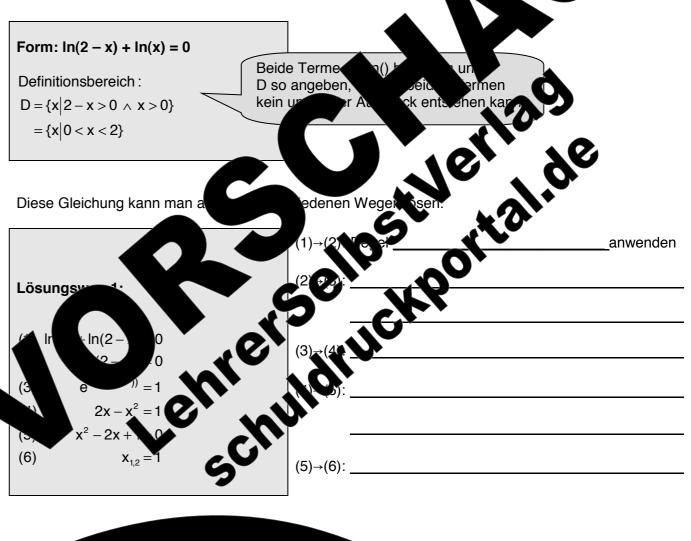
(2)→(3):

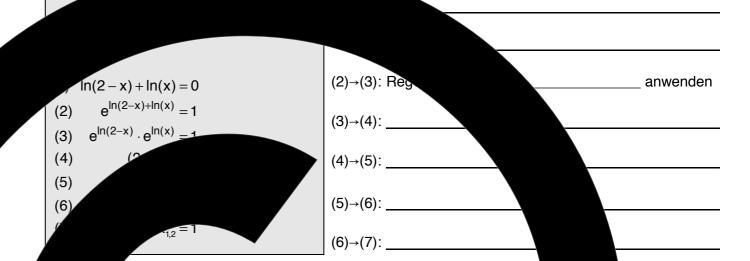
Beispiel 3

Die Gleichung hat keinen konstanten, jedoch mehrere logarithmische St nder elche die Lösungsvariable enthalten.



Diese Gleichung kann man a





Beispiel 4:

Algebraisch nicht lösbare Logarithmengleichung

ln(x) - x = 0ln(x) = x

> $e^{\ln(x)} = e^x$ $x = e^{x}$

Anhand der graphischen Darstellung erkennt man, dass e Lösung gibt.

Übung 10.4

die folgenden Neichungen na $x \in u^{-1}$, ruir an. $\ln(x) = -2 \qquad \ln(x) = 0$ $1) - \ln(x-1) = 0 \qquad \qquad g) \ln(x + 60 + g) =$ $j) \ln(4x) = 4 \ln(x) \qquad k \ln(2) + k$ Reihenfoll k = 1 $x = -\sqrt[3]{4}$ Ermitteln Sie den Definitionsbereich das Ergebnis ggf. auf zwei D

a)
$$ln(x) = 3$$

$$\ln(x) = -2$$

$$ln(x) = 0$$

d)
$$ln(4x) = 0$$

e)
$$ln(e^{x}) = 0$$

h)
$$5\ln(x-7) = 1$$

i)
$$\ln(x \pm 1) - x^2 - 1) =$$

$$\ln (x) = \ln (x) = 1$$

I)
$$ln(x^2) + ln(8x) = 0$$

Ösung

$$x = e^{-2} \approx 0,14$$

$$x_1 = -2; x_2 = -2$$

$$x = e^3 \approx 20,09$$

$$\sqrt{4}$$
 $x = 0$

$$x = \sqrt[5]{e} + 7 \approx 8,22$$

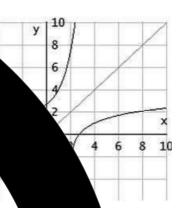
Übung 10.5

e die Funktionsgleichung der Umkehr-

 $f^{-1}(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von f(x)f⁻¹(x) an.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass der y-Achsenabschnitt von f(x) und die Nullstelle von f-1/2 ichen Zahlenwert haben.

Zur Kontrolle: wert gerundet: 2,74



Ursula Pirkl

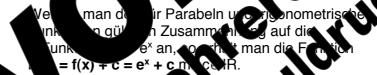
hrerselbstverlag

Aufgabe 10.9

Verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln der e-Funktion

Sie haben die Regeln, die beim Verschieben, Stauchen und Streck tionen zu beachten sind, bereits bei den quadratischen Funktionen (Parabeln) und baden trig Funktionen kennen gelernt und mit Sicherheit festgestellt, dass die Parameter eichungen weitgehend gleiche Wirkungen haben. Anhand von geeigneten Beispiele Regelwerk, mit kleinen Unterschieden, auch auf Ex

a) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in



- ① $h_1(x) = e^x + 1$
- ② $f(x) = e^{x}$
- $3 h_2(x) = e^x 1.5$

dargestellt_E



 α ionsgleichung von $f(x) = e^x$ wird der r hinzugefügt, so dass die Funktion $(x) = e^x + c$ entsteht. Für c > 0 wird die Funktion f(x)nd für c < 0 wird die Funktion verschoben. Damit gelten für das Ver Funktionen in v-Richtung Regeln wie beim Verschiel In oder trigonome Richtung.

14 Lehrerselbstverlag

hrerselbstverlag

b) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in x-Richtung

Zur Erinnerung:

 $f(x) = (x - b)^2$ ist eine in x-Richtung verschobene Normalparabel.

 $f(x) = \sin(x - b)$ ist eine in x-Richtung verschobene Sinus

Wendet man den für Parabeln und trigonometri Funktionen gültigen Zusammenhang auf die e-Funktion $f(x) = e^x$ an, so erhält man die Fu $h(x) = e^{x-b}$ mit $b \in IR$. In der Abbildung recht die Funktionen



- ② $f(x) = e^{x}$
- ③ $h_2(x) = e^{x + \ln(10)}$

dargestellt. Ergänzen die folgender



erschoben. Damit gelten für das Verschieben von en Regeln wie beim Verschieben von in x-Richtung.

Man muss jedoch die folgende Besolderheit beachten.

Besonderheit in x-Richtuna!

e Wirkung ein Vorfaktor vor dem Kasten vervollständigen.

 $f(x) = k \cdot e^x \text{ mit } J$

Bei der e-Funktion be IR+ vor dem Term e^x eine Verschieb während bei den Parabeln ut hen Funktionen durch einen entspre ctor treckung in ____ -Richtung el

Stelle n der Schreibweise h(x) = k⋅ex dar.

Ursula Pirkl

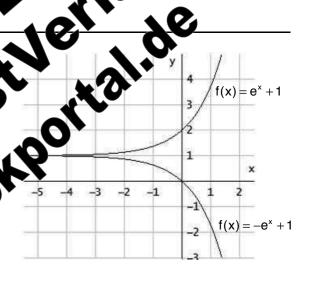
c) Spiegeln von e-Funktionen an einer Geraden y = c

Wie Sie in Aufgabenteil b) erkannt haben, bewirkt ein positiver reg Funktionsterm e^x eine Verschiebung der Funktion in x-Richtung werden, wie sich ein negatives Vorzeichen vor diesem Vorfaktor auswirkt.

Begründen Sie, warum bei der folgenden Umformung d or uem Faktor k∈ IR⁺ nicht in den Exponenten der Funktion übernommen werden kal

$$f(x) = -ke^{x} = -e^{\ln(k)}e^{x} = -e^{x + \ln(k)}$$
 mit $k \in \mathbb{R}_{+}^{+}$

*die Gie Strect Erläutern Sie anhand der A Wirkung des Minus



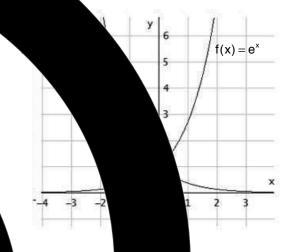
d) Spiegeln an der y-Achse Strecken und Stauchen bei e-Funktionen

Wie Sie unter Aufgabenteil b) erkannt haben, können die Eigenschaften hinsichtlich des Streckens trigonometrischen Funktionen nicht direkt auf die e-Funktionen und Stauchens you übertrag

Zusammenhänge beim Spiegeln an der

egeln an der y-Achse

Durch ein negatives Vorzeichen im Exponent wird eine e-Funktion a lt. Man muss dabei. mit einem



14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

Strecken und Stauchen in v-Richtung

In der Abbildung rechts sind die Funktionen

①
$$h_1(x) = e^{3x} = (e^x)^3$$

②
$$f(x) = e^{x}$$

3
$$h_2(x) = e^{0.5x} = \sqrt{e^x}$$

dargestellt.

Ergänzen Sie in der Abbildung rechts zunächst die Funktionen

$$\bigoplus h_3(x) = e^{-3x} = \frac{1}{e^{3x}} = \frac{1}{(e^x)^3} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^3$$

©
$$h_5(x) = e^{-0.5x} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$$

und danach den folg



Im Exponenten der Ful $h(x) = e^{ax}$

nfassung der Eigensch eins. Ergänzen Ve die

Streckel S auchen und Spiegeln →strecken in __- Richtung

 $0 < |\mathbf{a}| < 1 \rightarrow \text{stauchen in } _$ - Richtung

echsel von a bewirkt eine

b verschiebt die Funktion in Richtung ___-Achse:

 $\mathbf{b} > 0$

 $\mathbf{b} < 0$

Ein oonentiellen Ausdruck

ktion an der Geraden y = c, beachten, dass gilt: $-\mathbf{b}e^{ax}+c = -e^{ax + \ln(b)} + c$

lie bei anderen ktionsklassen niebt der eter **c** die in ___-

Übungen:

Ursula Pirkl hrerselbstverlag

Aufgabe 10.10

Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$

d Spiegelns Bereits gewonnene Erkenntnisse hinsichtlich des Verschiebens, St bei Parabeln, trigonometrischen Funktionen und e-Funktionen könn and auch auf das Verhalten der Logarithmusfunktionen übertragen werden. W ssen allerdings einige nge sind für x∈ IR⁺ in den

$$h(x) = f(x) + c \text{ mit } c \in IR$$

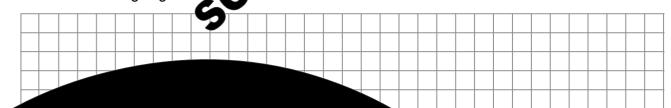
$$h(x) = ln(x) + c$$

$$h(x) = ln(x) + ln(e)$$

$$h(x) = ln(e^{c} \cdot x)$$

$$h(x) = ln(k \cdot x)$$
 mit k



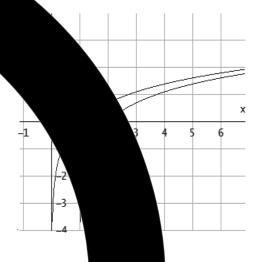


eutlichen Sie sich die folgende Rechnung, un mitteln Sie die Funktionsgleichung von h(x) durch Ablesen aus der Abbildung rechts. Beschriften Sie zuvor die abgebildeten Graphen mit f(x) und h(x).

$$h(x) = f(x - \frac{1}{x})$$

$$h(x) = b$$

en Sie in der Abbildung den Graph der Funk $\ln(x + 1)$ für x > 1.



187

14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

c) Strecken und Stauchen der Funktion f(x) = ln(x) in y-Richtung

Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und ermitteln Sie die Funktionsgleichung von h₁(x) durch Ablesen aus der Abbildung rechts.

h(x) = a f(x)für a∈ IR⁺

 $h(x) = a \ln(x)$

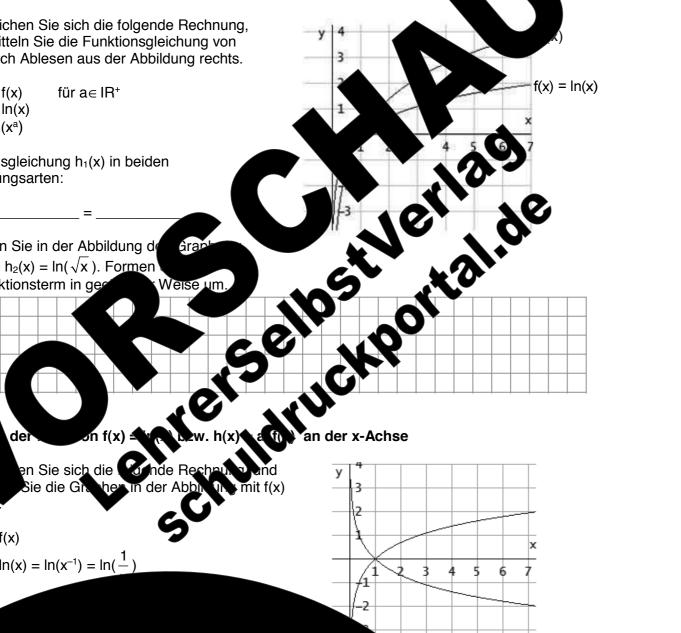
 $h(x) = ln(x^a)$

Funktionsgleichung h₁(x) in beiden Darstellungsarten:

 $h_1(x) = _{-}$

Ergänzen Sie in der Abbildung de Funktion $h_2(x) = \ln(\sqrt{x})$. Formen den Funktionsterm in geg





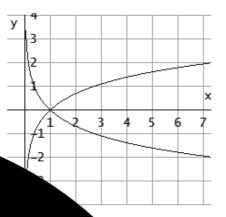


Spied

best und h(x

h(x) = -f(x)

 $h(x) = -\ln(x) = \ln(x^{-1}) = \ln(\frac{1}{x})$



ren Sie die Funktionen

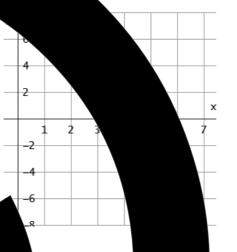
 $(x) = \ln(x^3)$ und $h_2(x) = \ln(x^{-3})$

im Koordinatensystem rechts. Ergänzen Sie den anschließenden Satz mit a∈ IR, in der Funktion h(x) =

|a| > 1

vechsel vor dem Betrag von a bewirkt

ing an der ____-Achse.



e) Spiegeln der Funktion f(x) = ln(x) an der y-Achse

Da der Logarithmus für $x \le 0$ nicht definiert ist, arbeitet man bei der Logarithmusfunktion oft mit Beträgen im Argument der Logarithmusfunktion.

> Betragszeichen kann man weglassen, wenn man den Ausdruck, der in Betragsstrichen steht, einmal mit einem positiven und einmal mit einem negativen Vorzeichen versieht. (Vgl. Aufgab

$$f(x) = f(|x|) = \ln(|x|) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} f\ddot{u}r & x \\ -x & x < x \end{cases}$$

Ergänzen Sie in der

$$h(x) = \ln(|x| - 1)$$

$|\mathbf{r}| = \ln(|\mathbf{x}|) \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{r}| d\mathbf{x}$ $|\mathbf{r}| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{r}| d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{r}| d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}$

Der Param a∈ IR st 3ckt bzw. staucht die Funktion.

strecken ___-Richtung

 $0 < |\mathbf{a}| < 1$ stauchen in ____-Richtung

c = 0 wird die

.en Sie dass gilt: -aln(|x|) =

h(x) = aln(|x - b|) + c = ln(|x - b|)

on in

verschieben nach

 \rightarrow verschieben nach

Wie bei ande klassen verschiebt der mit c∈IR die Funktion in -A

Beachten Sie, das bei Logarithmusfunktionen gilt:

 $\mathbf{c}(\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \ln(\mathbf{x} - \mathbf{b})$ ln(x - b) + c

Ursula Pirkl ehrerselbstverlag 14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

189



Oberstudienrätin Ursula Pirkl commence of the commence of th Grundlegend $f(x) = \sin(x)$ Kapite Vertiefende Betrachtu sungleichungen

02-033-279

Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome Kapitel 2 59 Grundlegendes zu Gleichungen Kapitel 3 Lineare Funktionen 63 Kapitel 4

Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe in der Gesamtwe iert erlernen in Gesamtwe iert erlernen iert erlernen

5.

ghts reserved.

k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 11: Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen

Während in Kapitel 4 die Betragsungleichungen nur gestreift wurden sollen hat nun ührlichere Betrachtungen angestellt werden, wobei ein Schwerpunkt in der grannben Die der Lösungsmenge anhand von Diagrammen liegt.

Aufgabe 11.1

Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betraguftrit

a) Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweig win Langenhand der drei Prische und verfahren Sie bei den folgenden Aufgabe analog daz

Beispiel 1: Betragsungleichung x - 2

Algebraische Lösung

 $-(x \ge 1)$ $2 \le -1$ $x - 2 \ge 1$

nn man die Aagsstriche weglässt, erhält der gesam in, der zwischen den Betragisti en steht einmal ein positives und

Weglassen der

einma an negatives Vorzeichen. Vg Kapitel 4 Aufgabe 4.3

gsmenge kann dann in

 $\mathsf{IL} = (-\infty; \mathsf{1}^{\mathsf{L}}, \mathsf{1}^{\mathsf{L}}, \mathsf{1}^{\mathsf{L}}, \mathsf{1}^{\mathsf{L}})$

ckige Can mer:

Das Intervall ist auf dieser Seite nicht begrenzt. Eckige Lan mer: Das his all ende mit Lo w. beginn bei 3.

Man fasst die linke Seite der Ungleichung als lineare Betragsfunktion (x) = |x - 2| auf. Durch dasssen der Betragsstriche
n die beiden Geraden

2 und $f_2(x) = x - 2$

werden in einem
Die ersten und zweiten
Quat zeichnet, denn die
Funkti ssen wegen des
Betrags v sein.

Direchte Seite der Ul Ills als Funktion, sst und ist hier e durch A(0/1).

14 Lehrerselbstverlag

Funktionen © Ursula Pirkl

2. Schritt

- 170 -



Die Schnitt und f₂(x) mi nzen'

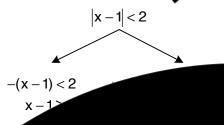
Kapitel 11

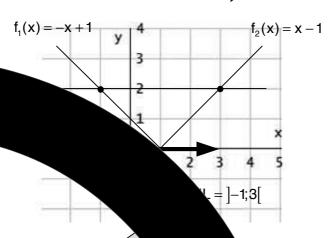
Man kann nun auf der x-Achs Bereiche markieren, für die dass die Funktionswerte de Geraden größer gleich

Beispiel 2: Be

$$f_1(x) = -(x-1) = -x+1$$

Alger





]-1;3[

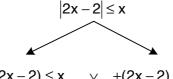
Die offenen eckigen Klammern geben an, dass -1 und 3

Anhand der gra erkennt man sofd Lösungsmenge be abe nur aus einem Intervall

Beispiel 3: Betragsungleichung $|2x-2| \le x$

Es spielt für die Vorgehensweise keine Rolle, ob auf der rechten Seite der Gleichung eine Konstante oder ein von x abhängiger Term steht

Algebraische Lösung



$$-(2x-2) \le x \qquad \lor \qquad +(2x-2) \le x$$
$$2x-2 \ge -x \qquad \lor \qquad 2x-7$$

$$x \ge \frac{2}{3}$$
 $x \le 2$





- 171 -

$$f_1(x) = g(x)$$

$$f_2(x) = g(x)$$

$$-2x+2=x$$

$$2x-2=x$$

$$-\frac{2}{2}$$

x = 2

ab die Werte 2/3 und 2 zum ngsintervall gehören, hängt ab, ob in der Aufgabenlie Relationszeichen er ≥ bzw. ≤ rden.

Übung 1

der folgenden Betragsungleichung Hilfe des en Lösungsverfahrens.

b)
$$|3x-1| < 2$$

$$x+1 \le x$$

ide Übungen

Ursula Pirkl

ehrerselbstverlag

14 Lehrerselbstverlag

unktionen © Ursula Pirkl

Kapitel 11

Eintragen, ob Betrags-

Aufgabe 11.2

Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen

Bei diesen Betragsungleichungen wird ein algebraischer Lösungsweg of für Rechenfehler. Daher wird hier eine Lösungsstrategie verfolgt, die übe er graphischen Vorgehensweise beruht, die schon in Aufgabe 11.1 angewendet Vorgehensweise übersichtlich dargestellt werden kann, werden d aufbauend aufeinander in mehreren Diagrammen gezeigt ergänzt werden.

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte bei anschließenden Übungsaufgaben mit dem glei

Beispiel:
$$|x + 0, 5| + |x - 2| - |x - 4| \le 2$$

1. Schritt:

Entsprechend zu Aufgabe Funktionen zugeordne geeigneten Koordinater

2. Schritt:

An den



Ursula Pirkl hrerselbstverlag

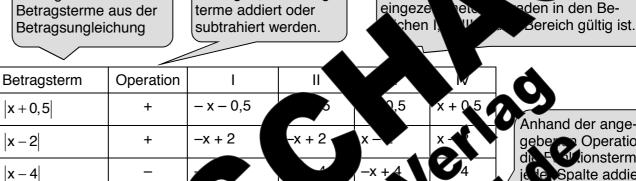
3. Schritt

Eintragen der

Summe:

Eine Tabelle erstellen, in der für jeden Bereich angegeben wird, welcher Ful

Eintrad

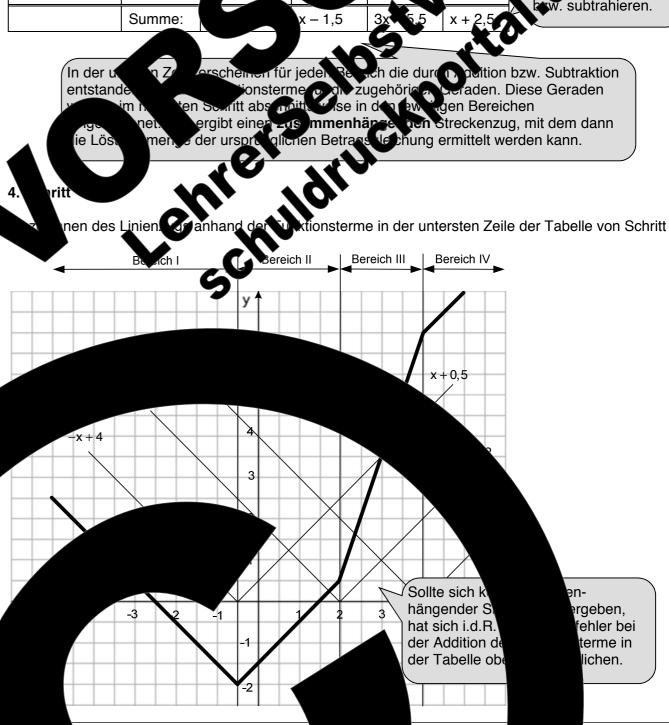


hand der ange-Operationen in v. subtrahieren.

den in den Be-

raden. Diese Geraden streckenzug, mit dem dann

ktionsterme in der untersten Zeile der Tabelle von Schritt 3.



14 Lehrerselbstverlag unktionen © Ursula Pirkl

5. Schritt

Einzeichnen der Geraden, die dem Term auf der rechten Seite der ursprünglichen entspricht, hier also der Geraden g(x) = 2.



6. Schritt

Man ermittelt das Lösungeir Schnittpunkte der Geraden g(x) mit dem Streckenzug unkte des Streckenzugs mit der Geraden x im entsprechend genau auf Lösungsintervalls auch aus der Zeich

mittpunkt von g(x) mit der dem Funktion f(x) = -x - 2.5

$$f(x) < g(x) \Rightarrow x-2,5 < 2 \Rightarrow x < 4,5$$

thte Grenze: Schnittpunkt von g(x) mit der dem Bereich II zugeo $a_{1} f(x) = 3x - 5.5$

$$(x) < 2 \Rightarrow x < 2,5$$

Lösungsinter

Übung

osungsintervalle der folgenden Betragsungleichungen

a)
$$2 \leq 5$$

b)
$$|x-2|-|0,5x+1|<1$$
 c) $|x-3|-|x+1|$

pungen:

Ursula Pirkl

hrerselbstverlag

Abzisse	63
Ankathete	135
Ausklammern	39
Binomen höherer Ordnung	55
Binomialkoeffizienten	
Binomialreihe	57
Binomische Formeln	
biquadratische Gleichung	
Bogenmaß	201
Bruchgleichungen	60
Cosinus	35
Cosinusfunktion	
Distributivgesetz	
echter Bruch	9
erste Winkelhalbierende	70
erweitern eines Brug'	11
Exponent 0	25
Exponentialfunktic	147
Exponential designary	. 0
Typopol	40
Expone elles stud	45
Forton ten	39
ris Form	28
ions	
Ga ationale Lunktionen 2 G. des	
ີຊາ tionale Funktion ເວັດໂອrer Ordnyr	M5
thete	7 .135
gen. Lite Zahl	9
	104
Grad- und Bogenmaß	137
Hypothenuse	135
kartesisches Koordinatensystem	
Kehrwert	9
kleinste ge	
Kürz	
angen	
Jngleichungen	
arithmengleichungen	157
Logarithmusfunktion	
Normalparabel	87

Nullstelle.	64
Ordinate	63
Parabeln steep suchen	95
Petrisie zinc gen	59
part Wul ehen	30
pas Drl k	56
nomal, sion	142
ynoma. sion	106
mialer Folks	88
Potenzrechrong	19
Potenzrechrony	33
pq-Forn I	80
quad is he Ergänzt ig	48
pq-Form II	77
Regionsche Utwertrangen	85
echtwinkligh Yreieck	32
echtwinkligg reieck	72
Scheiteler brm	88
Schritt wate	67
St. kel	
SIPALS	
Susfunktion	
Steigung einer Funktion	
Symmetriebetrachtungen bei ganzrationale	
Funktionen	
Tangens	
trigonometrische Funktionen	
trigonometrischen Gleichungen	
trigonometrischer Pythagoras	
Umkehrfunktionen	
unechter Bruch	
verschieben von Normalparabeln	
verschieben, Stauchen, Strecken und Spieg	
der e-Funktion	-
erschieben, Strecken, Stauchen und Spieg	
Funktion $f(x) = ln(x)$	
ektionen	
nen am rechtwinkligen Dreiec	
gen	
)	
zwe. ende	71

- 175 -





Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

