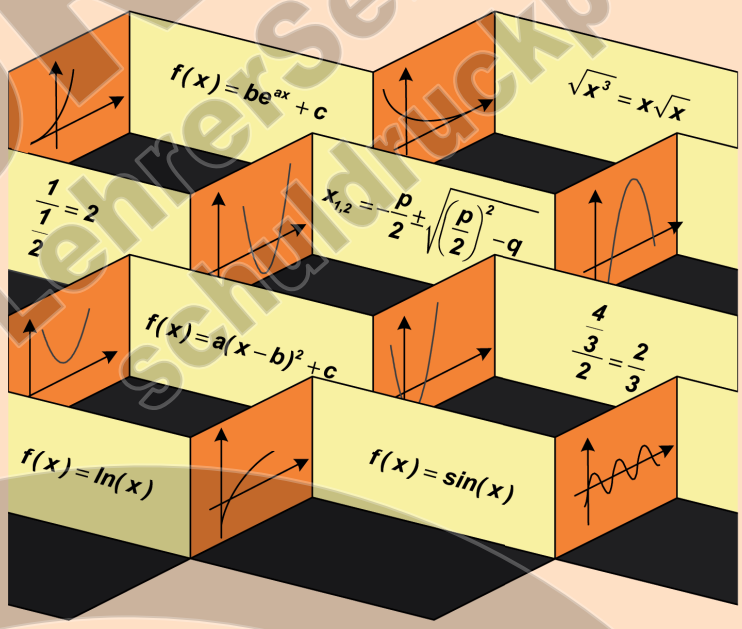
Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-033-279

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schulbuchportal.de

Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome **9**

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen **59**

Kapitel 3
Lineare Funktionen **63**

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen **77**

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade **87**

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]en [illegible]es **104**

Kapitel 7
Ganzrationale [illegible]nk[illegible]nen [illegible] höheren [illegible]des **115**

Kapitel 8
Die [illegible]unk[illegible] **127**

Kap[illegible]l 9
[illegible]rig[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] **135**

[illegible]itel 10
E[illegible]nential- und [illegible]garithmusfu[illegible]onen **145**

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen **169**

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de

[illegible]www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula [illegible]

Grundl[illegible]es zu Algebra u[illegible] Funktionen

se[illegible]organisiert erlernen

[illegible]e Mathematik

[illegible]estellnummer 02-033-279

LEHRER SE[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Stand: 01.09.2015

Alle Rechte vorb[illegible]eserved.
Nachdruck [illegible]altlich der Rechte,
die sich [illegible] nicht gestattet.

[illegible]
[illegible]eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2014
[illegible]erselbstverlag.de

[illegible]www.f-druck.de

Vorwort 7

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome

Aufgabe 1.1
Arbeiten mit Brüchen 9

Aufgabe 1.2
Potenzgesetze 19

Aufgabe 1.3
Multiplizieren und Faktorisieren von Sum[illegible] 36

Aufgabe 1.4
Binomische Formeln 41

Aufgabe 1.5
Quadratische Ergän[illegible] 48

Aufgabe 1.6
Ergänzende Betra[illegible]en höhere[illegible]ng 55

Kap[illegible] 2
Gr[illegible]legend[illegible]u Gleichungen

[illegible]fg[illegible] 1
[illegible]en [illegible]chungen [illegible]leichungen, d[illegible]ineare Gleichungen führen 59

[illegible]abe 2.2
[illegible]etrisierte Gleich[illegible]n 59

[illegible]gabe 2.3
Ergänzendes Vertiefungsthem[illegible]gleichungen 60

Kapitel 3:
Lineare Funktion[illegible]

Aufga[illegible] 63

[illegible]ngen zwischen Geraden 66

[illegible]gabe 3.3
Schnittpunkte von Geraden 67

Aufgabe 3.4
Nullstellen bei Gerade[illegible] 68

Aufgabe 3.[illegible]
Rechn[illegible]g einer Geraden 69

A[illegible] 72

Kapitel 4:
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 4.1
Lösungsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen 77

Aufgabe 4.1.1
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$ 77

Aufgabe 4.1.2
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ 79

Aufgabe 4.1.3
Anwenden der pq-Formel bei quadratischen
Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ 80

Aufgabe 4.1.4
Lösen einer biquadratischen Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ 81

Aufgabe 4.1.5
Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form 82

Aufgabe 4.2
Erweiternde Betrachtung bei Gleichungen 84

Aufgabe 4.3
Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen
und lineare Ungleichungen 85

Kapitel 5:
Ganzrationale Funktionen 2. Grades

Aufgabe 5.1
Die Normalparabel $f(x) = x^2$ zeichnen 87

Aufgabe 5.2
Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem 88

Aufgabe 5.2.1
a) Verschieben von Parabeln mit Scheitelpunkten 88
b) Nullstellenbestimmung 89
c) Darstellung in Normalform und faktorisierter Form 89

Verschieben von Parabeln nach links und rechts 90
Vorzeichenbetrachtung bei den verschobenen Parabeln 91
Darstellung der Funktionsterme in Scheitelpunktform, polynomialer Form 92

Aufgabe 5.2.3
Verschieben von Parabeln in x- und y-Richtung 92

Aufgabe 5.2.4
Parabeln strecken 95

Aufgabe 5.3
Lageberechnungen 100

Kapitel 6:
Gleichungen 3. und höheren Grades

Aufgabe 6.1
Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktorisierter Form vorliegt 104

Aufgabe 6.2
Lösen einer Gleichung, bei der man x^n ausklammern kann 105

Aufgabe 6.3
Lösen einer Gleichung mit der Polynomdivision 106

Kapitel 7:
Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades

Aufgabe 7.1
Verlauf von Ganzrationale Funktionen dritter Ordnung 115

Aufgabe 7.2
Symmetriebetrachtung bei ganzrationalen Funktionen 122

Aufgabe 7.3
Rechnerischer Nachweis der Symmetrie bei Funktionen 123

Kapitel 8:
Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1
Grundlegendes zu Umkehrfunktionen 127

Aufgabe 8.2
Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion 127

Aufgabe 8.3
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunktion 129

Aufgabe 8.4
Umkehrbarkeit von Funktionen 131

Aufgabe 8.5
Rechnerisches Bestimmen der Umkehrfunktion 131

Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 9.1
Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck 135

Aufgabe 9.2
Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß 137

Aufgabe 9.3
Die Sinusfunktion 138

Aufgabe 9.4
Eigenschaften der Sinusfunktion 139

Aufgabe 9.5
Bestimmen der Periodizität 142

Aufgabe 9.6
Lösen von trigonometrischen Gleichungen 142

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 10:
Exponential- und Logarithmusfunktionen

Aufgabe 10.1
Exponentielles Wachstum 145

Aufgabe 10.2
Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse 146

Aufgabe 10.3
Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem 147

Aufgabe 10.4
Exponentialfunktionen und ihre Umkehrfunktion 149

Aufgabe 10.6
Umrechnen einer Exponentialfunktion [illegible] er
beliebiger Basis b in eine Exponenti[illegible]nktion zur Ba[illegible] 151

Aufgabe 10.7
Lösen von Exponentialgleich[illegible] zur Basis e 154

Aufgabe 10.8
Lösen von Logarithmen[illegible] 157

Aufgabe 10.9
Verschiebe[illegible] und Spiegeln der Exponentialfunktion 161

Aufgabe 1[illegible]
Ver[illegible]ecken, [illegible]uchen und S[illegible] der Funktion f(x) = ln(x) 165

Kapitel 11
[illegible]de Betrachtungen von Betragsungleichungen

Aufgabe 11.1
Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betrag auftritt 169

Aufgabe 11.2
Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen 172

Stichwortverzeichnis 175

Vorwort

Grundlegende Kenntnisse zur Algebra und zu Funktionen sind Voraussetzung für das Verständnis der Mathematik an weiterführenden Schulformen und an Hochschulen und damit der Schlüssel zum Erfolg auf einem eingeschlagen Bildungsweg. Erfahrungen an Schule und Hochschule zeigen allerdings, dass gerade hinsichtlich dieser Thematik häufig Kenntnisse fehlen oder verschüttet sind und Lernende das Verständnis neuer mathematischer Zusam[illegible]menhänge nicht gelingen kann, da sie an elem[illegible] Umformungen, die beispielsweise Brüche, Pote[illegible]n und Binome enthalten, scheitern.

Das Ziel des vorliegenden Arbeitsbu[illegible]s da[illegible]lende Grundkenntnisse aufzuarbe[illegible] und [illegible]ergä[illegible] Dabei werden die zentralen Zusam[illegible]schrittig und unter Verzicht auf [illegible]t un[illegible]gt no[illegible]ndige Formalismen erklärt un[illegible]ielen v[illegible]nt. Die Beispiele und Übu[illegible]gabe[illegible] sind so[illegible]tet, das möglichst schnell ein[illegible] für das Verstä[illegible]nis der Mathematik a[illegible]erfu[illegible]en Schu[illegible]n [illegible] auch Hoc[illegible]sste[illegible] beschränken [illegible]her nicht nu[illegible] ein A[illegible]erung[illegible]ofil der Sek[illegible]ufe I. So [illegible]erd[illegible] Umform[illegible]n, die bei der [illegible]nung des D[illegible]ntiente[illegible] beim Ableitu[illegible]ktül und be[illegible] de[illegible]gra[illegible]ftreten, losge[illegible]st von diesen [illegible] mer[illegible]s rein algebraischer Sic[illegible]handelt.

Ziel[illegible]pen und Hi[illegible]se zur Hand[illegible]abung des Arbeitsbuchs

Die einzelnen Themen des Arbeitsbu[illegible]s bauen aufeinander auf, so dass eine systematische Bearbeitung der einzelnen Kapitel in der vorgegebenen Reihenfolge sinnvoll ist. Die Lernenden [illegible]ganisierten Le[illegible] Frag[illegible]

[illegible]texte ausfüllen und Be[illegible]
[illegible]ren bzw. ergänzen oder beschreiben. B[illegible]
[illegible]e bzw. Curricula eine Behandlung von wieder[illegible]enden Themen in weiterführenden Schulformen üblicherweise nicht vorsehen und Schulbücher diese Themen ebenfalls nicht beinhalten, ist diese Lernform hervorragend dazu geeignet, da[illegible] Schülerinnen anhand des Arbeits[illegible] Stoffs selbständig bew[illegible]rfolg selbst kontrolli[illegible]sheft in Form einer [illegible]g. Dass dieses Ko[illegible]ner Schülerin:

„[illegible]ch angefangen zu arbeiten und alles ver[illegible]habe für das Buch 12,50 € ausgegeben und [illegible]n 120,00 € im Monat für Nachhilfe sparen.“

[illegible]sierten Zugangsvoraussetzungen zu Hochsc[illegible]
[illegible]eben der Erlangung der Fachhochschu[illegible]

Hochschulreif[illegible] beruf[illegible]se einschließen, führt zwangs[illegible]m P[illegible], dass für angehende Studierend[illegible] Sc[illegible]oft längere Zeit zurückliegt, bzw[illegible]thema[illegible]bereiche, die in der Hochschu[illegible]usges[illegible]werden, gänzlich unbekannt sind.
Das v[illegible]de [illegible]itsbuch bildet für diese Zielgrup[illegible] auf der sie si[illegible]den Anforderungen der [illegible]chulm[illegible]matik näh[illegible]n. Erste Erfahrungen i[illegible]men eines Vorku[illegible]s Mathematik an einer Hochsch[illegible]heinen dies[illegible]chtung zu bestätigen. In der [illegible]edbackrunde des Vorkurses wurde durchweg positive [illegible]ewertung[illegible] das Arbeiten [illegible] Buch abgegeben:

„Gute [illegible]egsmöglichk[illegible]it für [illegible]angzeit-Mathe-Ab[illegible]enzler“
„[illegible]urch Buch gute [illegible]ie[illegible]holung und Auffüllung v[illegible] Lücken“
„Für Ex-Sch[illegible]it Mathe Leistungskurs gute Wiederh[illegible]“
„Gut[illegible]enarbeit“
„B[illegible]n nur zuhören.“

[illegible]pitel 1
Die Themen in diesem Kapitel beziehen sich auf die Themen Bruchrechnung, Potenzen und binomische Formeln und sind damit Grundlage für die folgenden Kapitel.

Kapitel 2
Da das Lösen linearer Gleichungen den Lernenenden in der Regel keine größeren Probleme bereitet, ist dieses Kapitel knapp gehalten. Die Gleichungen sind unter folgenden Gesichtspunkten ausgewählt worden:
– Anwenden und Wiederholen von Bruchrechnung und binomischen Formeln.
– Thematisieren von parametrisierten Gleichungen.
[illegible]rgänzende Betrachtungen von Bruchgleichungen.
[illegible]eare Gleichungen und Ungleichungen wird im [illegible]es Lösens von quadratischen Ungleichun[illegible]en.

Kap[illegible]
Da viel[illegible]n der Lage sind, ohne Taschenrechner u[illegible] also alleine aus den Informationen zum y[illegible]tt und zur Steigung Geraden zu zeichnen, w[illegible]ma ausführlich behandelt. Zudem werden [illegible]für alle Funktionsklassen gültige Ansätze, zu[illegible] von Achsenabschnitten und Schnittpunkten [illegible]

Kapitel 4
Quadratische Gleichung[illegible] Lösung mithilfe der [illegible]ormel sind in der Re[illegible] Allerdings ist die An[illegible]ung alternativer Lö[illegible]den meist Neuland, [illegible]s rein rechnerisch[illegible]er Anwendung der [illegible]el bereitet oft e[illegible]bleme. Eine klein-

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de
©

schrittige Erläuterung der Lösungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von der Form der Gleichung und umfangreiche Übungen dazu stehen hier im Mittelpunkt. Das Lösen von Wurzelgleichungen und quadratischen Ungleichungen wird erweiternd betrachtet.

Kapitel 5
Für die Kenntnisse rund um Parabeln gilt Ähnliches wie für die quadratischen Gleichungen. Grundlagen sind meist vorhanden, jedoch treten häufig schon beim Zeichnen einer verschobenen Normalparabel ohne Erstellung einer Wertetabelle Schwierigkeiten auf. Die hier notwe[illegible] digen Techniken und die Gesetzmäßigkeiten hinsicht[illegible] des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiege[illegible] von Parabeln werden an Beispielen vermitt[illegible] dazu wird die Darstellung des Funktionste[illegible] in Scheitelpunktform, polynomialer und faktorisie[illegible] deren Bedeutung und das Umrech[illegible] von [illegible] Darstellungsform in eine andere th[illegible] Die Bedeutung der Diskriminanten bei de[illegible] Rechn[illegible] von [illegible] und bei Schnittpunktproble[illegible] [illegible]pq-Formel werden ebenfalls behandelt.

Kapitel 6 und 7
In diesen beid[illegible] Kapiteln [illegible]et der Übergang zu den Themen [illegible] führenden Schulformen s[illegible] Während in K[illegible]el 6 [illegible]e für Gleich[illegible]gen 3. und h[illegible]eren G[illegible]s vorge[illegible]t und geüb[illegible] werden, findet i[illegible] K[illegible] 7 de[illegible]nstieg in die Unter[illegible]chung von ganzra[illegible]onalen Funktionen 3. und h[illegible]en Grad[illegible]tt, wobei auch hier der Zusammenhang [illegible] die Be[illegible]ung von Funktionsgleichungen [illegible] polynom[illegible] und [illegible]orisierter Form thematisiert [illegible]

Kapitel 8 bis 11
Vertiefend [illegible]rachtu[illegible]e Zusammenhänge zwischen Funkt[illegible] und [illegible] zugehörigen Umkehrfunktio[illegible] sow[illegible]em [illegible]rte Regeln hinsichtlich des Vers[illegible] Str[illegible], Stauchen [illegible] Spiegeln, bilden [illegible] [illegible]rpunkt dieses Ka[illegible]s. Die Betrachtungen beziehen [illegible] auf ganzrat[illegible] und trigonometrische Funktionen, [illegible]wie Exponential- und Logarithmusfunktion[illegible] und die Lösu[illegible] von Gleichun[illegible] [illegible]bei diesen Fu[illegible]nsklassen [illegible]efen können. D[illegible] hier erworbe[illegible] Kenntniss[illegible] [illegible]r anderem [illegible]raussetzung für die Untersuchung [illegible]mplexer Funktio[illegible] im Rahmen der Differenzial- [illegible] Integralrechn[illegible]g [illegible] der Qualifizierungsphase der g[illegible]mnasialen Oberstufe [illegible], kann in dieser Phase auf das [illegible]rbeitsbuch zurü[illegible]griffen werden. Der Aufbau und d[illegible] Struktur ermögl[illegible]n hierbei einen Einsatz im Grund- [illegible]nd im Leistungskurs.

Dan[illegible]
F[illegible]egungen zur inhaltlichen und formalen Gestal[illegible]ung danke ich meinem Mann, Dipl.-Ing. Gerold Pirkl und [illegible]rofessor Dr. Thorsten-Karl Strempel von der Hochschule Darmstadt.

Kapitel 1: Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome

Sie haben in der Sekundarstufe I bereits die Gesetze zum Umgang m[illegible] Brüche[illegible] [illegible]tenz[illegible] Wurzeln und binomischen Formeln kennen gelernt. Allerdings zeigt es sich häuf[illegible] gerad[illegible]endung dieser elementaren algebraischen Zusammenhänge immer wieder [illegible] w[illegible]iten bereitet. Daher soll in diesem Kapitel die Möglichkeit gegeben werden, die wes[illegible]lichen [illegible]nd[illegible] wiederholen.

Aufgabe 1.1

Arbeiten mit Brüchen

Im Rahmen dieser Aufgabe sollen grundle[illegible] [illegible]e Umformu[illegible] bei Brüche[illegible] [illegible] die in späteren Aufgaben und Kapiteln zurückgegriffen wi[illegible] wiederhol[illegible] werd[illegible]n. Es wird [illegible] [illegible]besonderer Wert darauf gelegt, die einzelnen Rechnungen in Teils[illegible]e zu ze[illegible]gen, die bei [illegible]em Umg[illegible] [illegible] Brüchen automatisiert im Kopf ablaufen. D[illegible]erde[illegible] [illegible]schritte [illegible]iert aufgelis[illegible] [illegible] überwiegend in den Sprechblasen verdeutlic[illegible] Arbei[illegible] Sie [illegible]gebenen [illegible]mationen d[illegible]ch und wenden Sie die Verfahren jeweils auf die Übu[illegible]

a) Definitio[illegible]

[illegible]ech[illegible] Bruch: Der Zähler ist [illegible]iner als der [illegible]er. Bsp.: $\frac{8}{9}$

Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs wird als **Zähler** bezeichnet.

Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs wird als **Nenner** bezeichnet.

unechter Bruch: Der Z[illegible]r ist größer oder gleich dem Nenner. Bsp.: $\frac{16}{9}$

M[illegible] [illegible]ganze Zahl in einen unechten Bruch [illegible]e mit dem Nenner 1 versieht. Bsp.: $4 = \frac{4}{1}$

[illegible] [illegible]n und einem gebrochenen Teil und [illegible]ein unechter Bruch. Bsp.: $2\frac{4}{9}$

Achtung!
Bei gemischten Zahlen steht z[illegible] [illegible]nzen Zahl, hier 2, und dem Bruch ein unsichtbares [illegible]+) und kein [illegible]ationszeichen (·). $2\frac{4}{9} = 2$[illegible] $\neq 2 \cdot \frac{4}{9}$

M[illegible]lt den Kehrwert eines Bruches, indem m[illegible] Bruch „umdreht“.

Bsp.: Der Kehrwert des Br[illegible]st der Bruch $\frac{5}{4}$.

VORSCHAU LehrerSelbstverlag Schuldruckportal.de

b) Unechte Brüche und gemischte Zahlen umwandeln

Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

Schritte:

1. Den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl vor dem Bruch multiplizieren.
2. Das Produkt zum vorhandenen Zähler des Bruchs addieren.
3. Der Nenner bleibt gleich.

Beispiel:

Im [illegible]

$= \frac{4}{[illegible]} = \frac{[illegible]5+4}{5} = \frac{15+4}{5}$

$= \frac{19}{5}$

Umwandeln eines unechten Bruchs in [illegible] gemis[illegible]e Zahl

Schritte:

1. Zähler durch den Nenner te[illegible]
2. Den ganzzahligen [illegible]ieren.
3. Den Rest als B[illegible]n dar[illegible]llen. Dabei kommt d[illegible] Zähler; der Nenner bleibt [illegible]n.
4. Wen[illegible] ble[illegible]ntsteht eine g[illegible] Zah[illegible]

Beispiel:

Im Kopf: 29 : 6 = 4 Rest 5

$\frac{29}{6} = [illegible] = 4\frac{5}{6}$

Übung zu 1.1.b:
Wandeln Sie den unechten Bruch in eine gemischte Zahl, bzw. die gemischte Zahl in einen unechten [illegible]

(1) $3\frac{1}{2} =$ ___ (2) $\frac{9}{4} =$ (3) $4\frac{2}{3} =$ ___ (4) $5\frac{3}{4} =$ ___ (5) $\frac{17}{12} =$ ___

[illegible]ationen in der Mathematik

Verwendung gemischter Zahlen

Gemischte Zahlen werden in der Mathematik praktisch n[illegible] Bei der Anwendung von Mathematik wird diese Darstellung bei Bru[illegible]nutzt.

Notat[illegible] bei Multiplikation und Divisi[illegible]

B[illegible] oben schon erläutert, ein Pluszeic[illegible]elassen. [illegible] der Mathematik meistens das Malsym[illegible]/*) nicht [illegible] Beispielsw[illegible] schreibt man anstatt $3 \cdot x$ oder 3*x einfach [illegible]

[illegible] Division wird das Geteiltzeichen fast nie durch (:) dargestellt. M[illegible]et hier [illegible]gerechte Bruchstriche oder den Schrägstich ([illegible]statt $y : 5$ schrei[illegible]er y/5.

c) Erweitern eines Bruchs auf einen vorgegebenen Nenner

Schritte:

1. Wie oft passt der gegebene Nenner in den neuen vorgegebenen Nenner?
2. Zähler und Nenner mit der gefundenen Zahl multiplizieren.

Beispiel:

[illegible] auf [illegible]nner 20

Im [illegible]
Die [illegible]asst 5-mal in 20, also [illegible]

$= \frac{15}{20}$

Übung zu 1.1.c:
Erweitern Sie auf den angegeben[illegible]

(1) $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ auf den Nenn[illegible]

(2) $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ auf [illegible]er 48 [illegible]

(3) 5 [illegible] 8 [illegible]der [illegible]er 16 :

[illegible]e, dass ma[illegible]5 auch als $\frac{5}{1}$ darst[illegible] kann.

d) Kürzen von Brüchen

i) Method[illegible]weise kürzen

[illegible]piel:

[illegible]
[illegible]hen.
2. Zähler und Nenner solange jeweils durch die gleiche Zahl dividieren bis es keinen gemeinsamen Teiler mehr gibt.

12:2=6
18:2=9

6:3=2
9:3=3

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Bei [illegible]holt durch [illegible]en, [illegible]eilbar ist. (Die [illegible]me 0 oder 5 [illegible]ein).
– ob die Zahl durch 3 geteilt werden kann. (Ist die Quersumme durch 3 teilbar, dann ist es auch die Zahl.)

oder auch kürz[illegible]

24:4=6
36:4=9

$\frac{24}{36} = \frac{6}{9} = [illegible]$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

ii) Methode 2: Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen

Schritte Methode 2:

1. Die Zahlen im Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen.

   Bsp.: 24:**2**=12
   12:**2**=6
   6:**2**=**3**

2. Die einzelnen Faktoren paarweise im Zähler und Nenner streichen (kürzen).

Beispiel:

Primfaktoren sind [illegible] die nur durch sich [illegible] und 1 teilbar sind, al[illegible] 3, 5, 7,11…

$\frac{24}{36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

iii) Methode 3: Den größten gemeinsamen Teiler (ggT) verwenden

Schritte Methode 3:

1. Den **g**rößten **g**emeinsamen Teiler – **ggT** – von Zähler und Nenner und im Zähler [illegible]. (s. Aufgabenteil e)
2. Zähler und Nenner durch diesen größten gemeinsamen Teiler dividieren.

Beispiel:

Im Kopf:
12 ist der ggT von 24 und 36.
$\frac{24:12}{36:12}$

$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Man darf auch schreiben: $\frac{\cancel{24}^{\,2}}{\cancel{36}_{\,3}} = \frac{2}{3}$

iv) Kürzen v[illegible]

[illegible] mit Methode 1, 2 oder 3 [illegible].

2. Gleiche Variable im Zähler und Nenner paarweise kürzen. Wenn Potenzen auftreten, ggf. Potenzgesetze (s. A[illegible]).

Im Kopf:
[illegible] ggT von 18 [illegible]7 ist 9.

$\frac{\cancel{18}^{\,2}\,a[illegible]}{\cancel{27}_{\,3}\,\cancel{b}c}$

Übung[illegible]

Kürz[illegible] gegebenen Brüche so weit wie möglich.

(1) [illegible] (2) $\frac{22}{1[illegible]}$

(3) $\frac{20ab}{48ac} =$ _____ (4) $\frac{45xy}{75xyz} =$ _____

(5) $\frac{405xy}{1080x} =$ _____ (6) $\frac{144[illegible]}{720y[illegible]} =$ _____

(7) $\frac{112uv}{210vw} =$ _____ (8) [illegible] $=$ _____

e) Hauptnenner ermitteln

Der Hauptnenner (kurz HN) [illegible] das **k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache – **kgV** – bezeichnet. Es gibt wie beim Kürzen [illegible] beim Ermitteln des Hauptnenners bzw. kgV verschiedene Methoden. An dieser Stelle werden zwei möglichkeiten vorgestellt. Die Ermittlung über die Zerlegung in Primfaktoren ist dabei als eine Möglichkeit gedacht, die meist nur angewandt wird, wenn es sich um große Zahlen handelt, bei [illegible] Methode über die Kopfrechnung zu aufwendig wird.

Methode 1: Hauptnenner durch Kopfrechnung ermitteln

Bei [illegible] einen Zahlen kann man das kgV bzw. den Hauptnenner ohne viel Aufwand im Kopf ermitteln.

[illegible]e:

1. Den Nenner mit der größeren Zahl auswählen.
2. Die Reihe dieser Zahl (hier 8er-Reihe) im Kopf hochzählen [illegible] kleine[illegible]

Hauptnenner von $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$

Im Kopf:
8-ter Reihe: 8, 16, 24, ...
6 passt nicht in 8
[illegible] passt nicht in 16
6 passt 4-mal in 24
[illegible]8 passt 3-mal in 24
[illegible]uptnenner der [illegible]

3. Merke[illegible] gef[illegible] Bruch [illegible]tnenner hat.

$\frac{7}{8} = \frac{2[illegible]}{24}$ $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$

Im Kopf: $\frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3}$

Im Kopf $\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Methode 2: Ermitteln des Hauptnenners über die Zerlegung in Primfaktoren

Schritte:

1. Alle Brüche, sofern es geht, so weit wie möglich kürzen.

2. Alle Nenner in Primfaktoren zerlegen. Dabei mit dem kleinstmöglichen Primfaktor beginnen. Wenn vorhanden, gleiche Primfaktoren in Spalten untereinander schreiben.

3. Aus jeder Spalte den Primfaktor einmal übernehmen und das Produkt dieser Zahlen bilden.

4. Jeden Bruch so erweitern, das[illegible] dem kgV bzw. dem Ha[illegible]nner entspricht.

Beispiel:

Hauptnenner v[illegible] $\frac{5}{42}$ und $\frac{7}{12}$

Schrit[illegible]nd 3

[illegible]nfal[illegible]n 5[illegible]	56 =	2	2 ·	2 ·		·	7
F[illegible]oren[illegible] 42:	42 =	[illegible]			3 ·		7
Prim[illegible]ren von 12[illegible]	12 =	2	2		3 ·		
[illegible]ptnenner:	HN =	2	2	2	3 ·		7
	HN = 1[illegible]8						

Schritt[illegible]

$168 : 56 = 3 \Rightarrow \frac{[illegible] \cdot 3}{56 \cdot 3} = \frac{9}{168}$

$168 : 42 = [illegible] \Rightarrow \frac{7 \cdot 4}{48 \cdot 4} = \frac{28}{168}$

$168 : 12 = 14 \Rightarrow \frac{5 \cdot 14}{12 \cdot 14} = \frac{70}{168}$

Hin[illegible]s:

[illegible]befind[illegible]ich im Nenner eine Variable, so muss man diese Variable im kgV berücksichtigen.

Bsp.: $\frac{[illegible]}{4a}, \frac{[illegible]}{6}$ auf den H[illegible]bringen. Das kgV ist 12a und damit ergibt sich: $\frac{9}{12a}, \frac{2a}{12a}$

Übung zu 1.1.e

Bringen Sie die fol[illegible]nner.

$\frac{[illegible]}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}$:

(3) $\frac{4}{5}, 1\frac{2}{3}, \frac{9}{10}$:

(4) $\frac{1}{2}$[illegible]

([illegible]y, $\frac{25}{42}$

f) Brüche addieren oder subtrahieren

Auch wenn die Addition und Subtraktion von Brüchen beim Einsatz eines [illegible]enrec[illegible]s kaum Probleme bereitet, ist es unbedingt notwendig, die entsprechende[illegible] Rechen[illegible] zu [illegible]nen und anwenden zu können, da der Taschenrechner spätesten beim A[illegible] von V[illegible]m Nenner keine allzu große Hilfe mehr darstellt. Im Rahmen dieser Aufgabe[illegible]rd[illegible]liche Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen exem[illegible]risch d[illegible]est[illegible]

Beispiel 1: Addition bei Bruchtermen

Man kann alle ganzen Zahlen und alle Brüche getr[illegible] voneinander addieren, da bei gemischten[illegible] zw[illegible]n der ganzen Zahl und dem Bruch ein un[illegible]bares Pluszeichen (+) steht.

Überlegung im Kopf:
$1 + \frac{3}{[illegible]} + 3 \frac{5}{[illegible]}$

Schritte:

1. Alle ganzen Zahlen addie[illegible] bzw. subt[illegible]
2. Den Hauptnenner HN su[illegible] Brüche zum HN erweitern.
3. Die Zähler der [illegible]addiere[illegible]**enner** [illegible] **gleich**.
4. Ergebnis vere[illegible]

$1\frac{[illegible]}{4} + \frac{[illegible]}{6} + 2 = 6 + \frac{[illegible]}{4} + \frac{5}{6}$

$= [illegible] + \frac{9}{12} + \frac{10}{12}$

Der HN ist 12

$= 6 + \frac{19}{12} = 6 + 1\frac{7}{12}$

$= 7\frac{7}{12}$

Beis[illegible]2: S[illegible]aktio[illegible]ei Bruchterm[illegible]

Sch[illegible]

[illegible]Hier [illegible]günstig, unecht[illegible]te Brüche zu [illegible]wenden, [illegible]or allem, wenn der B[illegible]ch mit negativem [illegible]orzeichen [illegible]ößer ist als der p[illegible]sitive Bruch.

[illegible] Hauptne[illegible]ner HN suchen [illegible]die Brüche [illegible]um HN erweit[illegible]

3. Die Summe bzw. Differe[illegible] im Zähler bilden. Der **Nenner bleibt gleich**.
4. Ergebnis, wenn möglich, noch kürzen bzw., wenn es die Aufgabenstellung [illegible] in eine gemischte Zahl umwan[illegible]

$1\frac{5}{9} - 3\frac{5}{6} + 2 = \frac{14}{9} - \frac{23}{6} + 2$

Der HN ist 18

$= \frac{28 - 69 + 36}{18}$

$= -\frac{5}{18}$

Im Kopf erweitern:
$\frac{14 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{23 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 18}{1 \cdot 18}$

[illegible]ariablen enthalten

[illegible]nterme Variablen enthalten, kann [illegible]aler Taschenrechner nicht mehr [illegible]weiteres eingesetzt werden.

Im [illegible] $\frac{3 \cdot 6}{[illegible]5x \cdot 6} - \frac{5 \cdot 5}{6x \cdot 5} + \frac{1 \cdot 10x}{3 \cdot 10x}$

Der HN ist 30x

[illegible] $\frac{1}{[illegible]} = \frac{18 - 25 + 10x}{30x}$

$= \frac{10x - 7}{30x}$

Schritte:

1. Falls [illegible]n in unechte B[illegible]
2. [illegible] und Brüche zum [illegible]:
[illegible]mme im Zähler bilden. Der **Nenner bleibt [illegible]n**.
[illegible]ebnis, wenn möglich, kürzen bzw., wenn [illegible]ordert, in eine gemischte Zahl umwand[illegible]

Achtung!
Hier darf man **1[illegible]** [illegible]wie das **x** auf **keinen Fall kürz[illegible]** [illegible]**ähler eine Summe** und kein[illegible]rhanden ist.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Übung zu 1.1.f
Berechnen Sie die angegebenen Summen zunächst ohne Verwendung des Taschenrechners und stellen Sie das Ergebnis, so weit wie möglich, gekürzt dar. Überprüfen Sie Ihre Rechnung, wenn möglich, mit dem Taschenrechner.

(1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$ _____

(2) $1\frac{1}{2}+2\frac{2}{7}-1\frac{1}{14}=$ _____

(3) $\frac{4}{5a}+\frac{7}{15}+\frac{7}{10}=$ _____

(4) $\frac{2}{3b}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{4b}=$ _____

(5) $\frac{3}{8x}-\frac{5}{6y}+\frac{1}{12z}=$ _____

g) Brüche multiplizieren

Beispiel 1: Bruchterme, die keine Variablen enthalten, multiplizieren

Gemischte Zahlen in unechte Brüche umwandeln.

Ganze Zahlen als Bruch mit Nenner 1 darstellen.

$$1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{5}{8}\cdot 3 = \frac{4}{3}\cdot\frac{21}{8}\cdot\frac{3}{1} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot 21\cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot \underset{2}{\cancel{8}}\cdot 1} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

Schritte:
1. Alle g[illegible] schreiben und **vor** dem [illegible]zieren so weit wie möglich kürzen.
2. [illegible]lle Zahlen im Zähler multiplizieren. Alle Zahlen im Nenner multiplizieren
4. Ergebnis, wenn möglich, bzw., wenn gefordert, in eine g[illegible] umwandeln.

Vor dem Multiplizieren immer erst kürzen!

Übung[illegible]

[illegible] $\frac{[illegible]}{9}=$ _____

[illegible] $\frac{[illegible]}{7}\cdot\frac{7}{9}=$ _____

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, multiplizieren

6a kann man als [illegible] schreiben. [illegible]sst man dann unter dem ge[illegible] ins[illegible]uchstrich weg.

$$\frac{6a}{[illegible]}\cdot\frac{5c}{[illegible]} = \frac{\cancel{6}\,\cancel{a}\cdot 3\cancel{b}\cdot \cancel{5}\,\cancel{c}}{\cancel{10}\,\cancel{c}\cdot \cancel{6}\,a\cancel{b}} = \frac{[illegible]}{[illegible]a}$$

Schritte:
1. Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
2. Alle Zähler und alle Nenner auf ein[illegible] Bruchstrich schreiben.
3. Vor dem Multiplizieren so w[illegible] wie m[illegible]ch kürzen
4. Alle verbleibenden Zah[illegible] [illegible]en im Zähler multiplizieren. All[illegible] [illegible]n Variablen und [illegible]m Nenner m[illegible]plizieren.
5. Ergebnis, w[illegible] möglich, bzw[illegible]rdert, in[illegible] gemischte Z[illegible]

Vor dem Multipli-[illegible]ieren immer erst kürzen!

Übun[illegible]:
Bere[illegible]en Sie [illegible]folgenden Produkt und kürzen Sie so weit wie möglich.

[illegible] $\frac{[illegible]}{5x}$ _____

[illegible] $\cdot\frac{3z}{4y}=$ _____

(3) $\frac{2x}{3}\cdot\frac{15}{14x}\cdot 7=$ _____

h) Brüche divi[illegible]

[illegible]dividieren

[illegible] $=\frac{4}{1}:\frac{14}{3}$

[illegible] $\frac{3}{[illegible]}$

[illegible]lle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
2. Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu mult[illegible]
3. Weiter[illegible]eren.

Kehrwert:
Aus (**:**) wird (·)
Aus $\frac{14}{3}$ wird $\frac{3}{14}$

[illegible] $=$ [illegible]
[illegible] [illegible]folge[illegible]rksatz

Merke: Man dividiert eine ganze Zahl oder einen Bruch durc[illegible] Bruch, indem man mit dem _____ der hinter dem Divisionszeiche[illegible]ziert.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, dividieren

Schritte:

1. Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
2. Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu multiplizieren.
3. Weiter mit 2. Schritt beim Multiplizieren.

$$4a : \frac{2a}{3} = = \frac{4a}{} \cdot \frac{2a}{}$$

$$= \frac{}{1} \cdot \frac{2a}{}$$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\,\cancel{a}}{\cancel{2}\,\cancel{a}}$$

$$= \frac{}{1} \; 6$$

Ke… Aus (:) wird (·) Aus $\frac{3}{2a}$ wird $\frac{2a}{3}$

Beispiel 3: Bruchterme mit Doppelbrüchen

(1) $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 1 \cdot 2 = 2$

Du … dividie… mit 2 m…ltiplizieren oder…

(2) $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 =$

… e… wi… mit dem **Kehrwert** des Bruches … Ne… des Doppel…ruchs multiplizi…

(3) $\frac{\frac{2x}{3}}{\frac{x}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{x} = \frac{2}{1} = 1\frac{1}{2}$

…bung 1.1.h:

Be… Sie die folgenden Quotienten … ellen Sie das Ergebnis so weit wie möglich gekürzt dar.

(1) $\frac{10}{\frac{1}{2}} =$

(2) $3\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2} =$

$\frac{16}{\frac{15}{24}} =$

(5) $9y : \frac{3y}{2} =$

(6) $\frac{5m}{1}$

Aufgabe 1.2

Potenzgesetze

Information: Definition des Begriffs Potenz

Bei der Additon von Summanden ist Ihnen mit Sicherheit b…annt, d… n… …he Summanden zur Abkürzung mit Hilfe eines Vorfaktors zusammenfassen ka… …eispie… …se ist $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4$. Bei der Multiplikation gibt es einen ähnlichen Zusammenha… So k… …an e… …rodukt aus gleichen Faktoren wie folgt zusammenfassen: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$. Allgemein … …nition:

a = **a · a · a · … ·** **a**
n–Fa…ren

a w… **Bas…** …eichnet

n wird als **Exponent** bezeichnet.

Der **Exponent n** gibt an, wie oft die Basis a mit sich selbst multipliziert wird, …d. **…potenziert** wird.

Vor eine… …n o… …iner Zahl, wel… …potenziert wi… …rden sich Vorfaktoren oder auch Minus…chen …den.

…r g…

Auf e…n Vorfaktor … der Basis … der Exponent n …ne… Einfluss. E… Minus-…eichen kann als …rfaktor … …tiert werden und …ebt nach dem …potenzieren ebenfalls unverändert erh…lten.

Bsp.: $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$
$-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

$\mathbf{u \cdot a^n = u \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}$
$\mathbf{-a^n = -a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}$

E… …lung getroffen wie bei der Multiplikation

$1 \cdot a = a$
$a^1 = a$

… 1 wird …notiert.

Übung zur Definition des Begriffs Potenz

Verdeutlich… …verfahren Sie analog dazu.

Beisp… …= –24

… _____ = _____ = _____

-4^4 = _____ = _____

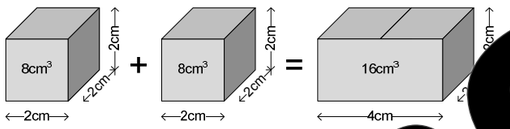
$-2^4 a$ = _____ = …

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

a) Addition von Ausdrücken mit Potenzen

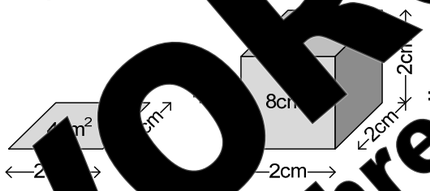
Anhand der Berechnung von Einheiten (Dimensionen) lassen sich die Potenzgesetze hinsichtlich der Addition anschaulich darstellen. Größen kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie gleiche Einheit haben, bzw. wenn die Einheit die gleiche Potenz besitzt. Beispielsweise können Flächen und Längen oder Flächen und Volumina weder addiert noch subtrahiert werden.

Beispiel 1:



Die Maßzahlen werden addiert, die Einheiten verändern sich bei der Addition nicht. Die Einheit cm bleibt cm³.

Beispiel 2:



cm² und cm³ kann man **nicht** addieren

Beispiel 3:

8 m² + 8 cm² = 80.000 cm² + 8 cm²
= 80.008 cm²

Ergänzen Sie:
Man kann Potenzen nur addieren, wenn die Basis und der Exponent _____sind. Im SI-Einheitensystem* muss man dazu ggf. die Einheiten vorher _____..
Dann wird der Exponent _____ ve...

Allgemein kann man die Addition bzw. Subtraktion von Potenzen wie

Addition und Subtraktion von Potenzen

$$u \cdot a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm v) \cdot a^n$$

*SI-Einheitensystem: Internationales Einheitensystem (frz. **S**ystème **i**nternational d'unités) für physikalische Größen. Basiseinheiten sind: Meter, Kilogramm, Sekunde, Kelvin, Ampere, Candela.

Übungen zur Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Verdeutlichen Sie sich jeweils die Beispiele und verfahren Sie entsprechend bei den Übungen.

Beispiel 1: $2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2^3 = 16$
$a^3 + a^3 = 2a^3$

Achtung:
$3^3 + 3^2 \neq 3^4 = 81$

(1) $3^2 + 3^2$ = ___+ ___ = ___· ___ = ___· ___ = ___

(2) $5^3 + 5^3$ = ___+ ___ = ___· ___ = ___ = ___

(3) $4^2 + 4^2 + 4^2$ = ___+ ___ = ___ = ___· ___

(4) $x^2 + x^2$ = _____

(5) $b^2 + b^2 + b^2$ = _____

Achtung:
$x^2 + x^3 \neq x^5$

Beispiel 2: $4x^3 + x^3 + 2x^2 + 2x^2 + x = x^3 + x^2 + 3x$

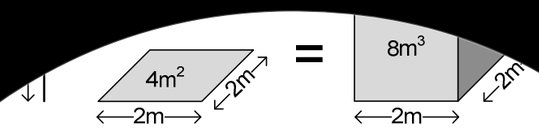
(1) $4x^3 + x^3 + 2x^2 + 2x^2 + x = x^3 + x^2 + 3x$ = _____

(2) $3x^2 + 4x^3 + 5x^2 - 3x^3 - 4x^2 - x^2 =$ _____

Produkte bei Potenzen mit gleicher Basis

Wie bei der Addition kann man auch die Multiplikation von Potenzen anhand der Berechnung von Flächen und Volumen anschaulich darstellen.

Beispiel 1:



Rechnung: ... m³

Ergänzen Sie:
Die Zahlenwerte d... werden _____ ...xponenten der Einheiten werden _____, wenn ...heiten _____ sind.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Beispiel 2:

$3\text{m} \cdot 50\text{cm} = 3\text{m} \cdot 0{,}5\text{m} = 3\text{m}^1 \cdot 0{,}5\text{m}^1 = 1{,}5\text{m}^2$

Einheiten müssen ggf. umgerechnet werden.

In verallgemeinerter Form lässt sich die Regel zu [illegible]plika[illegible] von Potenzen wi[illegible] veranschaulichen.

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{} = \underbrace{\quad}_{a^7} = a$$

Ergänzen Sie den folgenden Merks[illegible]

> [illegible]rden bei _____ Basis
> [illegible]ltipliziert, inde[illegible] die Exponenten _____.
>
> $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

[illegible]ungen zu Produkten bei Potenzen gleicher Basis

Verei[illegible] Sie die T[illegible]rme so weit wie [illegible]glich, indem Sie Potenzen mit gleicher Basis zusamme[illegible]assen.

(1) $x^3 \cdot x^5 =$ _____ (2) $2z^2 \cdot 6z^3 \cdot 3z^5 \cdot 4z =$ _____

(3) $3a^2 \cdot 4b^3 \cdot 2b^5 =$ _____ (4) $7v^{5a} \cdot v^{4a} =$ _____

(5) v^{3a+1} [illegible] $^{4u+2} =$ _____

_____ _____

[illegible]$^2 \cdot 2\text{mm} =$ _____ (10) $30\text{cm}^2 \cdot$ [illegible] _____

[illegible]n Aufgabenstellungen ist oft auch der umgekehrte Rechenweg wicht[illegible]
Formen Sie die Terme [illegible]ass keine Summen in den Exp[illegible]ten.

(11) $x^{a+b} =$ _____ (12) $z^{a+3b} =$ _____

(13) z^{2} [illegible] _____ (14) $x^{5a+b+c} =$ _____

(15[illegible] _____ (16) $2x^{2a+b} \cdot 3x^{a+2b} =$ _____

c) Potenzen, Brüche und negative Exponenten

In Aufgabe 1.1 haben Sie gelernt, wie man Variablen in Brüchen kürzen ka[illegible] diese k[illegible]tnisse sollen im folgenden Beispiel verwendet werden, um zu begründe[illegible]rum ne[illegible]nenten sinnvoll sind. Verdeutlichen Sie sich die Überlegungen.

Anwenden der Definition von Potenzen auf y^5 und y^3 und paarweises Kürzen von y liefert y^2

Da[illegible]nis [illegible]ch [illegible] y^{5-3} da[illegible]tellen.

$$\frac{y^5}{y^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{y}} \cdot \overset{1}{\cancel{y}} \cdot \overset{1}{\cancel{y}} \cdot y \cdot y}{\underset{1}{\cancel{y}} \cdot \underset{1}{\cancel{y}} \cdot \underset{1}{\cancel{y}}} = y^2$$

$$y^2 = y^{5-3}$$

$$y^2 = y^{5+(-3)}$$

$$y^2 = y^5 \cdot y^{-3}$$

Den Expone[illegible]kann man zur Summe [illegible]rmen und dann die Regel für die Multi[illegible]tion von Potenzen [illegible]wenden.

[illegible]cht [illegible] nun die Ausg[illegible]saufgabenstellung mit dem Ender[illegible]nis, so ergibt [illegible]ch: $\frac{y^5}{y^3} = y^5 \cdot$ [illegible]

oder entsprechend: $\frac{1}{y^3} = y^{-3}$.

Man erkennt aus diesem Be[illegible]el, dass negative Exponenten eine neue Schreibweise für Brüche beinhalten, und man kann die folgende Regel formulieren.

[illegible]ten

[illegible]

$\mathbf{a}$

Ergänzung:
Dieser Zusammenhang wird auch beim Exponenten 1 angewandt. Es gilt: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{-1}$

Ergänzung z[illegible]iver Exponenten

Mit Hi[illegible] kann man Brüche so darstellen, [illegible]chstrich mehr not[illegible]

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Übungen zu Potenzen, Brüchen und negativen Exponenten

Beispiel 1: $\frac{x^4}{x^3} = x^4 \cdot x^{-3} = x^{4-3} = x$ bzw. $\frac{3x^4}{x^6} = 3x^4 \cdot x^{-6} = 3x^{4-6} = 3x^{-2} = \frac{3}{}$

Zusatzinfo:

Man ka[illegible] die P[illegible] auch ver[illegible] $\frac{3\cancel{x^4}^{1}}{x^{\cancel{6}2}} = \frac{3}{}$

Kürzen Sie die angegebenen Brüche [illegible] Sie, [illegible] Beispiel 1 die Potenzgesetze a[illegible]wenden und schreiben Sie das Ergebnis ggf. ohn[illegible] negati[illegible] Expo[illegible]n.

(1) $\frac{z^5}{z^3} =$ _____ = _____ (2) $\frac{u^2}{u^3} =$ _____ = _____ = _____ $= \frac{1}{}$

(3) $\frac{2c^5}{c^4} =$ _____ = _____ (4) $\frac{a}{}$ _____ = _____ = _____ $= \frac{1}{}$

Beispie[illegible] $x^{-2v} = \frac{x^u}{}$ [illegible]w. $3x^{u-2v} \cdot 2$[illegible] $3 \cdot 2 \cdot x^{u-2v+v-u} = 6x^{-v} = \frac{6}{x^v}$

Form[illegible] Bruchterme (1) bis (6) en[illegible] und der Beispiele so um, dass keine negativen Exponen[illegible] und keine S[illegible]n in den Exp[illegible]nenten auftreten.

(1) $x^{-2} \cdot y^5 =$ _____ (2) $b^{3a-1} =$ _____

(3) $\frac{1}{x^{a-b}} =$ [illegible] $^{-3} \cdot y^{a+2} =$ _____

(5) $\frac{x^{a+b}}{}$ [illegible]

[illegible] Sie, unter Angabe des Fehlers, warum die Umform[illegible]

[illegible] $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{-v-w}$ Die Umformung ist falsch, weil _____

[illegible]

[illegible]richtige E[illegible]s lautet: $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{____}$

d) Der Exponent 0

Warum irgendetwas hoch Null immer die Zahl 1 ergibt, ist eine häufig geste[illegible]frage. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang anhand der folgende[illegible]stellung[illegible]

Aus der Bruchrechnung ist bekannt, dass gilt:

$\frac{a}{a} = \frac{\cancel{a}^{1}}{\cancel{a}^{1}} = \frac{1}{1} = 1$

also: $\frac{a}{a} = 1$

Aus der Po[illegible]zre[illegible] ist bekannt, d[illegible]ilt:

$\frac{a}{}$ [illegible] $a^{__} = a^{1-1} = a^0$

[illegible] $\frac{a}{a} = a^0$

$a^0 = 1$

Ergänzung:

Damit dieser Zus[illegible]lle reellen [illegible]hlen gültig ist [illegible]estgelegt, dass auch gilt:

$0^0 = 1$

e) [illegible]kte bei P[illegible]enzen mit ungl[illegible]chen Basis und gleichem Exponenten

Formulieren Sie für den folg[illegible] Zusammenhang einen Merksatz, indem Sie den Text ergänzen.

Ausklammern von Exponenten

$a^n \cdot b^n$ [illegible] ^{n}

[illegible] unterschiedliche Basis, jedoch den [illegible] Exponenten, [illegible]geklammert werden.

Beispiele: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1.000.000$

Bei der Anw[illegible]
Regel lassen [illegible]
Rechenvorteile [illegible]

[illegible]

[illegible]ormation:

[illegible]chen muss man Klammern setzen denn es [illegible] $\left(\frac{2}{}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ [illegible] $\frac{4}{3}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Diese Regel ist vor allem auch dann wichtig, wenn es um Potenzen mit negativen Vorzeichen geht. Verdeutlichen Sie sich dazu die beiden folgenden Beispiele.

Zur Erinnerung:
Ein negatives Vorzeichen kann man immer als Multiplikation mit dem Vorfaktor (–1) interpretieren. Das Quadrat wirkt dann nur auf das a und nicht auf (–1).

(1) $-a^2 = (-1)\cdot a^2 = -a^2$

(2) $(-a)^2 = (-1\cdot a)^2 = (-1)^2\cdot a^2 = (+1)\cdot a^2 = a^2$

Nur wenn das Vorzeichen in einer Klammer steht, wird der Ausdruck hinter dem Quadrieren potenziert, da das Quadrat hinter der Klammer auf alle Faktoren in der Klammer wirkt.

(3) Begründen Sie anhand einer ausführlichen Formulierung, entsprechend zu (1) bzw. (2), dass gilt: $(-a)^3 = -a^3$

(–a)³ = _____

Ergänzen Sie die folgende verallgemeinerte Merkregel

Vorzeichen beim Potenzieren:

Wenn n eine _____ Zahl ist gilt: $(-a)^n = a^n$

Wenn n eine _____ $(-a)^n = -a^n$

Ergänzen: $-a^n$ = _____

Übungen zum Produkt bei Potenzen mit ungleicher Basis und gleichen Exponenten

Vereinfachen Sie die Terme, ohne Verwendung des Taschenrechners soweit möglich. Stellen Sie dabei alle Ergebnisse ohne Exponenten dar.

(1) $\frac{48^2}{144^2}$ = _____

(2) _____

(4) $\frac{(-3)^4}{-3^4}$ = _____

(5) $\frac{(-5)^3}{-5^3}$ = _____

(6) $(-2)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ = _____

f) Potenzieren von Potenzen

Verdeutlichen Sie sich anhand folgender Beispiele, welche Regeln beachtet werden müssen, wenn eine Potenz potenziert wird. Ergänzen Sie den Merksatz.

$(2^2)^2 = (4)^2 = 16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4 = 2^{2\cdot 2}$

$(2^3)^2 = (8)^2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6 = 2^{3\cdot 2}$

$(2^2)^3 = (4)^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 2^6 = 2^{2\cdot 3}$

$(2^5)^2 = 1024 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^{10} = 2^{5\cdot 2}$

$(2^2)^5 = (4)^5 = 1024 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^{10} = 2^{2\cdot 5}$

Potenzieren einer Potenz

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten _____.

Die Reihenfolge, in der potenziert wird, spielt dabei _____ Rolle. Es gilt:

$$\left(\mathbf{a}^{\mathbf{m}}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}^{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}} = \mathbf{a}^{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}} = \left(\mathbf{a}^{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{m}}$$

Achtung: Das Potenzieren einer Potenz nicht mit dem Potenzieren des Exponenten. Der Zusammenhang wird durch das folgende Beispiel deutlich:

$\left(a^2\right)^3 \neq a^{2^3}$, denn $a^{2\cdot 3} = a^6$ und $a^{2^3} = a^8$ auch $a^{2^3} \neq a^{3^2}$

$\left(a^3\right)^2 \neq a^{3^2}$, denn $a^{3\cdot 2} = a^6$ und $a^{3^2} = a^9$

Übungen zum Potenzieren von Potenzen

a) Berechnen Sie

_____

_____

_____

= _____

= _____

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

b) Kreuzen Sie an:

(1) $x^4 + x^3 = x^7$ richtig ❍ falsch ❍

(2) $x^4 \cdot x^3 = \begin{cases} x^7 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ \text{[illegible]} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

(3) $\left(x^4\right)^3 = \begin{cases} x^7 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ x^{12} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ x^{64} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

(4) $\left(x^{\text{[illegible]}3}\right)^4 = \begin{cases} \text{[illegible]}^{81} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ \text{[illegible]} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ \text{[illegible]} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

(5) $-x^2 \cdot x^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ -1 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ 1 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

(6) $\text{[illegible]} + 4x^3 = \begin{cases} 7x^6 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ 7x^3 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ 7x^{\text{[illegible]}} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

(7) $x^2 \cdot x^{-2} = \begin{cases} 1 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ 0 & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

(8) $\text{[illegible]} = \begin{cases} x^{12} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ x^{81} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

(9) $x^4 = \left(x^{-2}\right)^{-2}$ richtig ❍ falsch ❍

(10) $-x^2 = \begin{cases} \text{[illegible]} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \\ \text{[illegible]} & \text{richtig} \ ❍ \ \text{falsch} \ ❍ \end{cases}$

g) Potenzen mit rationalen Exponenten

Sie haben in Ihrem bisherigen Unterricht bereits Erfahrungen mit Wurzeln gesammelt. So wissen Sie, dass z.B. gilt:

$$\sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{25} = 5$$
$$\sqrt[3]{27} = 3$$

Es soll nun erarbeitet werden, dass die Wurzelzeichen auch mit Hilfe von Potenzen dargestellt werden können. Um die Zusammenhänge zu verdeutlichen, werden auch hier wieder Zahlenbeispiele herangezogen.

Ist [illegible] $\sqrt[3]{8}$ und auch $2 = 8^{\frac{1}{3}}$ gilt,

und $2 = 2^1 = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}$ [illegible] gelten: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$.

$1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$

Potenzgesetz potenzieren

D[illegible] Exponenten haben [illegible] deutung wie die bisher [illegible] verwendet [illegible] hen.

Ergänzung: [illegible] Quadratwurzeln die folgende Vereinbarung [illegible] wurde:

Bei der Quadratwurzel wird die 2 nicht notiert, bzw., wenn über der Wurzel nichts steht, handelt es sich um eine Quadratwurzel.

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Der Zusammenhang zwischen gebrochenem Exponent und Wurzelzeichen soll nun [illegible] weiteren Beispielen überprüft werden. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

$\sqrt[4]{625} = 5$ und $625^{\frac{1}{4}} = \left(__^4\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 5^{\square} = 5$

$\sqrt[5]{32} = ____$ und $(32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\square}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\square \cdot \frac{1}{5}} = 2^1 = __$

$\frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{\square}$ und $49^{-\frac{1}{2}} = \left(7^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 7^{\square \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 7^{\text{[illegible]}}$ [illegible] $\frac{1}{\text{[illegible]}}$

Zusammenhang zwischen Wurzeln und rationalen Potenzen:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ bzw. $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

h) Potenzieren von [illegible] rationalen Exponenten bzw. Potenzieren von Wurzeln

Für [illegible] Potenzen [illegible] Termen mit gebrochenen Potenzen oder Wurzeln benötigt man im Prinzip keine neuen Potenzgesetze und auch die notwendigen Regeln für auftretende Brüche sind aus Aufgabe 1.1 bekannt. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Umformungen bzw. Umformungsschritte, und geben [illegible] welche der aufgelisteten Potenzgesetze und Regeln für die Bruchrechnung jeweils verwendet [illegible]en. Ordnen [illegible] jedem Umformungsschritt die passende Nummer zu.

[illegible]$\left.\right)^n = \left(a^n\right)^m$ ② $\left(a^{\text{[illegible]}}\right) = a^{m \cdot n}$ [illegible] $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ④ $a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m}$ ⑤ $m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ ⑥ $\frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \overset{\bigcirc}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \overset{\bigcirc}{=} a^{\frac{1}{n} \cdot m} \overset{\bigcirc}{=} a^{\frac{m}{n}} \overset{\bigcirc}{=} a^{m \cdot \frac{1}{n}} \overset{\bigcirc}{=} \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} \overset{\bigcirc}{=} \sqrt[n]{a^m}$

[illegible] folgenden Zusammenhang, den man sich

Potenzieren von [illegible]

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)$ [illegible]

Verdeutlichen [illegible] häufig auftretende Aufgabenstellungen [illegible] folgenden Beispiele. und [illegible] Rechnungen analog dazu.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Beispiel 1: Sonderfall $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Zur Erinnerung:
$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

(1)

$\sqrt{a^2} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^1 = a$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1$

$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

(2)

$\sqrt[3]{a^3} = \left(a^{\square}\right)^{\square} = a^{\square} = ___$

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(\square\right)^{\square} = ___ = ___$

$\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

$\square = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a^{\square}\cdot a^{\square} = a^{\square} = ___ = ___$

Beispiel 2: Partielles Wurzelziehen

$\sqrt{a^3} = \left(a^3\right)^{\frac{1}{2}} = a^{3\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = a\cdot a^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{a}$

$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^{2+1}} = \sqrt{a^2\cdot a} = \left(a^2\cdot a\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{2}}\, a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2}\,\sqrt{a} = a\sqrt{a}$

zum Merken.

Merke: „Zerschneiden“ von Wurzeltermen bzw. partielles Wurzelziehen

Wenn in einem Wurzelterm mehrere Faktoren auftreten, darf man diese getrennt voneinander mit einem eigenen Wurzelzeichen versehen und die Wurzeln auch getrennt voneinander ziehen. Man nennt das auch als **partielles Wurzelziehen**.

$\sqrt{a^m\cdot a^n} = \sqrt{a^m}\,\sqrt{a^n}$

Nutzen Sie die kurze Version des partiellen Wurzelziehens in folgenden Beispielen, indem Sie die Lösungen vervollständigen.

$\sqrt{a^{\square}\cdot a} = \sqrt{a^{\square}}\,\sqrt{a} = a^{\square}\sqrt{a}$

(2) $\sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = \sqrt{36}\sqrt{__} = 6\sqrt{__}$

(3) $\sqrt{27} = \sqrt{___\cdot 3} = \sqrt{___}\cdot\sqrt{3} = ____$

(4) $\sqrt{8x} = \sqrt{___\cdot 2x} = \sqrt{__}\cdot\sqrt{2x} = 2\sqrt{2x}$

(5) $\sqrt{288x} = _____ = _____$
$= _____$

(6) $\sqrt{125x^3} = \sqrt{25x^2}\cdot\sqrt{_____} = _____$

(7) $\sqrt{98z^3} = _____$

(8) $\sqrt{128x^5} = _____ = _____$
$= _____ = _____$

Treten unter der Wurzel Zahlenwerte auf, so kann eine partielle Wurzel gezogen werden, wenn die Zahl in Primfaktoren zerlegt werden kann, bei dem als Faktor Quadratzahlen auftreten. Es ist günstig, den quadratischen Faktor die größtmögliche Quadratzahl zu wählen. Man könnte Aufgabe (2) auch so lösen:
$\sqrt{___\cdot 8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
Das ist jedoch aufwändiger.

Achten Sie auf 12…

Achtung!

Aus einer **Summe** oder **Differenz** kann man **keine** partielle Wurzel ziehen.

$$\sqrt{x^2+y^2} \neq x+y$$

Verdeutlichen Sie sich das am folgenden Zahlenbeispiel:

richtig: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
falsch: $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$

Beispiel …

denn $\sqrt{a^2} = \left(a^2\right)^{\square} = a^{\square}$

Mehrfache Wurzeln entsprechen dem Potenzieren einer Potenz.

Verfahren Sie wie im Beispiel:

(1) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[12]{a}$, denn _____

(2) $\sqrt{\square}$ _____

…x^2, denn _____

…$\sqrt{32a^5} = \sqrt{2a}$, denn _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Beispiel 4: Rationalmachen des Nenners

Treten in Brüchen Wurzeln auf, so wird ein Bruch in der Regel so angegeben, d[illegible] Ner[illegible] keine Wurzel erscheint. Dies ist auch bei den gängigen Modellen der Tasch[illegible]nner d[illegible]

Wenn man im Taschenrechner beispielsweise den Term $\frac{3}{\sqrt{2}}$ eingibt u[illegible] die [illegible]etaste betätigt,

erhält man $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Verdeutlichen Sie sich diesen Zusammenhang [illegible]d d[illegible]endem Vermuf[illegible]nd machen Sie anschließend die Nenner der gegebener[illegible]che in (1) [illegible] rational. ([illegible] ergänzende und vertiefende Übungen zu Kapitel 1)

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{[illegible]} = \frac{[illegible]\sqrt{b}}{b}$$

(1) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ = _____ =

(2) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ = _____

(3) $\frac{3a}{\sqrt{2a}}$ = _____

(4) $\frac{a}{\sqrt{2a}}$ = _____ _____

Er[illegible] Bemerkungen [illegible]sichtlich[illegible]arstellung von Ergebnissen bei Rechnungen

Kommen bei Rechnungen beispielsweise bei der Lösung von Gleichungen, Wurzeln vor, lassen sich die Ergebnisse nicht exakt mit dem Taschenrechner darstellen, sondern man erhält immer ein auf die Anzahl der Stellen des Taschenrechners gerundetes Ergebnis.

Beispiel: $2\sqrt{2} \approx 2{,}8284... \approx 2{,}83$

Entsprechendes gilt [illegible]lischen Dezimalbrüchen, wie

$\frac{1}{6} \approx 0{,}1[illegible]$ [illegible] 3,14 und der Eulerschen Zahl

[illegible] Ergebnis für nachfolgende Rechnungen [illegible] ist es ungünstig, mit dem [illegible]ten Zahlenwert weiterzurechnen. Hier kann der Auf[illegible]be am Taschenrechner [illegible]ngreich werden und es können sich Eingabefehler einschle[illegible]nnen aufgrund von [illegible]erundeten Zwischenergebnissen ungenaue Endergebnisse auftre[illegible]ematik spielt der gerundete Zahlenwert zudem häufig keine Rolle.

Aus diesen Grü[illegible] in einer „möglichst vereinfa[illegible]malisierten“ Form, ohne [illegible]en explizit auszurechnen, wobei [illegible]erium darin besteht, d[illegible]nis am Ende gut lesbar ist bzw. die [illegible] Übungs- oder K[illegible]as Normalisieren muss daher keine ei[illegible]stellung eines [illegible] liefern und b[illegible]utet:

– [illegible]t wie möglich kürzen und als unechte Brüche darstellen.
– [illegible] von Brüchen möglichst ohne Wurzeln darstell[illegible]
– [illegible] mit Zahlen und Variablen oder Konstanten [illegible]e) wird, beginne[illegible]n, [illegible]d sortiert.
[illegible]reten komplexer Zahlen soll im Ne[illegible]äre Einheit auftr[illegible]

Überblick Gesetze und Definitionen bei der Potenzrechnung

Grundlegende Zusammenhän[illegible]			
Der Exponent Null		Der Exponent [illegible]	De[illegible]e Exponenten $\frac{1}{n}$
$a^0 = 1$	$0^0 = 1$	a^1 [illegible]	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
Potenzen mit gleic[illegible]pone[illegible]			
Addition und Subtraktion		Multiplik[illegible]on und Division	
$u \cdot a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm v[illegible]$		$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)$[illegible]	
[illegible]nzen [illegible]it negativen Exponenten			
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ [illegible]		[illegible] $a^{-n} = a^n$	$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
M[illegible]ikation und D[illegible]von Potenzen [illegible]it gleicher Basis			
[illegible]$^m \cdot a^n = a^{m+n}$		$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	
Potenzie[illegible]on Potenzen			
[illegible]nzzahlige Exponente[illegible]		[illegible]tionale Exponenten	potenzierte Exponenten
$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{nm}$		$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$a^{m^n} = a^{(m^n)} \neq (a^m)^n$

Vermischte Übu[illegible]zen

Um[illegible]

[illegible]tenzgesetze bei d[illegible] Fassen Sie zusammen oder [illegible]en Sie, warum nicht weiter vereinfac[illegible]

(1) $8m^2 + 7m^2$ = _____

(2) $5cm^2 + 3$[illegible] _____

(3) [illegible] _____

[illegible] = _____

[illegible] $2\ m)^2$ = _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Notieren Sie jeweils die verwendeten Potenzgesetze, bzw. erläutern Sie die erfolgten Termumformungen in Stichworten.

(1) $\frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{18x^3}{2x}} = \sqrt{9x^2} = 3x$

Potenzgesetz: _____

Umformungen: _____

(2) $t^4 \cdot t^3 = t^7$

Potenzgesetz: _____

(3) $z^{1+3a} = z \cdot z^{3a}$

Potenzgesetz: _____

(4) $u^{2v-1} = u^{2v} \cdot u^{-1} = \frac{u^{2v}}{u}$

Potenzgesetz: _____

(5) $\sqrt{\sqrt[3]{4x^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{4x^2}}$ [illegible]

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____

(6) [illegible] $\cdot c^{1-n} =$ [illegible] $^{+1-n} = c^{n+1}$

Potenzgesetz: _____

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____

c) Die Potenzrechnung bildet unter anderem eine Grundlage für Umformungen, die beispielsweise bei der Differenzial- und Integralrechnung notwendig werden. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben im Hinblick auf später folgende Problemstellungen, indem Sie auch hier wieder Umformungsschritte erläutern bzw. die verwendeten Potenzgesetze angeben.

(1) [illegible]

Potenzgesetz: _____

$= \frac{1}{\sqrt{x}}$

Potenzgesetz: _____

(2) $\frac{3}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}}$ [illegible]

Umformung: _____

Potenzgesetz: _____

[illegible] $(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

Potenzgesetz: _____

(3) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Umformung: _____

$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

Potenzgesetz: _____

$= \frac{1}{3x^{2\cdot\frac{1}{3}}}$

Umformung: _____

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Potenzgesetz: _____

Ergänzen Sie die fehlenden Exponenten bei der Variable x:

(4) $2x^{\frac{1}{2}+1} = 2x^{__} = 2\sqrt{x^{__}} =$ [illegible] $\cdot x$ [illegible] $x = 2x\sqrt{x}$

Formen Sie entsprechend z[illegible]n.

(5) $4x^{\frac{1}{2}-1} =$ _____

(6) _____

[illegible] $^{\frac{1}{2}-1}$ _____

d) [illegible]fachen Sie soweit wie möglich, indem Sie partielle Wurzeln ziehen, Nenner rational machen und die Exponenten der Terme ohne Summen darstellen.

(1) $\sqrt{288x^3} =$ _____

(2) _____

[illegible] $\sqrt{8x^3} =$ _____

(4) $\frac{5x}{\sqrt{x}} =$ _____

(5) x^{2} [illegible] _____

_____

[illegible]de Übungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 1.3

Multiplizieren und Faktorisieren von Summen

Information 1.3.1
Multiplizieren von Summen – Distributivgesetz

Multiplikation [illegible] Summe mit einem [illegible]
Jeden S[illegible]den [illegible] Klammer [illegible]m F[illegible] multiplizieren.

$(b + c)$

Distributivgesetz

a (b + c) = ab + ac

(a + b)(c + d) = ac + ad + b[illegible]

Multiplikation [illegible] Summe mit [illegible] Summe
Jeder S[illegible]nden in der [illegible]en mit jed[illegible]manden d[illegible]weiten Klammer m[illegible]ieren.

$(a + b)(c + d)$

[illegible]tern[illegible] bei den folgenden B[illegible]spielen die Umf[illegible]ungen.

Beisp[illegible] (1) [illegible]

(1) $2\sqrt{3}\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{12}} + \frac{z}{\sqrt{27}}\right)$ (2) → (3)

(2) $= \frac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}\,y}{[illegible]} + [illegible]$

(3) [illegible]

$\frac{z}{3}$

Beispiel 2: (2)

(1) $(\sqrt{2x} + [illegible]$

(2) $= \sqrt{[illegible]}\,xy + \sqrt{[illegible]}$ (2) → (3)

(3) [illegible] $8\sqrt{xy} + 2y\sqrt{2}$

Beispiel 3: (1) → (2)

(2) → (3)

(1) $(2x + 1)(3x + 2)(x - 2)$

(2) $= (6x^2 + 4x + 3x + 2)(x - 2)$

(3) $= (6x^2 + 7x + 2)(x - 2)$

(4) $= 6x^3 - 12x^2 + 7x^2 - 14x + 2x - 4$

(5) $= 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$

(3) → (4)

(4) → (5)

Merk[illegible] [illegible]ei[illegible]tiplizieren [illegible] Klammern

1. Sc[illegible]: Man [illegible]tipliziert zuerst zwei Klammern miteinander, schreibt das Ergebnis in Klam[illegible]rn und die [illegible] verwendete dritte Klammer dazu.

2. [illegible]hritt: Man fasst, wo [illegible]möglich, das Ergebnis der Multiplikation aus dem ersten Schritt zusammen.

3. [illegible]hritt: Man m[illegible]pliziert jeden S[illegible]mmanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer. F[illegible]as Beispiel oben gilt:

$(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$

4. Schr[illegible] [illegible]mmanden zusammen.

Zusatzinformation:

Dieses Verfahren lässt sich au[illegible]
Summanden in einer Klammer erw[illegible]

Beispiel 4:

Ergänz[illegible]

(2[illegible] $2x^{[illegible]}$) [illegible] $+ ___ x^3 - ___ x^2 - ___ x^4 - 8 ___ + ___$ [illegible] $___ x + 1$

$= 6x^5 - 12x^4 + x^3 - 10x^2 + 2x + 1$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Übungen zu 1.3.1

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit wie möglich, zusammen.

a) $3z(5x + 3y + 7z + 1) =$

b) $(2u + 3v)(a + 2b) =$

c) $2\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{8}} + \frac{z}{\sqrt{18}}\right) =$

d) $(\sqrt{5x} + \sqrt{10y})(\sqrt{2x} + \sqrt{5y}) =$

e) $(3x - 5z)(2$ [illegible] $x - 2$ [illegible]

f) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) =$

[illegible] $- a^{2x}) =$

h) $b^{-2x}(b^x + 1 - b^{2x}) =$

i) $\frac{2}{e^x}(e$ [illegible]

Information 1.3.2

Faktorisieren von Summen

Summen, bei denen in jedem Summanden gleiche Faktoren vorko [illegible] man m [illegible] en **Ausklammern** dieser Faktoren zu einem Produkt aus den ausgekla [illegible] ert [illegible] toren und einer Summe umformen. Dieses Verfahren, das auch als **Faktorisieren** b [illegible] ichne [illegible] man auch als Umkehrung der Multiplikation einer Summe mit einem Fakto [illegible] rpret [illegible].

Aus [illegible] mern b [illegible] deutet, d [illegible] in Geda [illegible] jeden Sum [illegible] durch die aus [illegible] ammernden Faktoren, h [illegible] nur a, dividiert.

$a(\frac{a}{a} + \frac{b}{a} + \frac{ac}{a})$

Ausklammern von Faktoren

ac = a(1 + [illegible] c)

Wenn [illegible] aktor, der au [illegible] klammert werden soll, [illegible] steht, mu [illegible] man in Gedanken eine [illegible] bare 1 vor den Summanden sehen.

$1 \cdot a + ab + ac$

Diese 1 [illegible] eim Ausklammern erhalten.

Beispiel 1: $x + 3xz + [illegible]xy = x(1 + 3$ [illegible] $+ [illegible]y)$

Auf die 1 achten.

Beis [illegible]

Schritt 1:
Die einzelnen Summanden in Gedanken in gleiche Faktoren zerlegen.
$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2xx + 2 \cdot 6x$

Schritt 2 [illegible]
Gleiche Fakt [illegible] men in Gedanken ma [illegible]
$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2$ [illegible]
… und vor die Klammer [illegible] schreiben.

Schritt 3:
Nicht markierte Faktoren verbleiben in der Klammer. [illegible] f. auf eine 1 achten.

$[illegible]2x^2 + \sqrt{24}x^2 + \sqrt{27}x^3 = 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}\sqrt{3}x \cdot x + 3\sqrt{3}x \cdot x^2 = \sqrt{3}x(2$ [illegible] $^2)$

Partielle Wurzeln ziehen.

[illegible] m Summand tritt [illegible] $\sqrt{3}x$ auf.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Übungen zu 1.3.2

Faktorisieren Sie die Summen so weit wie möglich. Achten Sie beim Ausklammern darauf, dass im Endergebnis in der Klammer keine Brüche bzw. negative Exponenten oder Wurzeln vorhanden sind.

a) $9a + 18ab + 3a^2$ =

b) $yz + 3yz^3 - y^3z$ =

c) $25x^3 - 15x^2 + 5x$ =

d) $\sqrt{8t^2} + \sqrt{72}\,t^2 - \sqrt{32}\,t^3$ =

e) $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{[illegible]} + \frac{1}{8}r$ =

Klammern Sie so aus, dass in der Klammer kein Bruch bzw. kein negativer Exponent vorhanden ist.

f) $c^x + 1 + \frac{1}{c^x}$ =

g) $e^{-2x} + e^{2x} - 2$ =

Erg[illegible]ungen:

Aufgabe 1.4

Binomische Formeln

Eine besondere Bedeutung beim Multiplizieren und Faktorisieren v[illegible]en ko[illegible] binomischen Formeln zu. Die Anwendung dieser Formeln zieht sich durch alle Ge[illegible]te [illegible]thematik. Daher sind eingehende Kenntnisse im Umgang mit diesen Formeln un[illegible]sslich. [illegible], ob Ihnen diese Formeln geläufig sind, sollten Sie zumindest die Übungsau[illegible]n zu d[illegible] Thema bearbeiten. Fehlende Kenntnisse können Sie dann ggf. anhand d[illegible] gege[illegible] Info[illegible]tionen aufarbeiten.

Information 1.4

1. binomische Formel	2. [illegible]omisc[illegible] Formel	3. binomi[illegible]e Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a -$ [illegible] $2ab + b^2$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Diese Darstellung ist Ihn[illegible] mit [illegible]heit [illegible]annt. Nun s[illegible] die Entstehu[illegible] d[illegible]er Formeln wiederholt und gleichzeitig begrü[illegible]den, in[illegible]ie[illegible]hre A[illegible] sinnvoll ist.

Aufgabe

a) Im F[illegible]enden w[illegible] die Entstehung[illegible] binomischen [illegible]meln dargestellt. Erläutern Sie die [illegible]nfo[illegible]ngssch[illegible]e in (1), (2) [illegible]. Versuch[illegible] dabei, so weit wie möglich, Ausdrücke der [illegible]the[illegible]achsprache zu verwenden.

Bi[illegible]chnungen	Erläuterungen
(1) $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$	(1)
[illegible]	
(3) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(3)

b) Führen S[illegible] [illegible]erechnungen bzw. Rechensc[illegible] [illegible]. binomische Formel durch[illegible]

([illegible]

= [illegible]

= [illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

c) Führen Sie nun die entsprechenden Berechnungen bzw. Rechenschritte für di[illegible] binom[illegible] Formel durch.

(1) $(a + b)(a – b)$ = _____

(2) = _____

Aufgabe 1.4.2

Ausmultiplizieren von Summen mit Hilfe de[illegible]nomisch[illegible] Fo[illegible]eln

Binomische Formeln treten bei Aufgab[illegible] der [illegible] nic[illegible] der Form $(a + b)^2$, $(a – b)^2$ [illegible] $(a + b)(a – b)$ auf, sondern es ersch[illegible]en andere V[illegible] und zus[illegible]he Zahlenwerte. Sie sollen nun lernen, wie man die binomischen F[illegible]en kann, um d[illegible] Klammern nic[illegible]es Mal erneut zeitaufwändig schrittweise au[illegible]ltipli[illegible]en zu [illegible]ssen. D.h., [illegible] binomischen F[illegible]eln werden verwendet, um effektiv un[illegible] zu arb[illegible]

a) Anwenden [illegible]inom[illegible]en Formel

Verdeutli[illegible]n Sie s[illegible]ie schrittweise Be[illegible]chnung von: $(2[illegible]3y)^2$ am folgenden Beispiel. Wenn man mit [illegible]m [illegible]ang de[illegible]omischen Fo[illegible]eln vertraut ist, [illegible]en die in den Sprechblasen aufgelisteten Sch[illegible] im [illegible]

1. [illegible]hritt
[illegible]nen der r[illegible]tigen binomischen Form[illegible] und damit festlegen von Vorzeichen.
Hier: 1. binomische Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Schritt
Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe, **ohne auf Vorzeichen zu achten**, die Variablen a und b zu.
a := 2x*
b := 3y

[illegible]hritt
[illegible] Kopf den ersten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren.
Hier: a^2 := [illegible]

4. Schritt
[illegible] Kopf 2ab berechnen und [illegible]is notieren.
[illegible]$2ab := 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$

[illegible]Schritt
[illegible]pf den zweiten [illegible]nden einschließlich [illegible] quadrieren und [illegible]otieren.
[illegible]$)^2 = 9y^2$

*H[illegible]chreibweise: „**a:=**“ bedeutet, dass man der [illegible]blen a den Ausdr[illegible]hts vom Gleichheitszeichen steht.

b) Anwenden der 2. binomischen Formel

Berechnen Sie den Term $(5u – 7v)^2$ wie in Aufgabenteil a). Achten Sie dara[illegible]ass b[illegible]er zweiten binomischen Formel der mittlere Summand 2ab ein negatives V[illegible]en ha[illegible] Sie die Schritte, die im Kopf durchgeführt werden zunächst noch ausfüh[illegible] vorg[illegible]enen Stellen.

$(5u – 7v)^2$ = _____

[illegible]chritt [illegible]Kopf
[illegible] binomische Formel
2. [illegible]itt: a := _____ [illegible] := _____
[illegible] Schritt: a^2 := _____
[illegible] Schritt: 2[illegible]b := _____
5. Schritt: b^2 := _____

c) Anwenden de[illegible]bi[illegible]en Formel

Verd[illegible]ie s[illegible]nhand des Te[illegible]4r + s)(4r – s[illegible]wendung der 3. binomischen Formel.

1. Sc[illegible]t
Man [illegible]net im Kopf die [illegible]ge Form[illegible]
Hier: 3. binomi[illegible]he Formel
$(a + b)(a – [illegible] a^2 – b^2$

2. Schritt
Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe die Variablen a und b zu
a := 4r
b := s

$(4r + s)(4r – s) = 16r^2 – s^2$

3. S[illegible]
[illegible]bnis notieren
Hier: $a^2 := (4r)^2 = 16r^2$

4. Schritt
Im Kopf den zweiten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren
Hier: $b^2 := s^2$

Berechnen S[illegible]ie im Beispiel:

(0.5[illegible] _____

Schritte im [illegible]
1. Schritt: ____ [illegible] Formel
2. Schritt: a := _____ [illegible]
3. Schritt: a^2 := _____
[illegible]chritt:b^2 := _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Übung zu 1.4.2

Lösen Sie die Klammern auf. Notieren Sie bei den Binomen direkt das Endergebnis, wenn Sie die Zwischenschritte im Kopf berechnen.

a) $(a - 3b)^2$ = _____

b) $(a + 1)^2$ = _____

c) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ = _____

d) $(u + 1)(1 - u)$ = _____

e) $(\frac{1}{3} w + v)^2$ _____

f) $(\frac{3}{5} x - 5y)^2$ _____

g) $(3s + \frac{1}{6}$ [illegible] $6 s -$ _____

h) $(a$ [illegible] $b)($ [illegible] _____

i) $(2$ [illegible] $)^2$ = _____

j) $(\frac{4}{9} r + \frac{3}{4} s)^2$ = _____

k) $(\frac{1}{5} a - \frac{3}{5} b)(\frac{1}{5} a +$ [illegible] _____

l) [illegible] _____

[illegible] $\sqrt{2})^2$ = _____

[illegible] $(\sqrt{10}\, a + \sqrt{5}\, b)^2$ = _____

o) $(\sqrt{3}\, x - \sqrt{}$ [illegible] _____

p) $(\sqrt{}$ [illegible] $\sqrt{3b})$ _____

q) [illegible] $s)(\sqrt{3t} + \sqrt{2s})$ = _____

r) [illegible] $(a - b)^2$ = _____

Aufgabe 1.4.3

Faktorisieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formeln

Genau wie beim Ausmultiplizieren von binomischen Formeln kann [illegible] bei der Umkehrung dieser Rechnung, nämlich aus einer Summe auf eine binomische Formel zu schließen, schrittweise vorgehen. Man sollte dazu die binomischen Formeln auswendig im Kopf haben. [illegible] vorgehen soll hier ebenfalls anhand von Beispielen gezeigt werden.

a) Faktorisieren mit der 1. binomischen Formel

Zu Faktorisieren ist die Summe $25u^2 +$ [illegible] $uw + 4w^2$

1. Schritt
Man ordnet im Kopf anhand der Anzahl der Summanden und deren Vorzeichen eine mögliche binomische Formel zu.
Hier: **$a^2 + 2ab$** [illegible] **$(a$** [illegible]

2. [illegible]
Man zieht im Kopf die Wurzel aus dem ersten Summanden und ordnet das Ergebnis der Variable a zu.
Hier: **a** [illegible] **$:= \sqrt{25u^2} = 5u$** [illegible]

3. Schritt
Man zieht im Kopf die Wurzel aus dem dritten Summanden und ordnet das Ergebnis der Variablen b zu.
Hier: **$b := \sqrt{4w^2} = 2w$**

[illegible] **$u^2 + 20uw + 4w^2 = (5u + 2w)^2$**

4. Schritt
Man prüft im Kopf, ob das Produkt 2ab dem Summanden in der Mitte entspricht.
Hier: **$2ab := 2 \cdot 5u \cdot$** [illegible] **$20uw$** .

Falls das nicht geht, kann die Summe nicht zum Binom umgeformt werden und Schritt 5 [illegible]

5. Schritt
Man notiert, wenn möglich, das Ergebnis.
Hier: **$(5u + 2w)^2$**

[illegible] **2. binomische** [illegible]

$4x^2 - 4x + 1$= _____

Sch[illegible]

1. Schritt: [illegible] e Formel ist möglich
2. Schritt: a := [illegible]
3. Schritt: b := $\sqrt{__}$ [illegible]
4. Schritt: 2ab := _____ [illegible] _____
5. Binom notieren

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

c) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel

$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (_____)(_____)$

Wenn man 2 als $\left(\sqrt{2}\right)^2$ auffasst, ist das ein drittes Binom.

Schritte im Kopf

1. Schritt: ___. binomische Formel
2. Schritt: a := ___ = x
3. Schritt: b := $\sqrt{___}$
4. Schritt: Ergebnis notieren.

d) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel und vorherigem Ausklammern

$12x^2 - 3z^2 = 3\,(4x^2 - z^2) = (___ - z)(2x + ___)$

Das sieht zunächst nicht nach der binomischen Formel aus, da es keine quadratische Summe anden gibt. Man kann hier aber die 3 ausklammern und erhält:

$12x^2 - 3z^2 = 3(4x^2 - z^2)$

Schritte im Kopf

1. Schritt: ___. binomische Formel
2. Schritt: a := $\sqrt{____}$ = 2x
3. Schritt: b := $\sqrt{____}$ = z
4. Schritt: Ergebnis notieren.

e) Faktorisieren mit der zweiten binomischen Formel und vorherigem Ausklammern

Faktorisieren Sie die Summe $18a^2 - 12a + 2$, indem Sie schrittweise die fehlenden Angaben ausfüllen:

$18a^2 - 12a + ___$

1. Schritt: ___ ... mel ist möglich
2. Schritt: a:= ___
3. Schritt: b:= ___
4. Schritt: 2ab := ___
5. Schritt: Ergebnis notieren.

Übung zu 1.4.3

Faktorisieren Sie die folgenden Summen so weit wie möglich, indem Sie Ausklammern und/oder die binomischen Formeln anwenden. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit möglich.
Hinweis: Bei einer Aufgabe gibt es kein Ergebnis, da keine binomische Formel vorliegt und nicht ausgeklammert werden kann.

a) $2ax + 2ay - 4az$ = _____

b) $6a^2b + 12ab^2 - 18\,ab$ = _____

c) $4a^2 + 40ab + 25b^2$ = _____

d) $49x^2 - 42xy^2 + 9y^4$ = _____

e) $k^4 - 2k^2 + 1$ = _____

f) $1 - ___$ = _____

g) $___x^2 ___ + ___$ = _____

h) $___^6 - 8v^2$ = _____

i) $12g^3 - 36g^2h + 27gh^2$ = _____

j) $\frac{3}{4}ax + \frac{3}{4}bx - \frac{3}{4}x$ = _____

k) _____

$___ab + \sqrt{12a}$ = _____

m) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{15}xy + \frac{1}{9}y^2$ = _____

n) $\frac{4}{9}u^2 - 1$ = _____

o) $\frac{1}{___}$ = _____

$___^2$ = _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 1.5

Quadratische Ergänzung

Aufgabenstellungen, wie beispielsweise die Ermittlung der Scheitelpunkt[illegible] Parabel oder Lösungsverfahren bei quadratischen Ungleichungen , erfordern o[illegible] einen [illegible] an[illegible] Term zu einem Binom umzuformen. Man bezeichnet dieses Verfahren als **quad[illegible]che E[illegible]ng**. Die schrittweise Vorgehensweise bei der quadratischen Ergänzung wird wieder an[illegible] eine[illegible]spiels dargestellt. Die einzelnen Schritte können auch hier bei ein wenig Übung [illegible] Kopf [illegible]n. T[illegible]gen Sie Schritt für Schritt jeweils die Zwischenergebnisse aus den Sprechblasen an [illegible]ese Stellen ein.

In diesem Beispiel soll aus dem Term $16x^2 + 48$[illegible] ___ ein Bi[illegible]ntstehen.

1. Schritt
Zuordnen einer passenden binomischen Formel. Anh[illegible]der + vor 48 erkennt man [illegible] 1. binomische Form[illegible]sst.

$16x^2 + 48xy +$ [illegible] $= (____ \quad ____)$

2. Schr[illegible]
[illegible]dem gegebene[illegible]quadratischen [illegible]
S[illegible]nanden a^2 [illegible] Wurzelzie[illegible]n [illegible] Wert von a [illegible]chnen [illegible] Wert in de[illegible] Klammer rechts vom [illegible]leichheit[illegible]zeichen eintrage[illegible]
Hier: a [illegible] $\sqrt{16x^2} = 4x$
Z[illegible]ergebnis: [illegible]^2 + 48xy + ____ = $(4x + ___)^2$

[illegible]6x² + 48xy + _____ = (_____ + _____)²

3. Schritt
Mit Hilfe des zweiten Summanden, der aus 2ab besteht, auf den Wert von b schließen. Man dividiert dazu den mit[illegible]manden durch [illegible]
[illegible]
[illegible]gebnis in der Klammer rechts vom [illegible]chheitszeichen eintragen.

4. Schritt
Aus dem Ergebnis von Schritt 3 durch Quadrieren b^2 ermitteln und das Ergebnis notieren.

Hier: $b^2 := 36y^2$

Übung 1.5.1

Ergänzen Sie zum Binom: $x^2 - x +$ ____ . Notieren Sie als Hilfestellung zunäch[illegible]ch d[illegible]nzelnen Rechenschritte, die im Kopf ablaufen, in der Sprechblase. (Kontroll[illegible]is: (x –

$x^2 - x +$ ____ = (____ ____)

Schrit[illegible] Kopf
[illegible]chrit[illegible]inom[illegible]che Formel
[illegible]
2. S[illegible] a:= √____ = ____
3. [illegible]chritt: b = 2ab / [illegible] =
4. Schri[illegible] b² = ____

Übung 1.5.2

Ergänzen Sie zu[illegible]om[illegible]uchen Sie dabei di[illegible] Schritte 1 bis 4 [illegible] Kopf durchzuführen.

a) f² + [illegible] _____
b) [illegible]p² [illegible]q + ___ = _____
c) [illegible] – 4[illegible] = _____
[illegible]8x + ___ _____
e) 9p² + 6p + ___ = _____
f) x² – 6x + ___ = _____
g) z² +z + ___ _____
h) [illegible] _____
[illegible] = _____
[illegible] + az + ___ = _____
k) 4x² – 4xy + ___ = _____
l) 16a² – 32av [illegible] _____
m) 16x[illegible] _____
n) [illegible] _____
[illegible] + ___ = _____
[illegible] – 40vw + ___ = _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Ergänzende und vertiefende Übungen

Um die Regeln zur Potenzrechnung und den Umgang mit Binomen zu festigen und zu vertiefen können Sie die folgenden ergänzenden Übungen bearbeiten. Dies ist besonders [illegible] wenn [illegible] Leistungskurs in Mathematik belegen wollen oder ein Studienfach wählen [illegible] dem Vorlesungen in Mathematik obligatorisch sind.

Übung 1.6

Formen Sie die Brüche so um, dass im Nenner keine Wurzel [illegible] erscheint. Vereinfachen Sie die Terme dabei so weit wie möglich. (Vergl. Aufgabe [illegible] Beispiel 1)

a) $\frac{10b}{\sqrt{b}} =$ _____

b) $\frac{3x}{\sqrt{27x}} =$ _____

c) $\frac{z}{\sqrt{z}+1} =$ _____

d) $\frac{x}{1-\sqrt{x}} =$ _____

e) $\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}$ _____

Übung [illegible]

Ver[illegible] Sie soweit wie möglich.

a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{a}{b}}} =$ _____

b) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ _____

$=$ _____

d) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}} =$ _____

e) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{[illegible]}}$ _____

Übung 1.8

Kürzen Sie den Bruch so weit wie möglich.

a) $\frac{(x^n + x^{n+1})^2}{x^{2n}} =$ _____

b) $\frac{x^{2n+1} - x^{2n+3}}{x^{n+1} + x^{n+2}} =$ _____

Übung 1.9

Faktorisieren Sie unter Anwen[illegible]nzgesetze und [illegible]t Hilfe der bin[illegible]nen Formeln.

a) $\sqrt{x^{2n} - 2x^{n+m} + [illegible]} =$ _____

b) $\sqrt{4x^{4n} + [illegible] + 4y[illegible]}$ _____

Übung [illegible]

Fo[illegible]n Sie [illegible]erm durc[illegible]klammern [illegible] geeigneten Faktors so um, dass in der Klammer keine negativen Potenzen bzw. [illegible] Brüche auftreten.

a) [illegible] $a^x + 2 =$ _____

b) $b^{2x} + 4 - b^{-2x} =$ _____

Übung 1.11

D[illegible]nung entstehen. Die Aufgabenstellung dort [illegible]nnen sicherlich, dass das jedoch zu [illegible]lierten Ausdruck führt, da [illegible] Null erscheint, wodurch eine Division [illegible]ntsteht. Man muss diese Terme daher so [illegible] Nenner vollständig [illegible]sgekürzt werden kann oder im Nenner ein Ausdru[illegible] gleich Null wird. Erläutern Sie [illegible]nhand der Beispiele die Rechenschritte, und wenden Sie d[illegible]nn auf die anderen Aufgaben an.

Beispiel 1

Rech[illegible]rn der Umformungen:

[illegible] $=$ $(1) \to (2)$ _____

$\frac{[illegible]2xh + h^2 - x^2}{h} =$ $(2) \to (3)$ _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

(3) $\frac{2xh+h^2}{h} =$ (3) → (4) _____

(4) $\frac{h(2x+h)}{h} =$ (4) → (5) _____

(5) $2x+h$ Für h = 0 ergibt sich der Term 2x

Beispiel 2

Rechenschritte Erläutern der Umformungen:

(1) $\frac{(x+h)^2-(x+h)-(x^2-x)}{h} =$ → (2) _____

(2) $\frac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h}$ (2) → _____

(3) $\frac{2xh+h^2-h}{h} =$ (4) _____

(4) $\frac{h(2x+h}{h} =$ (4) → (5) _____

(5) 2x –

Für h = 0 ergibt sich der Term 2x –1.

Beispiel

Rechenschritte Erläutern der Umformungen:

(1) $\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} =$ (1) → (2) _____

(2) $\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{}}{}$ _____

(3) → (4) _____

$\frac{h}{x(x+h)} =$ (4) → (5) _____

(5) $\frac{-h}{h\,x(x+h)} =$ (5) → (6) _____

(6) $\frac{-1}{x(x+h)}$ sich der Term $-\frac{1}{x^2}$.

Beispiel

Rech Erläutern der Umformungen:

(1) = (1) → (2) _____

(2) $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$ (2) → (3) _____

(3) $\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$ (3) → (4) _____

(4) $\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$ (4) → (5) _____

(5) $\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$ (5) → (6) _____

(6) $\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$ Für h = 0 ergibt sich der Term $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Formen Sie mit Hilfe der Binome die folgenden Terme um.

a) $\frac{2(x+h}{}$ b) $\frac{(x+h)^3}{}$

c) $\frac{+h}{h}$ d) $\frac{\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}}{h}$

e) $\frac{\frac{}{}^2-\frac{1}{x^2}}{h}$ f) $\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

Lösungen nach Einsetzen von h = 0 in unsortierter Reihenfolge:

$3x^2$; $-\frac{1}{(x+1)^2}$; $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$; $4x$; $-\frac{2}{x^3}$; $-\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 1.6

Ergänzende Betrachtungen zu Binomen höherer Ordnung

a) Multiplizieren Sie den Term $(2x + 3)^4$, ohne Verwendung von Hilfs[illegible] Fuß aus. Wenn Sie alles richtig umgeformt haben, erhalten Sie als Ergebni[illegible] x^4 + 9[illegible] 216x + 81

b) [illegible]rech[illegible] Produkte durch Ausmultiplizieren der Klammern.

$(a + b)^0$ = __

$(a + b)^1$ = _____

$(a + b)^2$ = _____

$(a + b)^3$ =_____

$(a + b)^4$ [illegible]

[illegible]echnungen.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

c) Ergänzen Sie die Tabelle, indem Sie das für $(a + b)^0$, $(a + b)^1$ und $(a + b)^2$ begonnene Schema anhand Ihrer Ergebnisse aus b) fortsetzen.

$(a + b)^0$	=						1					
$(a + b)^1$	=					a	+	b				
$(a + b)^2$	=				a^2	+	2ab	+				
$(a + b)^3$	=			____	+	____	+	____	+			
$(a + b)^4$	=		____	+	____	+						
$(a + b)^5$	=	____	+	____	+	____		____		____	+	____

Geben Sie an, wie sich die Potenzen, gelesen von links nach rechts, verhalten.

(1) Potenzen von a: _____

(2) Potenzen von b: _____

Die Koeffizienten ergeben bis n = 5 ergeben folgendes Dreieck. Vervollständigen Sie das Dreieck, indem Sie aus den bisherigen Angaben auf die Zahlenwerte ab n = 6 schließen.

n = 0											
n = 1						1		1			
n = 2						1	2	1			
n = 3						1	3	3	1		
n = 4					1	4	6	4	1		
n = 5				1	5	10	10	5	1		
n = 6											
n = 7											

Man nennt dieses Dreieck [illegible] **[illegible]alsche Dreieck**" und die Zahlen [illegible] **Binomialkoeffi[illegible]** [illegible]ezeichnet. Die Zahlenwerte [illegible]en Dreieck können zu[illegible] Summenbildung ermittelt werden; [illegible] mit dem Tasche[illegible] nCr .

Be[illegible] Eingabe: $\binom{9}{5} = 9\,\boxed{\text{nCr}}\,5 = 126$

[illegible] Tastenbezeichnung nCr stammt von der [illegible] Bedeutung des B[illegible]fizienten [illegible]er Wahrscheinlichkeitsrechnung, vgl. [illegible]mastik.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kenntnis über die Koeffizienten und Potenzen bei den [illegible]men folgendes Produkt.

$(a + b)^{10}$ = _____

Information 1.5

Berechnet man den Ausdruck $(a + b)^n$ [illegible] erhält m[illegible] die [illegible]og. **Binom[illegible]alsche**.

Algemeine Formulierung [illegible]inomia[illegible]

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

D[illegible]sicher[illegible] $\sum$ kenn[illegible] S[illegible] wahrscheinlich[illegible]s dem Tabe[illegible]alkulationsprogramm Excel. Dieses Zeichen wird dort zum **[illegible]fsummieren** von Zelleninhalten verwendet. Entsprechend zur [illegible]deutung in Ex[illegible] wird das Summenzeichen in der Mathematik als [illegible]kürzende Schreibweise b[illegible]mmen verwendet.

[illegible] Im folgenden Beispiel [illegible]n die Kenntnisse über die Binomialreihe auf die Anfangsaufgabe $(2 + 3x)^4$ [illegible]wendet. Sie sehen, dass diese [illegible] wesentlich kürzer ist als der Weg von Teilaufgabe a). [illegible]utlichen Sie sich das Beispiel und berechnen Sie anschließend mit dieser Methode ebenfalls den Term $(2x + \frac{1}{2})^5$.

$$(2+3x)^4 = \binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}2^3 \cdot 3x + \binom{4}{2}2^2 \cdot (3x)^2 + \binom{4}{3}2 \cdot (3x)^3 + \binom{4}{4}(3x)^4$$

$$[illegible]^3 + 1 \cdot 81x^4$$

$(2x + \frac{1}{2})^5$ = _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Grundlegendes zu Gleich…

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]en [illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrational[illegible]nk[illegible]nen [illegible] höhe[illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible]funk[illegible] 127

Ka[illegible]l 9
[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]itel 10
[illegible]nential- und [illegible]rithmusfu[illegible]onen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 2: Grundlegendes zu Gleichungen

Aufgabe 2.1

Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare G[illegible]ungen

Das Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare G[illegible]hren, haben Sie bereits in der Sekundarstufe I gelernt. Hier wenden Sie nun die Ih[illegible]bereits [illegible]verfahren an. Die Aufgabe ist gleichzeitig eine Übung zur Wiederholung der B[illegible]echnu[illegible]nd der binomischen Formeln. Versuchen Sie bei der Lösung vollständig auf den E[illegible]tz d[illegible]her[illegible]ners zu verzichten. Zur Kontrolle ist die Lösungsmenge jeweils angegeben.

a) $2x = x$

b) $[illegible]+1)^2 = (x-1)^2$ {0}

c) $(x-1)^2 = x^2 - 1$ {1}

$\frac{[illegible]}{3} + 9 = 1$ {-24}

e) $\frac{3}{4}y - 2 = 1$

[illegible] $x + (x+[illegible])^2 - (x+2)^2 = 6$ {-9}

g) $2x + (9-x)^2 - 1 - (12[illegible])^2 + 2[illegible] = 0$ {6}

h) $[illegible] + 6 - \frac{x}{3} = -[illegible]$ {-3}

i) $2(4\frac{1}{2}x + 2\frac{3}{4}) = [illegible]$ {[illegible]}

j) $10x - (3[illegible]2x) = 2(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})$ {$-\frac{1}{5}$}

k) $(1,5[illegible] - (1,3[illegible]2)^2 - 38,08$ {-2}

l) $(x[illegible]\frac{1}{3})^2 - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}x$ { }

Au[illegible]be 2.2

[illegible]risierte Gleich[illegible]gen

Be[illegible]olgenden [illegible]eich[illegible]ungen sind [illegible]ben der Lösungsvariablen x weitere Variablen, sog. Parameter, enthalten. D.h., in de[illegible]meisten Fä[illegible]en besteht die Lösung nicht nur aus einer Zahl, sondern enthält auch noch den Parameter. Lösen S[illegible]e Gleichungen wie gewohnt jeweils nach x auf. Decken Sie dabei das Beispiel unten ab, und versuchen Sie die Gleichungen zunächst ohne diese Hilfe zu bearbeiten. Die Lösungen sind jeweils als Kontrollergebnis gegeben.

a) $3x + 7 = 6a$

b) $6x - 2a = 2x + 2a + 4b$ $x = a + b$

c) $3m[illegible] + 5b = 5a + xb$ $x = 5$

e) [illegible]$t = 3sx - 7rt$ $x = -\frac{t}{3}$

[illegible]g zu c) bis f):

$$3s + sx = rx + 3r$$
$$sx - rx = 3r - 3s$$
$$x(s-r) = 3(r-s)$$
$$x = \frac{3(r-s)}{(s-r)}$$
$$x = \frac{-3(s-r)}{(s-r)}$$
$$x = -3 \quad \text{mit} \quad r \neq s$$

Alle Summanden mit x auf die linke Seite bringen.

Kommt x i[illegible] mehr[illegible] Su[illegible]

[illegible]an die Klammern [illegible]nn, müssen alle [illegible]gleich sein. Das [illegible] indem man im [illegible]nner –1 aus[illegible]

M[illegible]ahren wird [illegible]wandt.

[illegible] man beim Kürzen den Zähler und Nenner [illegible]die Klammer [illegible] – r) dividiert, darf die Klammer nicht Nu[illegible] [illegible]so dürfen r [illegible]nd s nicht den gleichen Wert annehm[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 2.3

Ergänzendes Vertiefungsthema Bruchgleichungen

In dieser Aufgabe werden Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichunge[illegible] behan[illegible] arbeiten Sie sich anhand des Beispiels die prinzipielle Vorgehensweise bei diesem [illegible]typ und erläutern Sie anschließend den Lösungsweg im Beispiel auf der folgenden [illegible]ite.

Information 2.1: Beispielaufgabe zu Bruchgleichungen

	Rechnung	Bemer[illegible]en z[illegible]chnung
(1)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2x-10}$	(1) → (2) Nen[illegible] soweit wie mögl[illegible]h faktorisieren.
(2)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2(x-5)}$	(2) → (3) Wenn mögl[illegible]h, Brüche kürzen.
(3)	$\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{[illegible]}{x-5}$	(3) → (4) Alle Brüche auf den Hauptnenner bringen. HN: 5 – x
(4)	$\frac{5-2x}{5-x} - \frac{5-x}{[illegible]} = [illegible]$	(4) → (5) Gleichung mit dem HN multiplizieren. **Achtung**: Bei Minus vor Bruch → Klammer setzen
(5)	$5 - 2x - (5 - x) = [illegible] - 5$	(5) → (6) Klammern auflösen.
(6)	$[illegible] - 2x = [illegible] - 5$	(6) → (8) Gleichung nach x auflösen.
	$-x = -5$	
(8)	$x = 5$	**Achtung:** x = 5 darf als Lösung nicht in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, da sich Null im Nenner ergibt. Daher muss ein Definitionsbereich angegeben werden.

Definitionsbereich [illegible]hnung durch Nullsetzen des Nenners.

[illegible] ung überschneiden sich.

⇒ L= { } Es existier[illegible] keine Lösung!

Zusammenfassen der Schritte bei der Lösung von Bruchgleichun[illegible]

1. Die Summen in [illegible]men so weit wie möglich fakt[illegible] [illegible]egebenenfalls kürzen.
2. Den Ha[illegible] Summanden auf den Hauptnenn[illegible]
3. Die G[illegible] multiplizieren.
4. Di[illegible]chung ha[illegible]uflösen.
5. [illegible]sbereich bestimmen.
6. [illegible]ereich mit dem Ergebnis vergleichen und die Lösungsmenge ang[illegible]

Erläutern Sie jeweils die einzelnen Lösungsschritte:

(1) $\frac{8+x}{15+5x} - \frac{5}{9+3x} = \frac{4}{15}$

(2) $\frac{8+x}{5(3+x)} - \frac{5}{3(3+x)} = \frac{4}{3\cdot 5}$

(3) $\frac{3(8+x)}{15(x+3)} - \frac{5\cdot 5}{15(x+3)} = \frac{4(x+3)}{15(x+3)}$

(4) $3(8+x) - 25 = 4(3+x)$

(5) $24 + 3x - 25 = [illegible]$

(6) $[illegible] = -1[illegible]$

[illegible] = IR \ {– 3[illegible]}

IL = {–[illegible]}

[illegible] 2.1

Erm[illegible]in Sie den De[illegible]ionsbereich der Bruchgleichungen und bestätigen Sie jeweils die angegebene Lösungsmenge durch Rechnung.

a) $\frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-2}$ L= {4}

b) $\frac{4}{[illegible]}$ L= { }

[illegible] $x - 1$

$\frac{x}{4-2x} - \frac{x}{3x-6} = \frac{x}{4x-8}$ L= [illegible]

e) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x-3}{x[illegible]}$ L= {–5}

f) $\frac{2x+2}{x^2+[illegible]}$ L= { }

g) [illegible] $(x-5)(2[illegible]$ L= {7}

[illegible] $\frac{4x+6}{18x+6} + \frac{3x-6}{9x^2-1}$ L = {$\frac{2}{3}$}

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend… zu Algeb… und Fu…

selb…

Kapite…

Lineare Funktione…

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrational[illegible]nen [illegible]höheren [illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible] 127

Kapitel 9
[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]itel 10
[illegible]nential- und [illegible]ithmusfunktionen 145

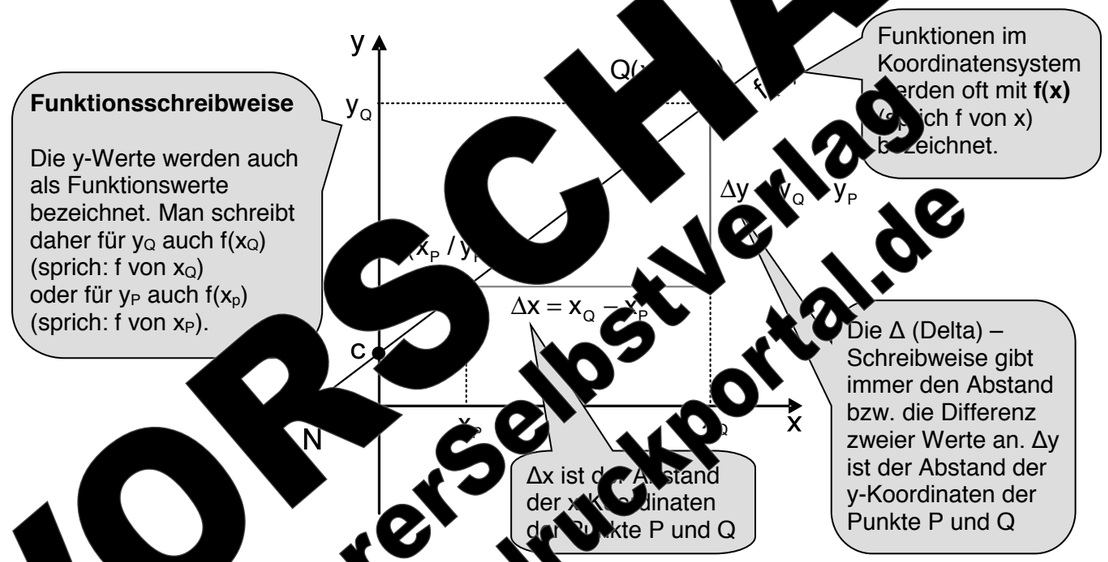
Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[illegible]-SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 3: Lineare Funktionen

Aufgabe 3.1

Verdeutlichen Sie sich die folgenden grundlegenden Informationen [illegible]n bz[illegible]aren Funktionen im Koordinatensystem.



Be[illegible]chnungen: [illegible]in Koordinaten[illegible]stem, bei dem die Achsen senkrecht zueinander verlaufen wird als **kartesisches Koordinatensystem** bezeichnet.

Die **h[illegible]ntale Achse**, hier die x-Achse, wird auch als **Abzisse** be[illegible]et.

Die **vertikale Achse**, hier die y-Achse, wird auch als **Ordinate** bezeichnet. Diese Achse kann auch mit dem Namen der abgebildeten Funktion, hier [illegible] werden.

[illegible]en, werden in der Regel mit f(x) bezeichnet. [illegible] Funktionen unterscheiden zu können, verwendet man oft a[illegible]n drückt durch diese Schreibweise aus, dass d[illegible]nktion durch Einsetzen eines Wertes für x in die Funktionsg[illegible]et wird. (Vgl. Sprechblasen oben)

Abstände: [illegible]stand Δx der x-Koordinaten der [illegible]Q: $\Delta x = x_Q - x_P$

[illegible] Δy der y-Koordinaten der Punk[illegible] $\Delta y = y_Q - y_P$

[illegible]stand d der Punkte P und Q (Pythagora[illegible] $^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

[illegible]**abschnitt c:** Die Stelle c, an der die Ger[illegible] die y-Achse sch[illegible] Koordinaten dieses Schnittpunktes s[illegible]er A(0/c)

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Steigung m:

Die Steigung einer Funktion ist durch das folgende Ve[illegible]nis den[illegible]

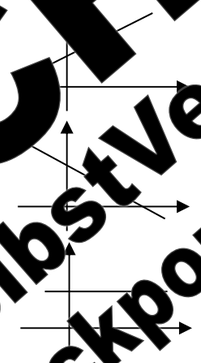
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

Verdeutlichen Sie sich anhand der A[illegible]ngen [illegible] folgenden Seite, was man unter einer steigenden und e[illegible]llenden Geraden versteht.

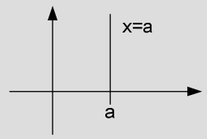
m>0: die Gerade [illegible]gt

m<0: [illegible]

[illegible]rade verlä[illegible]
[illegible]agerecht



Achtung: G[illegible]en der Form **x = a** gehen an der Stelle a durch [illegible]chse und verlaufen senkrecht. Diese Gera[illegible]nd **keine Funktionen**.



Funkti[illegible] [illegible]ist durch die **Steigung m** und den **y-**

y = mx + c oder **f(x) = mx +** [illegible]

(Oft wird anstelle von c auch ein b ve[illegible]

Nullstelle N

[illegible]se an der Stelle x_0 von einer G[illegible]nitten, so [illegible]sen Punkt als **Nullstelle** N([illegible] y-Koordinate [illegible] annimmt, können die Koordina[illegible]telle mit dem [illegible]er **f(x) = 0** berechnet werden.

Man sagt auch: „Die Funktion wird Null gesetzt“.

Um die Nullstelle zu erhalten [illegible]aus dem Ansatz [illegible]tehende Gleichung mx + c = 0 na[illegible]

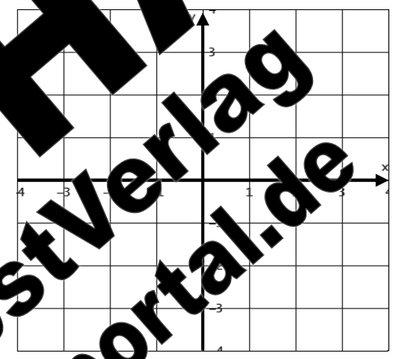
Zeichnen von Geraden:

Um eine Gerade in einem Koordinatensystem z[illegible]hnen, [illegible]itigt man keinen Taschenrechner und auch keine Wertetab[illegible]. Wie m[illegible]eine Gerade direkt aus der Kenntnis von Achsenabs[illegible] und St[illegible]nnen kann, wird im Folgenden an zwei Beispielen e[illegible]verde[illegible]n Sie sich die Vorgehensweise, und wenden Sie die M[illegible]ode[illegible]in der Übung 3.1 an.

Beispiel Zeichnen von Geraden

$f(x) = -2x + 1$

$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$



Schritt 1: M[illegible]en Sie den [illegible]abschnitt c im Koordinatensystem.
[illegible] für f(x) gilt $c_f = 1$
[illegible] g(x) gilt c_g [illegible]

Schritt 2: Stellen [illegible] den Wert für die Steigung m als Bruch dar. Ein negativ[illegible] Vorzeichen kann man dann dem Zähler oder Nenner z[illegible]nen. Bedenken Sie dabei, dass man jede Zahl als Bruch mit [illegible] Nenner 1 schreiben kann. Hier gilt:

[illegible]ür f(x) gilt:

Das Vorzeichen im Bruch gibt an, ob man sich in Richtung der Achsen in negativer oder positiver Richt[illegible]

$$m_f = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y – Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x – Richtung}}\right)$$

[illegible] $2 = \frac{-2}{-3} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y – Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x – Richtung}}\right)$

Schritt 3: Zeichnen Sie [illegible]m y-Achsenabschnitt c durch Abzählen der ent[illegible]ahl von Kästchen jeweils das Steigungsdreieck ein, [illegible]ie danach die angegebenen Geraden [illegible]

Übung 3[illegible]

a) [illegible] des Taschenrechners oder einer Wert[illegible] Funktionen

[illegible]x

[illegible]3

[illegible] auf der folgenden Seite gegebene Koo[illegible]em ein

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Zeichnen Sie die Gerade ebenfalls in diesem Koordinatensystem ein. x = –2

c) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem, die Schreibweise Δx?

_____

_____

_____

d) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem der Quotient $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$?

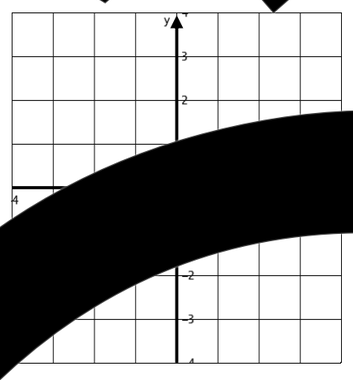
_____

Aufgabe 3.2

Lagebeziehungen zwischen Geraden

Ergänzen Sie nach Zeichnen der Geraden die Überschriften, und füllen Sie die jeweiligen Lücken im Text a

a) _____ **Geraden**



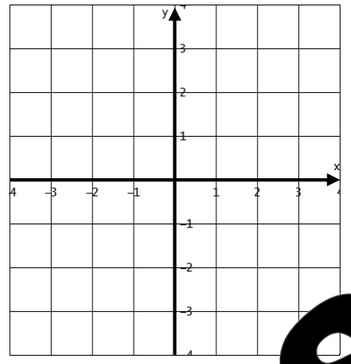
Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in das Koordinatensystem ein, und geben Sie an, wie die Geraden zueinander verlaufen.

= 0,5x +3
+1

_____

Merke: Zw nd h(x) = m_hx + c_h sind _____
für die Steigungen gilt: $m_h = m_g$

b) _____ **Geraden**



Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in das Koordinatensystem ein, und geben Sie an, wie die Geraden zueinander verlaufen.

g(x) = 3
(x) = 0

Die Geraden sind _____

_____

Wenn Sie ebenfalls die Geraden Steigungen $m_g = 3$ und $m_h = -\frac{1}{3}$, $m_g = -4$ und $m_h = \frac{1}{4}$ oder $m_g = \frac{2}{5}$ und $m_h =$ kennen Sie, dass auch diese Geraden jeweils orthogonal sind.

Merke: Zwei Geraden g(x) = m_gx + c_g und h(x) = m_hx + c_h sind
_____ (Schreibweise $g \perp h$), wenn gilt: $m_h = -\frac{1}{m_g}$

Aufgabe 3.3

Schnittpunkte von Geraden

Die beiden Gerade a) b) schneiden sich. Lesen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts

_____

Um den Schnittpunkt zu berechnen, verwendet man das Gleichsetzungsverfahren. Man kann auch mit dem Additions- bzw. Einsetzungsverfahren

Merke: Berechnung des Schnittpunkts zwischen zwei Funktionen **f(x) = g(x)**

Verdeutlichen Sie Schritte bei der Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden. Achten Sie bei Bearbeitung entsprechender Aufgaben im Heft, die Dokumentation übersichtlich. Stets den Ansatz notieren.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Berechnen des Schnittpunktes:

Schritt 1:
Notieren des Ansatzes.

$$g(x) = h(x)$$

Schritt 2:
Gleichsetzen der Funktionsterme.

$$-2x + 3 = 0{,}5x + 1$$

_____ = _____

Schritt 3:
Auflösen der Gleichung nach x.

ert: y = –2 · 0,8 + 3 = 1,4 S(0,8 / 1,4)

Schritt 4:
Berechnen des Wertes des Funktionswerts des Schnittpunkts durch Einsetzen von x in eine der beiden Funktionsgleichungen. (Man verwendet die Funktionsgleichung, bei der der Rechenaufwand geringer ist.)

Aufgabe 3.4

Nullstellen bezeichnen den Schnittpunkt einer Geraden (Funktion) mit der x-Achse betrachten. Da die x-Achse die Funktionsgleichung f(x) = 0 hat, ergibt sich für die Berechnung der Nullstellen der schon angeführte Ansatz **f(x) = 0.** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $g_1(x) = -2x + 3$ und $g_2(x) = 0{,}5\,x + 1$, und vergleichen sie zur Probe die berechneten Werte mit der Zeichnung von Aufgabe 3.2 a).

Gerade $g_1(x)$

Schritt 1: _____

Schritt

Nullstelle g_1: N_1(_____ / _____)

Gerade $g_2(x)$

Schritt 1: _____

_____

Nullstelle g_2: N_2(_____ / _____

Aufgabe 3.5

Rechnerische Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten oder Bedingungen

Beispiel 1:

Gegeben sind die Punkte P(–2 / 3) und Q(2 / 1)

Schritt 1
Die x- und y-Koordinate des gegebenen Punkts notieren, bzw. bei zwei gegebenen Punkten denjenigen mit den einfacheren Zahlen auswählen. (Es spielt das Ergebnis keine Rolle welchen Punkt man verwendet.)

$x = 2$

Schritt 2
Die Koordinaten von beiden Punkten in die Steigungsformel einsetzen und m berechnen oder den Wert von m aus in der Aufgabenstellung angegebenen Bedingung interpretieren.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{3 - 1}{-2 - 2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Schritt 3
Die allgemeine Geradengleichung y = mx + c nach dem Achsenabschnitt c = y – mx. Dabei werden die unter Schritt 1 und 2 ermittelten Werte für y, m und x eingesetzt und c berechnet.

$$c = y - mx = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 1 - (-1) = 2$$

Schritt 4
Die gesuchte Gleichung ergibt sich, wenn man m und c in die allgemeine Form y = mx + c einsetzt.

Funktion: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Übung

Gegeben sind die Punkte A(3/2) und B(2/4).

x = ___

y = ___

m = ___ = ___

c = _____

Funktion: g(x) = _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Gegeben ist die Gerade h(x) = –3x + 5. Gesucht ist die zu h parallele Gerade g(x) durch den Punkt P(2/2).

x = ___

y = ___

$m = m_h =$ ____

$c = y - mx =$ _____

Funktion: $g(x) = -3x + 8$

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **parallel** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den Ansatz: $m_h = m_g$.

c) Gegeben ist die Gerade h(x) = –[illegible] 5. Gesucht ist die zu h orthogonale Gerade g(x) durch den Punkt P(2 / 3,5).

x = ___

y = ___

m = [illegible] = _____

c = y [illegible] _____

Funktion: $g(x) = \frac{5}{4}x + 1$

Zusatzinfo:
Die zu Geraden h(x) orthogonal verlaufende Gerade g(x) wird auch als die **Normale** der Geraden h(x) bezeichnet.

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **orthogonal** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den Ansatz: $m_g = -\frac{1}{m_h}$.

d) Gesucht [illegible] rade g(x) durch den P[illegible]

[illegible] ___

$m = -\frac{\quad}{m_{w1}} =$ ___

c = y – [illegible] _____

Fu[illegible] = _____

[illegible] **halbierende** hat [illegible] leichung **f(x) =** [illegible] nd damit die Steig[illegible]

e) Gesucht ist die zur zweiten Winkelhalbierenden parallel verlaufende Gerade g(x) durch den Punkt P(–1 / –3).

x = ___

y = ___

m = _____ = _____

c = y – mx = _____

Funktion: g(x) = _____

[illegible] **Die [illegible]eite W[illegible]elhalbierende** hat [illegible]unkt[illegible]gleichung [illegible]er **y = –x** un[illegible]amit [illegible] Steig[illegible]g $m_{W2} = -1$.

Raum für Notizen

Ergänz[illegible]

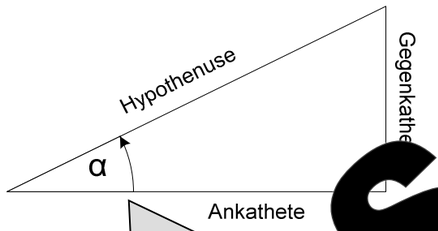
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 3.6

Winkel bei Geraden

a) Wiederholung Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Recherchieren Sie die Definition von sin, cos und tan im recht[illegible]ligen [illegible] und füllen Sie die entsprechenden Felder aus.



sin α = _____

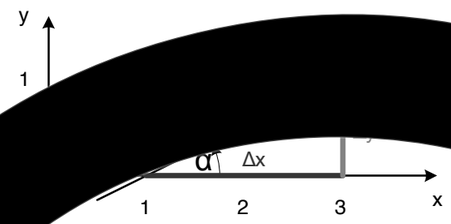
s α = _____

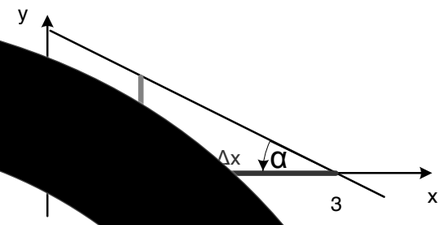
_____

Die mathema[illegible] po[illegible] Orientierung eine[illegible]inkels.
In der Mathema[illegible] eine Orie[illegible]ung. Wird er[illegible] von de[illegible]e au[illegible]gen den Uhrz[illegible]ersin[illegible] gemess[illegible] so b[illegible]chn[illegible]se [illegible]tierung auch als **mathematis[illegible] pos[illegible]**

b) Sch[illegible]el von G[illegible]aden mit der x[illegible]se

Bei den beiden abgebildeten Gerade[illegible](x) = 0,5 x – 1 und h(x) = –0,5 x + 1,5 stellt das eingezeichnete Steigungsdreieck je[illegible]eils ein rechtwinkliges Dreieck dar.





Ordnen Sie in de[illegible] Δy jeweils die Ankathete A[illegible]athete Gk zu und begründ[illegible]hung gilt, wenn m die Steigung[illegible] ist.

$$\tan(\alpha) = m$$

Bec[illegible]

Der Zahlenwert von α lässt sich dann mit dem Taschenrechner und der F[illegible]nktion t[illegible]berechnen. (Bei den meisten Taschenrechnern über der tan-Taste mit shift oder inv[illegible] finde[illegible] Taschenrechner auf „deg“ einstellen).

Aus der Beziehung oben folgt: $\alpha = \tan^{-1}(m)$

für h(x) gilt dann: $\alpha = \tan^{-1}(0{,}5) \approx 26{,}6°$ [illegible](x) g[illegible] $= \tan^{-1}(-0{,}5) \approx -26{,}6°$

Da man die Größe eines Winkels nicht als negativ [illegible]gib[illegible]nn man die [illegible]mel für die Berechnung des Schnittwinkels einer Ger[illegible]it d[illegible]chse a[illegible]ch mit B[illegible]chen versehen und den Winkel somit als positiven We[illegible]stellen.

Schnittwi[illegible] Gera[illegible]nd x-[illegible]se: α = [illegible]

Übung 3.3

Gegeben ist die G[illegible]e f([illegible] –3x [illegible]

a) Berechnen Sie [illegible]el der Geraden f[illegible] = –3x + 1 mi[illegible] x-Achse.

b) [illegible]ründen Sie anhand e[illegible] Skizze, das [illegible] Gerade, welche die x-Achse unter einem Winkel von 7[illegible] schneidet, mit d[illegible]-Achse einen [illegible]inkel von 18,5° einschließt.

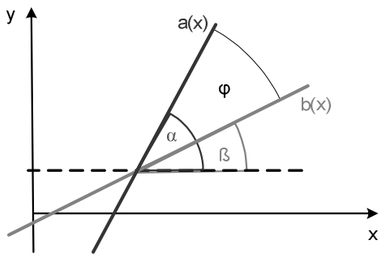
Information 3.1

Schnittwin[illegible]

Wenn [illegible] entstehen paarweise zwei Winkel, [illegible]ner kleiner als 90° und [illegible] sich zu 180° ergänzen. Als Schnittwin[illegible]llgemeinen der kl[illegible]so der Wi[illegible]leiner als 90° bezeichnet. Man kann die S[illegible] zwischen den [illegible]lfe der Steigungswinkel berechnen.

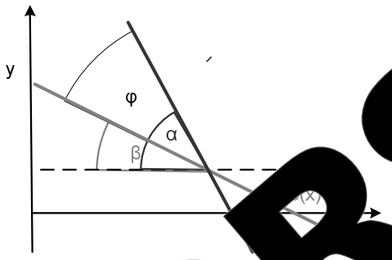
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

a) Beide Geraden steigen oder fallen:



Man berechnet jeweils den Schnittwi
und β der beiden Geraden mit der x-Ach

Der Schnittwinkel φ der beid Ge
kann dann über die Differenz α
berechnet werden.

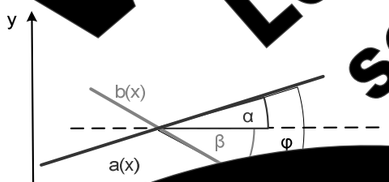


Schnittwinkel zwischen a(x) und b(x)

= α – β

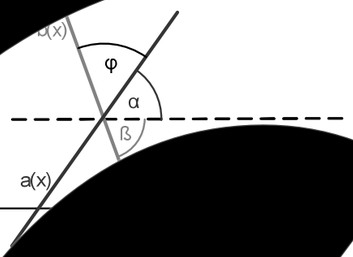
b) Eine Gera fallt, Ge steigt

Man berechnet jeweils den Schnittwinkel α und β der beiden Geraden mit der x-Achse. Der Schnittwinkel φ der Geraden kann dann über die Summe der Beträge von α und β berechnet werden.



Schnittwinkel zwischen a(x) und b(x)

φ = | α | + | β |



Schnittwinkel zwi b(x)

φ =180° – (| α

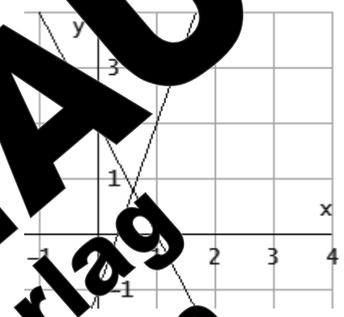
Übung 3.4

Gegeben sind die beiden Geraden

a(x) = –2x + 2 und b(x) = 3x – 1

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Geraden unt einem Winkel von 45° schneiden.

b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die y-Achs von beiden Geraden geschnitten wird.



nde Übungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

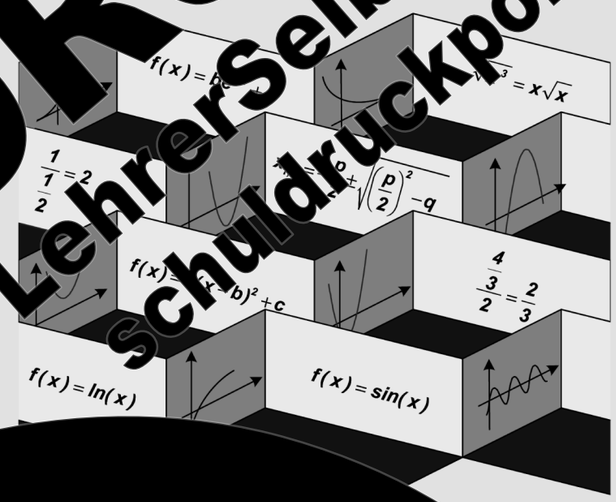
Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend… zu Algeb… und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapite…

Quadratische und biquad… …n und Ungleichu…

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrationale [illegible]nk[illegible]en [illegible] höheren [illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible]unk[illegible] 127

Ka[illegible]l 9
[illegible]metr[illegible]e Funktio[illegible] 135

[illegible]itel 10
[illegible]nential- und [illegible]ithmusfu[illegible]onen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtu[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]
[illegible]rbehalten. [illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 4: Quadratische und biquadratische Gleichungen und U[illegible]ichung[illegible]

In der Sekundarstufe I haben Sie bereits Lösungsverfahren für diese [illegible]leichung[illegible]en[illegible]elernt. Sie wissen sicherlich, dass für die Lösung quadratischer Gleichungen [illegible]rmel [illegible] abc-Formel und die quadratische Ergänzung angewandt werden kann. Dieser W[illegible] ist [illegible] nicht immer notwendig. Im Folgenden lernen Sie, wie man quadratische [illegible]leichu[illegible] [illegible]eweils einfachsten und damit für Rechenfehler am wenigsten anfälligen Verfa[illegible]ösen [illegible]

Quadratische Gleichungen können in unterschiedlic[illegible] Da[illegible]formen auftre[illegible]n.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung in **polynomialer** Darstellung **a[illegible] bx + c[illegible]0**

Der Begriff **polynomial** bedeutet, dass der Gleichungsterm aus einer Summe besteht, in der verschiedene Potenzen von x auftreten.

Allgemeine F[illegible] tischen Gleichu[illegible] **fakt**[illegible] Dars[illegible]ng **a(x[illegible] b)(x[illegible]) = 0**

Der Begriff **faktorisiert** bedeutet, dass der Gleichungsterm aus einem Produkt unterschiedlicher „Summen" besteht.

Au[illegible]e 4.1

In [illegible]en dieser [illegible]ufgabe werden **Lös[illegible]ngsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen in poly[illegible]omialer Form** [illegible]handelt. Bei einer quadratischen Gleichung können, müssen aber nicht immer, alle drei Sum[illegible]anden vorhanden sein. Der Summand bx und auch der Summand c können fehlen. Das wirkt sich a[illegible] das anzuwendende Lösungsverfahren aus. Im Folgenden werden die einzelnen Verfahren vorgestellt.

Aufgabe 4.1.1

Quad[illegible]

[illegible]gen zu den Beispielen.

[illegible].1.1

Der Summand bx fehlt und es kommt nur ein x^2 vor.

$$\mathbf{ax^2 + c = 0}$$
$$\mathbf{ax^2 = -c}$$
$$\mathbf{x^2 = -\frac{c}{a}}$$
$$\mathbf{x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

S[illegible]
Gleic[illegible]uflösen

Schritt 2:
Beim Ziehe[illegible]l darauf achten, das[illegible]sitive und eine negative[illegible]ben kann.

Ist der Ausdru[illegible] Wurzel negativ, gibt es [illegible]ung.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Begründung, warum es eine positive und eine negative Wurzel gibt.

$$x^2 = t$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{t}$$
$$\Rightarrow \quad |x| = \sqrt{t}$$
$$\Rightarrow \quad +x_1 = \sqrt{t} \vee -x_1 = \sqrt{t}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{t} \vee x_1 = -\sqrt{t}$$
$$\text{also} \quad x = \pm\sqrt{t}$$

Wenn man aus der Lösungsariablen die Wurzel zieht, muss man den Betrag beachten, da gilt: $(+x)^2 = x^2$ und $(-x)^2 = x^2$.

Wenn man die [illegible] wegl[illegible]will, m[illegible] man vor dem x b[illegible] Vorzeichen [illegible] berücksichtigen.

Bringt man [illegible] Vorzeichen [illegible] rechte Se[illegible] eine positive un[illegible] negative Lösung fü[illegible] Gleichung.

In den beiden fo[illegible] Bei[illegible]en sind die Lö[illegible] der Gleichung angegeben. Bestätigen Sie die angegebene [illegible] Rechnung.

Beispi[illegible]: [illegible] – 8 = 0

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \qquad L = \{\pm 2\}$

Beispiel 2: $3x^2 + 6 = 0$

[illegible] $L = \{\}$

[illegible]piel 3: $1 - (x-1)^2 = 2x$

$\Rightarrow \quad x_1$ [illegible] $L = \{0\}$

Aufgabe 4.1.2

Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

Lesen Sie die Information zum Lösen dieses Gleichungstyps, und [illegible] die den [illegible]gsweg auf die Aufgabenstellung von Beispiel 2 an.

Information 4.1.2

Der Summand ohne x fehlt.

Au[illegible]en Fa[illegible] durc[illegible]eilen!

[illegible] + b[illegible]

[illegible]usklam[illegible]

x(ax + b) [illegible]

[illegible] = 0 **oder** a[illegible] + b = 0

ax = –b

x_2 = [illegible]

Die zw[illegible] Lösung x_2 ergi[illegible]sich, indem man [illegible] Term in der Klammer Null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

Fallunterscheidung: Ein Produkt ist Null, [illegible] ein Faktor den W[illegible] annimmt. [illegible] ist das x vor [illegible] Nul[illegible] der A[illegible]ck in d[illegible] ist [illegible]

Die e[illegible] Lösung x_1 [illegible]r immer Nul[illegible]

Be[illegible]iel 1:

$3x^2$ [illegible]		Alles na[illegible]ks bringen. **Nicht durch x teilen!**
$3x^2 - 9x$ [illegible]	0	
$x(3x$ [illegible]	0	[illegible]sklammern und Fallunterscheidung
x_1	= 0	
$3x - 9$	= 0	
$3x$	= 9	

[illegible] Gleichung $\frac{1}{2}x^2 = 2x$

[illegible]rechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung. (Kontrollergebnis $x_1 = 0$; $x_2 = 4$)

b) Be[illegible]m man bei der Lösung der Gleich[illegible] teilen darf.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 4.1.3

Anwenden der pq-Formel bei quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx +$

Lesen Sie die Information, und arbeiten Sie anschließend die Beispiele d[illegible]änzen [illegible]abei fehlende Angaben. Auf die Anwendung der abc-Formel wird im Rahmen d[illegible]er [illegible]gen verzichtet, da es für das Lösen von quadratischen Gleichung dieser Form ausr[illegible]t, eine [illegible]el zu kennen.

Information 4.1.3

Gesamte Gleichung und damit alle Summanden durch a teilen.

Vor dem **x** steht „**nix**“

[illegible] ergibt sich aus $\frac{b}{a}$

q ergi[illegible] s[illegible] aus $\frac{c}{a}$

$a[illegible] + c = [illegible]$

$[illegible] = 0$

$x[illegible] = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 [illegible]}$

Beispiele

a) $[illegible]^2 + 6x = [illegible]$

$x^2 [illegible] x^2 [illegible] 36 [illegible]$

$x^2 + [illegible] x - [illegible] = 0$

$x_{1,2} = [illegible] \pm \sqrt{\left(\frac{\quad}{2}\right)^2 + [illegible]} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 8} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$

$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\quad}{\quad} = 3 \quad \vee \quad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\quad}{\quad} = -6$

L= {3; –6}

Anmerkung: D[illegible]

b) [illegible] ungsmenge hier leer ist.

$2x - 4 = x^2$

$-x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 - 2x + 4 = 0$

Vor dem x darf kein Minuszeichen stehen.

$x_{1,2} = ___ \pm \sqrt{___ - ___} = ___ \pm \sqrt{-[illegible]}$ L = { }

Begründung: _____

c) Bestäti[illegible] Lösung x = 3 ergibt, indem sie fehlend[illegible] ergänzen.

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1,2} = __ \pm \sqrt{_____}$

$x_{1,2} = __ \pm 0$

$x_{1,2} = __$ [illegible] }

Aufgabe 4.1.4

Lösen einer biquadratischen Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c =$

Information 4.1.4

durch a dividieren; $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

Substitution: $x^4 = z^2$
$x^2 = z$

$ax^4 [illegible] + c = 0$

$z^2 + pz [illegible] = 0$

$z_{1,2} = [illegible] - q$

p[illegible]rme für z

Zwei Lösu[illegible]en für z

Da die Lösu[illegible] Variable x [illegible]cht i[illegible] muss die Su[illegible] rück[illegible] ge[illegible]

[illegible]ksubs[illegible]ion: [illegible] = z

$z_1 [illegible] = u$

$x_{1,2} = \pm [illegible]$

$[illegible] = v$

$x^2 = v$

$x_{3,4} = [illegible]$

Es können bis zu vier Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4 entstehen.

Beispiel: $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ | durch 2 dividieren

| Substitution $x^4 = z^2$, $x^2 = z$

$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ [illegible]ormel anwenden

$\Rightarrow \quad z_1 = 1 \quad \wedge \quad z_2 = 2$ [illegible]gen für z

[illegible] = 2 | Du[illegible]titution $z = x^2$ Lösu[illegible]erechnen

[illegible] $\wedge \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ L= [illegible] $\sqrt{2}$ }

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 4.1.5

Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form

Lesen Sie die Information, und bearbeiten Sie die Beispiele.

Auf keinen Fall die Klammern ausmultiplizieren!

Wi[illegible]e Ini[illegible]
D[illegible] Kla[illegible]ern x nur mit der [illegible]enz[illegible]tritt, nennt[illegible] die [illegible]mmern auch **Lin[illegible]ren**.

$(\mathbf{x}$ [illegible] $(\mathbf{x}+\mathbf{2}) =$ [illegible]

Fallunterscheidung:
Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor den Wert Null annimmt. D.h., entweder ist der Ausdruck in der erste[illegible] oder zweiten Klamme[illegible]ull.

$\mathbf{x}$ [illegible] $\mathbf{3} - \mathbf{0}$ [illegible] $= \mathbf{0}$

$\vee$ $\mathbf{x_2} = -\mathbf{2}$

Den [illegible]hat jeder Kla[illegible]mer [illegible]eichnet voneina[illegible] Null [illegible]setzen und die [illegible]stehende Gleichung lösen. In der Regel b[illegible]ht man gar nicht zu re[illegible]nen, sondern liest die Lösungen direkt aus den **Linearfaktoren** ab.

[illegible]spiel[illegible]

Der Vorfakto[illegible] hat keinen Einfluss [illegible] Ergebnis, da man beide Seiten der Gleichung durch [illegible] dividieren kann.

a) $12($[illegible]$ - 7) = 0$

direktes Ablesen: $\Rightarrow$ $x_1 = -4$; $x_2 =$ [illegible]

b) $(3x + 6)(2x - 1) = 0$

$3x + 6$ [illegible]

[illegible] $x_2 = 0{,}5$

Achtung[illegible]

Da man den Ter[illegible] in der Form $(x - 5)\ (x - 5)$ schre[illegible]ennt man, dass die Lösung dopp[illegible]

[illegible] $(x-5)^2 = 0$

$x_{1,2} = 5$

Achtung!

Hier geht keine Fallunterscheid[illegible] der rechten Seite des Gleichhei[illegible] **keine 0** ste[illegible] Man muss die Kla[illegible] ausmul[illegible]. Zeigen Sie, das[illegible] die [illegible]leichung ist.

d) (x[illegible]

Übung 4.1

Bestätigen Sie die angegebenen Lösungen der quadratischen und [illegible]atische[illegible]ungen durch Rechnung.

a)	$5 - 3x^2 = 22$	L= { }
b)	$x^2 - 7x + 2 = 10$	[illegible]1; [illegible]
c)	$(x + 2)(x - 5) = 0$	L= {[illegible]2;5}
d)	$(x + 5)(x + 4) = 20$	L= {0; –[illegible]
e)	$4x^2 + 12x = 0$	L= {[illegible]}
f)	$9x^2 + 12x + 4 = 0$	L= {– 2/3}
g)	$3x^2 = 5x$	L= {0; 5/[illegible]
h)	$0{,}5\,x^4 - x^2$ [illegible] $= 0$	L= [illegible]
i)	$x(2x + 12) = 0$ [illegible]	[illegible]0; –6}
j)	[illegible] $3x$ [illegible] $= 0$	L= {±2}
k)	[illegible] $13x^2 +$ [illegible] $= 0$	L= {±3;±2}
l)	$x(8$[illegible]	L={0,25; –0,5}
m)	[illegible]$2x + 1)(3x + 1) = 2$[illegible]	L= {1/6; –1}
n)	[illegible]$a^2 - 3(a^2 +$ [illegible]$) =$ [illegible]$8a^2 + 9a$	L= {0}
o)	$(x + 4)^2(x - 4)^2 = 0$	L= {4; –4}
p)	$(x + 2)^2(x - 2)^2 = 9$	L= {±7; ±1}
q)	$(x + 5)^2(x -$ [illegible]	L= {}
r)	[illegible]	L= {–5/6; 1/2}
	[illegible]	[illegible]= {6; 0}
	[illegible]$+ 5)^2 - c(2c + 3) = c + 1$	[illegible]2/7; –2}
	$(1 + t)(2 + t)(3 + t) - (t - 1)(t - 2)(t - 3) = 1$	

Quadratische Gleichungen mit einem Parameter, also mit gehobe[illegible]keitsgrad.

v)	$x^2 +$ [illegible]	L= {b; [illegible]
w)	[illegible]	L= {–1/a; [illegible]
[illegible]	[illegible] $x + 1 = 0$	= {–1; –1/a[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 4.2

Erweiternde Betrachtungen: Wurzelgleichungen

Gleichung so umformen, dass alle Ausdrücke mit Wurzel auf einer Seite stehen.

$$\sqrt{2x+5} - x = 1$$
$$\sqrt{2x+5} = x+1$$
$$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = (x+1)^2$$
$$2x+5 = x^2 + 2$$
$$x^2 = 4$$
$$x_{1,2} = \pm 2$$

Bei [illegible] Seiten [illegible] Gl[illegible]ng quad[illegible]. **Bi[illegible]ch[illegible]!**

Gl[illegible]ng nach x auflösen.

Probe:

$\sqrt{2\cdot 2 + [illegible]} \Rightarrow \sqrt{9} - 2 = 1 \quad [illegible] 1 = 1 \quad \Rightarrow [illegible] = \{2\}$

$[illegible]2) + 5 - 2 = [illegible] \Rightarrow \sqrt{1} - 2 = [illegible] \Rightarrow -1 \neq 1$

Wichtig[illegible]forma[illegible]

Da [illegible]drie[illegible] eine [illegible]valenzumf[illegible]rmung ist, muss [illegible]r Gle[illegible]ungen, [illegible]enen die Lösung[illegible] durch Quad[illegible]er der Lös[illegible]variabl[illegible] gefunden wu[illegible] eine **Proba** [illegible]ch [illegible]nse[illegible]ebnisse in [illegible]e Ausgangsg[illegible]ichung, [illegible]genom[illegible] werden. [illegible]ung(en) der [illegible]leichung sind nur die [illegible]bnisse, welche z[illegible] wahren Au[illegible]sage führen.

Übung 4.2

Lösen Sie die folgenden W[illegible] [illegible]rem Heft.

a) $\sqrt{3[illegible]}$ [illegible]

b) [illegible] $[illegible] - 1 = 5$ — L = {2}

c) $[illegible] = \sqrt{3x-2}$ — L = {2;1}

d) $\sqrt{8x+9} - x = -7$ — L = {20}

f) $\sqrt{4(x+3)} = x[illegible]$ — L = {6}

g) $3x + \sqrt{4[illegible]}$ — L = {–2}

h) $\sqrt{[illegible]}$ — L = {0;8}

Aufgabe 4.3

Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen und li[illegible]are Ung[illegible]hun[illegible]

Bei quadratischen Ungleichungen führt die Anwendung der p,q-For[illegible] [illegible]ha[illegible] Fehlern bei der Bestimmung der Lösungsmenge. Daher ist es günstig, wen[illegible] man hie[illegible] [illegible]methode die so genannte **quadratische Ergänzung** verwendet (Vgl. Kapit[illegible] Aufga[illegible]). Verdeutlichen Sie sich den Lösungsweg anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Für die quadratische Ergänzung wird der Teilterm $x^2 + 6x$ als Teil eines Binoms aufge[illegible]

$$x^2 + 6x [illegible] > 0$$

Schritt 1: Am besten [illegible] man die **qua[illegible]tische Ung[illegible]hung** so um[illegible] auf der linken Seite der Teil ste[illegible]en [illegible]n zum [illegible]ergänze[illegible]nte. Hier sub[illegible]ahiert man also auf jeder Seite der G[illegible]ung

$$x^2 + 6x > -[illegible]$$

Schrit[illegible] In dies[illegible] Schritt führt man [illegible]e quadratisch[illegible] [illegible]ergänzung durch. Man erhält auf der linken Seite e[illegible] [illegible]inom, wenn [illegible]diert wird. Da[illegible] addiert man hier auf jeder Seite der [illegible]ung 9.

$$x^2 + 6x + 9 > -5 + 9$$

Sch[illegible]3: Nun fas[illegible]n die linke [illegible]te als Binom zusammen.

$$(x+3)^2 > 4$$

Schritt 4: Im nächsten Schritt zieht man auf beiden Seiten die Wurzel. Da man allerdings beachten muss[illegible] [illegible]eration, nämlich dem Quadrieren aus (x+3) und –(x+3) der [illegible] Seite der Ungleichung zunächst in Betragsstriche. [illegible]eine **lineare Ungleichung**.

[illegible]itt 5: Weglassen der Betragsstriche. Hier gilt in G[illegible] [illegible]ngleichungen gilt folgende Regel.

Me[illegible]

[illegible] von Gleichungen oder Ungl[illegible] [illegible]sstriche weg, indem man den Au[illegible] [illegible]agsstrichen in Klammern setzt und [illegible]mal ein Minus (–) vor die Klammer sch[illegible] erhält so [illegible] lineare Ungleichungen.

$$+(x+3) > 2 \qquad -(x+3) > 2$$

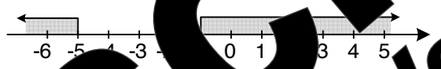
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Schritt 6: Beide Gleichungen getrennt voneinander lösen.

$$x + 3 > 2 \quad \vee \quad -x - 3 > 2$$
$$-x > 5$$

Lösung $\quad x > -1 \quad \vee \quad x < -$

Schritt 7: Darstellung der Lösungsmenge einer linearen U[illegible]ung [illegible]em Zahlen[illegible]l.



Beispiel 2:

$+ 2x - 1 > 2$

$x^2 + 2x$

$(x + 1)^2 >$

$\sqrt{(x+1)^2} > \sqrt{4}$

$|x + 1| > 2 \quad \rightarrow \quad (x + 1) > 2 \quad$ oder $\quad -(x + 1) > 2$

$x + 1 > 2 \quad$ oder $\quad -x - 1 > 2$

$-x > 3$

$x > 1 \quad$ oder $\quad x < -3$

Beim W[illegible]ziehen [illegible] de[illegible]etr[illegible]nd dam[illegible] au[illegible] po[illegible]und [illegible] neg[illegible] Lös[illegible]chte[illegible]

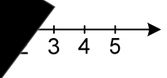
Linke Seite so umformen, dass [illegible]ium entsteht, indem auf beiden Seiten der Gleichung 2 addiert wird.

Für beide Ungl[illegible]chungen x getrennt be[illegible]chnen.

Wichtige Info!
Bei der Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl, wird das Relationszeichen umgedreht.

[illegible]:

[illegible]en Sie die Lösungsmengen von Beispiel 2 aus Aufgabe 4.3 au[illegible]rahl dar.



Erg[illegible]ungen: _____

_____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend[illegible] zu Algeb[illegible] und Fu[illegible]

selb[illegible]rganisiert erlernen

Kapite[illegible]

Ganzrationale Funktion 2[illegible]s

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade[illegible] 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrational[illegible]nen [illegible]höheren [illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible] 127

Kap[illegible]l 9
[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]itel 10
[illegible]nential- und [illegible]ithmusfunktionen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de

[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 5: Ganzrationale Funktionen 2. Grades

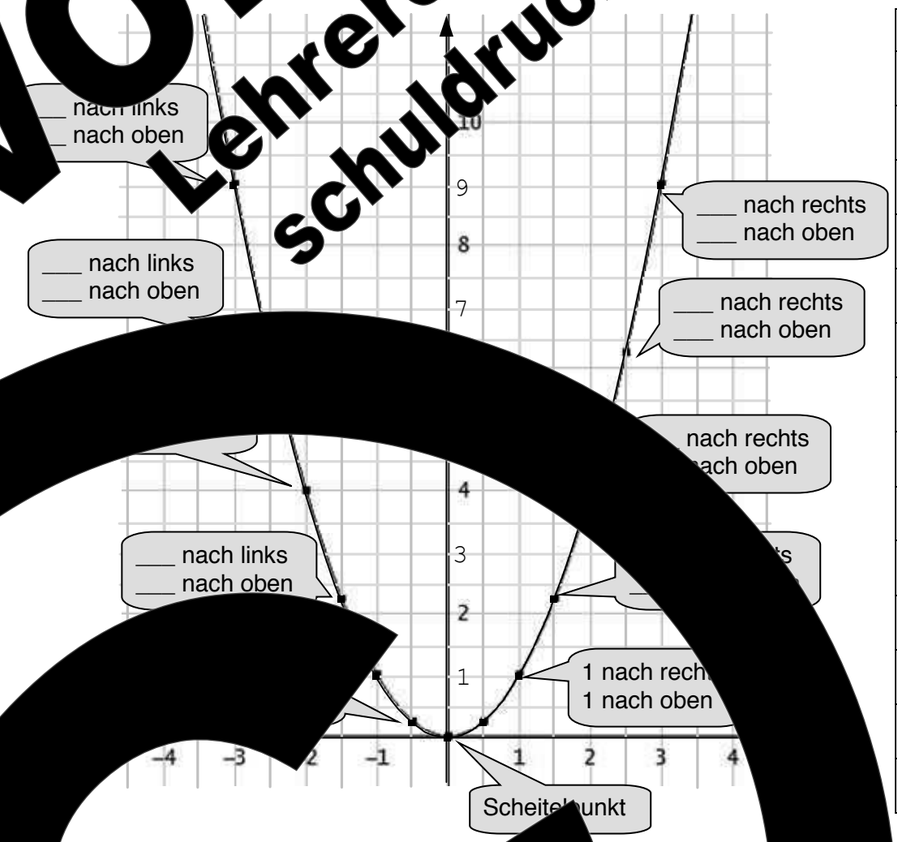
Die wesentlichen Inhalte dieses Kapitels dürften Ihnen schon aus der Sekunda[illegible]e 1 b[illegible]nnt sein. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen diese Kenntnisse wiederholt und [illegible] werde[illegible]tlich der Eigenschaften von Potenzfunktionen höheren Grades, also Funktio[illegible]nen die Potenz von x größer als 2 ist, werden hier erweiternde Zusammenhänge [illegible]klärt. A[illegible]iten[illegible]ses Kapitel daher auch dann durch, wenn Sie der Meinung sind, dass Sie üb[illegible]sreich[illegible]enntnisse zum Thema verfügen.

Aufgabe 5.1

Die Normalparabel $f(x) = x^2$

a) Die y-Werte der Normalparabel entspre[illegible]n den [illegible]dratzahlen. E[illegible]zen Sie [illegible]ertetabelle ohne Verwendung des Taschenrec[illegible]

b) Um eine Normalparabel zu [illegible]ötigt man keine [illegible]arabelschablo[illegible]äufig verlangt eine Aufgabenstellung, da[illegible]ine [illegible]germa[illegible] genaue S[illegible]e [illegible]er Norm[illegible]bel erstellt werden muss. Dazu genügt es, [illegible] ausg[illegible]om Schei[illegible]t auf jeder[illegible] der x-Achse, je nach gefordertem W[illegible]bere[illegible] zwei [illegible]rei weit[illegible]kte der Pa[illegible]in das Koordinatensystem einträgt und die [illegible]miteinander [illegible]det. Man m[illegible]ch dann, egal an welcher Stelle der Schei[illegible]unkt [illegible]arab[illegible]gt, nur [illegible] wie die P[illegible]ausgehend von Scheitelpunkt einge[illegible]erde[illegible]gänzen Sie [illegible]ie Wertetab[illegible]fehlende Werte in den Sprechblasen.



Wertetabelle	
x	y
–3	
–2,5	
–2	
–1,5	
–1	
–0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 5.2

Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem

Für das Verschieben von Funktionen gibt es, unabhängig um welchen Typ von Funktion es sich handelt, weitgehend einheitliche Regeln. Im Rahmen dieser Aufgabe werden die Zusammenhänge beim Verschieben von Funktionen zunächst nur an der Parabel erläutert. Sie werden später, bei der Behandlung von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen wieder die hier gewonnenen Erkenntnisse zurückgegriffen. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben daher, auch wenn Sie schon Vorkenntnisse haben.

Information 5.1

Sie haben im Kapitel 4 gelernt, dass man quadratische Gleichungen sowohl in polynomialer als auch in faktorisierter Form darstellen kann. Dies gilt analog auch für den Funktionsterm von Parabeln. Hier kommt allerdings noch eine dritte Variante, die sogenannte Scheitelpunktform, hinzu. In allgemeiner Form kann man die Funktionsgleichung einer Parabel demnach wie folgt darstellen:

Darstellung in polynomialer Form: $f(x) = ax^2 + px + q$

Darstellung in faktorisierter Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Darstellung in Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - b)^2 + c$

Die Parameter a, b und c beeinflussen die Form und die Lage der Parabel im Koordinatensystem. Ihre Bedeutung in den einzelnen Darstellungsformen einer Parabelgleichung ist Gegenstand der nun folgenden Aufgabe 5.2.

Aufgabe 5.2.1

a) Verschieben von Parabeln nach oben und nach unten

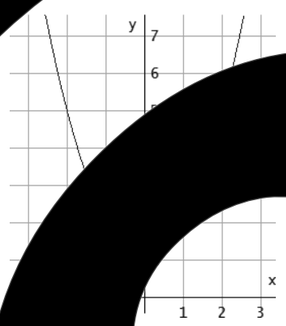
Die folgenden Normalparabeln wurden mit Hilfe eines Graphikprogrammes gezeichnet.

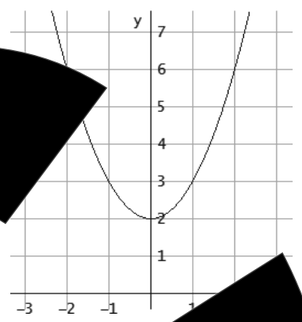
$f_1(x) = x^2 + 1$ $\qquad$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $\qquad$ $f_3(x) = x^2 - 1,5$

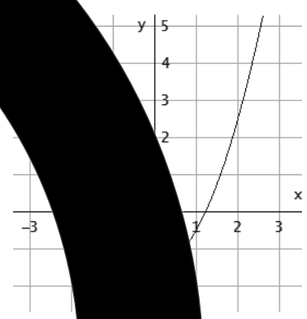
Der Summand +1 verschiebt die Parabel um 1 nach oben.

Der Summand +2 verschiebt die Parabel um 2 nach oben.

Der Summand –1,5 verschiebt die Parabel um 1,5 nach unten.







Ergänzen Sie den Satz auf der folgenden Seite:

Addiert man zum Funktionsterm der Normalparabel f(x) eine positive Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Addiert man eine negative Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Durch die Verschiebung entsteht eine neue Funktion.

Die verschobene Funktion soll mit $\tilde{f}(x)$ (sprich: f-Tilde-von-x) bezeichnet werden. Allgemein gilt:

$\tilde{f}(x) = f(x) + c$ mit **c > 0:** verschieben in **positiver** Richtung nach **oben**
c < 0: verschieben in **negativer** Richtung nach **unten**

b) Nullstellenbetrachtung verschobener Parabeln

Im Kapitel 4 haben Sie gelernt, dass Nullstellen von Graphen mit Hilfe des Ansatzes f(x) = 0 berechnet werden. Dies gilt allgemein für alle Funktionstypen, also auch für Parabeln. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich für die oben gezeichneten Funktionen folgende Nullstellen ergeben.

$f_1(x) = x^2 + 1$	$f_2(x) = x^2 + 2$	$f_3(x) = x^2 - 1,5$
$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0$	$f_3(x) = 0$
$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + 2 = 0$	$\Rightarrow x^2 - 1,5 = 0$
$\Rightarrow$ _____ = _____	$\Rightarrow$ _____ = _____	$\Rightarrow$ _____ = _____
$\Rightarrow$ _____ = $\pm\sqrt{____}$	$\Rightarrow$ _____ = $\pm\sqrt{____}$	$\Rightarrow$ _____ = $\pm\sqrt{___}$ = _____
		Nullst. $N_1(1,22/0)$, $N_2(-1,22/0)$

Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und faktorisierter Form

(1) Polynomiale Form

- $f_1(x) = x^2 + 1$

Am Summanden ohne x lässt sich die y-Koordinate bzw. hier der Schnittpunkt der Parabel ablesen. Achsenabschnitt, wie bei Geraden, durch Einsetzen von 0 in den Funktionsterm, also mit f(0), berechnet wird.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

(2) Faktorisierte Form

- $f_1(x)$. lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_2(x)$ lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_3(x) = (x + \sqrt{1,5})(x - \sqrt{1,5})$ Faktorisieren durch Anwe[illegible] der [illegible]binomischen Formel (Vgl. Kapitel 1 A[illegible]

Diese Klammer enthält die Nullstelle $x_2 = -\sqrt{1,5} \approx -1,22$

Di[illegible]mmer [illegible]nthä[illegible] Null[illegible] [illegible],22

Die Summa[illegible]n $\pm\sqrt{1,5}$ i[illegible] den Linearfaktoren entsp[illegible]hen den Nullste[illegible]n. D.h., aus der fakto[illegible]erten Form [illegible] man direk[illegible] [illegible]ellen ein[illegible] Funktion ablesen.

Zur Erinn[illegible]rung:
Der Ansatz f(x) = 0 für die Berechnung der Nullst[illegible]llen liefert die Gleichung
$(x - \sqrt{1,5})(x + \sqrt{1,5}) = 0$
[illegible]t den Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{1,5}$.
(Vgl. Kapitel [illegible], Aufgabe 4.1.5)

Aufgab[illegible]2.2

a) [illegible]en von Parabel[illegible] nach links und [illegible]chts

$f(x) = (x - 1)^2$ oder $f(x) = (x - (+1))^2$

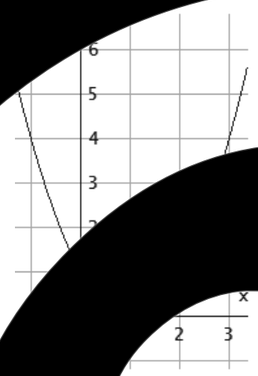
$f(x) = (x - 2)^2$ oder $f(x) = (x - (+2))^2$

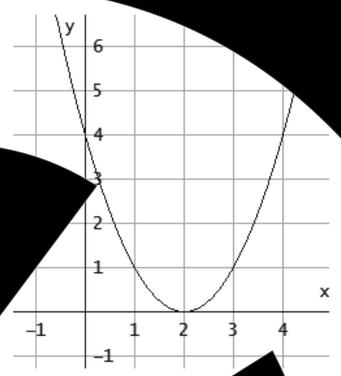
$f(x) = (x + 1,5)^2$ oder $f(x) = (x - (-1,5))^2$

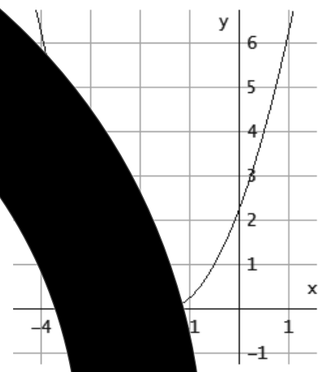
Subtrahiert man von x die Zahl +1 [illegible] Pa[illegible]

Subtrahiert man von x [illegible] Zahl +2, wird die [illegible] nach

Subtrahiert man von x die Zahl (–1,5) wird die Parabel um 1,5 nach links verschoben.







[illegible]ie den Satz auf der folgenden Seite

Subtrahiert man vom Argument* x der Normalparabel f(x) eine positive Z[illegible] so wi[illegible] Parabel nach
_____ verschoben. Subtrahiert man vom Argument x ei[illegible]ative Z[illegible] wird die Parabel nach _____ verschoben. Durch die Verschiebung [illegible]ste[illegible] neue Funktion.

Die verschobene Funktion soll wieder mit $\tilde{f}(x)$ (sprich: f-[illegible]nge [illegible]) bezeichnet werden.

Allgemein gilt:

$\tilde{f}(x) = f(x - b)$ mit
b > 0: ve[illegible]ieben in **posi**[illegible] Richtung [illegible] **rechts**
b < 0: vers[illegible]en i[illegible] **negativer** Ri[illegible]tung nach **lin**[illegible]

***Anmerkung:** der A[illegible]ck, der bei de[illegible]unktionsschr[illegible]weise f(x) i[illegible] **Klammer** steht, wird als **A**[illegible]er Fu[illegible]ezeichn[illegible]

b) Null[illegible]ch[illegible]ei den verschobenen Parabe[illegible]

Sie [illegible]n bere[illegible]elernt, dass [illegible] Verfahren zu[illegible]stellenbestimmung von Geraden auf nach oben [illegible]d [illegible]ves[illegible]bene Parab[illegible]ertragen w[illegible]den kann. Verdeutlichen Sie sich, dass die [illegible]lstel[illegible]ach link[illegible]chts verschob[illegible]nen Parabeln genauso berechnet werden und [illegible]nzen Sie fehlende A[illegible]aben.

$f_1(x) = (x–1)^2$
$f_1(x) = 0$
$\Rightarrow (x–1)^2 = 0$
$\Rightarrow$ $x_{1,2}$ [illegible] _____

$f_2(x) = (x - 2)^2$
$f_2(x) = 0$
$\Rightarrow (x - 2)^2 = 0$

$f_3(x) = (x + 1,5)^2$
$f_3(x) = 0$
$\Rightarrow$ _____ = 0
$\Rightarrow$ _____ = _____

$N_{1,2}$ (/)

Wichtige Info!

[illegible] bei der Berechnung der Nu[illegible] der Lösung [illegible]chung zweimal das gleiche Er[illegible] [illegible]pricht man [illegible]**ppelten Nullstellen.** Geometrisc[illegible]as, dass [illegible] Scheitelpunkt der Parabel auf der x-A[illegible] [illegible]amit ist [illegible] gemeinsame Punkt von der Parabel u[illegible]se kein Schnittpunkt, sondern ein **Berührpunkt**. W[illegible]äter sehen, dass dies auch für andere Funktione[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

c) Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und faktorisierter Form

(1) Polynomiale Form

- $f_1(x) = (x-1)^2 \quad =$ _____ – _____ + 1
- $f_2(x) = (x-2)^2 \quad =$ _____ – _____ + 4
- $f_3(x) = (x+1{,}5)^2 =$ _____ + _____ + 2,25

Anhand der polynomialen Darstellung kann man den Achsenschnitt der Parabel ablesen.

(2) Faktorisierte Form:

- $f_1(x) = (x-1)\,(x-1)$
- $f_2(x) = (x-2)\,(x-2)$
- $f_3(x) = (x+1{,}5)\,(x+1{,}5)$

Wenn man die Nullstellen der Funktionen mit der faktorisierten Darstellung vergleicht, erkennen Sie, dass man die Nullstellen der Parabel aus der faktorisierten Form ablesen kann.

Aufgabe 5.2

a) Gleichzeitiges Verschieben einer Parabel nach links bzw. rechts und oben bzw. unten

Sie haben in Aufgabe 5.3.1 und in Aufgabe 5.3.2 gelernt, wie man Parabel nach unten und oben sowie links und rechts verschieben kann. In dieser Aufgabe werden diese Erkenntnisse gleichzeitig verwendet, so dass die folgenden Funktionsgleichungen und die abgebildeten Funktionen entstehen. Ergänzen Sie die Sprechblasen und die Koordinaten der Scheitelpunkte.

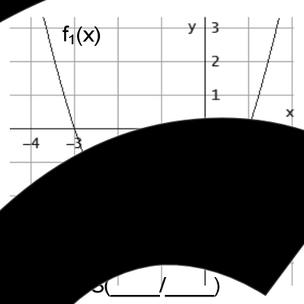
$f_1(x) = (x+1)^2 - 4$

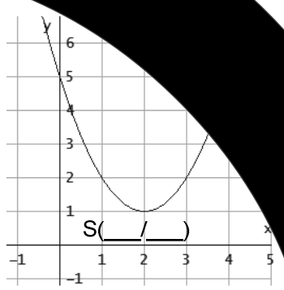
Verschiebung um _____ nach _____ und um _____ nach _____.

$f_2(x) = (x-2)^2 + 1$

Verschiebung um 2 nach _____.

Verschiebung um 1 nach _____.





Die Koordinaten der Scheitelpunkte erscheinen bereits in der Funktionsgleichung. Man nennt diese Darstellung der Funktionsgleichung einer Parabel daher **Scheitelpunktform**.

Verallgemeinerung der Zusammenhänge:

Ergänzen Sie: Für die Verschiebung in ___-Richtung gilt die Beziehung $\tilde{f}(x) = f(x - b)$, wobei der Paramter ___ angibt, wie weit die Parabel ausgehend vom Ursprung nach links oder _____ verschoben wird.
Aus der x-Koordinate des Scheitelpunkts folgt: Bei $f_1(x)$ ist b = ___, bei $f_2(x)$ ist b = ___.

Die Variable c in der Beziehung $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ legt die Verschiebung in ___-Richtung fest. Aus der y-Koordinate der Scheitelpunkte folgt: Bei $f_1(x)$ ist c = ___ und bei $f_2(x)$ ist c = ___.

Allgemein kann man daher den Graphen einer Normalparabel, die gleichzeitig in x- und y-Richtung verschoben wird in der Scheitelpunktform mit $\tilde{f}(x) = f(x - ___) + ___$ angeben.

b) Nullstellenberechnung

Bestätigen Sie durch Rechnung die Existenz bzw. Lage von Nullstellen bei den abgebildeten Parabeln.

$f_1(x) = (x+1)^2 - 4$

$f_1(x) = 0$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 - 4 = 0$

$f_2(x) = (x-2)^2 + 1$

$f_2(x) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + 1 = 0$

Nullstellen: $N_1(1 / 0)$ und $N_2(-3 / 0)$

da _____

c) Vergleich der Darstellungen

(1) $f(x) = (x-b)^2 + c$

$f_1(x) = (x+1)^2 - 4$

$f_2(x) = (x-2)^2 + 1$

Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunkts S: **S(b / c)**

VORSCHAU LehrerSelbstverlag Schuldruckportal.de

(2) Polynomiale Form $f(x) = x^2 + px + q$

- $f_1(x) = x^2 + 2x - 3$
- $f_2(x) = x^2 - 4x + 5$

Ablesen des y-Achsenabschnitts.

(2) Faktorisierte Form $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

- $f_1(x) = (x - 1)(x + 3)$

Erinne[illegible]: Die Lin[illegible]rfak[illegible]en enthalt[illegible]it x_1 = [illegible] d $x_2 = -3$ [illegible]Nullst[illegible]de[illegible]nktion.

[illegible]en Si[illegible] Ausmultiplizieren des Terms $(x - 1)(x + 3)$, dass [illegible]es Pro[illegible] der polynomialen Darstellung von $f_1(x)$ entspricht.

- $f_2(x)$ lässt [illegible]
fal[illegible]

[illegible]en besitzt, [illegible]ch nicht in Linearfa[illegible] denen man Nullstelle[illegible] könnte.

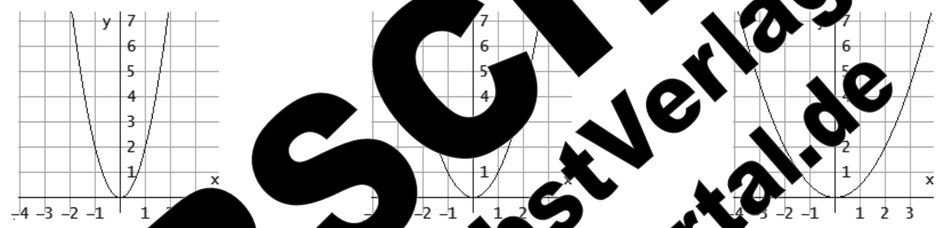
Aufgabe 5.2.4

Parabeln strecken oder stauchen

a) Zusammenhänge beim Strecken und Stauchen der Normal[illegible]

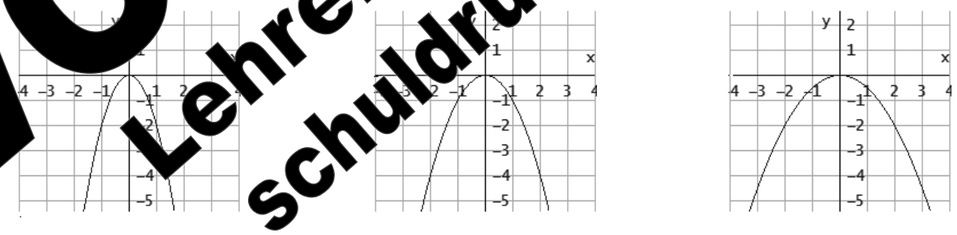
Die folgende Abbildung zeigt gestreckte und gestauchte Parabeln, die [illegible]n bzw. nach unten geöffnet sind. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenha[illegible]wische[illegible]ckungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Form der Parabel, und ergä[illegible] Sie d[illegible]lgenden Satz.

$f(x) = 2x^2$ $f(x) =$ [illegible] $f($[illegible]$0{,}5x^2$



gestreckte N[illegible]par[illegible] Normal[illegible]rabel gestauchte Normalparabel

$h(x)$ [illegible]x^2 $h(x) = -$[illegible]x^2 $h(x) = -0{,}5x^2$



gestreckte Normalparabel nach unten [illegible] Normalparabel nach unten geöffnet gestauchte Normalparabel nach unten geöffnet

[illegible]einem Parameter a, so erhält man die

[illegible] oben geöffnete Parabel

Die Parabel wird gestreckt, wenn gilt: a > ____

Die Parabel wird [illegible]cht, wenn gilt: ____ < a < ____

Nach[illegible]x-Achse gespiegelte Parabel

[illegible]hse gespiegelt und gestreckt, wenn gilt[illegible]

[illegible]rmalparabel ist an der x-Achse gespiegelt, wenn gilt :

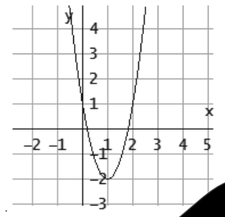
[illegible] Parabel wird an der x-Achse gespiegelt u[illegible]cht, wenn gilt: [illegible] ____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Zusammenhänge beim Strecken oder Stauchen verschobener Normalparabeln.

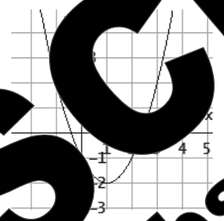
Die folgende Abbildung zeigt verschobene, gestreckte bzw. gestauchte Normalparabeln, die sich oben und unten geöffnet sind und alle den Scheitelpunkt S(1/–2) haben. Diese Parabeln werden auch als **ganzrationale Funktionen 2. Grades** bezeichnet. Verdeutlichen Sie jeweils den Zusammenhang zwischen dem Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Öffnung der Parabel, und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$f(x) = 3(x-1)^2 - 2$



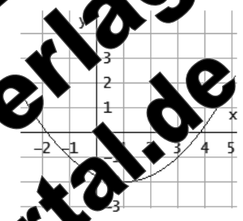
gestreckte verschobene Normalparabel

$f(x) = (x-1)^2 - 2$



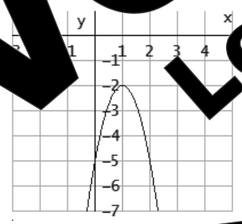
Verschobene Normalparabel

$f(x) = 0{,}25(x-1)^2 - 2$



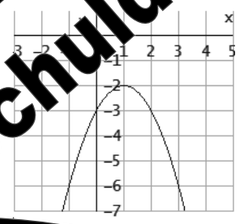
gestauchte verschobene Normalparabel

$f(x) = -3(x-1)^2 - 2$

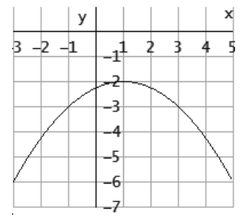


gestreckte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet bzw. Spiegelung an der Geraden y = –2

$f(x) = -(x-1)^2 - 2$



$f(x) = -0{,}25(x-1)^2 - 2$



gestauchte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet bzw. Spiegelung an der Geraden y = –2

Um die Öffnungsrichtung einer verschobenen Parabel zu ändern, b[illegible] obene Parabel zu strecken oder zu st[illegible] Scheitelpunktform der Parabel [illegible] tischen Klammer ein Faktor a [illegible] en verschobenen Parabeln die [illegible] Wirkung wie beim [illegible] Normalparabeln. Bei einem negative[illegible] ist die Parab[illegible] _____ g[illegible]. Ein Vorzeichenwechsel von a spiegelt e[illegible] an einer wa[illegible] eraden durch den _____.

Information 5.2

Überblick Darstellungsformen der Funktionsgleichung ganzrationaler F[illegible]onen [illegible]rades

[illegible]ese [illegible] Koordinaten [illegible]unkts: S(b / c)

Darstellung in Scheitelpunktform: f(x) = a(x[illegible]

a streckt, staucht und ä[illegible] die Öffnungsrichtung b[illegible] spiegelt die Parabel an [illegible] Geraden y = [illegible]

b ve[illegible]iebt die [illegible]arabel nach link[illegible] [illegible]nd recht[illegible]

[illegible] verschiebt die Parabel nach oben und un[illegible]n.

Bei verschoben[illegible]malparabeln [illegible]o bei einem [illegible]eckfaktor a = [illegible] kann man die Funktionsgl[illegible]ng [illegible]r abg[illegible]en Par[illegible]besonders einfach bestimmen. Man entnimmt den Koordinaten [illegible] Sc[illegible]unktes die Werte [illegible] c und setzt di[illegible] beiden Werte direkt in die Formel $f(x) = (x-b)^2$ [illegible].

[illegible]echne[illegible]n d[illegible]polynomia[illegible]n Form in die [illegible]cheitelpunktform

L[illegible] die Pa[illegible]lgleichung in [illegible]olynomialer Form vor, so kann man die Scheitelpunktform mit Hilfe de[illegible]en Ergänz[illegible]g ermitteln.

[illegible]ispiel 1: $f(x) = [illegible] + 6x + 2$

$f([illegible]) = x^2 + 6x + [illegible] - [illegible] + 2$

$f(x) = (x^2 + [illegible] + 9) - 9 + 2$

$f(x) = (x+3)^2 - 7$

Quadratische Ergänzung
$x^2 + 6x$ wird durch Addition von 9 zum Binom ergänzt. Damit kein Fehler entsteht, wird 9 sofort wieder subtrahiert.
Den Teilterm der faktorisiert werden soll in Klammern setzen und dann umformen.

Beispiel 2: [illegible]

[illegible]r nach unten geöffneten Parabel [illegible]ischenrechnung das [illegible]ausklammern. Sonst [illegible]eispiel 1.

$f(x) = -[(x^2 - 6x + 9) - 9 - 2]$

$f(x) = -[(x-3)^2 - 11]$

$f(x) = -(x-3)^2 + 11$

Da[illegible]m: f(x) = ax² +px +q

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktsform.

Der Su[illegible]e x gibt den y-Achse[illegible]it den Koordinaten [illegible]at die Funktion die Nulls[illegible] x_2, so enthält q das Pro[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Darstellung in faktorisierter Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktform.

und x_2 [illegible] die Nullstellen [illegible] Funk[illegible] mit den [illegible]nat[illegible] $N_1(x$ [illegible] und $N_2(x_2/0)$

Übungen

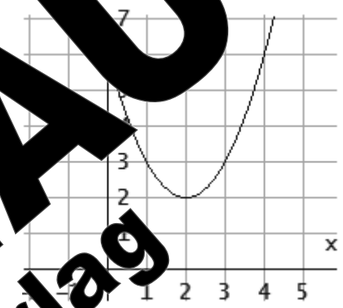
Ü5.1
Bei einer verschobenen [illegible]malparabel s[illegible] die Nullste[illegible] und die Öffnu[illegible]richtung bekannt. Ermitteln Sie jeweils die Funktions[illegible]heitelpunktform, [illegible] faktorisierte [illegible]e in polynomialer Darstellung.

a) $N_1(-2/0)$ u[illegible] $N_2(4/0)$ [illegible]ch u[illegible] geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = (x - 1)^2 - 9$)

b) N_1([illegible]) u[illegible] (2/0) [illegible]ch unten ge[illegible]et. (Kontrollergebnis: $f(x) = -(x + 2)^2 + 16$)

[illegible] $_2$(5/[illegible]) [illegible]ach unten geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = -x^2 + 10x - 25$)

Ü5.2
Gegeben ist die rechts abgebildete verschobene Normalparabel.



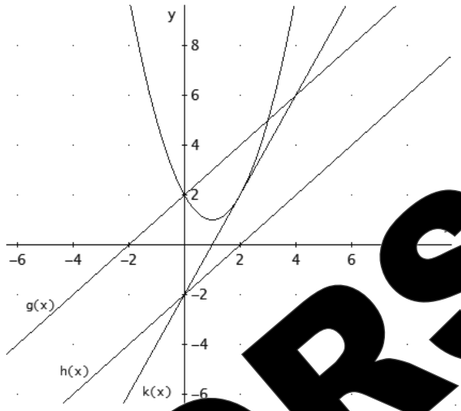
a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel in Scheitelpunktform, und zeigen Sie, dass für die polynomiale Darstellung gilt: $f(x) = x^2 - 4x + 6$

b) Begründen Sie anhand einer Rechnung und anhand des [illegible]ufs des Funktionsgraphen, dass keine faktorisierte D[illegible]ellu[illegible] Funktionsgleichung existiert.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 5.3
Lagebeziehungen von Parabel und Gerade

Gegeben sind die Parabel f(x) = (x–1)² +1 sowie die Geraden g(x) = x+2, h(x) = x–2 und k(x) = 2x–2. Lässt man die drei Funktionen per Computer zeichnen, erhält man folgende Abbildung.



Man erkennt, dass die Geraden die Parabel schneiden, während sie ohne gemeinsame Punkte zu haben nur vorbeigehen könnten.

Ermitteln Sie anhand eines geeigneten Verfahrens mit wissenschaftlichen Fachbegriffen, man die in der Abbildung dargestellten Lagebeziehungen von Parabel und Geraden bezeichnet.

g(x) ist _____ von f(x)

h(x) ist _____ von f(x)

k(x) ist _____ von f(x)

Übungen

Ü5.3
Berechnen Sie jeweils die Schnittpunkte der drei Geraden mit der Parabel.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ü5.4
Zeichen Sie zu jeder Aufgabe die Parabel und die Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem. Entscheiden Sie dann aufgrund der Zeichnung, ob die Geraden Sekanten, Tangenten oder Passanten sind. Überprüfen Sie diese Ergebnisse jeweils durch Berechnung und ggf. mit Hilfe eines geeigneten Programms zum Zeichnen von Funktionen.

a) f(x) = (x + 2)² … h(x) = x – 2 k(x) = –2x – 8

b) f(x) … 3 k(x) = 0,5x – 5

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Ü5.5
Wenn man bei der Berechnung von Schnittpunkten die pq- Formel anwende[illegible]

(3) Eine Parabel und eine Gerade haben zwei Schnittpunkte, wenn [illegible] bei der [illegible]

_____ unterschiedliche Lösungen erhält.

(4) Eine Parabel und eine Gerade haben einen Berü[illegible]punkt, [illegible] bei [illegible] pq- Formel eine

_____ unter der Wurzel auftritt und man da[illegible] _____ (dopp[illegible]Lösung erhält.

(5) Eine Parabel und eine Gerade haben [illegible]e gemeinsam[illegible]unkte, w[illegible] der Ausdruck unter der

Wurzel bei der pq- Formel _____ ist u[illegible] man son[illegible] _____ [illegible]ung erhält.

Ü5.6
Gegeben seien di[illegible]abe[illegible]) = –[illegible] + 6 u[illegible] [illegible]erade g(x) [illegible]x – 5. Bestimmen Sie die Schnittpunkte S_1 u[illegible] [illegible]bel und der Gera[illegible]n. Ermitteln Si[illegible] die Gleichungen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ der zu g(x) senkrechten [illegible]en [illegible] S_1 und S_2.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend
zu Algeb
und Fu

selb

Kapite

Gleichungen 3. un
eren Grades

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

02-033-279

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]ren [illegible]des 104

Kapitel 7
Ganzrational[illegible]nk[illegible]nen [illegible] höhe[illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible]unk[illegible] 127

Ka[illegible]l 9
[illegible]rig[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]itel 10
E[illegible]nential- und [illegible]garithmusfu[illegible]tionen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de

[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 6: Gleichungen 3. und höheren Grades

Die Lösungsverfahren für Gleichungen 3. und höheren Grades bauen auf d[illegible] Kenntn[illegible] zu[illegible]mgang mit quadratischen Gleichungen auf. Es kommen hier, bis auf das neu zu[illegible] de Ve[illegible]er Polynomdivision grundsätzlich die gleichen Lösungsverfahren zur Anwend[illegible].

Aufgabe 6.1

Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktori[illegible]r F[illegible]lieg[illegible]

$$a(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)\ldots.\,(x[illegible]) = 0$$

Lösung durch Ables[illegible]
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

Wi[illegible]e Sie bereits wissen, s[illegible]ll man die Klammer[illegible] für das Lös[illegible]n der Gleichung [illegible]icht ablesen, sonder[illegible]nn die Lösungen [illegible]weils aus [illegible] Klammern bestimmen. (Vgl. Kap[illegible]el 4, Aufgabe 4[illegible]5 und Kapitel 5, Aufgabe 5.2[illegible] und 5.2.3 c))

Beispiel:

Ermitt[illegible]n [illegible] die Lös[illegible]n der Gleichung

$(x - 7[illegible] + [illegible] + 3)^2(x^2 + 3[illegible] - 10)(x^2 + 9) = 0$

[illegible]klam[illegible]r $(x - 7)$ $\Rightarrow$ $x[illegible] = 7$ Ablesen

2. Klammer $(2x + 4)$ $\Rightarrow$ $x_2 = -2$ Berechnung $2x + 4 = 0$.

3. Klammer $(x^2 - 1)$ $\Rightarrow$ $x_3 = 1$ Anwendung der 3. binomischen Formel, also $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$, liefert 2 Lösungen.

4. K[illegible] [illegible]kommt auf Grund des Quadrates [illegible]r gibt es zwei gleiche Lösungen.

[illegible]mmer $(x^2 + 3x - 10)$ $\Rightarrow$ $x_7 = 2$, $x_8 = -5$ Der Ansa[illegible]0 führt zu einer quadratische[illegible] mit Hilfe der p,q-Formel gelöst w[illegible]

6. Klammer $(x^2$[illegible]ng Der Ansatz $x^2 + 9 = 0$ [illegible] Widerspruch, da die Gleichungen $x^2 =$[illegible]

Aufgabe 6.2

Lösen einer Gleichung, bei der man x^n ausklammern kann.

$$\mathbf{ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0}$$
$$\mathbf{x^2(ax^2 + bx + c) = 0}$$

Kleinste Po[illegible]z a[illegible]mmer[illegible]

$$\mathbf{x_{1,2} = 0}$$
$$\text{oder} \quad \mathbf{ax^2 + bx + c} = [illegible]$$

[illegible]achte[illegible]ner getrennt [illegible]

Übungen

Ü6.1
Berechnen Sie die Lösungen [illegible]fol[illegible] Gleichungen. A[illegible]ten Sie dabei insbesondere auf die Bedeutung von geraden und u[illegible]en E[illegible]onenten bei [illegible]er Lösungsvariatio[illegible] für das Ergebnis.

a) $x^2 = 25$ [illegible]169 [illegible] c) $x^2 = 6x$ d) $x^2 + 7x = 0$
e) $x^3 = 81x$ [illegible] $144x = 0$ g) $x^4 = 27x$ h) $x^4 + 64x = 0$
i) $x^5 = 81x$ [illegible] $121x = 0$ k) $x^6 = 32$[illegible] l) $x^6 + x = 0$

Lösunge[illegible]; 0; [illegible]0; 0; 0; 0; –1[illegible]; –3[illegible]; 3; –4; –5; 5; 6; [illegible]; –9; 9; { }

Ü6.2
Berechn[illegible]e di[illegible]sungen de[illegible]nden Gl[illegible]ungen. Die Lösungen sind zur Kontrolle gegeben.

a) [illegible]=0 b) $6 - t^2 = 0$ $\pm\sqrt{6}$
[illegible] $8x + 4 = 0$ [illegible]1 d) $x^2 - 5x = -6$ 3 ; 2
[illegible](x + 5)= [illegible] 2 ; –5 f) $3x^2 + 9 - 2x = 0$ { }
g) $0,[illegible]^2 - 1,2t = 0$ 0 ; [illegible] h) $(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 + 3) = 0$ 1; –1;–2
i) $4x^2 + x + 15 = 0$ [illegible] j) $x^2 - x - 30 = 0$ 6; –5
k) $2x5 - 8x^3 = 0$ 6; ±2 l) $2x^2 - 4,2x - 0,76 = 0$ –0,17; 2,27
m) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ $\frac{1}{3}$ n) $2(4v - 1)^2 = v - (2v - 1)^2$ $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$
o) $0,5 +$ [illegible] [illegible]) $3x^2 - \frac{1}{3}x^4 = 0$ 0; ± 3
[illegible]0,5x = 0 0; $\frac{5}{4}$

[illegible]chnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen. [illegible]ind zur Kontrolle gegeben.

a) $(1 - x^2)^2 = 0$ ±1 [illegible] 0; 4
c) $(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$ { } d) [illegible]x 0; 5; 1
e) $100x^3 + 80x^2$ [illegible]0; 0,1 f) x[illegible]0 ± 3; ± 2
g) $0,4z^2$ [illegible] h) $(x^2$ [illegible]3) = 0 –1; 3
i) 16[illegible] ± 0,5 j) $(2x^2 -$ [illegible] ± 3
k) [illegible] l) $0,4(1,2$ [illegible] –3
[illegible]5x 0; 4; –2 n) $8 - \frac{1}{6}x^2 -$ [illegible] 6; –8
[illegible]x – 0,8)^4 = 0 4 p) $0,5(x - 3)^2$ [illegible] ± 3
[illegible]^2 + 1,1t + t^3 = 0 0; 2,2; 0,5 r) $32x^4 - 2x^2$ [illegible] $\pm\frac{3}{4}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Information 6.1

Nicht jede Gleichung höheren Grades kann mit Hilfe der bisher erlernten Methoden [illegible] werden. Bei Gleichungen 3. und höheren Grades kann es notwendig werden, das Verfahren der **Polynomdivision** anzuwenden.

Lösen von Gleichungen 3. und höheren Grades mit Polynomdivision

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Bei einer Gleichung [illegible] kann man nicht ausklammern und [illegible]ungsformeln, die einer [illegible]-Formel ähneln, in der Praxis schwierig anzuwenden und meist nicht effizient. [illegible] Möglichkeit, alle Lösungen der hier vorliegenden Gleichung zu berechnen, bietet das Verfahren der **Polynomdivision**.

Aufgabe 6.3

Mit Hilfe der **Polynomdivision** [illegible] dem schriftlichen Dividieren, das Sie bereits in der Grundschule erlernt haben ähnelt, sollen [illegible] der in polynomialer Darstellung gegebenen Gleichung $18x^3 – 27x^2 – 17x – 2 = 0$ berechnet und aus den Lösungen die faktorisierte Form des Gleichungsterms ermittelt werden. Arbeiten Sie [illegible] Beispiel 1 aufmerksam durch und wenden Sie das Verfahren anschließend [illegible] der Übung 6.4 an.

Beispiel 1: $18x^3 – 27x^2 – 17x – 2 = 0$

Um das Verfahren der Polynomdivision anwenden zu können, benötigt man eine erste Lösung der Gleichung. Wenn diese Lösung nicht geben bzw. nicht bekannt ist, versucht man diese Lösung durch Raten zu finden. Zum Raten geeignet sind ganzzahlige Teiler des Summanden ohne x. Hier also ±1 und ±2. Diese Zahlen werden in die Funktion eingesetzt. Wenn sich dabei, wie im 1. Schritt unten beim Einsetzen von x = 2 Null ergibt, hat man die erste Lösung gefunden und kann das Verfahren mit dem 2. Schritt fortsetzen.

1. Schritt: [illegible]

$x = –1 \Rightarrow –18 – 27 + 17$ [illegible]

$x = 2 \Rightarrow 144 – 108 – 34 – 2$ [illegible] $= 2$

Erratene erste Lösung: $x_1 = 2$

Das Ergebnis des Ratevorgangs als Linearfaktor (x – 2) [illegible]. Dieser Linearfaktor [illegible] der gefundenen Lösung $x = 2$ die [illegible]

$x = 2 \mid –2$

$\Rightarrow x – 2 = 0$

2. Schritt: [illegible] Ansatz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor (x – 2) notieren.

$(18x^3 – 27x^2 – 17x – 2) : (x – 2) =$

3. Schritt: 1. Divisionsvorgang

1. Division
Nur der erste Summand $18x^3$ wird durch das x aus dem Linearfaktor (x – 2) dividiert. Der Zahlenwert, hier – 2, wird dabei nicht berücksichtigt.

1. Ergebnis: $18x^3$ [illegible] x^2

$(18x^3 – 27x^2 – 17x – 2) : (x$ [illegible] $18x^2$

4. Schritt: 1. Multiplikationsvorgang

$(18x^3 – 27x^2 – 1$ [illegible] $2) = 18x^2$

$18x^3 – 3$ [illegible]

$18x^2$ wird mit dem Linearfaktor multipliziert. $18x^2(x – 2) = 18x^3 – 36x^2$.

Das Ergebnis der Multiplikation in einer zweiten Zeile, wie dargestellt, notieren.

5. Schritt: [illegible] Subtraktionsvorgang

$(18x^3 – 27x^2 – 17x – 2) : (x – 2) = 18x^2$

$18x^3 – 36x^2$

$9x^2 – 17x$

2. Zeile von der 1. Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rr} 18x^3 & -27x^2 \\ -18x^3 & -(-36x^2) \\ \hline 0 & 9x^2 \end{array}$$

(fällt weg)

17x werden nach unten geholt.

6. Schritt: 2. Divisionsvorgang

2. Ergebnis aus $9x^2 : x = 9x$

$9x^2 – 17x$

Nur den 1. Summanden wieder nur durch das x aus dem Linearfaktor (x – 2) dividieren.

7. Schritt: [illegible]

[illegible] $2) : (x – 2) = 18x^2 + 9x$

9x [illegible] Linearfaktor multipliziert. $9x(x$ [illegible] $8x$

$18x^3 – 36x^2$

$9x^2 – 17x$

$9x^2 – 18x$

Ergebnis dieser Multiplikation in der nächsten Zeile notieren.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

8. Schritt: 2. Subtraktionsvorgang

$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x$

$18x^3 - 36x^2$

$9x^2 - 17x$

$9x^2 - 18x$

$x - 2$

Die 2 nach unten holen.

Subtraktio[illegible] um 5[illegible]

$9x^2$ [illegible] -17[illegible]

(fäl[illegible]

9. Schritt: 3. Divisionsvorgang

$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) =$ [illegible] $+ 9x +$ [illegible]

$18x^3 - 36x^2$

$9x^2 - 17x$

$9x^2 -$ [illegible]

[illegible] Ergebnis aus [illegible] $x \cdot x = x^2$

[illegible] den 1. Summanden wieder [illegible] nur durch [illegible] aus dem Linearfaktor $(x - 2)$ dividieren.

10. Schritt: [illegible]vi[illegible]tion[illegible]ang

[illegible]$3x^3 - 27$[illegible] $- 17x - 2) : (x$ [illegible] $= 18x^2 + 9x$ [illegible]

[illegible]

$9x^2 - 17x$

$9x^2 - 1$[illegible]

$x - 2$

$x - 2$

1 wird mit dem Linearfaktor multipliziert. $1 \cdot (x - 2) = x - 2$

Ergebnis dieser Multiplikation in der nächsten Zeile notieren.

11. Schritt: 3. Subtraktionsvorgang

(18x[illegible] [illegible] $9x + 1$

$9x^2 - 18x$

$x - 2$

$x - 2$

0

[illegible] letzten Zeilen muss [illegible] Ist das nicht der Fa[illegible]chen!

12. Schritt 1[illegible]

[illegible] Ergebnisterm der Division Null [illegible] [illegible]e entstandene Gleichung lösen.

[illegible]ormel liefert hier: $x_2 = -\frac{1}{3}$ und $x_3 = -\frac{1}{6}$

Faktorisierte Darstellung des Gleichungsterms:

Aus den Ergebnissen kann man nun analog wie bei den quadratischen Gleich[illegible]n eine [illegible]torisierte Darstellung der Gleichung aus der Aufgabenstellung angeben.

$$18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + \frac{1}{\ }\,)(x + \frac{1}{\ }\,) = 0$$

Information zum Rateverfah[illegible]
Beim Rateverfahren f[illegible] Poly[illegible]ivision ist es nur [illegible]nvoll, mit ganzzahligen Wert[illegible]u arbeiten. [illegible]r sollte man nu[illegible]ahlenwerte einsetzen, die gan[illegible]hlige Teil[illegible] des Summand[illegible]n ohne x sind, da dieser Summand d[illegible]rodukt[illegible]r Lösungen [illegible]thält.

Hier: 2[illegible] 3 · 2 [illegible] 1 1[illegible]

[illegible]sung

Übungen
Ü6.4
Berechnen [illegible]ie Lö[illegible]en der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 =$ [illegible] Geben Sie anschließend die Gleichu[illegible]torisi[illegible]n Darstellung an (Kontrollerge[illegible]is: $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$)

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

Beispiel 2:

Im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich dargestellten Beispiel 1.
Es tritt hier jedoch eine Besonderheit auf.

Im Gleichungsterm fehlt der Summand mit x^2.

Gleichung: $x^3 + x - 2 = 0$

1. Schritt Raten mit x =1 ⇒ 1 + 1 – 2 = 0 ⇒ **1**

Erratene erste Lösung.

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor (x – 1)

Aus der Lösung x = 1 erhält man den Linearfaktor (x – 1).

3 bis 11. Schritt liefert folgendes Ergebnis.

$(x^3 + x - 2) : (x - 1) = x^2 + x + 2$

$\underline{x^3 - x^2}$

$x^2 + x$

$\underline{x^2 - x}$

$2x - 2$

$\underline{2x - 2}$

0

Da man x und $-x^2$ nicht subtrahieren kann, schreibt man den Term $-(-x^2) = x^2$ und $x^2 + x$ in die nächste Zeile. Das nach „Untenholen" des nächsten Summanden entfällt damit, da bereits zwei Summanden vorhanden sind. Alle weiteren Schritte bei der Division wie in Beispiel 1.

Zusatzinfo zu alternativer Rechnung:
Wenn alle Potenzen von x auftreten, kann man die Rechnung mit folgendem Ansatz schreiben:

$x^3 + x^2 - x^2 - x + 2x + 2$

und dann wie im Beispiel 1.

11. Schritt $x^2 + x + 2 = 0$

$x_{1,2} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 - 2}$ ⇒ negative Wurzel ⇒ keine Lösung

Faktorisierte Form der Ausgangsgleichung:

Für die faktorisierte Form der Ausgangsgleichung gilt dann: $(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$

Der Ergebnisterm der Division wird übernommen, da dieser sich weiterhin faktorisieren lässt.

Beispiel 3:

Auch im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich dargestellten Beispiel 1. Es tritt hier jedoch wieder eine Besonderheit bei der Rechnung auf.

Gleichung: $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

1. Schritt Raten mit x = –1 ⇒ –1 + 1 –1 +1 = 0 ⇒ **–1**

Erratene erste Lösung.

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor (x + 1)

Aus der Lösung x = –1 erhält man den Linearfaktor (x + 1).

3 bis 11. Schritt liefert folgendes Ergebnis.

$(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1) = x^2 + 1$

$\underline{x^3 + x^2}$

$x + 1$

$\underline{x + 1}$

0

Bei den ersten Subtraktionen ergibt sich für beide Differenzen Null, in der nächsten Zeile gibt es keinen Summanden mehr. Man holt dann die beiden folgenden Summanden aus der ersten Zeile gleichzeitig nach unten.

12. Schritt $x^2 + 1 = 0$ führt zu einem Widerspruch. Es gibt damit keine weitere Lösung.

Für die faktorisierte Form der Ausgangsgleichung gilt dann: $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

Der Ergebnisterm der Division wird übernommen.

Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge jeweils mit Polynomdivision, indem Sie die erste Lösung raten. Die Lösungen sind in ungeordneter Reihenfolge angegeben.

a) $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$

b) $25x^3 - \ldots - 8 = 0$

c) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

d) $4x^3 - \ldots$

e) $2x^3 + 3x^2 \ldots$

f) $4x^3 - 13x \ldots$

g) $x^5 + \ldots$

h) $2x^5 - 11x^4 + \ldots - 4x + 4 = 0$

Lösungen in folgender Reihenfolge:

	-0,5; 1	*–0,5; 2;1*	*2; 0,8; 0,2*	*1*
	–1; 0,5	*1; 4; 5*	*0,5; 1,5; –2*	

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Information 6.2

Sie haben für das Lösen von quadratischen Gleichungen und Gleichungen höherer [illegible]ung [illegible]eine Reihe von Lösungsverfahren kennengelernt und es ist am Anfang oft sch[illegible] den U[illegible]er alle diese Lösungsmethoden zu behalten und souverän, ohne längeres Über[illegible]richtig[illegible] finden. Um sich die Entscheidung, welches Lösungsverfahren zu wählen ist, zu erleic[illegible]n, k[illegible] Sie das Ablaufdiagramm auf der übernächsten Seite verwenden. Es ste[illegible]zipiel[illegible]ab[illegible] im Kopf bei der Entscheidungsfindung für die Wahl des passenden Lösungsverfa[illegible] für e[illegible]gleichung dar. Wenn Sie ohne Verwendung dieses Diagramms sofort entscheiden [illegible]nen [illegible]e G[illegible]ung zu lösen ist und das gewählte Verfahren fehlerfrei beherrschen, ist es nicht [illegible]g, [illegible]re Übungs[illegible]aben zum Lösen von Gleichungen zu bearbeiten.

Übungen
Ü6.6

In dieser Übungsaufgabe sind alle b[illegible]lten Gleichung[illegible]pen vorhanden.

a) Notieren Sie mit Stichw[illegible]der zwei[illegible]lte der Tabe[illegible]unten, welche Lösungsverfahren man für die Lösung der G[illegible]ung[illegible]hlen s[illegible]nd ggf. we[illegible] Umformun[illegible]vorher notwendig sind. Sie können dabei als Hil[illegible]gramm auf der übernächsten Se[illegible]verwenden.

b) Berechnen Si[illegible] Lösu[illegible]der Gleichung[illegible] Sie jeweils d[illegible]für die Aufgabenstellung günstigste[illegible]fahr[illegible]hlen. Zur K[illegible]e sind die L[illegible]ngen jeweils angegeben.

Aufg[illegible]st[illegible]g	Lösung[illegible]rfahren	Lösung zur Kontrolle
a) [illegible] = [illegible]x²		*0; 0,75*
b) (2x + 4)(3 – x)(5 – 10x) = 0		*–2, 3; 0,5*
c) 12x⁴ – 44[illegible]		*2;–2*
[illegible] 11x		*0, 1,08; –3,41*
e) (x² + 4)(x² – 9) = 0		*[illegible]; –3*
f) 3x³ – 7[illegible]		
g) [illegible])³ = 0		

h) (0,25x + 1)² = (0,5x + 1)²		[illegible]
i) 0,5x³ + 3x² = 8		*–2; –5,46; – 1,46*

Für $a \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}^+$ sind die folg[illegible] Param[illegible]erten Gleichun[illegible]ben.

j) ax(x² + a)(x + 2a) = 0		[illegible] *–2a*
k) x⁴ – 2ax³ + a²x² [illegible]		*0, a*
l) (t + [illegible]		*0; 1/(2t) + 1/2*
m) [illegible]x(2x[illegible] 2k) = 0		*0;* $\pm\sqrt{2k}$ *;* $\pm\sqrt{\frac{k}{2}}$
n) [illegible] – (a + 1)x² + [illegible] 0		*1, –1,* $\sqrt{1/a}$ *;* $-\sqrt{1/a}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ablaufdiagramm für die Auswahl des Lösungsverfahrens bei Potenzgleichung höherer Ordnung.

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades

02-033-279

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]en [illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrational[illegible]nk[illegible]nen 3[illegible] höheren [illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible]unk[illegible] 127

Ka[illegible]l 9
[illegible]rig[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]itel 10
E[illegible]nential- und [illegible]garithmusfe[illegible]tionen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de

[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 7: Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades

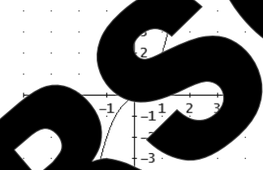
Aufgabe 7.1

Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung

In den nun folgenden Abbildungen ist jeweils der Graph ein[illegible]anzra[illegible]l[illegible]tion dargestellt. Die Funktionsgleichungen sind dabei in der polynomialen Form [illegible]nebe[illegible]mitteln Sie zu jeder Funktion zunächst durch Ablesen die Nullstellen. Berechnen S[illegible] die N[illegible]en a[illegible]schließend exakt und geben Sie den Funktionsterm danach in faktorisierter Form [illegible]. [illegible]ie anschließe[illegible]d Ihr Ergebnis selbst anhand der abgelesenen Nullstellen.

a) Nullstellenbestimmung ganzrationaler F[illegible]tionen, bei d[illegible] der größte [illegible]xponent **ungerade** ist.

(1) $f(x) = x^3 + x$



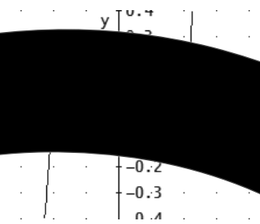
[illegible]telle a[illegible]les[illegible]n: N(/)

Funkt[illegible]sterm in fakt[illegible]isierter Form angeben:

[illegible](x) = _____

Null[illegible]rech[illegible] f(x) = 0 ⇒ x^3 + [illegible]

(2) $i(x) = x^5 - x^3$



Nullstellen ablesen:

N_1(/); N_2(/)

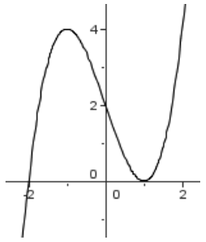
[illegible]$_3$(/)

[illegible]term in faktorisierter Form:

_____

Nullstellen berechnen: i(x) = 0 ⇒ $x^5 - x^3 = 0$

(3) $g(x) = x^3 - 3x + 2$



Nullstellen ablesen: N_1(/ $N_{2,3}$( )

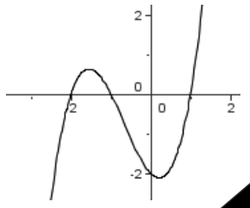
Funktionsterm in fakt Form:

g(x) =_____

Nullstellen berechnen $g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de
©

(4) $k(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$



Nullstellen abgele

N_1(/ (/ (/)

tionst aktorisierter Form:

_____

Berechnen der Nullstellen: $k(x) = 0 \Rightarrow$ ² – x = 0

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de
©

F

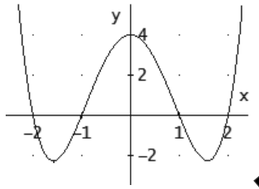
ung der Nullstellen einer Funktion 3. Grades führt zu einer G _ Grades.

nen 3. Grades haben mindestens _____ u chstens _____ Daher gibt es

eichungen 3. Grades ebenfalls minde nd höchstens _ ungen.

b) Untersuchungen bei ganzrationalen Funktionen, bei denen der größte Expone **erade**

(1) $a(x) = x^4 - 5x^2 + 4$



Nullstellen:

N_1(/) /)

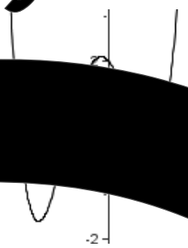
/ (/)

unkt erm in fakt rte Form:

= _____

Berechnen der Nullstellen: $a(x) = 0 \Rightarrow x^4$ $^2 + 4 = 0$

(2) $b(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$



Nullstellen:

N_1(/); N_2(/)

$N_{3,4}$(/)

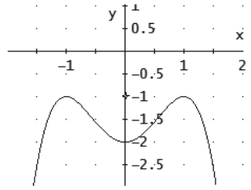
erm in faktorisierter Form:

_____

Berechnen der Nullstellen: $b(x) = 0 \Rightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

(3) $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$



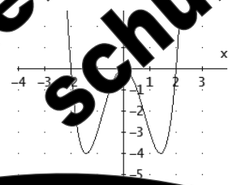
Nullstellen: _____

Funktio[illegible] in fakt[illegible] Form:

c(x) = _____

Berechnen der Nullstellen: $c(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^2 - 2 =$

(4) [illegible] $- 4x^2$



Nullstellen:

N_1(/) N_2(/)

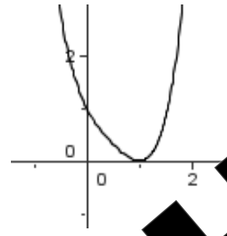
$N_{3,4}$(/)

Funktionsterm in faktorisierter Form:

[illegible] = _____

[illegible]stellen: $d(x) = 0 \Rightarrow x$

(5) $e(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$



Nullstelle[illegible] (/

F[illegible]term i[illegible]sierter Form:

e(x) = (x [illegible] + 1)

Weisen Sie hier durch Ausmultiplizieren der fakt[illegible]ten Fo[illegible] der Funktio[illegible]chung nach, dass gilt: $(x - 1)^2(x^2 + 1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 -$

Ergänzen Sie:

Die Berechnung der Nullstellen einer Funktion 4. Grades führt zu einer Gleichung ___ Grades. Da Funktionen [illegible] _____ Nullstellen haben können, gibt es bei G[illegible] _____ Lösungen.

[illegible] Sie den allgemeinen Merksatz zur Anza[illegible] Funktionen.

Zusammenfassender Merksatz:

Fu[illegible] größte Potenz von x ungerad[illegible] immer [illegible] ___ Nullstelle besitzen. Funktionen, [illegible] ie [illegible] _____ ist, müssen keine Nullst[illegible].

Allgemein hat eine Funktion n-ten Grades maximal ___ Nullstel[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 7.2

Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen Funktionen

Oft verlangen Aufgabenstellungen die Anfertigung einer Skizze für den V[illegible]iner F[illegible]azu reicht es meist aus, die Nullstellen und den y-Achsenabschnitt zu kennen. [illegible]fre[illegible]es jedoch auch, wenn man die Funktion hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften [illegible]ntersu[illegible]

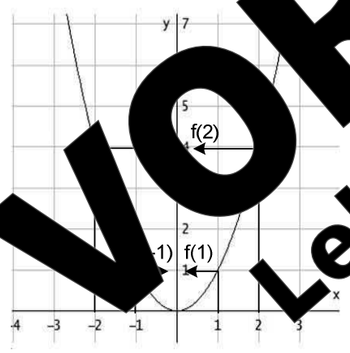
Beispielhafte Untersuchung auf Symmetrie anhand der einfachen [illegible]tione[illegible] = x² und h(x) = x³
Füllen Sie jeweils die Wertetabelle aus, und vergleichen S[illegible]ie F[illegible]wei[illegible]er Wertepaare f(x) und f(–x). Formulieren Sie jeweils einen Zusammenhang zwisc[illegible]n [illegible]paaren.

Symmetrie bei einer zur y-Achse symmetris[illegible]n Funktion

Funktion | Wer[illegible]lle | [illegible]Bezie[illegible]g zwisc[illegible]en Funktions[illegible]

Achsensymmetrie zur y-Achse

f(x) = x²



x	f(x)
[illegible]	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

f([illegible]) = _____
f(3) = _____
f(–2) = _____
f([illegible]) = _____
f(–1) = _____
f(1) = _____

Ergänzen Sie:
Bei einer zur y-Achse symmetrischen Funktion gilt für einen beliebigen Wert von x die folgende Beziehung:

f(–1) = f(1)

f(–2) = f(___)

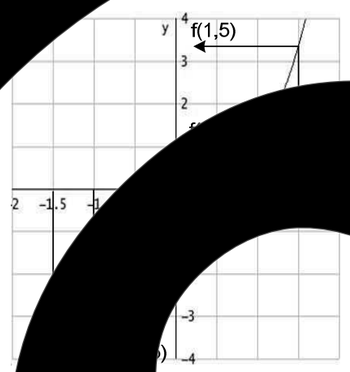
f(–3) = f(___)

f(–x) = f(___)

Symmetrie bei einer zum Ursprung symmetrischen Funktion

Funktion | [illegible] zwischen den Funktionswerten

P[illegible]



x	f(x)
-2	
[illegible]	
[illegible]	
[illegible]	
[illegible]	
1,5	
2	

f(–2) = [illegible]
f(2) = _____
f(–1,5) = _____
f(1,5) = _____
f(–1) = _____
f(1) = _____

Ergänzen Sie:
Bei einer zum y-Achse [illegible]mmetrischen Funktion [illegible]r einen beliebigen [illegible]n x die folgende [illegible]g:

[illegible] f(1)
[illegible] (___)
[illegible] ___)
[illegible] ___)

Aufgabe 7.3

Rechnerische Untersuchung auf Symmetrieverhalten bezüglich der y-Ac[illegible]bzw. [illegible] Ursprungs

Information 7.1

In jedem Tafelwerk kann man nachschlagen, dass die anhand der F[illegible]ion[illegible] = x² und f(x) = x³ verdeutlichten Beziehungen bei dem Vorliegen von Symm[illegible] für a[illegible]tionsklassen gültig sind.
Die in Aufgabe 7.2 dargestellte Form der Zusammenhänge i[illegible] die r[illegible]erische Untersuchung auf Symmetrie günstig und wird daher im Folgenden ve[illegible]det.

Achsensymmetrie zur y-Achse:	**f(x) [illegible] f(–x)**
Punktsymmetrie zum Ursprung:	**f(x) [illegible] –f(–x)**

Verdeutlichen Sie sich die Vorgeh[illegible]weise [illegible]n rec[illegible]rischen [illegible]weis von Sym[illegible]n anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Nachweis, dass die F[illegible]g(x) = x[illegible] – 3[illegible] – 2 **kein**[illegible] Symmetrieeigens[illegible]n hat.

a) Prüfen auf Achs[illegible]mit dem Ansatz g([illegible]) = g(x)

g([illegible]) = [illegible](–x)³ – 3(–x)[illegible] = –x³ + 3x + 2[illegible](x) ⇒ keine Achsensymmetrie

[illegible]rall, w[illegible] g(x) ein x [illegible]
[illegible]s x durch
ein [illegible]ersetzt.

Alle Klammern werden aufgelöst und der entstandene Ausdruck wird mit der ursprünglichen Funktion verglichen.

Keine Übereinstimmung mit g(x)
⇒keine Achsensymmetrie

b) Prüfen auf Punktsymmetrie mit dem Ansatz –g(–x) = g(x)

–g(–x)= – [–x³ + 3x + 2] = x³ – 3x – 2 ≠ g(x) ⇒ keine Punktsymmetrie

[illegible]fgelöst

[illegible]zeichen gesetzt.

urspru[illegible]
verglichen.

Keine Übereinstimmung mit g(x)
⇒keine Punktsymmetrie

Beispiel 2:

Nachweis, dass die Funktion c(x) = –x⁴ + 2x² – 2 achsensymmet[illegible] der Nachweis für Achsensymmetrie [illegible] Untersuchung auf Punktsymme[illegible] notwendig.

[illegible]x)² – 2 = –x⁴ + 2x² – 2 = c(x) [illegible]ensymmetrie

[illegible] Auflö[illegible] Klammern auf der [illegible]en Seite vom Gleichheitszeichen ergibt [illegible]n die Ausgangsfunktion. D.h. die Funktion [illegible]st achsensymmetrisch.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Beispiel 3:

Nachweis, dass die Funktion $f(x) = x^3 + x$ punktsymmetrisch ist.

a) Prüfen auf Achsensymmetrie

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \neq f(x)$ $\Rightarrow$ [illegible] Achs[illegible]metrie

Bei der Untersuchung auf Achsensymmetrie ergibt sich ein Widersp[illegible]

b) Prüfen auf Punktsymmetrie

$-f(-x) = -[-x^3 - x] = [illegible] + x = f(x)$ $\Rightarrow$ P[illegible]metrie

[illegible] der [illegible]hung a[illegible]ktsymmetrie [illegible]ibt sich nach dem A[illegible] aller [illegible] auf der r[illegible] Seite vom [illegible] Gleichheitszei[illegible] Ausgang[illegible]n.

Übung 7[illegible]

a) [illegible] Sie die ganzra[illegible]alen Funktio[illegible] aus Aufgabe 7.1, ohne Rechnung, alleine anhand des [illegible]argestell[illegible] Kurvenverlaufs [illegible] Zusammenhänge zwischen den Symmet[illegible]eigenschaften [illegible]d den auf[illegible]den Potenzen von x im Funktionsterm. Formulieren Sie entsprechende Regeln, indem Sie die [illegible]genden Sätze vervollständigen.

Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Potenzen von x _____ sind. (Ein Summand der Form $kx^0 = k$ zählt zu den geraden Potenzen von x.)

[illegible]tion ist punktsymme[illegible] alle Potenzen von x _____ sind.

[illegible]ine ganzrationale Funktion hat bezüglich der x-Achse und des U[illegible] Symmetrie-eigenschaften, wenn [illegible] und _____ [illegible]x auftreten.

b) Weisen Sie [illegible]er Funktionen aus Aufgabe 7.1 [illegible]ach.

Raum [illegible]eite.

Raum für Rechnungen:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend… zu Algeb… und Fu…

selb…

Kapite…

Die Umkehrfunktio…

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]en [illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrational[illegible]nk[illegible]nen [illegible] höhe[illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible]funk[illegible] 127

Ka[illegible]l 9
[illegible]rig[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]itel 10
E[illegible]nential- und [illegible]ithmusfu[illegible]onen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible] SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 8: Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1

Grundlegendes zu Umkehrfunktionen

In Ihrem bisherigen Mathematikunterricht haben Sie beim L[illegible] von G[illegible]ungen und bei der Berechnung von Winkeln, ohne dass hier die Begriffe Funktio[illegible] Um[illegible]funktion verwendet wurden, bereits eine wichtige Eigenschaft über Funktionen u[illegible] [illegible]rige Umkehrfunktionen kennengelernt. Arbeiten Sie alle Beispiele durch, und [illegible]en S[illegible]bei fehlend[illegible]gaben.

Beispiel 1:

Lösen Sie die beiden Gleichung[illegible]n x a[illegible]llständig[illegible] den folgenden Text:

$x^2 = 4$ $\sqrt{x-1} =$

_____ _____

_____

Um die [illegible]adratis[illegible] Gleichung zu lösen, muss man _____ und um die W[illegible]elgl[illegible]sen, muss man _____

Durch [illegible]uadrieren eines [illegible]cks der Form $\sqrt{a}$ wird die Wurzel „vernichtet“, und durch das Ziehen der Wur[illegible] aus einem A[illegible]ck a^2 fällt [illegible]Quadrat weg. Die Operationen Quadrieren und Wurzelziehen heben sich also gegenseitig au[illegible]d werden daher auch als Umkehroperationen bezeichnet.

Beispiel 2:

[illegible] der folgende Ansatz verwendet:

$\tan^{-1}$ ist die Umkehroperation zu tan.

$\tan^{-1}(\tan(\alpha)) = t$[illegible]

$\alpha = \tan^{-1}($[illegible]

Info:
$\tan^{-1}$ wird auch als **[illegible]tan** (sprich arcus-[illegible]ens) bezeichnet.

Aufgabe[illegible]

Zus[illegible]**unktion und ihrer Umkehrfunktion**

[illegible]n die Zusammenhänge von Beispiel 1 und Beispiel 2 unter fur[illegible]esichtspunkt, so [illegible]ie Begriffe Operation und Umkehroperation au[illegible]die Begriffe **Funk**[illegible]**mkehrfunktion** [illegible]. In der Tabelle auf der folgenden Seite sin[illegible]e einfache Funkt[illegible]re zugehörigen [illegible]nktionen angegeben. Verdeutlichen Sie[illegible] Beispielen die [illegible]änge, und [illegible] Sie dann in der Tabelle die fehlend[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Bei Betrachtungen zu Umkehrfunktionen muss meist ein Definitionsbereich angegeben werden. Bei der Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ sind beispielsweise keine negativen Zahlen erlaubt, da man im Zahlenbereich der reellen Zahlen IR aus einer negativen Zahl keine Quadratwurzel ziehen kann.

Funktion	Umkehrfunktion	Anwenden der Umkehrfunktion auf ihre Funktion	Definitionsbereiche
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{(x^2)} =$	IR_0^+

Erinnerung:
Der Ausdruck, welcher bei der Funktionsschreibweise in der Klammer steht, hier das x, wird als **Argument** der Funktion bezeichnet.

Für Argument x wird die Funktion eingesetzt.

f(x) wird der zugehörige Funktionsterm (hier: x^2) eingesetzt.

Für f(x) wird der zugehörige Funktionsterm (hier: $\sqrt{\ }$) eingesetzt.

$f(x) = \sqrt{x}$	$f^{-1}(x) = x^2$	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 =$	IR_0^+
$f(x) = \tan(x)$	$f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\tan x) = \tan^{-1}(\tan x) = x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = \sin(x)$	$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sin x) =$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) =$	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\quad) =$	
$f(x) = \cos(x)$	$f^{-1}(x) =$	$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\quad) =$	$x \in [0; \pi]$
f(x) =			

Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt der [illegible] nhang. Vervollständigen

[illegible]endet man die Umkehrfunktion auf ihre zugehörige Funktion [illegible] an das
_____ Formelmäßig gilt: $f^{-1}(f(x))$ [illegible]

Verdeutlichen [illegible] Beispiels, dass auch die Umkehru[illegible]atzes gilt und ergänzen S[illegible]

Bsp.: _____

W[illegible] die Funktion auf ihre zugehörige Umkehr[illegible]on an, so erhält
_____ der Umkehrfunktion. Fo[illegible]ilt: _____

Aufgabe 8.3

Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunkti[illegible]

Im Folgenden sollen nun anhand der Potenzfunktionen $f(x) = x^2$ so[illegible] x^3 und [illegible]ugehörigen Wurzelfunktionen weitere Zusammenhänge zwischen Funktion und [illegible]kehrfunktion erarbeitet und formuliert werden.

a) Füllen Sie die beiden Wertetabellen aus, und beschreiben [illegible] welche Zusammenhang zwischen den Argumenten von Funktion und Umkehrfunktion [illegible]nd [illegible]eils zugehörigen Funktionswerten besteht.

Funktion

x	$f(x) = x^2$
0	
0,5	
[illegible]	
1,5	
[illegible]	

Umkehrfunktion

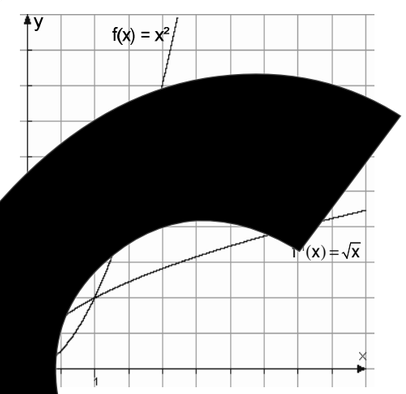
x	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
0	
0,25	
1	
2	
4	
6,25	

_____

_____

_____

[illegible] IR_0^+ die quadratische Funktion und als [illegible]funktion die Wu[illegible]hen den beiden Funktionen besteht [illegible]metriebeziehung. Beschreiben Sie [illegible]hung, und formulieren Sie dabei, [illegible]man mithilfe von rein graphischen Mitteln die [illegible] $f(x) = x^2$ ermitteln kann.



_____

_____

_____

_____

_____

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

c) Die in Aufgabenteil a) und b) erarbeiteten Zusammenhänge sollen nun auf die Funktion $f(x) = x^3$ und die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ übertragen werden. Verdeutlichen Sie sich anhand der Wertetabelle auch hier den Zusammenhang zwischen den Argumenten und den Funktionswerten, indem Sie die fehlenden Werte ergänzen.

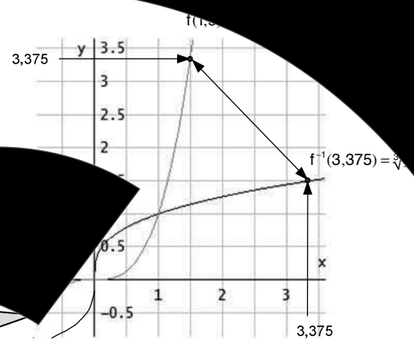
Potenzieren

Argument x der Funktion	Funktionswert der Funktion
x	$f(x) = x^3$
–2	[illegible]
–1,5	[illegible]
–1	–1
[illegible]	0
1	1
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	x
Funktionswert der Umkehrfunktion	Argument x der Umkehrfunktion

Radizieren*

*Radizieren bedeutet Wurzel ziehen

Ergänzen Sie die [illegible] und verdeutlichen Sie sich auch anhand der Graphik d[illegible]kehrfunktion, indem Sie die fehlenden Zahl[illegible]

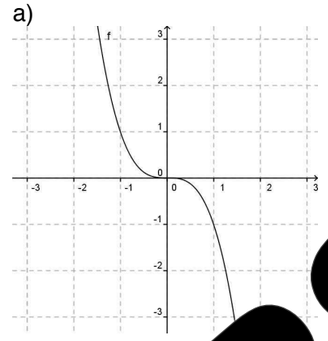


Die Umkeh[illegible] von f(x) [illegible] auch [illegible] W[illegible] gilt:

Aufgabe 8.4

Ergänzen Sie, falls möglich, in den Abbildungen jeweils die Symmetriegerade [illegible] eine Skizze der Umkehrfunktion zu den dargestellten Funktionen. Begründen Sie d[illegible] warum [illegible] erahmte Satz gültig ist.

a)



b)

Stetig hei[illegible] dass n[illegible] beim Zeich[illegible] betra[illegible]eten In[illegible] ll de[illegible] ift [illegible] absetz[illegible] muss.

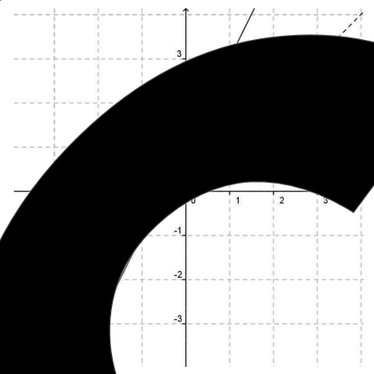
Wenn ma[illegible] den gesamten Definitionsbere[illegible] einer stetigen Funktion betrachte[illegible] dann ist eine Funktion nur umkehrbar, wenn s[illegible] in diesem Bereich streng monoton [illegible]steigt oder fällt.

Streng monoton heißt, dass die Funktion nur fällt oder steigt.

Aufgabe [illegible]

[illegible]hrfunktion am Beispiel f(x) = 2x + 1

[illegible]e die Umkehrfunktion zur Geraden f(x) [illegible]uf graphischem Weg, und [illegible]mmen Sie den Funktionsterm von $f^{-1}(x)$ durch Able[illegible]dung. Verdeutlichen Sie sich [illegible]schließend die Umformungsschritte bei der rechnerische[illegible] Umkehrfunktion.



Funktionsterm: $f^{-1}(x) =$ _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Rechenschritte

$f(x) = 2x + 1$

Schritt 1:
Ersetzen von f(x) durch y.

$y = 2x + 1$

Schritt 2:
Gleichung nach x auflösen.

$-2x = -y - 1$

$x = \frac{1}{2}y$

Zusatzinfo:
Sollte die Gleichung nicht nach x auflösen lassen, so existiert der gegebenen Funktion keine Umkehrfunktion.

Schritt 3:
Ist das Auflösen nach x gelungen, vertauscht man die Variablen x und y.

$= \frac{1}{2}x$

Schritt 4:
Man ersetzt y durch f^{-1} und erhält so die Umkehrfunktion zu f.

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$

Übungen
(Raum für Rechnungen auf den Folgeseiten)

Übung 8.1

G[illegible]nktion in ein geeignetes [illegible], und bestimmen Sie, wie im Be[illegible]rfunktion $g^{-1}(x)$ auf [illegible] und rechnerischem Weg. Begründen Sie an[illegible]ten Funktionswertes, dass [illegible] b und $g^{-1}(b) = a$.

Übung 8.2

Bestimmen Sie di[illegible]erischem Weg.
a) $f(x) = 2x +$ [illegible] $x \geq 0$ c) $f(x) = 2x^3$

Übun[illegible]

In A[illegible] ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x$ abgebildet. Anhand von graphisch[illegible]ungen hab[illegible]ts erkannt, dass keine Umkehrfunktion existi[illegible] Zeigen Sie nun au[illegible]sch, dass hi[illegible]kehrfunktion ermittelbar ist.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend… zu Algeb… und Fu…

selb… …rgan… …ert erlernen

Kapite…

Trigonometrische Fun…

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrationale [illegible]nk[illegible]nen [illegible] höhe[illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible]unk[illegible] 127

Kap[illegible]l 9
[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]itel 10
[illegible]nential- und [illegible]rithmusfu[illegible]onen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 9: Trigonometrische Funktionen

Sie haben bisher die Begriffe Sinus (sin α), Cosinus (cos α) und Tan[illegible]s (tan [illegible]in [illegible]ndung mit der Berechnung von Winkeln und Seitenlängen im rechtwinkligen D[illegible]nnen[illegible] Falls Ihnen alle Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck geläufig sind, könn[illegible]Sie [illegible]be 9.1 überspringen.

Aufgabe 9.1

Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Drei[illegible]

Definition der Winkelfunktionen

Entnehmen Sie aus der Abbildung rechts [illegible]
Fachbegriffe, und ergänzen Sie:

Die Seite, die dem rechten Wi[illegible] geg[illegible]erlie[illegible]
nennt man

_____

Die Seite, die dem [illegible]berliegt, ne[illegible]
man

_____

D[illegible]eite [illegible]den [illegible]nkel α anli[illegible]t, [illegible]nnt man

_____

a) Ordnen Sie den angegebenen Seiten anhand der Dreiecke ABC und AB'C' bezüglich des Winkels α die die Begriffe Hypothenuse, Ankathete und Gegenkathete zu

[illegible]B: _____

_____

_____

AB[illegible] _____

AC': _____

B'C': _____

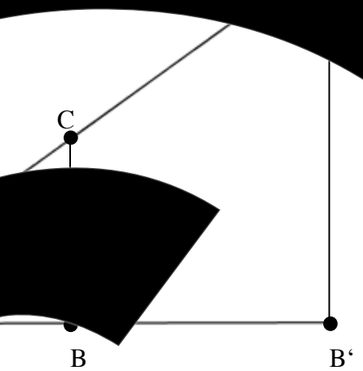


Abb. 9.1.1

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

b) Ermitteln Sie durch Messung aus der Abb. 9.1.1 den Winkel α und die angeg[illegible]en Sei[illegible]ngen so genau wie möglich.

α = _____ $\overline{AB}$ = _____ $\overline{AB'}$ = _____ $\overline{AC}$ = _____ $\overline{AC'}$ = _____ [illegible] = _____

Berechnen Sie die angegebenen Seitenverhältnisse und jew[illegible] die We[illegible], cos(α) und tan(α) auf zwei Dezimalstellen gerundet. Achten Sie dabei da[illegible] dass [illegible]schenrechner bei der Eingabe von Gradmaßen die Einstellung „deg“ haben [illegible]ss.

(1) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ = ——— = _____ $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$ = ——— = _____ sin(α) = _____

(2) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ = ——— = _____ $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ = ——— = _____ cos(α) = _____

(3) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ = ——— = _____ $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$ = ——— = _____ tan(α) = _____

Vergleichen Sie die E[illegible] aus d[illegible]nung [illegible]ängenverhältn[illegible]se in (1), (2) und (3) mit den entsprechende[illegible]rten [illegible] sin, cos und tan. W[illegible]en Sie fe[illegible]

Sie [illegible]her erk[illegible]t, dass die b[illegible]neten Länge[illegible]hältnisse in (1), (2) und (3) mit den Werten von [illegible](α), cos[illegible] und tan(α) [illegible]stimme[illegible]ndert sich der Winkel α so verändern sich auch diese [illegible]ngen[illegible]nisse un[illegible] die Werte [illegible]n(α) bzw. cos(α) und tan(α). Diese Abhängigkeit [illegible]r La[illegible]nverhältnisse vom [illegible]kel α interpre[illegible]t man als funktionalen Zusammenhang und [illegible] **sin(α), cos(α)** [illegible] **tan(α)** als **W[illegible]elfunktionen**.

Dem Verhältnis von **Gegenkathete** zu **Hypothenuse** ordnet man den **Sinus** des Winkels α zu.

Dem Verhältnis von **Ankathete** zu **Hypothenuse** ordnet man den **Cosinus** des [illegible]ls α zu.

Dem Verhältnis von **Gegenkathete** zu **Ankathete** ordnet man den **Tangens** des Winkels α zu.

sin[illegible]

[illegible] α)

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha)}{\text{Ankathete (von } \alpha)}$$

[illegible]tion 9.1:

[illegible]e folgenden, häufig verwendeten Zusammenhänge zwischen sin, c[illegible] [illegible]nen Sie in jedem Tafelwerk nachschlagen. Z[illegible]ligkeit der Betrachtungen werden [illegible]nfalls angegeben.

tan([illegible]

[illegible]**metrischer Pythagoras**

sin²(x) + cos²(x) = 1

sin[illegible] cos(x)
cos([illegible] – sin²(x)

[illegible](x + $\frac{\pi}{2}$)

[illegible]cos(x – $\frac{\pi}{2}$)

sin(–x[illegible]
cos(–x[illegible]
tan(–x[illegible]

Aufgabe 9.2

Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß

Bei der Anwendung von Sinus, Cosinus und Tangens in Wissensch[illegible]nik erfolgt die Winkelangabe meist nicht mithilfe des Gradmaßes, sondern [illegible]ber das [illegible] Was man unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht, soll anhand der folgend[illegible]fgab[illegible]rt werden.

Verdeutlichen Sie sich anhand der im Folgenden ab[illegible]ide[illegible]seg[illegible]ente, wie die Bogenlänge, die hier mit s bezeichnet wird, vom Winkel φ und dem Ra[illegible]bhäng[illegible]nd ergänz[illegible] den nachfolgenden Text.

Es gilt:

Je grö[illegible] der Wi[illegible] desto _____ der Bogen.

Je größe[illegible] Ra[illegible], desto _____ der Bogen.

[illegible]n w[illegible]en bereits, dass [illegible] beim Vollk[illegible]s den Umfang bzw. die Bogenlänge s mit der Formel **s = 2πr** [illegible]n kann. A[illegible]sgen[illegible]d vom V[illegible]s kann man auf die Bogenlänge bei einem Kreissegment schl[illegible]en. Ergänzen [illegible]in der folg[illegible]n Tabelle fehlende Berechnungen für die Bogenlänge zu den gegebenen Winkeln, sowie das V[illegible]tnis Bogenlänge s zu Radius r.

Winkel im Kreissegment	360°	270°	180°	90°	1°	30°	60°	45°
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\frac{\pi r}{180}$			
[illegible]ns $\frac{s}{r}$ [illegible]ogenmaß)	2π	$\frac{3\pi}{2}$						

Jeder Angabe im Winkelmaß mit Gradangabe kann man eine Ang[illegible]maß zuordnen, die den Wert π enthält. Di[illegible]hen Bogenmaß und Winkelm[illegible]r die Beziehungen:

Winke[illegible]ß umrechnen: $\alpha = \frac{x \cdot \pi}{180}$

[illegible]n Bogenmaß ins Gradmaß umrechnen: $\alpha = x \cdot 180$

[illegible]e im Bogenmaß
T[illegible]er: **rad**

Win[illegible]m Gradmaß
Tasc[illegible]: **deg**

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 9.3

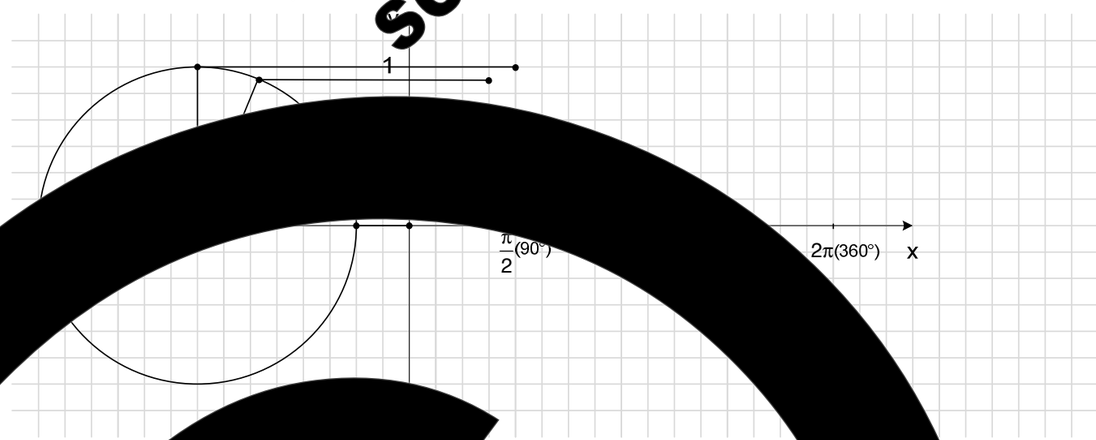
Die Sinusfunktion

In Naturwissenschaft, Technik und anderen Anwendungsgebieten, in den [illegible] weise Schwingungen und Wellen auftreten, ist der funktionale Charakter des Sin[illegible] die [illegible]ge für die formelmäßige Beschreibung der Zusammenhänge. Die Funktion[illegible] dies[illegible]usfunktion f(x) = sin x erhält man mit dem Taschenrechner, indem man für x entw[illegible]der im [illegible]- od[illegible]ogenmaß den Wert eines Winkel eingibt. Ergänzen Sie die folgende Tabelle, [illegible] Funktionswerte mit dem Taschenrechner erzeugen . Achten Sie dabei auf die Einste[illegible]deg“ [illegible]rad“.

x	0°	30° oder $\frac{\pi}{6}$	45° oder $\frac{\pi}{4}$	60° oder $\frac{\pi}{3}$	90° oder $\frac{\pi}{2}$
f(x) = sin(x)		[illegible]	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	[illegible]

[illegible]ierte [illegible] treten in [illegible]ellungen häufig a[illegible] [illegible] wenn ma[illegible] das [illegible]gt.

Den Fu[illegible]ons[illegible]hen [illegible] Sinusfunktion [illegible]nn man [illegible]ilfe des Einheitskreises (Kreis mit Radius 1) auf graphisc[illegible]n We[illegible]ohne W[illegible]le erzeu[illegible]deutlichen Sie sich, wie die Koordinaten der [illegible]te re[illegible] von der y-Achse erzeugt werden, [illegible]agen Sie, entsprechend zu diesen Punkten, alle we[illegible]te für den Vollk[illegible]ein. Verbinden [illegible] anschließend alle Punkte zu einem Graphen.



Der hier [illegible] **usfunktion f(x) = sin(x)** bezeichnet.

Aufgabe 9.4

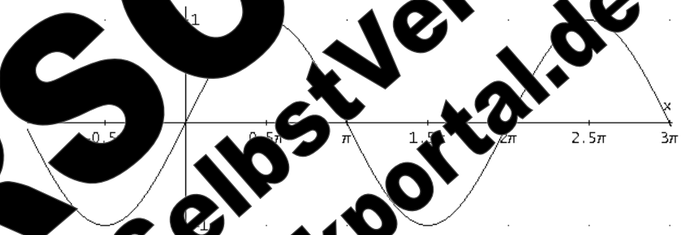
Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion

In den wenigsten Anwendungen tritt die Sinusfunktion in der Form f[illegible] s[illegible]uf. Wie bei den Parabeln kann die Sinusfunktion verschoben, gestaucht oder gestrec[illegible]sein. D[illegible] Sie im Kapitel 5 Aufgabe 5.2 gelernt haben, können weitgehend auf die Sin[illegible]ktion [illegible]agen werden.

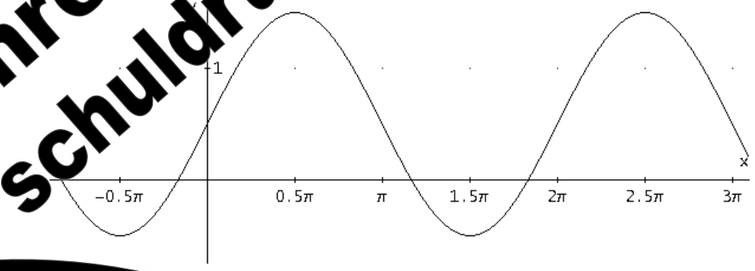
a) In den Abbildungen unten sind die Funktion f(x) [illegible] d[illegible]ner [illegible](x) bis f[illegible]) dargestellt. Untersuchen Sie mithilfe der Abbildungen welche [illegible]g die [illegible]blen a, b, [illegible]d auf die Ausgangsfunktion $f_0(x) = \sin(x)$ haben. N[illegible] Sie d[illegible]irkung jeweils in [illegible]hw[illegible]ten.

Ausgangsfunktion:

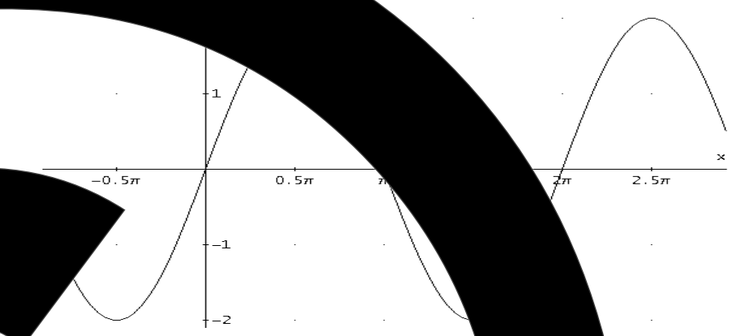
$f_0(x) = \sin(x)$



[illegible]) = [illegible]

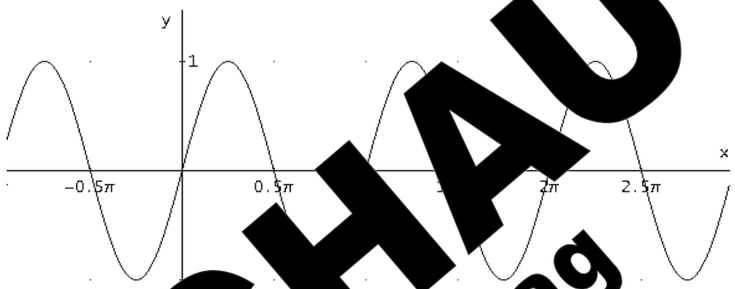


[illegible]n(x)



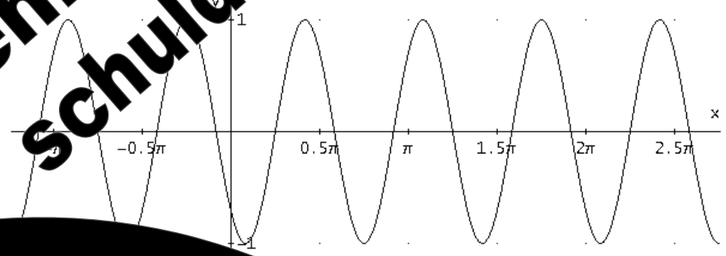
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

$f_3(x) = \sin(2x)$



$f_4(x) = \sin(x - 0{,}25\pi)$

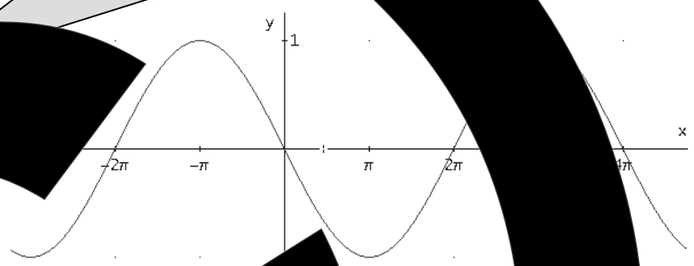
$f_5(x) = \sin(3(x - 0{,}25\pi))$



Um Verschiebungen und Stauchungen des Funktionsg der Funktionsgleichung erkennen muss man den Faktor vor dem x aus

$f_6(x) = \sin(0{,}5x - \pi)$

$f_6(x) = \sin(0{,}5$



b) Die allgemeine Form der Sinusfunktion kann wie folgt dargestellt werde rmulie Sie, welche prinzipielle Wirkung die Parameter a, b, c und d bei der Sinusfunktion ha indem die Texte in den Sprechblasen ergänzen. Zur Vereinfachung werden für die P ameter d h ur positive reelle Zahlen betrachtet.

f(x) = **a** sin(**d**(x – **b**) + **c**.

a ∈ **IR⁺** streckt und staucht die Funktion in ___-Richtung.
a > 1 →**strecken**
0 < a < 1 →**stauchen**

Die Streckung bzw.

Stauchung hat _____ Einfluss auf die Lage der Nullstellen.

d ∈ **IR⁺** streckt und staucht die Funktion in ___-Richtung.
d > 1 →**stauchen**
0 < d < 1 →**strecken**

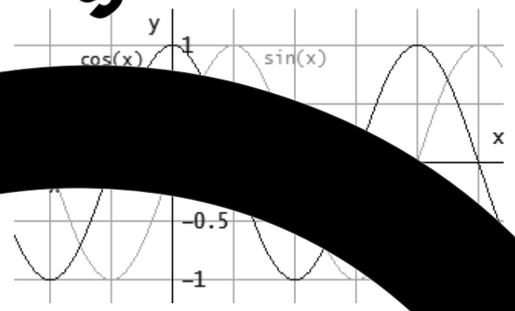
Ergänzung: Ein negativer Wert für d spiegelt die Funktion an der y-Achse.

Wie bei Parabeln, verschiebt **c** ∈ **IR** die Funktion in ___-Richtung.

Wie bei Parabeln, verschiebt **b** ∈ **IR** die Funktion in ___-Richtung.

Information 9.2

Alle Betrachtungen zum Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion f(x) = sin(x) können auf die Cosinusfunktion f(x) = cos(x) übertragen werden. In der folgenden Abbildung wird deutlich, dass die Cosinusfunktion $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (vgl. Information 9.1) durch Verschiebung mit $b = -\frac{\pi}{2}$ nach links aus der Sinusfunktion hervorgeht.



Information 9.3

Die Begriffe elegte Funktionsnamen und könn wendung der Umkehrfunktion Argument getrennt werden. Treten fe innerhalb von Brüchen elne Buchstaben bzw. Variablen nicht k

falsches Kürzen: $\frac{\sin(x)}{n} \neq \sin x$ oder $\frac{\cos(\pi t)}{t} \neq \cos(\pi)$

ht's t

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 9.5

Bestimmen der **Periodizität p** einer gestreckten bzw. gestauchten Sinusfu[illegible]tion bzw[illegible]er Cosinusfunktion.

Zur Information:
Funktionen, die in gleichen Abständen auf der [illegible]ch[illegible]e Funktionswerte haben, nennt man peri[illegible]he Fu[illegible]en mit der Periode p. Formelmäßig drückt man das [illegible]olgt [illegible] f(x+p) = f(x)

Wie Sie in Aufgabe 9.4 erkannt haben, beeinfluss[illegible]reck[illegible] Stauchfaktor d[illegible]er Funktionsgleichung f(x) = **a**sin(**d**(x – **b**) + **c**) die [illegible]odizität eine[illegible]usfunktion. [illegible]eutlichen Sie sich anhand der Funktionen aus Aufgabe 9.4 und d[illegible]olgenden [illegible]bel[illegible], dass ma[illegible] die Periodizität p einer Sinusfunktion wie folgt berechnen kann. Ergänz[illegible]ie jew[illegible]den Faktor [illegible]

[illegible]izität: $p = \frac{2\pi}{d}$

Funktion	[illegible]odizit[illegible] der [illegible]ldung bestimmen	[illegible]aktor d	Peri[illegible]izität p berechnen
$f_0(x) = \sin(x)$	[illegible] = 2[illegible]	1	[illegible]icht notwendig
$f_3(x) = \sin(2[illegible])$	[illegible] π	[illegible]	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$
$f_6(x) = [illegible](0,[illegible])$	p = 4π	___	$p = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$
[illegible] sin([illegible]x – 0,25π))	Kan[illegible] man nicht ge[illegible]u [illegible]ablesen	___	$p = \frac{2\pi}{3} \approx 0,67\pi$

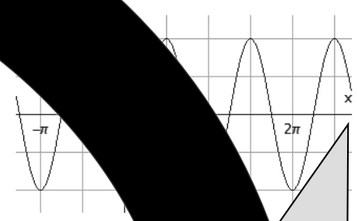
Aufgabe 9.6

Lösen von trigonometrischen Gleichungen

Da das Lösen v[illegible] mit der Berechnung von Nullstellen bei Funktione[illegible]ungen anhand von Beispielen zu dieser Aufg[illegible]

[illegible]urch Rechnung gezeigt werden, dass die Funktion [illegible] = sin(2(x – $\frac{1}{4}$ π)) (s. Abbildung rechts) an den Stellen

$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2}$ mit n∈ [illegible]



[illegible]ass bei trigono[illegible]etrischen [illegible]ktionen beachten, dass es unendlich [illegible]le Nullstellen geben kann, die [illegible]eriodisch auftreten.

Info:
Es ist in [illegible]ünstig, bei trigon[illegible]n Funktione[illegible]rung der x-Ach[illegible]hen von π anz[illegible]

Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung

f(x) [illegible]

sin(2([illegible]1[illegible]π))

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren. (arcsin oder $\sin^{-1}$)

[illegible](x – [illegible] arcsin0

2[illegible] $\frac{1}{2}$ π = 0

2x[illegible]

[illegible] $\frac{\pi}{4}$

Schritt 3:
Gleichung nach [illegible]ösen.

[illegible]chtung!
Aufgrund der Periodizität gibt es [illegible]ere Lösungen.

S[illegible]4:
Per[illegible]ität berechnen

Periodizit[illegible] $= \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$x_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

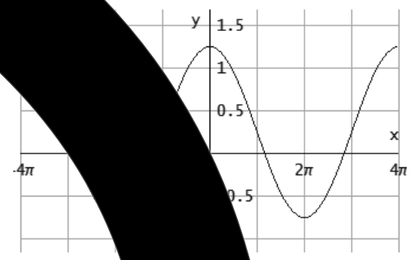
oder allgemein

$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2}$ mit n∈ IN

[illegible]chrit[illegible]
[illegible]itere Lösungen berechnen.
[illegible] die Funktion nic[illegible]y-Richtung [illegible]hoben ist, haben alle Nullst[illegible] bei einer Periode von π einen Ab[illegible]nd von $\frac{\pi}{2}$.

[illegible]el 2:

Man kann der Abbildung rechts näherungsweise entnehmen, dass die dargestellte Cosinusfunktion für $x_{1,2} = \pm 1,2\pi$ und $x_{3,4} = \pm 2,8\pi$ Null[illegible] der Nullstellen dieser in x-Richtung [illegible]erschobenen Cosinus[illegible]



f(x[illegible]

[illegible]ervall [-4π ;4π] rechnerisch bestätigt werden.

[illegible]chen Sie sich den Lösungsweg auf der folg[illegible]eite.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung; alle Summanden ohne x nach rechts bringen.

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren.

Schritt 3:
Gleichung na[illegible]uflösen

Schri[illegible]
P[illegible]rec[illegible]

$f(x)$
$\cos(0[illegible],25 =$
$\cos(0,5x) = -0,$
$0,5x = \arccos(-0,2[illegible])$
$= 1,82$
$x_1 \approx 3,6[illegible] = 1,2\pi$

Periodi[illegible] $p = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{[illegible]5} = [illegible]\pi$

Weitere Nullstellen im Intervall $[-4\pi ; 4\pi]$

$x_2 \approx -1,2\pi$
$x_3 \approx -1,2\pi + 4\pi \approx 2,8\pi \approx 8,8$
$x_4 \approx 1,2\pi - 4\pi \approx -2,8\pi \approx -8,8$

Schri[illegible]
[illegible]iter [illegible]sungen berechn[illegible] die Funktio[illegible] [illegible]g verschoben [illegible]aben hier [illegible] drei a[illegible]nderfolgen[illegible] Nullstellen nic[illegible] den gleichen Abstand (vgl. Abb. Bsp. 2). Aus dem Funktionsterm erkennt man, das[illegible] Cosinusfunktion nicht in x-Richtung verschoben ist. Damit liegt, aus Symmetriegründen, zu $x_1 = 1,2\pi$ eine zweite Nullstelle bei [illegible] $-1,2\pi$. Die weiteren Null[illegible] Grund de[illegible] Null[illegible]

Ac[illegible]ung:
[illegible]ufgrund der [illegible]iodizität gibt es [illegible]weitere Lös[illegible]en.

[illegible]nformation 9.4

Wie Sie sicher erka[illegible]ometrischen Gleichungen de[illegible] die Umkehrfunktion[illegible] weitere Lösungen müssen ggf. [illegible]überlegungen erfolgen, die [illegible]mmetrieeigenschaften, Streckung, [illegible]und Verschieb[illegible]ktionen voraussetzen.

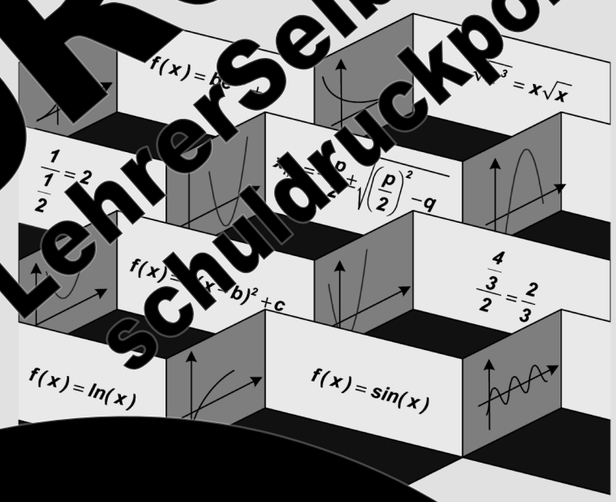
Erg[illegible]ungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend[illegible] zu Algeb[illegible] und Fu[illegible]

selb[illegible]rgan[illegible]iert erlernen



Kapite[illegible]

Exponential- und [illegible]hmusfunktione[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrationale [illegible]nen [illegible] höheren [illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible] 127

Kapitel 9
[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

Kapitel 10
Exponential- und Logarithmusfunktionen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtun[illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 10: Exponential- und Logarithmusfunktionen

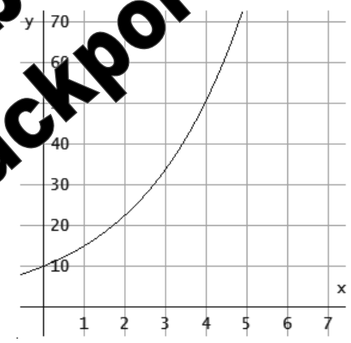
Da viele Zu- und Abnahmeprozesse in Natur und Technik nicht linea[illegible]er quad[illegible]h [illegible]ern exponentiell zu- und abnehmen, spielen Funktionen, die diese Proz[illegible]schreib[illegible] der angewandten Mathematik eine zentrale Rolle. Beispielhaft sind hier [illegible]lich[illegible]esse, wie die Zunahme einer Population, die Abnahme der Konzentration eines Me[illegible]mente[illegible]ikohol im Blut oder auch die Abnahme der Menge eines radioaktiven Stoffes. In [illegible]beide[illegible]enden Aufgaben wird jeweils an einem Beispiel die Herleitung einer Funktionsgleich[illegible]ng für [illegible] Wa[illegible]ums- und Abnahmeprozess erarbeitet.

Aufgabe 10.1

Exponentielles Wachstum

Durch den weltweiten Handel mit P[illegible]zen [illegible]en a[illegible]mmer w[illegible]flanzenschä[illegible] in Regionen eingeschleppt, in denen ein Sch[illegible] keine [illegible] Fressf[illegible] hat und sich u[illegible]indert ausbreiten kann. Ein solcher Schädling w[illegible]entd[illegible]achdem er sich[illegible]f e[illegible]r Fläche v[illegible] km² ausgebreitet hat. Um das Ausbreitungsverha[illegible]en zu können, w[illegible] die Ausbr[illegible]sfläche monatlich neu vermessen. Die Mess[illegible]erden in eine[illegible]abelle regis[illegible] und in ein[illegible] Diagram dargestellt.

Zeit t in Monate[illegible]	F[illegible] km²
[illegible]	[illegible] = 10
[illegible]	A[illegible]5
[illegible]	$A_2 = 22{,}5$
[illegible]	$A_3 = 33$[illegible]
4	A[illegible] = [illegible],625
5	A[illegible]
6	$A_6 =$



a) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$\frac{A_1}{A_0} = \frac{15}{1[illegible]} =$ [illegible] $\frac{A_3}{A_2} = \frac{33{,}7}{22{,}5} =$ _____ $\frac{A_4}{A_3} = \frac{50{,}625}{33{,}7} =$ _____

Information:
Es liegt **exponentielles W[illegible]** [illegible]r **Quotient** $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ **von zwei aufeinander folgenden Messwe[illegible]** [illegible]nd **größer** als **1** ist.

b) Überprüfen [illegible]esswerte, dass dieser Wach[illegible]s mit der Funktion $f(t) = 1$[illegible] [illegible]ermitteln Sie mithilfe der Funktio[illegible]ße der Fläche nac[illegible]

$f(5) = 10 \cdot 1{,}5^{\text{[illegible]}} =$ _____

$f($[illegible]$0 \cdot 1{,}5^{\text{[illegible]}} =$ _____

[illegible]on:
[illegible]**riable** x oder hier t steht **im** [illegible]**onenten**. Daher stammt auch der [illegible]e **Exponentialfunktion**.

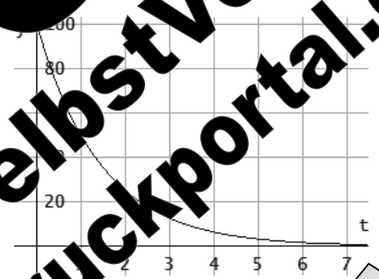
Aufgabe 10.2

Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse

Radioaktives Jod 131 entsteht in Kernkraftwerken und kann bei Reaktor[illegible] die [illegible]e gelangen. Nach dem Supergau in Tschernobyl wurden in einigen Gebiete[illegible] D[illegible]land die Böden mit diesem radioaktiven Jod so stark belastet, dass beispielsweise fr[illegible]hes Ge[illegible]se[illegible]kauft werden durfte und Sandkästen auf Spielplätzen für die Kinder gesperrt w[illegible]. Rad[illegible]ves Jod hat die Eigenschaft, dass nach etwa einer Woche jeweils die Hälft[illegible] des S[illegible] zerfa[illegible] ist, d.h. dass sich das Jod in das Edelgas Xenon umgewandelt hat.

a) Ergänzen Sie die Wertetabelle für eine Ausgan[illegible]ge m[illegible] 100 kg radioaktive[illegible] Jod 131 und überprüfen Sie die Richtigkeit ihrer Werte an[illegible] des Graph[illegible]

Zeit t in Wochen	Menge m in k[illegible]
0	$m_0 = 100$
1	$m_1 =$
2	[illegible]
3	
4	m_4
[illegible]	[illegible] =
6	[illegible] $_6 =$



Ergänzende Info:
Der Graph dieser Exponentialfunktion nähert sich der x-Achse nur an. Die Funktionswerte können den Wert 0 nicht annehmen und auch nicht negativ werden.

b) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$\frac{m_1}{m_0} =$ _____ [illegible] _____ = _____ $\frac{m_6}{m_5} =$ _____ = _____

[illegible]:
Es liegt eine **exponentielle Abnahme** vor, da d[illegible] **von zwei aufeinanderfolgenden Messewerten konstant** ist un[illegible]d **1** liegt.

c) Überprüfen S[illegible]werten, dass dieser Abnahmep[illegible]r Funktion $f(t) = 100$ [illegible]gen Sie mithilfe der Funktion f(t), d[illegible] Wochen von der urs[illegible] weniger als 30g, nur noch weniger als[illegible] Ausg[illegible]nden sind zumindest durch Jod keine erhebliche [illegible] für die Be[illegible]r gegeben war. (Nach dieser Zeit wurden auch die Spielplätze [illegible] wieder fr[illegible]

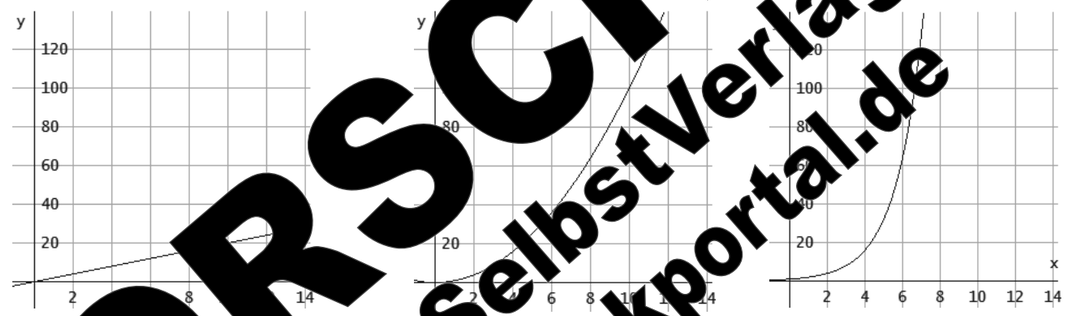
[illegible] $0{,}5^{12} =$ _____

Aufgabe 10.3

Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem Wa[illegible]stum

Die drei Abbildungen zeigen im gleichen Ausschnitt des Koordinate[illegible]ste[illegible]ispielhaft den Verlauf von Funktionen, die im ersten Quadranten linear, quadratis[illegible] und ex[illegible]en[illegible]gen. Vergleichen Sie rein qualitativ anhand der drei folgenden Abbildungen das [illegible]e, qu[illegible]che und exponentielle Wachstum.

f(x) = 2x f(x) = [illegible] f(x) = 2^x



In [illegible]nte[illegible] [0;2], a[illegible] bei _____ [illegible]on x ist das Wachstum, also der Zuwachs der F[illegible]ions[illegible]ulen drei Funktionen in gro[illegible] Abschätzung _____.
Bet[illegible]tet man jedoch die F[illegible]ktionswerte beispielsweise an der Stelle x = 8, so erkennt man, dass der [illegible] bei der _____ Funktion am kleinsten und bei der _____ am gr[illegible]ßten ist.

Anmerkung:
Tatsächlich wächst eine Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion.

Aufgabe 10.4

Expo[illegible]

[illegible]sammenhänge und Eigenschaften von [illegible]ponentialfunktionen der Form f(x) [illegible] haben, kommen nun [illegible]tungen zur Umkehrfunktion bei diesem Funkti[illegible]issen bereits, dass man [illegible]spielsweise bei Gleichungen der Form $x^2 = 9$ die Umke[illegible]den muss, um die Gleichung nach x aufzulösen. (Vgl. Aufgabe 8.1). Überträgt man diese [illegible]f eine Gleichung der Form $a \cdot b^x = c$, stellt sich die Frage, mit welcher Umkehrfunktion man [illegible]g nach x auflösen kann, also wie man das [illegible]nten herausbekommt.

Diese Pr[illegible] der beiden Funktionen f(x) = 10[illegible]^x bearbeitet werden.

[illegible]rmation:
e wird als **Eulersche Zahl** bezeichnet. Man kann den Zahle[illegible]gen, indem man auf dem Taschenrechner die Taste e^x verwendet [illegible]en Wert 1 eingibt. Man erhält: e = 2,71..
Die Funktion f(x) = e^x nimmt in de[illegible]ten Mathematik [illegible]alen Stellenwert ein und wird aus d[illegible]hwerpunktmäßig[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

a) Die Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ und ihre Umkehrfunktion

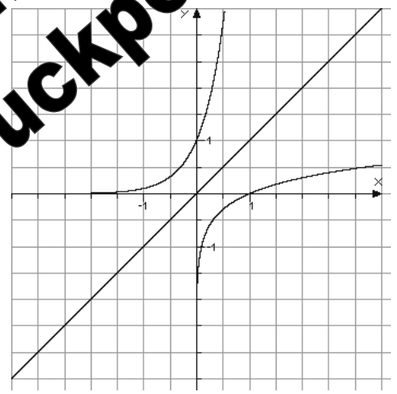
i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von links nach rechts [illegible] in [illegible]tung „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen Sie d[illegible]tionst[illegible] richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit f(x) beschrifte[illegible]

ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Tast[illegible] mit de[illegible] a[illegible]echten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte erzeugen k[illegible]n. No[illegible] Sie eine Bezeichnung für die erfolgte Rechenoperation unterhalb der Werte[illegible]belle [illegible]feil, d[illegible]on rechts nach links zeigt, und geben Sie den Funktionsterm der Umkeh[illegible]ktio[illegible]

Potenzieren

Argument der Funktion	Funktions[illegible]er Fun[illegible]on
x	[illegible] = 10[illegible]
–1,5	
–1	
–0,5	
[illegible]	
[illegible]	
[illegible]0,5	
[illegible]	
[illegible]	x
Funktionswert der Umkehrfunktion	**Argument [illegible] Umkehrfunktion**

Erinnerung:
Zu ein[illegible]funktion f(x) erhält man die zu[illegible]rige [illegible]umke[illegible]nktion f[illegible](x) [illegible]indem man d[illegible]Funktion [illegible]der 1. W[illegible]halbierend[illegible]n sp[illegible]gelt.
(Vgl. Kapitel [illegible] Aufgabe 8.3)



[illegible]gabenteile i) und ii) richtig bearbei[illegible] erkennen, dass man die [illegible]g auf dem Taschenrechner verwenden muss, u[illegible] Spalte der Wertetabelle [illegible] Werte der linken Spalte zu erhalten. Die Bezeichnung „log [illegible]g für die [illegible]athematische Operation, die als **Logarithmieren** bezeichnet wi[illegible]funktion zur Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ wird daher als Logarithmusfunktion zu[illegible] **$f^{-1}(x) = \log_{10}(x)$**, bezeichnet.

[illegible] Basis gibt an, welcher Zahlenwert [illegible]n mit [illegible]potenziert wurde. Wenn 10 die Basis is[illegible]net [illegible]man den Logarithmus mit einer indizierte[illegible]
Gelegentlich findet man in der Literatur als [illegible] für „**$\log_{10}$**“ auch die Bezeichnung „**lg10**“ für de[illegible] dekadischen Logarith[illegible]

b) Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und ihre Umkehrfunktion

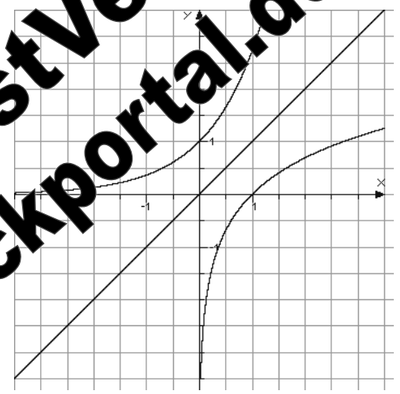
i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von li[illegible]ks nach [illegible]ts, a[illegible]n Richtung „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen[illegible] Funk[illegible] dem richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit f(x) besc[illegible]te[illegible]

ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Taste, [illegible]der [illegible]der rechten Spalte der Wertetabelle durch Logarithmieren die Werte de[illegible]n Spa[illegible]eugen können, und geben Sie anhand der Bezeichnung der Taste auf dem Tasch[illegible]hne[illegible]n Funktionsterm der Umkehrfunktion an.

Potenzieren

Argument der Funktion	Funktionswert [illegible]on
x	[illegible](x)
–1,5	
–1	
–0,5	
[illegible]	
[illegible]	
0,5	
[illegible]	
[illegible]$^{-1}$(x) = [illegible]	[illegible]x
[illegible]ktionswert der [illegible]kehrfunktion	**Argument [illegible] Umkehrfunktion**

Logarithmieren



Falls Sie die Aufgabenteile i) und ii) richtig bearbeitet haben, konnten Sie erkennen, dass man die Taste [ln] [illegible] muss, um aus der rechten Spalte der Wertetabelle die W[illegible] zur Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die

Da der Exponentialfunktio[illegible] außerordentliche Bedeutung zukommt, und der Logarithmu[illegible]h als **„natürlicher Logarithmus“** oder „**Logarithmu**[illegible]eichnet wird, wurde vereinbart, dass man für „**$\log_e$**“ die A[illegible]erwendet.

Aufgabe 1[illegible]

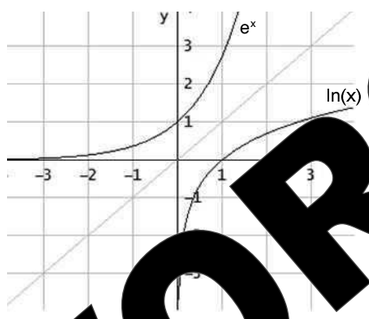
Begr[illegible] und $e^{\ln x} = x$ (Vgl. Kapitel 8 Aufgabe [illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Information 10.1

Regeln zum Umgang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen speziell zu[illegible]sis e

Da Exponentialfunktionen zur Basis e, wie wir noch sehen werden, beisp[illegible]ie hins[illegible]er Differenzial- und Integralrechnung günstige Eigenschaften haben, spielt [illegible]lle Exponential-funktion, auch einfach **e-Funktion** genannt, in Wissenschaft und Technik [illegible] hohe [illegible]obene Rolle. Daher beziehen sich die folgenden Regeln insbesondere auf die [illegible]ktionen [illegible]e^x und f(x) = ln(x). Beweise für die Regeln können in der Fachliteratur nachgelesen w[illegible]n.

Wichtige [illegible]onswe[illegible]		
	= e^x [illegible]	f(x) = ln(x) f(1) = ln(1) [illegible] f(e) = ln([illegible]) =_____ f([illegible]) = ln(0) =_____
Merke:	[illegible] = 1 e^1 = e	ln(1) = 0 ln(e) = 1

Zusammenhang Funktion und Umkehrfunktion	
[illegible]	$e^{\ln(x)} = x$

[illegible] der Regeln be[illegible] zur Ba[illegible]	[illegible]l und Logarithmengleichungen
$e^x = a$ $\ln(e^x) = \ln(a)$ $x = \ln(a)$	[illegible] a

[illegible]nformungen bei Logarithmen		
[illegible] ln(a)	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$	ln([illegible] n(b)

Aufgabe 10.6

Umrechnen einer Exponentialfunktion mit einer beliebigen Basis b in ei[illegible]xpone[illegible]lfunktion zur Basis e

In Naturwissenschaft und Technik ist es üblich, exponentielle Zusa[illegible] mithilfe von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ so umzuforme[illegible] dass m[illegible] ein[illegible]on zur Basis e erhält. Begründen Sie den Ansatz (1) und erläutern Sie die Umfor[illegible]sschr[illegible]

[illegible]Erinnerung:
Exponentialfunktionen mit der Basis e [illegible] der Regel als **e-Funktion** bezeichnet.

Aufgabenstellung: $f(x) = a \cdot b^x$ [illegible] umgef[illegible]en, das[illegible] für f(x) einen v[illegible]nderten Funktionsterm der Form f(x) = [illegible]

(1) $a \cdot e^{z(x)} = a \cdot b$[illegible] (1) [illegible]

[illegible] $e^{z(x)} = b^x$ (1) → (2) [illegible]

(3) $\ln(e^{z(x)}) = \ln(b^x)$ (2) → (3) [illegible]

(4) z(x) [illegible]

[illegible] $z(x) = x\ln(b)$ (4) → (5) [illegible]

(6) $f(x) = a \cdot e^{x\ln(b)}$ (5) → (6) [illegible]

[illegible] den folgenden Zusammenhang ein.

[illegible]tialfunktion mit beliebiger [illegible] einer e-Funktion umformen.:	$f(x) = a$[illegible]	$f(x) = a \cdot e^{x\ln(b)}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Übungen

Ü10.1

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne d** **chenre** zu verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Information 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel: $e^{-\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln(a)}} = \frac{1}{e^{\ln(a)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

Anwe des Zusammen ngs zwisch nktion und m hrfunktion: *„e d ln weißen sich gegenseitig we“*

a) $e^{\ln(2)}$ = _____

b) $e^{\ln(a)}$ = _____

c) $e^{\ln(1)}$ = _____

d) $e^{\ln(e)}$ = _____

e) $e^{-\ln}$ = _____

f) _____

g) $e^{2\ln(3)}$ = _____

h) $e^{3\ln(e)}$ = _____

i) $e^{-2\ln(4)}$ = _____

j) _____

= _____

$e^{\frac{1}{2}\ln(e)}$ = _____

m) $e^{-\frac{1}{2}\ln(1)}$ = _____

n) $e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ _____

Lös ortierter Reihenfolge:

1 $\frac{1}{6}$, e, e^3, $\sqrt{e}$, a, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ungültiger A

Ü10.2

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne den enrec** zu verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Rege Info tion 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\ln(e) = -\frac{1}{3}$

a) ln(e) = _____

b) $\ln(e^2)$ = _____

c) $\ln(e^a)$ = _____

d) ln(1) = _____

e) $\ln(e^0)$ = _____

f) $\ln(e^{-4})$ = _____

g) $\ln(e^{-2})$ = _____

h) $\ln(e^{-a})$ _____

i) n(= _____

j) $e^{\frac{1}{2}}$) _____

$\frac{1}{}$) = _____

l) $\ln(\sqrt{e})$ = _____

m) $\ln(\sqrt{e^k})$ = _____

n) $\ln\left(\frac{1}{}\right)$ _____

$\sqrt{e}$) = _____

q) $\ln\left(-\frac{1}{e}\right)$ = _____

r) $\ln\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ _____

s) _____

n unsortierter Reihenfolge:

r Ausdruck, 0, 0, 1, 1, –1, –1, 2, –2, –2, – $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\ln 2 -$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 10.7

Lösen von Exponentialgleichungen zur Basis e

Wie bei Potenzgleichungen (vgl. im Kapitel 6) gibt es auch bei der Lösung [illegible] nentialgleichungen unterschiedliche Lösungsverfahren. Einige häufig auftretende Verfahren w[illegible]en [illegible]mplarisch jeweils an einem Beispiel vorgestellt. Es handelt sich hierbei lediglich um L[illegible] vorschläge, da meist auch alternative Vorgehensweisen möglich sind. Erläutern Sie für [illegible] den [illegible]spielen vorgestellten Lösungswege die von Zeile zu Zeile erfolgten Umformun[illegible]

Beispiel 1:

Die Lösungsvariabele kommt nur in einem e[illegible]nentiel[illegible] Term vor

Form: $e^{ax+b} = b$

(1) $3e^{2x+1} - 6 = 0$

(2) $3e^{2x+1} = 6$

(3) e^{2x+1} [illegible]

(4) $\ln(e^{2x}$ [illegible] $\ln(2)$

(5) [illegible] $x +$ [illegible] $\ln(2)$

(6) [illegible] $2x =$ [illegible]

[illegible] $x = \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx -0$ [illegible]

(1)→(2): _____

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

(6)→(7): _____

Beispiel 2:

Die Lösu[illegible] rationalen Term der Gleichung.

In [illegible] exponentielle Teil vom [illegible] Faktorisieren getrennt werden k[illegible] Umformungen und [illegible]gen ein Summand mit einem exponentiellen [illegible]er Summand der [illegible] x^n übrig, kann diese Gleichung algebraisch **nicht** gelö[illegible]uss man dann mit [illegible] Näherungsverfahren oder zeichnerischen Methoden arbeiten.

Algebraisch **ni**[illegible]
Exponentia[illegible]

$e^x - x$ [illegible]

In[illegible]

Die Anwendung von ln auf beiden Seiten [illegible]ng führt dazu, dass das x nun nicht mehr im E[illegible] von e erscheint, dafür aber im Argument de[illegible]t kann die Gleichung ni[illegible]ach x aufgelöst w[illegible]

Lösung durch Faktorisieren

(1) $xe^x + 4x = 0$

(2) $x(e^x + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

(3) $e^x + 4 = 0$

(4) $e^x = -4 \Rightarrow$ keine weitere Lösung

(1)→(2): _____

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

Beispiel 3:

Die Lösungsvari[illegible] kom[illegible] in m[illegible]n exponentiellen Summanden vor, ein rationaler Term fehlt

Form: [illegible] = 0

[illegible] $e^{-x} = 0$

(3) [illegible] $e^{3x} = 4$

[illegible] $\ln(e^{3x}) = \ln(4)$

(5) $3x = \ln(4$ [illegible]

(6) $x = \frac{\ln(4)}{3} \approx 0,46$

(1)→(2): _____

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

[illegible]gleichungen nie durch x dividieren darf, da x [illegible]
Im Gegensatz dazu darf [illegible]leichungen durch den Faktor, der x enthält, nämlich [illegible] e^{ax+b} nicht Null wird.

Form: $ae^{bx} + ce^{dx}$ [illegible]

(1) e^{3} [illegible]

(2) [illegible]

(1)→(2): _____

(2)→(3): _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Ergänzung zu Beispiel 3:

Man kann diese Gleichung auch lösen, indem man den exponentiellen Teil ausklamm[illegible] Dies[illegible] aufwendigere Lösungsvariante ist bei Exponentialgleichungen jedoch me[illegible] notwe[illegible]

(1) $e^{3x} - 3e^{2x} = 0$
(2) $e^{2x}(e^x - 3) = 0$

(3) $(e^x - 3) = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$
(4) $e^x = 3 \quad \Rightarrow$ Widerspruch
(5) $\ln(e^x) = \ln(3)$
(6) $x = \ln(3)$

(1)→(2): _____
(2)→(3): _____
(3)→(4): _____
(4)→(5): _____

Beispiel 4:

Die Lösungs[illegible] mm[illegible] mehreren ex[illegible]ntiellen Sum[illegible]n vor, der rationale Summand is[illegible]ne K[illegible]nte[illegible]0

[illegible]rm: a[illegible] + ce[illegible] = k

(1) [illegible]4 – 5e^{–x} = [illegible]
(2) $e^{x} - 4e^{x} - 5 = 0$
(3) $(e^x)^2 - 4e^x - 5 = 0$
(4) $z^2 - 4z - 5 = 0$
(5) $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{[illegible]}$

(6) z[illegible]

[illegible] $x = \ln(-1)$
[illegible],61 keine Lös.

(1)→(2): _____
(2)→(3): _____
(3)→(4): _____
(4)→(5): _____
(7)→(8): _____
(8)→(9): _____

Übung 10[illegible]

Lösen [illegible]den Gleichungen nach x auf, und geben Sie das Ergebnis gg[illegible] Dezi[illegible]undet, an.

a) [illegible] b) $e^{2x} = 1$ c) [illegible] 0 d) [illegible]
e) [illegible] f) $3e^{4x} - 8 = 3$ h) [illegible]

i) $e^{2x} = 4e^x$ j) $2e^{2x} - 4e^x = 0$ k) $e^x - e^{-x} = 0$ l) $2e^{2[illegible]} [illegible]^x$
m) $x \cdot e^x - 1 = 0$ n) $e^{2x}(x^2 - 4x - 5) = 0$ o) $x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = 0$ [illegible] $4x \cdot e[illegible] - 4e^{-2x} = 0$
q) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ r) $2e^{2x} + 5e^x = 3$ s) $e^x = 6 - [illegible]$ t) [illegible]$e^{-2x} = 4$

Lösungen in unsortierter Reihenfolge:

$x = 0$ $x = 0$ $x_2 = [illegible]2)$ [illegible]: $x_2 = -1$

$x = \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx 0{,}15$ $x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{11}{3}\right)$ $x_2 = [illegible]\ln(2)$ $x = -\frac{1}{3}$

$x = \ln(4)$ $x = \ln([illegible]$ $= \frac{\ln(2)}{2} \approx [illegible]$ $x = \frac{[illegible]1}{3} \approx 0{,}64$

algebraisch nicht lösbar x [illegible] $0{,}$[illegible] $x_1 = 0$; $x_2 = -2$ $x = 1$

$x = 0$ [illegible](3) keine Lösung $x = \frac{-\ln(2)}{3} \approx -0{,}23$

Aufgab[illegible]0.8

Lo[illegible] vo[illegible]mengleichungen

[illegible] in der praktische[illegible]endung in den Naturwissenschaften, der Technik und auch bei den [illegible]tswissenschaftle[illegible] der Re[illegible]-Funktionen arbeite,t sollen auch bei der Lösung von Log[illegible]mengleichu[illegible] hier nur Gl[illegible]ungen, die den natürlichen Logarithmus ln, also den Logarithmus zur Basis e, enthalte[illegible]handelt werden. Anhand von gängigen Beispielen sollen einige Lösungsverfahren vorgestellt w[illegible]en. Erläutern Sie bei den Beispielen jeweils die Umformungsschritte.

Beispiel 1:

Der log[illegible]

[illegible]ion:
[illegible] Gleichungen, die einen [illegible]halten, wie auch bei [illegible] den **Definitionsbereich** beac[illegible]rithmus nur für die positive[illegible] $\mathbb{R}^+$ definiert ist.

[illegible]n: ln(ax² + bx +c) = d

Definitionsbereich :
$D = \{x | x^2 + 2x [illegible]$
$= \{x | (x[illegible]$
$= [illegible]$

[illegible]druck im Argument des ln() d[illegible] [illegible]imen. Für die Bestimmung des De[illegible]ichs muss man [illegible]eine quadratische Ungleichung lösen [illegible] 4 Aufg.4.6).

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

(1) $\ln(ax^2+bx+c)=d$

(2) $e^{\ln(ax^2+bx+c)}=e^d$

(3) $ax^2+bx+c=e^d$

(4) $ax^2+bx+c-e^d=0$

(1)→(2): _____

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

Entstandene Gleichung mit herkömmlichen Methoden lösen, hier beispielsweise mit der _____Formel

Beispiel 2:

Die Gleichung besteht aus einem Produkt mit einem rationalen und einem logarithmischen Faktor. Beide Faktoren enthalten die Lösungsvariable.

a) **Form: $ax\cdot\ln(bx+c)=0$**

Definitionsbereich:

$D=\{x\,|\,bx+c>0\}$

$=\{x\,|\,x>-\frac{c}{b}\}$

(1) $ax=0 \quad \vee \quad \ln(bx+c)=0$

(2) $x=0 \quad \vee \quad e^{\ln(bx+c)}=e^0$

(4) $bx+c=1$

(5) $x_1=0 \quad \vee \quad x_2=\frac{1-c}{b}$

(1)→(2): _____

(2)→(5): _____

b) **Form: [illegible]**

[illegible]bereich:

$D=\{x\,|\,bx>0\}$

(1) $ax\cdot\ln(bx)=0$

(2) ax [illegible]

(3) [illegible]

[illegible] zu D $x_2=\frac{1}{b}$

(2)→(3): _____

Beispiel 3

Die Gleichung hat keinen konstanten, jedoch mehrere logarithmische Summanden, welche die Lösungsvariable enthalten.

Form: $\ln(2-x)+\ln(x)=0$

Definitionsbereich:

$D=\{x\,|\,2-x>0 \wedge x>0\}$

$=\{x\,|\,0<x<2\}$

Beide Terme [illegible]() [illegible] und D so angeben, [illegible] beide Termen kein u[illegible]r Au[illegible]ck entstehen kann.

Diese Gleichung kann man a[illegible] [illegible]edenen Wegen lösen:

Lösungsw[illegible] 1:

(1) $\ln[illegible]+\ln(2-[illegible]=0$

[illegible]$(2-[illegible]=0$

(3) $e^{[illegible]}=1$

[illegible] $2x-x^2=1$

(5) $x^2-2x+[illegible]=0$

(6) $x_{1,2}=1$

(1)→(2): Regel _____ anwenden

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

(1) $\ln(2-x)+\ln(x)=0$

(2) $e^{\ln(2-x)+\ln(x)}=1$

(3) $e^{\ln(2-x)}\cdot e^{\ln(x)}=1$

(4) [illegible]

(5) [illegible]

(6) [illegible]

[illegible] $x_{1,2}=1$

(2)→(3): Reg[illegible] _____ anwenden

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

(6)→(7): _____

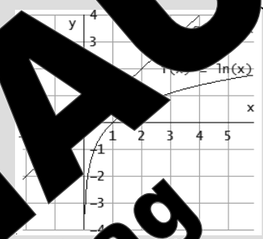
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Beispiel 4:

Algebraisch **nicht lösbare** Logarithmengleichung

$$\ln(x) - x = 0$$
$$\ln(x) = x$$
$$e^{\ln(x)} = e^x$$
$$x = e^x$$

Anhand der graphischen Darstellung erkennt man, dass es [illegible] eine Lösung gibt. (Vergl[illegible]chen S[illegible] auch [illegible] Aufgab[illegible])



Übung 10.4

Ermitteln Sie den Definitionsbereich [illegible] die folgenden [illegible]eichungen na[illegible] x [illegible]. Geben Sie das Ergebnis ggf. auf zwei D[illegible]alste[illegible] geru[illegible] an.

a) $\ln(x) = 3$ b) $\ln(x) = -2$ c) $\ln(x) = 0$ d) $\ln(4x) = 0$

e) $\ln(e^x) = 0$ f) $\ln(x-1) = 0$ g) $\ln(x^2-6x+9) = 0$ h) $5\ln(x-7) = 1$

i) $\ln(x+1) + \ln(x^2-1) =$ [illegible] j) $\ln(4x) = 4\ln(x)$ k) $\ln(x^2) + \ln(x) = 0$ l) $\ln(x^2) + \ln(8x) = 0$

Lösunge[illegible] und [illegible] Reihenfol[illegible]

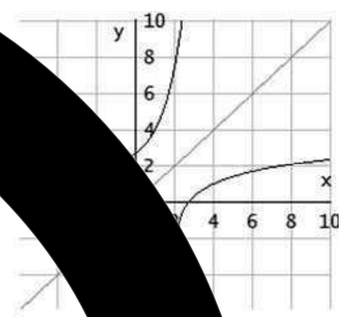
[illegible] keine [illegible]ösung [illegible] $x = 1$ $x = e^{-2} \approx 0{,}14$

$x_1 = -2$; $x_2 = -4$ [illegible] $x = 2$ $x = e^3 \approx 20{,}09$

$x = 2$ $x = \sqrt[3]{4}$ $x = 0{,}25$ $x = \sqrt[5]{e} + 7 \approx 8{,}22$

Übung 10.5

Die A[illegible]
f[illegible] der zugehörig[illegible]
[illegible](x).
[illegible]ie die Funktionsgleichung der Umkehr-
[illegible]n $f^{-1}(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von f(x)
[illegible]d $f^{-1}(x)$ an.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass der y-Achsenabschnitt von f(x) und die Nullstelle von $f^{-1}(x)$ [illegible]ichen Zahlenwert haben.



Zur Kontrolle: [illegible]wert gerundet: 2,74

Erg[illegible]ungen: _____

_____

Aufgabe 10.9

Verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln der e-Funktion

Sie haben die Regeln, die beim Verschieben, Stauchen und Strecken [illegible]tionen zu beachten sind, bereits bei den quadratischen Funktionen (Parabeln) und b[illegible]den trig[illegible]om[illegible] Funktionen kennen gelernt und mit Sicherheit festgestellt, dass die Parameter [illegible]n Fun[illegible]gleichungen weitgehend gleiche Wirkungen haben. Anhand von geeigneten Beispiele[illegible] nun [illegible]eigt werden, dass dieses Regelwerk, mit kleinen Unterschieden, auch auf Ex[illegible]nti[illegible]en [illegible]ertragen werden kann.

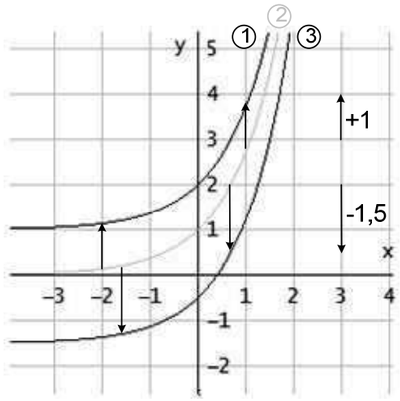
a) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in [illegible]richtung

Zur Erinnerung:
$f(x) = x^2 + c$ ist eine [illegible]
verschobe[illegible]malparabel.
$f(x) = s[illegible] + c$ [illegible] eine [illegible]tung
versch[illegible]e S[illegible]funktion.

We[illegible] man d[illegible]ir Parabeln u[illegible]rigonometrische [illegible]nk[illegible]n gü[illegible]n Zusamm[illegible]g auf die [illegible]unk[illegible] e^x an, [illegible]t man die F[illegible]
[illegible] = f(x) + c = e^x + c m[illegible] c[illegible]R.

[illegible] Abbildung[illegible]rechts sind die [illegible]
① $h_1(x) = e^x + 1$
② $f(x) = e^x$
③ $h_2(x) = e^x - 1{,}5$

dargestellt. Er[illegible]
Abbil[illegible]



[illegible]ktionsgleichung von $f(x) = e^x$ wird der F[illegible] hinzugefügt, so dass die Funktion [illegible](x) = e^x + c entsteht. Für c > 0 wird die Funktion f(x) [illegible]nd für c < 0 wird die Funktion f(x) nach _____ verschoben. Damit gelten für das Ver[illegible] Funktionen in y-Richtung _____ Regeln wie beim Verschieb[illegible]eln oder trigonomet[illegible] Richtung.

VORSCHAU LehrerselbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in x-Richtung

Zur Erinnerung:
$f(x) = (x - b)^2$ ist eine in x-Richtung verschobene Normalparabel.
$f(x) = \sin(x - b)$ ist eine in x-Richtung verschobene Sinusfunktion.

Wendet man den für Parabeln und trigonometri[illegible] Funktionen gültigen Zusammenhang auf die e-Funktion $f(x) = e^x$ an, so erhält man die Fu[illegible]n **$h(x) = e^{x-b}$** mit $b \in IR$. In der Abbildung recht[illegible] die Funktionen

① $h_1(x) = e^{x-2}$
② $f(x) = e^x$
③ $h_2(x) = e^{x+\ln(10)}$

dargestellt. Ergänzen [illegible] Abbildun[illegible] die folgenden [illegible]

Im E[illegible]ne[illegible] der F[illegible]ionsgleichung von $f(x) = e^x$ vor[illegible]r Parameter b mit $b \in IR$ hinzugefügt, sodas[illegible]ie F[illegible]$(x) = e^{x-b}$ [illegible]tsteht. Für $b >$ [illegible] wird die Funktion $f(x) = e^x$ nach _____ und für [illegible]0 w[illegible] die Funktion $f(x)$ [illegible]^x [illegible]ch _____ [illegible]erschoben. Damit gelten für das Verschieben von e-F[illegible]n in x-Ric[illegible]ung [illegible]inzipiell d[illegible]ichen Regeln wie beim Verschieben von _____ oder _____ in x-Richtung. Man muss jedoch die folgende Bes[illegible]derheit beachten.

Besonderheit b[illegible] [illegible]n in x-Richtung!

Erlä[illegible]he Wirkung ein Vorfaktor vor dem [illegible] Kasten vervollständigen.

[illegible] $e^x \cdot e^{-b}$

[illegible] $f(x) = \frac{1}{e^b} e^x$

$f(x) = k \cdot e^x$ mit k[illegible]

Bei der e-Funktion be[illegible] **[illegible] $\in IR^+$ vor dem Term e^x eine Verschieb[illegible]ung**, während bei den Parabeln u[illegible]chen Funktionen durch einen entspre[illegible]ktor [illegible] Streckung in ___ -Richtung e[illegible]

Stelle[illegible]n der Schreibweise $h(x) = k \cdot e^x$ dar.

h[illegible] _____

[illegible]10) = _____

c) Spiegeln von e-Funktionen an einer Geraden y = c

Wie Sie in Aufgabenteil b) erkannt haben, bewirkt ein positiver re[illegible]r Vorfa[illegible]or d[illegible] Funktionsterm e^x eine Verschiebung der Funktion in x-Richtung [illegible]nun u[illegible] werden, wie sich ein negatives Vorzeichen vor diesem Vorfaktor auswirkt.

Begründen Sie, warum bei der folgenden Umformung d[illegible]inusze[illegible] vor dem Faktor $k \in IR^+$ nicht in den Exponenten der Funktion übernommen werden ka[illegible]

$f(x) = -ke^x = -e^{\ln(k)}e^x = -e^{x+\ln(k)}$ mit $k \in IR^+$

_____

_____

Erläutern Sie anhand der A[illegible]s die Wirkung des Minus[illegible]ns.

_____

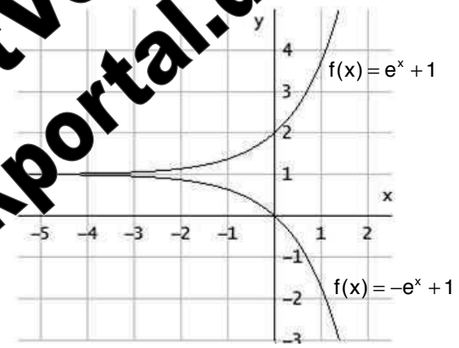
_____

_____

_____

_____

_____



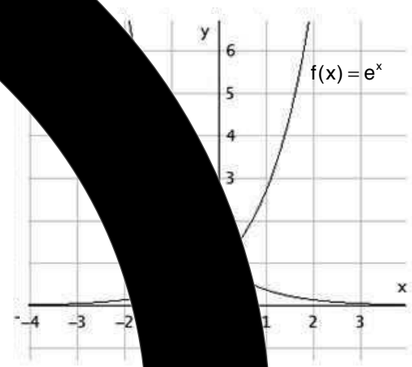
d) Spiegeln an der y-Achse [illegible]ie Strecken und Stauchen bei e-Funktionen

Wie Sie unter Aufgabenteil b) erkannt haben, können die Eigenschaften hinsichtlich des Streckens und Stauchens von [illegible] trigonometrischen Funktionen nicht direkt auf die e-Funktionen übertrag[illegible]

[illegible] Zusammenhänge beim Spiegeln an der [illegible]

[illegible]egeln an der y-Achse

Durch ein negatives Vorzeichen im Exponent wird eine e-Funktion a[illegible]elt. Man muss dabei [illegible]n mit einem ne[illegible] _____ [illegible]en kann.



VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Strecken und Stauchen in y-Richtung

In der Abbildung rechts sind die Funktionen

① $h_1(x) = e^{3x} = \left(e^x\right)^3$

② $f(x) = e^x$

③ $h_2(x) = e^{0,5x} = \sqrt{e^x}$

dargestellt.
Ergänzen Sie in der Abbildung rechts zunächst die Funktionen

④ $h_3(x) = e^{-3x} = \frac{1}{e^{3x}} = \frac{1}{(e^x)^3} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^3$

⑤ $h_4(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

⑥ $h_5(x) = e^{-0,5x} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

und danach den folge[illegible] Te[illegible]

Im Exponenten der Fu[illegible](x) [illegible]rd der Fa[illegible] a mit a∈ IR h[illegible]gefügt, so dass die Funktion

$h(x) = e^{ax}$ e[illegible]ch e[illegible]positiven Pa[illegible]er a wird die [illegible]ktion _____ und

_____. [illegible] Vorzeichenwe[illegible] beim Param[illegible] a bewirkt eine _____

der [illegible]ktio[illegible]der [illegible]nse.

[illegible]samm[illegible]fassung der Eig[illegible]haften der [illegible]-Funktion hinsichtlich des Streckens, Stauchens [illegible]elns. Ergänzen [illegible] die Texte in [illegible] Sprechblasen.

Strecken, Stauchen und Spiegeln
$|\mathbf{a}| >$ [illegible] →strecken in __- Richtung
$0 < |\mathbf{a}| < 1$ →stauchen in __- Richtung
[illegible]echsel von **a** bewirkt eine _____
[illegible]

$\mathbf{f(x) = e^{ax-b} + c =}$ [illegible] $\mathbf{e}$ [illegible]

Wie bei anderen [illegible]nktionsklassen [illegible]hiebt der [illegible]eter **c** die [illegible] in __-

b verschiebt die Funktion in Richtung __-Achse:
b > 0 → ver[illegible] _____
b < 0 [illegible] _____
Ein [illegible]ponentiellen Ausdruck
[illegible] _____ die [illegible]ktion an der Geraden y = **c**,
[illegible] beachten, dass gilt: $-\mathbf{b}e^{ax}+c = -e^{ax + \ln(b)} + c$

Übungen: _____

Aufgabe 10.10

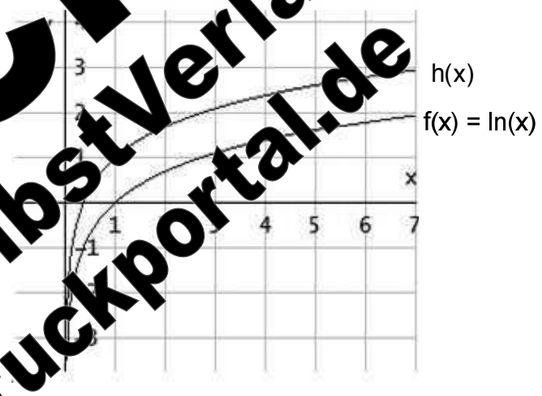
Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln der Funktion f(x) = ln(x)

Bereits gewonnene Erkenntnisse hinsichtlich des Verschiebens, St[illegible] Stauc[illegible]d Spiegelns bei Parabeln, trigonometrischen Funktionen und e-Funktionen könn[illegible] we[illegible]d auch auf das Verhalten der Logarithmusfunktionen übertragen werden. W[illegible] bei e-[illegible]kti[illegible]ssen allerdings einige Besonderheiten beachtet werden. Zur Veranschaulichung d[illegible]samm[illegible]ange sind für $x \in IR^+$ in den Abbildungen jeweils die Funktion f(x) = ln(x) und eine weitere [illegible]rithm[illegible]unktion gegeben.

a) Verschieben von f(x) = ln(x) in y-Richtung

Verdeutlichen Sie sich die folgende Re[illegible]ung:

$h(x) = f(x) + c$ mit $c \in IR$
$h(x) = \ln(x) + c$
$h(x) = \ln(x) + \ln(e^c)$
$h(x) = \ln(e^c \cdot x)$
$h(x) = \ln(k \cdot x)$ mit k[illegible]



Ermitteln Sie d[illegible] Abl[illegible]n aus der Abbildung [illegible] die Funktionsgle[illegible]on h(x) in [illegible] Form f[illegible]) + [illegible]wie $h_1(x) = \ln(k \cdot x)$

[illegible](x) _____ = _____

u[illegible]ergänzen Sie die [illegible]ktion $h_2(x) = \ln(\frac{1}{e} \cdot x)$

[illegible] Abbildung. Forme[illegible]n Sie dazu [illegible] Funktionsterm in geeigneter W[illegible]se um.

[illegible] = ln(x) in x [illegible]

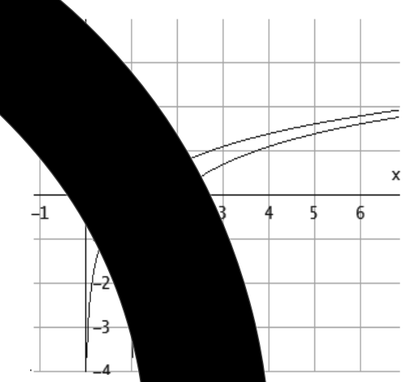
[illegible]eutlichen Sie sich die folgende Rechnung, un[illegible] [illegible]ermitteln Sie die Funktionsgleichung von h(x) durch Ablesen aus der Abbildung rechts. Beschriften Sie zuvor die abgebildeten Graphen mit f(x) und h(x).

h(x) = f(x – [illegible]
h(x) = [illegible]

F[illegible]

[illegible] _____) = _____ für x > ___

[illegible]en Sie in der Abbildung den Graph der Funkt[illegible] [illegible] ln(x + 1) für x >–1.



VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

c) Strecken und Stauchen der Funktion f(x) = ln(x) in y-Richtung

Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und ermitteln Sie die Funktionsgleichung von $h_1(x)$ durch Ablesen aus der Abbildung rechts.

$h(x) = a\,f(x)$ für $a \in \mathbb{R}^+$
$h(x) = a\ln(x)$
$h(x) = \ln(x^a)$

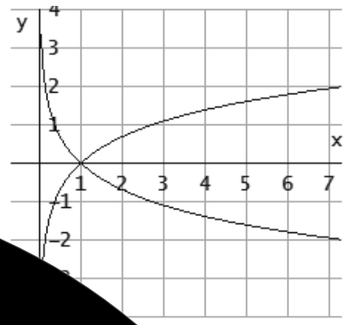
Funktionsgleichung $h_1(x)$ in beiden Darstellungsarten:

$h_1(x) =$ _____ = _____

Ergänzen Sie in der Abbildung d[illegible] Graph[illegible] Funktion $h_2(x) = \ln(\sqrt{x})$. Formen [illegible] den Funktionsterm in ge[illegible] Weise um.

d) Spieg[illegible] der [illegible]on f(x) = [illegible] bzw. h(x) = [illegible] f(x) an der x-Achse

[illegible]en Sie sich die folgende Rechnung und besc[illegible] Sie die Gr[illegible]he[illegible] in der Abbi[illegible] mit f(x) und h(x).



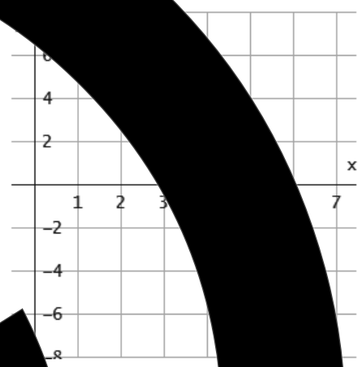
$h(x) = -f(x)$

$h(x) = -\ln(x) = \ln(x^{-1}) = \ln(\frac{1}{\ }\ )$

[illegible]ren Sie die Funktionen

[illegible](x) = $\ln(x^3)$ und $h_2(x) = \ln(x^{-3})$

im Koordinatensystem rechts. Ergänzen Sie den anschließenden Satz. [illegible] mit $a \in \mathbb{R}$, in der Funktion h(x) = [illegible]



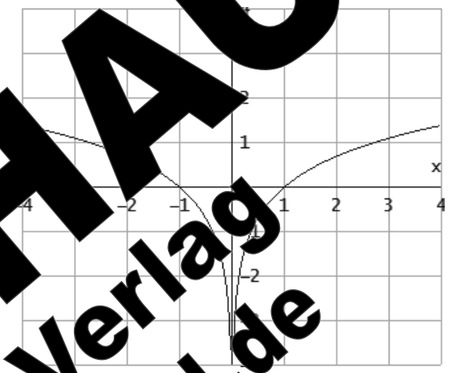
$|a| > 1$ _____

$0 < |a|$ [illegible] _____

Ei[illegible] [illegible]wechsel vor dem Betrag von a bewirkt [illegible]ung an der ___-Achse.

e) Spiegeln der Funktion f(x) = ln(x) an der y-Achse

Da der Logarithmus für $x \le 0$ nicht definiert ist, arbeitet man bei der Logarithmusfunktion oft mit Beträgen im Argument der Logarithmusfunktion.



Betragszeichen kann man weglassen, wenn man den Ausdruck, der in Betragsstrichen steht, einmal mit einem positiven und einmal mit einem negativen Vorzeichen versieht. (Vgl. Aufgab[illegible]

$f(x) = f(|x|) = \ln(|x|) \Rightarrow f(x) =$ [illegible] für [illegible]

Ergänzen Sie in der A[illegible]ildu[illegible] Gra[illegible] zur Funktio[illegible] $h(x) = \ln(|x| - [illegible])$

$h(x) = \ln(|x| - [illegible]$ [illegible](x) _____ für _____

_____ für _____

f) [illegible]sam[illegible]fas[illegible]g der Eige[illegible]schaften der [illegible]arithmusfunktion hinsichtlich des Streckens, [illegible]ucht[illegible] Spiegeln. Ergänzen Sie die Texte in den Sprechblasen.

Der Parame[illegible]er $a \in \mathbb{R}$ st[illegible]ckt bzw. staucht die Funktion.

$|a| > 1$ **strecken i[illegible] ___-Richtung**

$0 < |a| < 1$ **stauchen in ___-Richtung**

[illegible] c = 0 wird die [illegible]

[illegible]ken Sie dass gilt: $-a\ln(|x|) = [illegible]$

$h(x) = \mathbf{a}\ln(|x - \mathbf{b}|) + \mathbf{c} = \ln(|x - \mathbf{b}[illegible]$

h[illegible]ion in

→ **verschieben nach** _____

→ **verschieben nach** _____

Wie bei ande[illegible]klassen verschiebt der [illegible] mit $c \in \mathbb{R}$ die Funktion in __-R[illegible]

Beachten Sie, das[illegible] bei Logarithmusfunktionen gilt:

[illegible]k(x – b)) = ln(x – [illegible] ln(x – b) + **c**

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Grundlegend zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Vertiefende Betrachtung gsungleichungen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome 9

Kapitel 2
Grundlegendes zu Gleichungen 59

Kapitel 3
Lineare Funktionen 63

Kapitel 4
Quadratische und biquadratische Gleichu[illegible]d [illegible]ichungen 77

Kapitel 5
Ganzrationale Funktion 2. Grade 87

Kapitel 6
Gleichungen 3. und hö[illegible]en [illegible]es 104

Kapitel 7
Ganzrationale [illegible]nk[illegible]nen [illegible] höheren [illegible]des 115

Kapitel 8
Die [illegible]unk[illegible] 127

Kap[illegible]l 9
[illegible]rig[illegible]metr[illegible]e Funktion[illegible] 135

[illegible]pitel 10
E[illegible]nential- und [illegible]garithmusfu[illegible]onen 145

Kapitel 11
Vertiefende Betrachtung [illegible] Betragsungleichungen 169

Gesamtw[illegible] zu Algebra und Funktionen [illegible]iert erlernen
(Best[illegible]
S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[illegible]-SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 11: Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichun[illegible]en

Während in Kapitel 4 die Betragsungleichungen nur gestreift wurden, sollen [illegible] nun [illegible]führlichere Betrachtungen angestellt werden, wobei ein Schwerpunkt in der g[illegible]hen D[illegible]er Lösungsmenge anhand von Diagrammen liegt.

Aufgabe 11.1

Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betra[illegible]uftrit[illegible]

a) Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweis[illegible] im L[illegible]anhand [illegible]er drei B[illegible]und verfahren Sie bei den folgenden Aufgabe analog daz[illegible]

Beispiel 1: Betragsungleichung $|x-2|$[illegible]

Algebraische Lösung

$|x$[illegible]≥ 1

$-(x$[illegible]≥ 1 [illegible] $-2) \geq 1$

$2 \leq -1$ $\quad x-2 \geq 1$

≤ 1 $\quad x \geq$[illegible]

$\mathbb{L} = (-\infty;1]$ [illegible] $[3;\infty)$

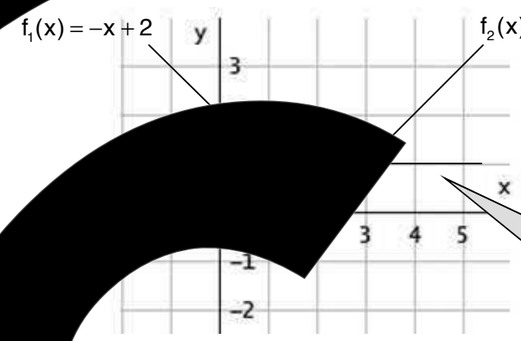
Fa[illegible]unterscheidung [illegible] Weglassen der Betragsstriche

[illegible]enn man die Betragsstriche weglässt, erhält der gesam[illegible]um, der zwischen den Betrag[illegible]en steht einmal ein positives und einma[illegible] negatives Vorzeichen.
Vg[illegible] Kapitel 4 Aufgabe 4.3

Die [illegible]ösungsmenge kann dann in [illegible]olgenden Form mit Hilfe von [illegible]ntervallen angegeben werden.

[illegible]nde Klammer: Das Intervall ist auf dieser Seite nicht begrenzt.

Eckige [illegible]ammer: Das [illegible]all endet mit [illegible] bzw. beginnt bei 3.

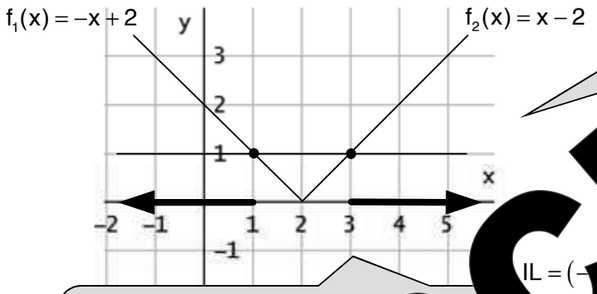


Man fasst die linke Seite der Ungleichung als lineare Betragsfunktion [illegible]$(x) = |x-2|$ auf. Durch das [illegible]assen der Betragsstriche [illegible]n die beiden Geraden
[illegible]2 und $f_2(x) = x - 2$
[illegible] werden in einem Dia[illegible]n ersten und zweiten Qua[illegible]zeichnet, denn die Funkti[illegible]ssen wegen des Betrags[illegible]iv sein.

Di[illegible]echte Seite der U[illegible]wird [illegible]lls als Funktion, [illegible]sst und ist hier e[illegible]tale [illegible]durch A(0/1).

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

2. Schritt



Die Schnitt[illegible] der Ge[illegible](x) und $f_2(x)$ mit [illegible] g bestimmen die [illegible]enzen [illegible] Lö[illegible]tervalle.

[illegible] sintervalle [illegible]prechen [illegible]er algebraisch ermitte[illegible] Lösung.

IL = (–[illegible] ∪ [3;∞)

Man kann nun auf der x-Achse [illegible] Bereiche markieren, für die [illegible] ist dass die Funktionswerte de[illegible] Geraden größer gleich 1 si[illegible]

Beispiel 2: Bet[illegible]ngle[illegible] $|x - [illegible] < 2$

Aus der Betragsungleichung entstehen die Funktionen:
$f_1(x) = -(x - 1) = -x + 1$
$f_2(x) = x - 1$
und
$g(x) = 2$.

Algeb[illegible]e Lösung

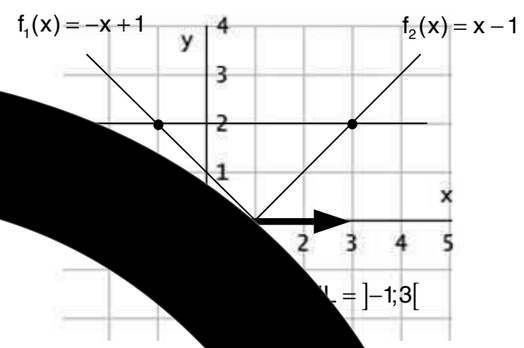
$|x - 1| < 2$

$-(x - 1) < 2$
$x - 1 >$ [illegible]

[illegible]]–1;3[

Die offenen eckigen Klammern geben an, dass –1 und 3 [illegible] Lö[illegible]

Graphische Lösung



[illegible]L =]–1;3[

Anhand der gra[illegible]ung erkennt man sofo[illegible] Lösungsmenge be[illegible]abe nur aus einem Intervall [illegible]

Beispiel 3: Betragsungleichung $|2x - 2| \le x$

Es spielt für die Vorgehensweise keine Rolle, ob auf der rechten Seite der Gleichung eine Konstante oder ein von x abhängiger Term steht.

Algebraische Lösung

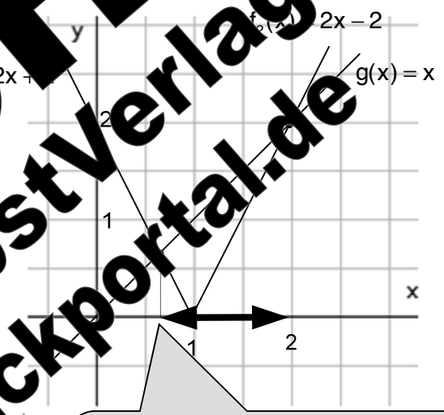
$|2x - 2| \le x$

$-(2x - 2) \le x \quad \vee \quad +(2x - 2) \le x$
$2x - 2 \ge -x \quad \vee \quad 2x -$ [illegible]
$3x \ge 2 \quad \vee$
$x \ge \frac{2}{3} \quad \vee \quad x \le 2$

IL = [illegible]

[illegible]geschl[illegible]nen eckigen [illegible] K[illegible]ben an, das [illegible] sowo[illegible] als auch [illegible] Lösungsmenge d[illegible]hören.

Graph[illegible] Lös[illegible]



Wenn man aus der graphischen Lösung die Grenzen nicht exakt ablesen kann, muss man ggf. durch Berechnung der entsprechenden Schnittpunkte die Grenzen berechnen.

Berechnung der Schnittpunkte

$f_1(x) = g(x)$	$f_2(x) = g(x)$
$-2x + 2 = x$	$2x - 2 = x$
[illegible] $\frac{2}{}$	$x = 2$

[illegible]b die Werte 2/3 und 2 zum [illegible]ungsintervall gehören, hängt [illegible]ab, ob in der Aufgaben- [illegible]die Relationszeichen [illegible]der $\ge$ bzw. $\le$ [illegible]rden.

Übung 1[illegible]

Er[illegible] [illegible]e der folgenden Betragsungleichung[illegible] [illegible]t Hilfe des [illegible]nen Lösungsverfahrens.

[illegible]2 b) $|3x - 1| < 2$ [illegible]$x + 1| \le x$

[illegible]nde Übungen _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 11.2

Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen

Bei diesen Betragsungleichungen wird ein algebraischer Lösungsweg oft [illegible] sichtlich [illegible] ist anfällig für Rechenfehler. Daher wird hier eine Lösungsstrategie verfolgt, die überwiegend [illegible] der graphischen Vorgehensweise beruht, die schon in Aufgabe 11.1 angewendet [illegible]de. Da [illegible] der Vorgehensweise übersichtlich dargestellt werden kann, werden die einzelnen [illegible]sungsschritte aufbauend aufeinander in mehreren Diagrammen gezeigt, wobei das Diagramm Schritt für Schritt ergänzt werden.

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte bei [illegible] Ermittlung [illegible] Lösung und bearbeiten Sie die anschließenden Übungsaufgaben mit dem gleichen Verfahren.

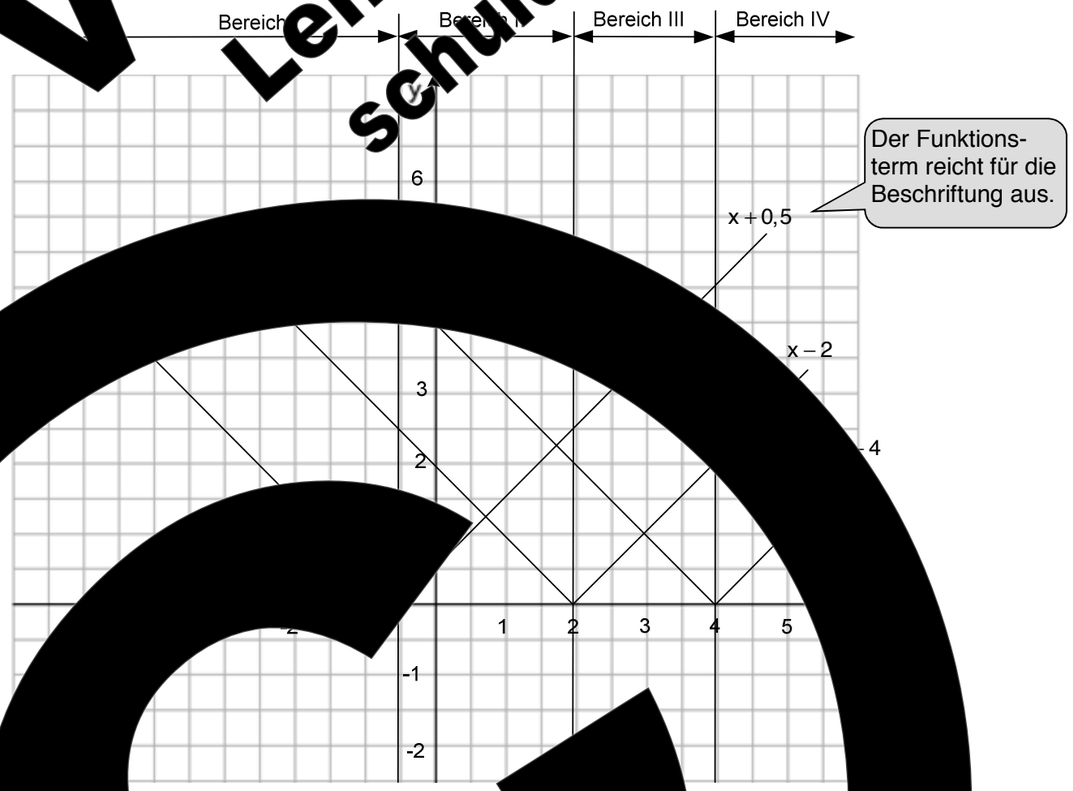
Beispiel: $|x+0{,}5|+|x-2|-|x-4|\le 2$

1. Schritt:

Entsprechend zu Aufgabe [illegible] den die Beträge aus der Betragsungleichung jeweils linearen Funktionen zugeordnet. Im 1. und 2. Quadranten verlaufen Diese Funktionen werden in einem geeigneten Koordinatensystem gezeichnet und mit den zugehörigen Funktionstermen beschriftet.

2. Schritt:

An den Stellen, an denen die eingezeichneten Geraden Nullstellen besitzen, mit Hilfe von vertikalen Geraden das Koordinatensystem in Bereiche einteilen.



Der Funktionsterm reicht für die Beschriftung aus.

3. Schritt

Eine Tabelle erstellen, in der für jeden Bereich angegeben wird, welcher Funktionsterm gültig ist.

Eintragen der Betragsterme aus der Betragsungleichung

Eintragen, ob Betragsterme addiert oder subtrahiert werden.

Eintragen, welcher Funktionsterm der eingezeichneten Geraden in den Bereichen I, II, III, IV Bereich gültig ist.

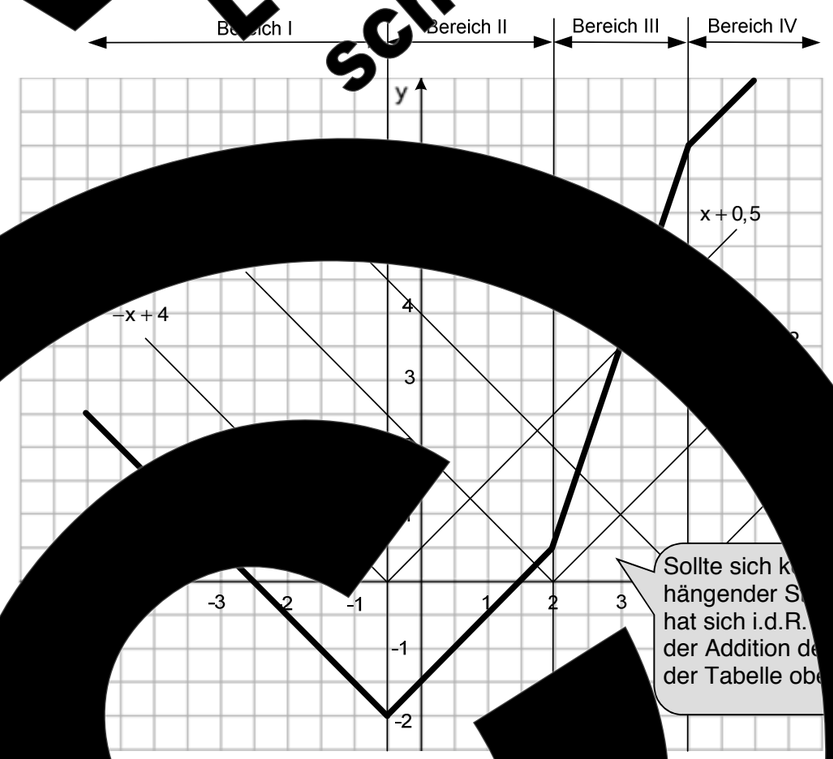
Betragsterm	Operation	I	II	III	IV
$\lvert x+0{,}5\rvert$	+	– x – 0,5	[illegible]	[illegible]	x + 0,5
$\lvert x-2\rvert$	+	–x + 2	–x + 2	x – [illegible]	x – [illegible]
$\lvert x-4\rvert$	–	[illegible]	[illegible]	–x + 4	[illegible]
	Summe:	[illegible]	x – 1,5	3x – 5,5	x + 2,5

Anhand der angegebenen Operationen die Funktionsterme in jeder Spalte addieren bzw. subtrahieren.

In der untersten Zeile erscheinen für jeden Bereich die durch Addition bzw. Subtraktion entstandenen Funktionsterme der zugehörigen Geraden. Diese Geraden werden im nächsten Schritt abschnittsweise in den jeweiligen Bereichen eingezeichnet. Es ergibt einen **zusammenhängenden** Streckenzug, mit dem dann die Lösungsmenge der ursprünglichen Betragsgleichung ermittelt werden kann.

4. Schritt

Zeichnen des Linienzuges anhand der Funktionsterme in der untersten Zeile der Tabelle von Schritt 3.

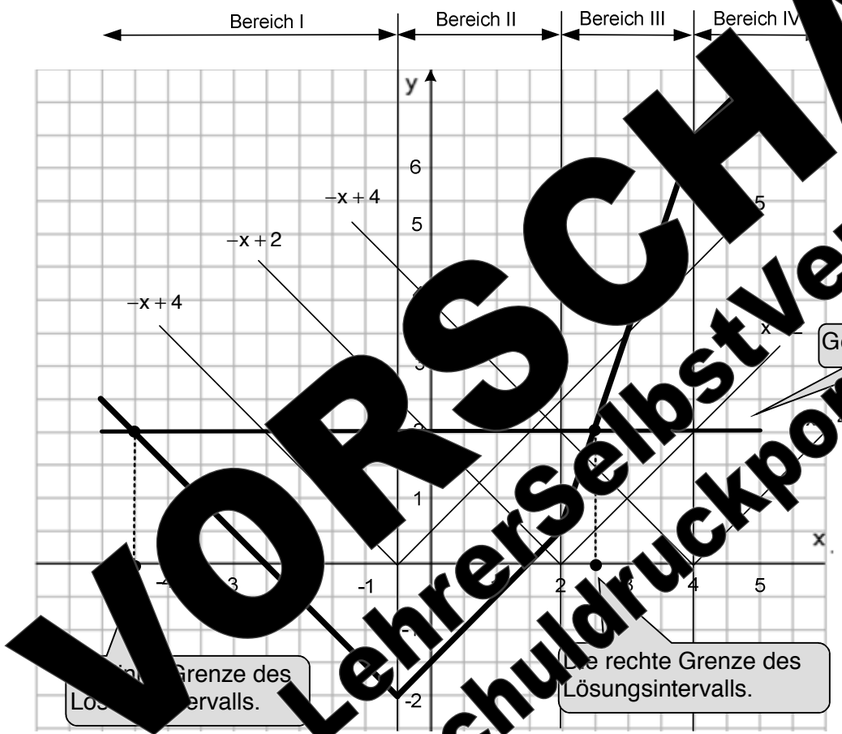


Sollte sich kein zusammenhängender Streckenzug ergeben, hat sich i.d.R. ein Rechenfehler bei der Addition der Funktionsterme in der Tabelle eingeschlichen.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

5. Schritt

Einzeichnen der Geraden, die dem Term auf der rechten Seite der ursprünglichen [illegible]gsung[illegible]hung entspricht, hier also der Geraden g(x) = 2.



6. Schritt

Man ermittelt das Lösungsin[illegible] die Schnittpunkte der Geraden g(x) mit dem Streckenzug im entsprechend[illegible]punkte des Streckenzugs mit der Geraden x genau auf [illegible] Lösungsintervalls auch aus der Zeich[illegible]

[illegible]chnittpunkt von g(x) mit der dem [illegible] Funktion f(x) = –x – 2,5

$f(x) < g(x) \quad \Rightarrow \quad x - 2{,}5 < 2 \quad \Rightarrow \quad x < 4{,}5$

[illegible]chte Grenze: Schnittpunkt von g(x) mit der dem Bereich II zugeo[illegible]n f(x) = 3x – 5,5

$f(x) < [illegible] < 2 \quad \Rightarrow \quad x < 2{,}5$

Lösungsinter[illegible]

Übung [illegible]

Ermi[illegible]ösungsintervalle der folgenden Betragsungleichungen

a) [illegible]2| ≤ 5 b) $|x-2| - |0{,}5x+1| < 1$ c) $|x-3| - |x+$[illegible]

B[illegible]bungen: _____

Abzisse 63
Ankathete 135
Ausklammern 39
Binomen höherer Ordnung 55
Binomialkoeffizienten 56
Binomialreihe 57
Binomische Formeln 41
biquadratische Gleichung ....
Bogenmaß ....
Bruchgleichungen 60
Cosinus 35
Cosinusfunktion ....
Distributivgesetz ....
echter Bruch 9
erste Winkelhalbierende 70
erweitern eines Bruch[illegible] 11
Exponent 0 25
Exponentialfunktio[illegible] 147
Exponentialgleichung[illegible]
Expone[illegible]ahm[illegible] 46
Expon[illegible]elles [illegible]stu[illegible] 45
Fa[illegible]ren 39
[illegible]ris[illegible] Form[illegible] 88
F[illegible]ion[illegible]
Ga[illegible]tionale Funktionen 2. Grades ....
Ga[illegible]tionale Funktion[illegible]höherer Ordnung 45
[illegible]thete 135
ge[illegible]te Zahl 9
Gleichungen 3. und höheren Grades 104
Grad- und Bogenmaß 137
Hypothenuse 135
kartesisches Koordinatensystem 63
Kehrwert 9
kleinste ge[illegible]
Kürz[illegible]
[illegible]ungen ....
[illegible]ngleichungen 85
[illegible]garithmengleichungen 157
Logarithmusfunktion 149
Normalparabel 87
Nullstelle 64
Ordinate 63
Parabeln st[illegible]ren[illegible]auchen 95
P[illegible]etrisie[illegible]chungen 59
par[illegible] Wu[illegible]ehen 30
pas[illegible] Dr[illegible]k 56
[illegible]diz[illegible] 142
[illegible]nomdi[illegible]sion 106
p[illegible]nomialer Fo[illegible] 88
Po[illegible] 19
Potenzrechn[illegible] 33
pq-Form[illegible] 80
quad[illegible]tische Ergänzung 48
qu[illegible]atische Gleichungen 77
quadratische Ungleichungen 85
rationalmachen des Nenners 32
rechtwinklig[illegible] Dreieck 72
Scheitelpunktform 88
Schnittpunkte 67
Sc[illegible]winkel 72
Sinus 135
Sinusfunktion 138
Steigung einer Funktion 64
Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen Funktionen 122
Tangens 135
trigonometrische Funktionen 135
trigonometrischen Gleichungen 142
trigonometrischer Pythagoras 136
Umkehrfunktionen 127
unechter Bruch 9
verschieben von Normalparabeln 88
verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln der e-Funktion 161
[illegible]erschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln [illegible] Funktion f(x) = ln(x) 165
[illegible]ktionen 135
[illegible]nen am rechtwinkligen Dreieck 72
[illegible]gen 84
[illegible] 63
zwei[illegible]ende 71

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de
©