Stochastik
selbstorganisiert erlernen

Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-032-278

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schulmaterialportal.de

Umschlag Vorderseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert

Kapit

Grundbegriffe

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingten Wahrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]eitsv[illegible]lung 61

Wahrscheinlich[illegible]verteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapitel 8
Vari[illegible]und [illegible]dard[illegible]ichung 69

Kapitel 9
[illegible]nd[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
2[illegible]seitiger Signi[illegible]iztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]de Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible], auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F[illegible]

Stoch[illegible]th[illegible]

selbst[illegible]ganisiert [illegible]lernen

[illegible]e Mathematik

[illegible]estellnummer 02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
die sich aus §§ 53 [illegible] nicht gestattet.

Lehrer[illegible]
Sok[illegible]z (Germany) 2014
w[illegible]

[illegible]w.f-druck.de

Vorwort 5

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrst[illegible] Zufalls[illegible]suche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatori[illegible] Ab[illegible]verfah[illegible] 35

Bedi[illegible] W[illegible]einlichkeiten

Kapitel 5
[illegible]ung [illegible]n Begriff der [illegible]ngten Wahrsch[illegible]lichkeit 47

Kapit[illegible]
Definit[illegible] der Wahrsch[illegible]lichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlich[illegible]keitsverteilung

Kapitel 7
Erwartu[illegible]gswert 63

Kapitel 8
Varianz und Standa[illegible]abweichung 69

Kapitel 9
Binomialverteilung 75

[illegible]tiger Signifikanztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Teste[illegible] 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]

[illegible]ngen zur Normalverteilung 139

[illegible]el 14
[illegible]wendung der Normalverteilung 149

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Vorwort

Wie schon in den bereits erschienenen Arbeitsbüchern zum Thema Integralrechnung und Lineare Algebra beruht die Erarbeitung der Zusammenhänge auch im Themenbereich Stochastik auf selbstorganisierten Lernformen. Die Lernenden werden anhand von geeigneten Aufgaben- und Fragestellungen an den Stoff herangeführt, indem Erläuterungen sowie Erklärungen frei formuliert oder entsprechende Lückentexte ausgefüllt und Berechnungen selbst durchgeführt bzw. ergänzt werden. Durch das Lesen und Erfassen der Texte in allen Details, Formulieren von Erläuterungen und das schrittweise Beschreiben von Lösungswegen werden daher neben rein fachsystematischen auch Kompetenzen im Umgang mit der Fachterminologie erworben. Darüber hinaus mittels hohen sprachlichen Anteil der Aufgaben ist der Erwerb dieser Kompetenzen [illegible]

Zielgruppe

Die selbstorganisierte [illegible] richtet sich hier anhand der Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge, bei dem die Fähigkeit sowohl notwendig auch komplexe Zusammenhänge zu [illegible] eitel[illegible]s in einer Gesellschaft, in der lebenslanges Lernen einen immer höheren Stellenwert [illegible]mmt, eine wachsende Bedeutung erhält. Der Erwerb [illegible]petenzen stellt ferner eine grundlegende Notwendigkeit für die erfolgreiche Bewältigung eines späteren Studiums dar. Somit ist dieses Arbeitsbuch [illegible] für Schülerinnen und Schüler eines musischen Oberstufe geeignet, sondern auch für Studienanfänger mit Fachhochschulreife, die diesen Themenbereich im Rahmen des Mathematikunterrichts in der Schule nicht behandelt haben, jedoch einen Studiengang wählen, in dem Kenntnisse im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausgesetzt werden. [illegible] Lernfortschritt selbst [illegible] ab Sept[illegible] [illegible]

[illegible]handhabung des [illegible]chs

[illegible] Inhalte des Arbeitsbuchs stellen die grundlegenden Zusammenhänge zu einzelnen Themengebieten der Stochastik zur Verfügung und sind damit als Basis für die Bewältigung der Aufgaben [illegible] der Abiturprüfung zu sehen. Im Fo[illegible] komplexer Aufgabenste[illegible]wendende Lösungs[illegible]odische Konzept [illegible]nd Schüler mit Zug[illegible]tik mit dem Themen[illegible]astik gut zurecht kommen, zumal hinsichtlich [illegible]handhabung von Rechenkalkülen fehlende [illegible]er nur eine untergeordnete Rolle spielen.

[illegible]buch ist für Lernende mit und ohne Vorkenntnisse [illegible]er Wahrscheinlichkeitsrechnung geeignet. [illegible]de Begriffe und Arbeitsmethoden, die bereits [illegible]

in den Bildungsstandards [illegible] Sekundarstufe I verankert sind, im ersten Kapitel wiederholt [illegible] vertieft werden. Verweise auf [illegible]gen, Ergänzungen und erweiternde Betrachtungen zu [illegible]einzelnen Themenbereichen können an den [illegible]gegebenen Stellen am Ende eines Kapitels [illegible]ert werden. Anregungen und Verbesserungswünsche werden [illegible]e entgegengenommen und können [illegible]ter der Adresse service@lehrerselbstverlag.de zugesandt werden..

Da [illegible] einzelnen Kapitel des Arbeitsbuchs aufeinander aufbauen und Querverweise auf Inhalte aus vorangegangenen Kapiteln enthalten sind, ist es notwendig, dass die einzelnen Kapiteln in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden, wobei ergänzende oder erweiternde Betrachtungen stets optional sind.

Kapitel 1 bis 3
In Kapitel 1 werden zunächst Begriffe und Definitionen zur Verfügung gestellt und elementare Arbeitsweisen, wie beispielsweise der Umgang mit Baumdiagrammen, wieder[illegible] und vertieft. Zusätzlich, insbesondere jedoch im Hinblick auf den allgemeinen Additionssatz und die spätere Verwendung bei der Behandlung von bedingten Wahrscheinlichkeiten, erfolgt hier anhand von Vierfeldertafeln eine ausführliche Betrachtung abhängiger und unabhängiger Zufallsversuche

Kapitel 4
Die Betrachtungen zu kombinatorischen Abzählverfahren sind nur auf elementare Problemstellungen beschränkt. Vertiefende und komplexe Aufgabenstellungen können ergänzend eingefügt werden. Eine Herleitung für die formelmäßige Betrachtung des ungeordneten Ziehens ohne Zurücklegen, was in den Unterlagen auch als „Lottoproblem“ bezeichnet wird, erfolgt über ein anschauliches Beispiel unter Einbeziehung des Pascalschen Dreiecks. Der [illegible]tisierung des Pascalschen Dreiecks an dieser Stelle [illegible]terlagen kommt eine vorbereitende Aufgabe [illegible] Binomialverteilung in Kapitel 9 zu.

K[illegible]
Komp[illegible]lungen zu bedingten Wahrscheinlichkeite[illegible]e Herausforderung für die Lernenden. In [illegible] Unterlagen wird ein Schwerpunkt auf die [illegible] der Aufgabentexte gelegt, indem die Text[illegible]d auf Standardformulierungen zurückgef[illegible]ie Lösung der Aufgaben erfolgt dann über d[illegible] der beiden möglichen Baumdiagramme un[illegible]dneten Vierfeldertafel, die bereits aus Kapite[illegible]t. Vertiefend werden dann der Satz von Baye[illegible]ldertafeln ergänzt.

[illegible]el 6 bis 8
[illegible]ich der Wahrsch[illegible]erteilungen werden [illegible]e Beispiele zur Er[illegible]r Zusammenhänge [illegible]zogen, wobei für [illegible]ng des Erwartungs-

wertes und der Standardabweichung eine tabellarische Form verwendet wird, mit der für diesen Aufgabentyp eine Systematisierung des Lösungswegs erreicht wird.

Kapitel 9

Nachdem der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung verankert ist, nimmt die Binomialverteilung nun eine zentrale Rolle ein. Anhand des schon bekannten Pascalschen Dreiecks wird die Formel von Bernoulli beispielorientiert hergeleitet, wobei der Bezug zur Bezeichnung Binomialverteilung für die Lernenden anschaulich ersichtlich wird. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt dann in der Handhabung entsprechender Tabellen. Auch kann hier die Verwendung von Taschenrechnern einfließen.

Da Erwartungswerte und Sigma-Umgebungen ... Binomialverteilung beim Testen von Hypothesen eine hervorgehobene Rolle spielen, wird dieser ... ausführlich behandelt. Anhand von exemp... ausgewählten Verteilungen wird zu... Aussehen ... Säulendiagramms einer Binomialverteilung ... gigkeit von n und p verdeu... für mehrere Verteilungen die Bedeutung ... Sigma-Umgebungen erarbeitet.

Kapitel 10

Der Einstieg in ... Testen von Hypothesen erfolgt in meinem Unterricht ... zweiseitigen Tests direkt im Anschluss an die Behandlung der Sigma-Umgebung über einen Schülerversuch. Im Rahmen der gegebenen Aufgabenstellung nimmt jeder Lernende aus dem gleichen Behälter eine Stichprobe von Körnern. Ich verwende hier eine Mischung aus Linsen und Sonnenblumenkernen. Langjährige Beobachtungen des Versuchs zeigen, dass bei dieser Mischung bei jeder Lerngruppe Stichproben entstehen, die im Bereich des Erwartungswertes liegen, aber auch jedes Mal Stichproben auftreten, die außerhalb der 3σ-Bereichs liegen. (Fal... wird, können ... lenbeispi... Pers... ...deutlichste Ergebnisse auftreten, ... Voraussetzung für das Verständnis der ... matik beim Testen von Hypothesen dar.

... wertung des Tests erfolgt zunächst über die An... dung der Sigma-Umgebungen und endet schließlich ... der Behandlung zweiseitiger Tests mit Fehlerbetrachtung. Schwerpunkt bei ... stellungen zu Tests ... von Annahme- und A... Hüllenkurven von Bi... reinbart, dass die G... wählt werden, da... ste Wert im Ablehnungsbereich angege...

Kapitel 11

Aufbauend auf die zweiseit... Tests w... nun, anhand eines Beispiels aus der M... die ein... gen Tests behandelt. Um die K...lexität ... fga... tellung zu reduzieren und für ... aben ... gehend einheitliche Lösungssys... ati... zustellen, wird auf einen tabella... h darst... r... sweg hingearbeitet. Hierbei ste... ieder ... ualisierung von Annahme- und Ablehnun... reich... ithilfe von Hüllenkurven der Bi... lv... M...telpunkt. Erfahrungen haben gezei... Lern... welche di... vorgeschlagene ...gehe... ise anwenden u... reiche für den Alpha- und Beta... markieren, ... stimmung der Grenzen der ... en Bereiche sich... beherrschen.

Fer... tellt die ... Ausformu... der Nullhy... se und ... Alternativhypothese ... Kopf der Tabelle eine wese... che ... e bei der Fo... ierung der beiden Fehler u... de... Konseq... dar. Anhand der vorgegebenen ...ormulierungshi... obwohl ..., wird irrtümlich ...nommen, dass ... man Bezug auf die im Kopf d... Tabelle angeg... Hypothesen nehmen und so eine für belieb... Testsituationen systematisch erfassbare Fehle... vornehmen. In der Praxis hat es sich gezeigt, dass die Lernenden, nachdem sie mithilfe der syste... en Vorgehensweise anhand der Tabelle die Zus... enhänge beim Testen erfasst haben, die Aufgabenstellung auch ohne Tabelle richtig bearbeiten.

Betrachtungen der Abhängigkeit der Fehler vom Stichprobenumfang und den Wahrscheinlichkeiten der beiden Hypothesen sowie die Behandlung von Operationscharakteristiken können als erweiternde Aufgabenstellung interpretiert werden.

Kapitel 12

Für Testsituationen, die mit den zur Verfügung gestellten Tabellen zur Binomialverteilung nicht bearbeitet werden ...nen, kommt für näherungsweise zu bestimmende Lö... die Normalverteilung zum Tragen. Dazu werden ...ormierungsverfahren selbst und anschlie... n weiteren grundlegenden Testsitua... der Tabelle zur Normalverteilung era... emen, wie die Bestimmung des Stichprob... gegebenen Fehlern oder die Betrachtung ... ervallen haben hier eine vertiefende bzw... ktion.

Dank

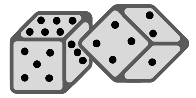
Für Anregungen zur inh... formalen Gestaltung danke ich meinem M... Gerold Pirkl, meiner langjährigen Freundin u... berstudienrätin Renate Benz-Heinbücher un... r. Torsten-Karl Strempel von der Hochschule ...

Kapitel 1: Grundbegriffe

Aufgabe 1.1

Lesen Sie den folgenden Text und formulieren bzw. veranschaulichen Sie ... mein wie möglich, was man unter den aufgeführten Fachbegriffen versteht.

Wie in jedem anderen Gebiet der Mathematik, hat m... sich ... de... ochastik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Verwendung e... ...iffe geeinigt. ...Folgenden werden grundlegende Fachbegriffe am Beispiel des W...fens ... ert.



Wirft man einen Würfel, ... weiß man zwa... ss die Zahle... bis 6 fallen können, da man jedoch nicht vorhers... n kann ... lche dieser Za... n fällt, spric... an von einem **Zufallsversuch**.

Fällt beim Würfeln zufällig die ... net man das als **...rgebnis** des Zuf...versuchs, die Menge aller Ergebnisse, hier als... die ... wird im Allg... n als **Er...menge** S bezeichnet.

Ist es beim Würfel... doch ...ispiel ... wichti... ... die geworfene Zahl eine gerade Zahl ist, dann spricht man nicht ... v... Ergebnis des Zu...versuchs, s... ern man sagt, dass das **Ereignis** „gerade Zahl" einge... ist, ... eine der Za... der Meng... A ... {2, 4, 6} fällt. Das **Ereignis** ist nicht eingetrof... ein... ungeraden Za... aus der Me... B ... {1, 3, 5} gefallen ist. Alle Teilmengen der Erg...nisme... S, w... e Mengen A und B sowie b...s...sweise auch die Menge der durch 3 teilb... Zahle... = {3, 6} werden a... **Ereignisse** ...ezeichnet.

W... sic... ...eignisse, wie die geraden Za... der Menge A und die ungeraden Zahlen der Me... B, ge... seitig auss... ßen, jedoch ...nsam die gesamte Ergebnismenge S bilden, so ...ez... net man A und B ... w. B und A als ...ignis und **Gegenereignis**. Man verwendet in diesem Fall ...eibweise Ereigni... und Ge...ereignis $\overline{A}$ bzw. Ereignis B und Gegenereignis $\overline{B}$.

Zufallsexperiment: ______________________

____

Ergeb... ______________________

____

...gebnismenge S: ______________________

____

Ereignis E... ______________________

____

...nis $\overline{E}$: ______________________

____

Gegenereignis zu A (Au... (Augenzahl ______________}

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Aufgabe 1.2

Der Begriff Wahrscheinlichkeit

Bearbeiten Sie die Aufgaben mithilfe der folgenden Definition und Angab[illegible]eibweise und zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten.

Definition Laplace-Versuch

Wenn man mit einem idealen Würfel spielt, weiß i[illegible]ass [illegible]ahrsch[illegible]inlichkei[illegible] [illegible]u würfeln genauso groß ist wie beispielsweise für eine 4 [illegible] jedes ande[illegible]gebnis der [illegible]gebnismenge, d.h. jedes Ergebnis hat die gleiche Wahrscheinlichk[illegible] Die Wah[illegible]chkeiten [illegible]nn man hier aus der Geometrie des Würfels erschließen. Man bezei[illegible]t Zufal[illegible]rsuche, bei [illegible] diese M[illegible]ale zutreffen als **Laplace-Versuche**.

Schreibweise für Wahrsche[illegible]chke[illegible]:

- Kleines **p** für di[illegible]hrsc[illegible]lichke[illegible] ein **Erg[illegible]**
- Die Wah[illegible]inlich[illegible]ür ein [illegible]**eignis** [illegible] für das Beis[illegible] „Würfeln einer geraden Zahl“ in der [illegible]ade[illegible], durch ein [illegible] P mit einer [illegible]nzenden Information, um welches Ereig[illegible]es sic[illegible]ndelt, [illegible]argestellt [illegible]rden.

Berech[illegible] vo[illegible]heinlichkeite[illegible]:

B[illegible]r Wahrscheinlic[illegible]keit **p** eines [illegible]**sses** bei [illegible]nem Laplace-V[illegible]uch:

$$p = \frac{1}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Berechnen der Wahrscheinlichkeit **P(E)** eines **Ereignisses** bei einem Laplace-Versuch:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten für E}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Berechnen vo[illegible] eines Er[illegible] A Geo[illegible]

[illegible]em bisher betrachteten Würfeln gibt es eine Reihe ande[illegible]he, die einem Laplace-[illegible]uch zugeordnet werden können. Geben Sie jeweils an, ob es [illegible]place-Versuch [illegible]ndelt, und ermitteln Sie, wenn möglich, die gesuchten Wahrscheinli[illegible] Ergebnis p des Zufallsversuchs und die W[illegible]keit P(E) für das jeweils angegeb[illegible]

	Laplace-Versuch	Wahrscheinlichke[illegible] für ein Ergebnis p	[illegible]heinlichkeit [illegible]reignis P(E)
Id[illegible] e[illegible]	ja ❍ nein ❍	p =	[illegible]

Zufallsversuch	Laplace-Versuch	Wahrscheinlic[illegible] für ein Ergebnis	Wa[illegible]heinlichkeit für da[illegible]reignis P(E)
Roulette einmal drehen (37 Felder)	ja ❍ nein ❍	p =	P(rot) =
Eine Karte aus einem Skatspiel ziehen (32 Karten)	ja ❍ nein ❍		P(Bube) =
Glücksrad mit gleichen Sektoren einmal drehen	[illegible]a ❍ [illegible]in ❍	p =	P(teil[illegible]r durch 3) =
Glücksrad mit ungleichen Sektoren einmal dr[illegible]	[illegible]a ❍ nein	[illegible] =	P(Zahl > 4) =
Ziehen [illegible] Kuge[illegible] eine[illegible]ter-sch[illegible]chen [illegible]ln	ja ❍ nein ❍	p =	P(schwarz) =
[illegible]ehe[illegible]l aus [illegible]er U[illegible]teilweise g[illegible]hen Kugeln	ja ❍ nein ❍	p =	P(schwarz) =

Weit[illegible]e Laplace-Ve[illegible]che: _____

Aufgabe 1.3

Wertebereich bei Wah[illegible]

Ermit[illegible] den Wahrscheinlichkeiten, geben Sie die W[illegible]digen Sie die Merksätze:

[illegible]hl 1 fällt) = ___ [illegible]hlen 1 oder 2 fällt) = ___

[illegible]) P(eine der Zahlen 1 bis 3 fällt) = ___ d) P(e[illegible] bis 4 fällt) = ___

e) P(eine der Zahlen 1 bis 5 fällt) = ___ f) P(eine de[illegible]6 fällt) = ___ =

g) P(keine Z[illegible] (sicheres Ere[illegible]
(un[illegible]

[illegible]achtungen beim Würfeln kann man schließen:

[illegible]ößte Wert, den die Wahrscheinlichkeit für e[illegible]gnis E annehme[illegible] P(E) = ____

[illegible]kleinste Wert, den die Wahrscheinlic[illegible]gnis E annehme[illegible] P(E) = ____

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Für den Wert der Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses g

___ ≤ P(E) ≤ ____

Beim Würfeln sind die Ereignisse E: „die geworfene Zahl ist durch [illegible]ar“ und $\overline{E}$: „die geworfene Zahl ist nicht durch 3 teilbar“ Ereignis und Gegenereignis.

Begründen Sie mit diesem Beispiel, dass gilt: P([illegible]) = 1

Bei eine[illegible]iment ist die Summe aus d[illegible]Ereignis E und dem Gege[illegible]reignis $\overline{E}$ immer 1.

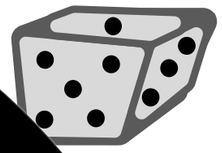
$P(E) + P(\overline{E}) = 1$

[illegible]chtig f[illegible]viele Anwe[illegible]ungen ist dieser Zusammenhang in der Form:

$P(E) = [illegible](\overline{E})$

Aufgabe 1.4

Die empirische Wahr[illegible]setz der großen Zahlen



Die [illegible]Sie, [illegible]von ausgehen kann, d[illegible]er [illegible]hkeit $p = \frac{1}{6}$ fällt.

Da hier kei[illegible]die Wahrscheinlichkeit, mit der eine [illegible]ugenzahl angezeig[illegible]bigen Flächen nicht bestimmt werden k[illegible]ur die Möglich[illegible]scheinlichkeit [illegible]das Fallen einer bestimmten Augenzahl ü[illegible]Würfeln empi[illegible]teln.

Ei[illegible]t idealer Würfel wurde in 17 voneinander u[illegible]gigen Zufallsvers u[illegible]oft, geworfen. Das entstandene Zahlen[illegible]d in den Tabellen[illegible]gestellt u[illegible]von Excel als Diagramm ausgewer[illegible]

a) Erläutern Sie anhand der Tabellen, was man bei einem Zufallsversuch u[illegible]der abs[illegible]en Häufigkeit H(i) und der relativen Häufigkeit h(i) versteht, und geben Sie die Formel a[illegible]der d[illegible]lativen Häufigkeiten h(i) berechnet werden. Bezeichnungen: Nummer d[illegible]fallsve[illegible] Anzahl der Würfe: n

Tabelle absolute Häufigkeiten H(i)

Nr	n	H(1)	H(2)	H(3)	H(4)	H(5)	H(6)
1	10	2	0	2	0	5	1
2	20	0	4	3	1	7	3
3	30	4	6	4	2	10	4
4	40	7	7	6	4	10	6
5	50	8	9	6	4	14	[illegible]
6	60	10	12	8	5	14	1[illegible]
7	70	10	14	10	6	[illegible]	13
8	80	12	17	10	8	[illegible]	14
9	90	13	17	12	1[illegible]	24	[illegible]
10	100	14	18	14	1[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	200	26	33	[illegible]	20	[illegible]	35
12	300	37	47	[illegible]	[illegible]1	60	[illegible]
13	400	46	[illegible]	97	[illegible]1	9[illegible]	[illegible]2
14	500	57	[illegible]	[illegible]	[illegible]	103	75
15	600	67	95	[illegible]	[illegible]	[illegible]	85
16	7[illegible]	[illegible]	[illegible]05	[illegible]	67	144	1[illegible]
17	[illegible]	9[illegible]	[illegible]	2[illegible]	[illegible]32	160	1[illegible]

Tabelle relative Häufigkeiten h(i)

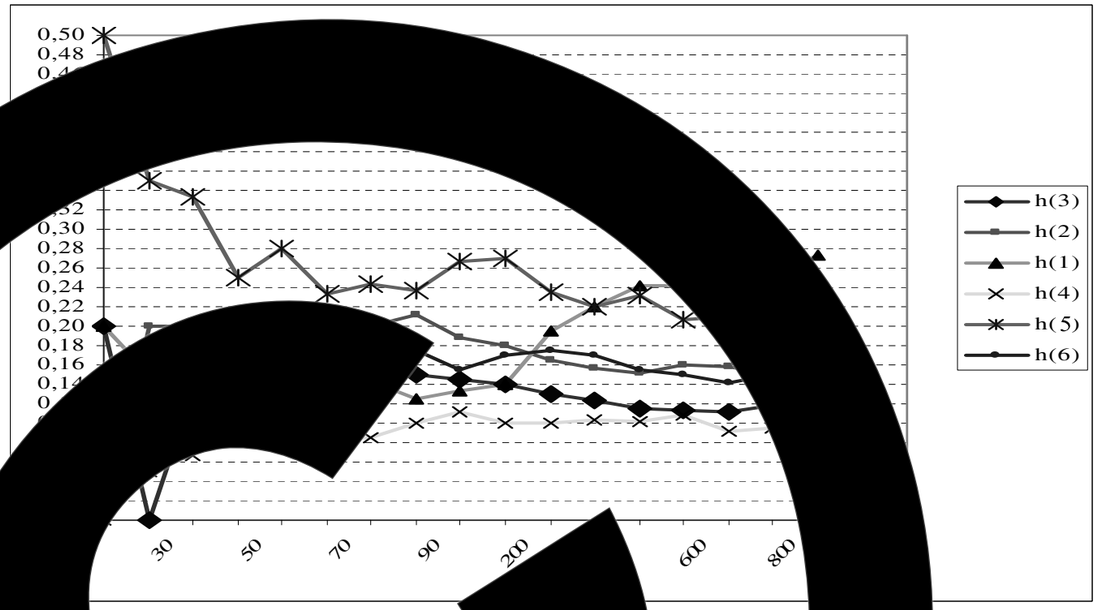
Nr	n	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)
1	[illegible]	[illegible]0	[illegible],00	0,20	0,00	0,50	0,10
2	20	[illegible]	0,20	0,15	[illegible]05	0,35	0,15
3	30	0,13	0,20	[illegible],13	[illegible]07	0,33	0,13
4	[illegible]0	0,18	[illegible],18	[illegible]5	0,10	0,25	0,15
5	[illegible]0	0,16	[illegible],18	0,12	0,08	0,28	0,18
6	60	0,17	[illegible]20	0,13	[illegible],08	[illegible]23	0,18
7	70	[illegible]	0,20	0,14	[illegible]09	[illegible]24	0,19
8	[illegible]	[illegible]15	0,21	0,13	[illegible]9	0,24	0,18
9	[illegible]90	[illegible],14	0,19	[illegible]13	0,11	0,27	0,16
10	[illegible]0	0,14	0,18	[illegible]14	0,10	0,27	0,17
11	[illegible]200	0,13	[illegible]17	[illegible],20	0,10	0,24	0,18
12	[illegible]300	0,12	[illegible],16	0,22	0,10	0,22	0,17
13	400	[illegible]	[illegible],15	0,24	0,10	0,23	0,16
14	500	[illegible]11	0,16	0,24	0,11	0,21	0,15
15	600	[illegible],11	0,16	0,25	0,09	0,21	0,14
16	[illegible]0	0,12	0,15	0,25	0,10	0,21	0,15
17	[illegible]0	0,11	0,14	0,27	0,10	0,20	0,14

[illegible]so[illegible]äufigkeit: _____

[illegible]ive Häufigkeit: _____

Formel: h(i) = _____

b) Erläutern Sie die Bedeutung des Diagramms.



VORSCHAU
LehrerselbstVerlag
Schuldruckportal.de

c) Beurteilen Sie, ob die 800 Würfe ausreichen, um eine Aussage zur Wahrschein[illegible]it mac[illegible] zu können, mit der die Flächen 1 bis 6 bei dem vorliegenden nicht idealen [illegible]ürfel ang[illegible]t w[illegible]en. Erläutern Sie dabei auch, wie man an einem Diagramm für die relativ[illegible]keiten [illegible]en könnte, ob man von der Wahrscheinlichkeit, für das Auftreten des Erei[illegible]se[illegible]rechen kann.

Das Gesetz [illegible] Zah[illegible]

Wenn [illegible] für [illegible]gabe 1[illegible]) die richtige [illegible]mel ermittelt [illegible], ist Ihnen sicherlich aufgefallen, dass die Berech[illegible]g d[illegible]lativ[illegible]äufigkeit h(E) für ein Erei[illegible]E der Definition der Wahrscheinlichkeit sehr ähnlich [illegible] Für e[illegible] große [illegible] von Du[illegible]ungen des Zufallsversuchs nehmen die [illegible]ank[illegible]en der Werte für die [illegible]lative Häufig[illegible]ab. Wenn sich der Wert stabilisiert, kann man den für [illegible] Häufigkeit h(E) [illegible]mittelten Wert [illegible] Wahrscheinlichkeit P(E) annehmen. Man spricht dann von ein[illegible]rischen W[illegible]rscheinlichkeit [illegible]es gilt:

$$h(E) = \frac{\text{absolute Häufigkeit des Ereignisses E}}{\text{Anzahl aller Zufallsversuche n}}$$

h(E) [illegible]

[illegible] von n gilt: $P(E) \cong h(E)$

Ergä[illegible]gen: _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert [illegible]en

Kapit[illegible]

Baumdiagramme u[illegible]
[illegible]ige Zufallsversu[illegible]

02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]nor[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]

[illegible]e Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

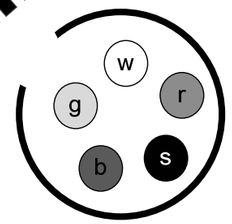
Kapitel 2: Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden Zufallsversuche untersu[illegible]ei dene[illegible]pielsweise nur die Wahrscheinlichkeit ermittelt hat, wenn ein Würfel einmal ge[illegible]rd od[illegible]e einzige Kugel aus einer Urne gezogen wurde. Man bezeichnet diese Zufallsversu[illegible]als [illegible]**fige Versuche**.

Zufallsversuche können jedoch auch mehrmals durchgefüh[illegible]den, [illegible]aus mehreren Stufen bestehen. Man bezeichnet diese Zufallsversuche als **[illegible]ehrst[illegible]** Vers[illegible]e Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist dann die Verwendung von [illegible]n hilfreich. A[illegible]auend auf den Kenntnissen zu Baumdiagrammen, die Sie be[illegible]ts in d[illegible]kunda[illegible]e I erworb[illegible]ben, werden hier die grundlegenden Regeln wiederholt und [illegible]

Dazu wird zunächst ein einfacher Zufallsv[illegible]ch zug[illegible]de gelegt, bei d[illegible]m aus einer U[illegible]e zwei Kugeln gezogen werden. Es wird dabei u[illegible]chie[illegible]ob ei[illegible]gezogen[illegible]Kugel vor dem n[illegible]n Ziehen zurückgelegt wird oder nicht. M[illegible]spricht da[illegible]nen m[illegible]ohne Zurücklegen.

In der rechts abge[illegible]ten[illegible]e be[illegible]ich jewe[illegible]e weiße, eine schwarze, eine ro[illegible]ne[illegible]und eine grüne Ku[illegible]. Es sollen zwei Kugeln gezogen werden.



[illegible]al[illegible]1

Au[illegible]r Urn[illegible]d beim ers[illegible]n Zug die blau[illegible]gel gezogen. Geben Sie den Inhalt der Urne beim zwe[illegible] Ziehen an, wenn

a) [illegible]urücklegen [illegible]gen wird: _____

b) ohne Zurücklegen gezogen [illegible]d: _____

c) Vervollständigen Sie:

Beim Zieh[illegible]er Inhalt der Urne nicht. Daher ergeben sich bei beiden [illegible]einlichkeit, eine Kugel in einer jeweiligen [illegible]

[illegible]m Ziehen ohne Zurücklegen verändert sich der [illegible]her ergeben sich bei der ersten und bei der zweiten Ziehung _____ [illegible]die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel in der jeweiligen Farbe zu ziehen.

Aufga[illegible]

A[illegible]Seite si[illegible]ollständigen Baumdiagramme mit allen B[illegible]beim Ziehen von [illegible]t und ohne Zurücklegen aus der oben abgebildeten Urne an[illegible]e [illegible]lichkeit für eine Kombination xy aus zwei gezogenen Kugeln wir[illegible]ngegeben, [illegible]mer die zuerst gezogene Kugel und y imme[illegible]zweite gezogene[illegible]t. D.h., wenn [illegible] und dann schwarz gezogen wird gilt: P(r[illegible]tlichen Sie sich [illegible]agramm und die [illegible]iede hinsichtlich der Ziehungen mit u[illegible]legen.

Abb. 2.1 Baumdiagramm für Ziehen mit Zurücklegen

Abb. 2.2 Baumdiagramm für Ziehen ohne Zurücklegen

Wendet nnung von Wahrscheinlichkeiten an, erg r die Wahr eine bestimmte Kugelkombination xy zu ziehen, folgende We

rücklegen: $P(xy) = \frac{1}{\_\_\_} = 0,\_\_\_$

e Zurücklegen: $P(xy) = \frac{1}{\_\_\_} = 0,\_\_$

Aufgabe 2.3

Einfache Additionsregel

Mithilfe der ausführlichen Baumdiagramme und der Kenntnis, dass e kombination xy beim Ziehen mit Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{25} = 0,$ nd bei e Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{20} = 0{,}05$ hat, sollen nun R für ngar mit Baumdiagrammen erarbeitet werden. Übertragen Sie die Vorgeh weis Beispi 1 und 2 auf die Aufgabenstellung, und ergänzen Sie dann den Text für die **Pf tionsr**

Beispiel 1

Bestimmung der Wahrscheinlich es Er nter den w ezogenen ugeln befindet sich mindestens eine rote Kugel", abgekürzt P durch Abzählen im Baumdiagramm.

Ziehen mit Zurücklegen

Aus dem Baumd amm nn ma ch Abzählen entneh von 25 Möglichkeit gibt, stens e rote Kugel zu erhalte gibt

P mit = P(wr) (sr) + P(rw) + (rs) + P(rr) + P(r P(rg) + P(br) P(gr)

$\cdot \frac{1}{25} = \frac{9}{25} = 0{,}36$

Ziehen ohne Zurücklegen

Aus dem Baumdiagramm kann man durch Abzählen entnehmen, dass es 8 von 20 Möglichkeiten gibt, eine rote Kugel zu erhalten. Damit gibt sich:

P(mit rot) = P(wr) + P(sr) + P(rw) + P(rs) + P(rb) + P(rg) + P(br) + P(gr)

$= 8 \cdot \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

B 2

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit es Ereignisses: „Es werden beim zweimaligen Ziehen zwei gleichfarbige Kugeln gezogen".

Ziehen mit Zurücklegen

Durch Ab

(gg)

$= 5 \cdot \frac{1}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Ziehen ohne Zurücklegen

Durch Abzählen ergibt sich:

leiche) = 0 (unmögliches Ereignis)

Aufgabenstellung

Zeigen Sie analog zu Beispielen, dass sich für die Wa ten die Werte 0,48 und 0,6 ergeben, w Unter den zwei gezogenen t sich genau eine bunte Kug rote oder eine blaue Kugel.

Zieh

unte) =

Ziehen ohne Zurück

P(genau eine bunte) =

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Ergänzen Sie anhand der Erkenntnisse aus den Beispielen und der Aufgabe den [illegible]t für die [illegible]ende Regel:

Einfache Additionsregel

Besteht ein Ereignis E aus mehreren einzelnen disjunkten [illegible]gniss[illegible] mit E={e_1, e_2, e_3, ...),

dann kann die Wahrscheinlichkeit P(E) _____ der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereig[illegible] e_i be[illegible]net werd[illegible]

P(E) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) [illegible]

*die einzelnen Ereignisse e_i haben nur unterschi[illegible]he Ele[illegible]nte

Aufgabe 2.4

Reduzierte Baumdiagra[illegible]n Ziehu[illegible]Zurück[illegible]

Das Zeichnen eines voll[illegible]s mit allen Ereignissen und [illegible]gnissen, wie in den Abbildungen 2.1 [illegible]2.2, e[illegible]t oft umfangreiche Baumdiagramme, [illegible] denen das Heraussuchen bzw. Abzählen der [illegible]abe[illegible]lung günstiger Ereignisse aufwe[illegible]g ist. Es sollen daher nun effektivere M[illegible]oden [illegible]s Arbeiten mit Baumdiagrammen entwickelt werden. Als Beispiel dient das schon a[illegible]s Aufgabe 2.3 [illegible]spiel 1 bekannte Ereignis: „Mar[illegible]e hält beim zweimaligen Ziehen mindestens eine ro[illegible]fug[illegible]also k[illegible]P(mit rot).

Be[illegible]ne[illegible]e dazu zunächst noch einmal mit der oben verwendeten Abzählmethode anhand des umfang[illegible] Baumes [illegible] Abb. 2.1 für das [illegible]hen mit Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse. Geb[illegible] Sie das Ergebnis jeweils als Bruch an.

Abkürzung für rotgezogen: r und Abkürzung für das Gegenereignis nicht rot gezogen: $\bar{r}$

– Beide Kugeln sind rot P(rr): P(rr) = ___

– Die erste K[illegible]

– [illegible]

[illegible]ger ist rot P($\bar{r}$ $\bar{r}$): P($\bar{r}$ $\bar{r}$) = ___

[illegible]e Wahrscheinlichkeiten für die vier Ereignisse sollen nun auf einem [illegible]it einem reduzierten Baumdiagramm [illegible] noch die für die Aufgabenstellu[illegible] Ergebnisse rot r und nicht rot $\bar{r}$ erst[illegible]

Anstatt jede[illegible] Ziehung zu zeichnen, fasst man me[illegible]usammen. Somit füh[illegible]u einem Ergebnis, sondern auch zu ei[illegible]s.

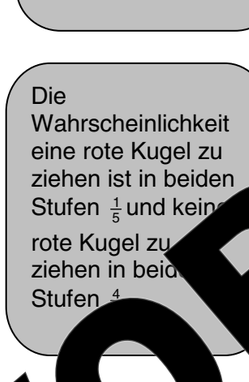
Das W[illegible] Ästen berücksichtigt man dann, indem man an einen Ast die [illegible]lichkeit für das [illegible]de Ereignis bei der Ziehung, hier die Wahrsch[illegible]nlichkeiten für $\bar{r}$ d[illegible]ibt.

Fü[illegible]nung der Wahrscheinlichkeiten des hier[illegible] Ereignisses P(m[illegible] sich das fo[illegible]ndiagramm an. Ergänzen Sie die feh[illegible] bei den Wahrsc[illegible]en.

In beiden Stufen des Zufallsversuchs wird nun nur noch zwischen den Ereignissen rot und nicht rot unterschieden.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse P(rr), P(r$\bar{r}$), P($\bar{r}$ r) und P([illegible] [illegible]t man, man die Wahrscheinlichke[illegible]r Ereignisse r bzw. $\bar{r}$ entlang [illegible] zugehö[illegible]er Stufen, d.h. entlan[illegible]es Pf[illegible] miteinander multipliziert.

Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen ist in beiden Stufen $\frac{1}{5}$ und kein[illegible] rote Kugel zu ziehen in beid[illegible] Stufen $\frac{4}{5}$.



$P(rr) = \frac{1}{25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

$P(r\bar{r}) = \frac{4}{25} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$

$P(\bar{r}r) = \frac{4}{25} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$

$P(\bar{r}\bar{r}) = \frac{16}{25} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$

Die Summe [illegible] Wahrsch[illegible]lichkeiten an den Äst[illegible] einer Verzweigung ist im[illegible] 1.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aller Pfade hier also
P(rr) + P(r$\bar{r}$) + P($\bar{r}$ r) + P($\bar{r}\bar{r}$)
ist immer 1.

Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis P(mit rot):

Weg [illegible] [illegible]4 [illegible] $\frac{9}{25}$

[illegible]mit rot) = 1 – P($\bar{r}\bar{r}$) = 1 – $\frac{16}{25}$ = [illegible] $\frac{9}{25}$

Erläutern Sie, welche Regeln für die Berechnung von P(mit rot) [illegible] Wegen verwendet wurden:

© Ursula Pirkl, Juli 2014

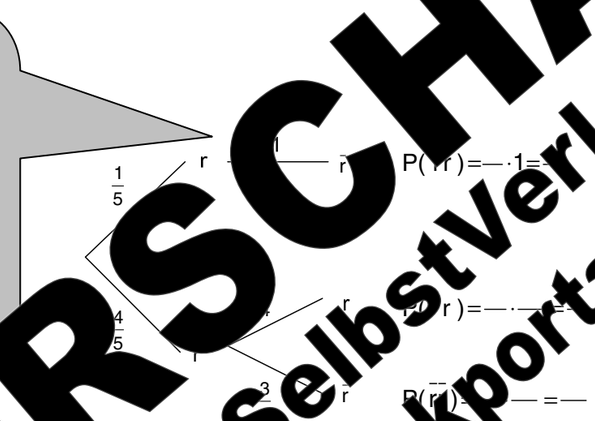
VORSCHAU
LehrerselbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 2.5

Reduzierte Baumdiagramme beim Ziehen ohne Zurücklegen

Beim Ziehen ohne Zurücklegen ergibt sich für das Ereignis E: „Man erhält mindestens eine rote Kugel“, das folgende reduzierte Baumdiagramm.

Da nach dem ersten Ziehen keine rote Kugel mehr vorhanden ist, fehlt der Ast rot in der zweiten Stufe des Baums und es gilt: P(rr) = 0. Nicht rot zu ziehen ist damit das sichere Ereignis.



a) Begründen Sie, warum sich die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der zweiten Stufe des Baumdiagramms von den Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe unterscheiden.

b) Zeigen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten in jeder Verzweigung den Wert 1 annimmt.

Rechnung, dass sich für die einzelnen Pfade die Werte $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}$ und $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ ergeben, und tragen Sie die Werte an den Stellen in der Abbildung ein.

d) Erläutern Sie durch eine Rechnung, wie man aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses P(E) erhält.

Aufgabe 2.6

Pfadmultiplikationsregel

Ergänzen Sie den folgenden Satz anhand der Betrachtungen von Aufgabe 2.5 zu einer gültigen Regel:

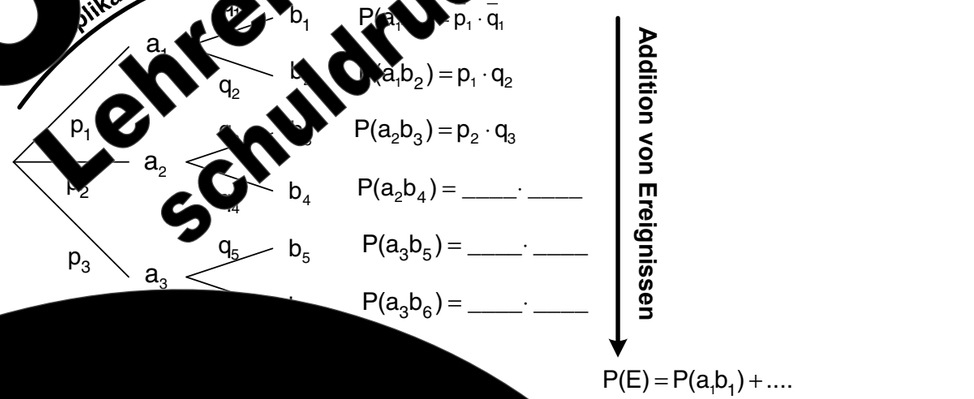
Pfadmultiplikationsregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnet man durch _____ der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades, der zu dem gesuchten Ereignis führt.

Aufgabe 2.7

Zusammenfassung Aufgaben mit Baumdiagrammen

Ergänzen Sie anhand des gebildeten Baumdiagramms die folgenden Texte:



Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $P(a_ib_j)$ werden durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang eines _____ berechnet.

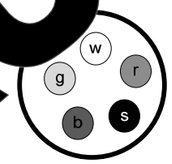
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses P(E), das sich aus Ereignissen $P(a_ib_j)$ bilden lässt, wird durch Addition der zu E passenden Wahrscheinlichkeiten berechnet.
- Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen einer Verzweigung ist immer _____ .

Die Summe aller Ereignisse $P(a_ib_j)$ ist immer _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 2.7

Bestimmen anhand der bereits bekannten Urne (s. rechts) für das Ziehen mit und ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, mindestens eine bunte Kugel zu erhalten, indem Sie Ihre Kenntnisse über reduzierte Baumdiagramme, Pfadmultiplikationsregel und einfache Additionsregel anwenden. Ergänzen Sie die Angaben im Baumdiagramm, und vergleichen Sie Ihre Endergebnisse mit Aufgabe 2.3.



.

Verwendete Abkürzungen: bunt b und nicht bunt $\bar{b}$

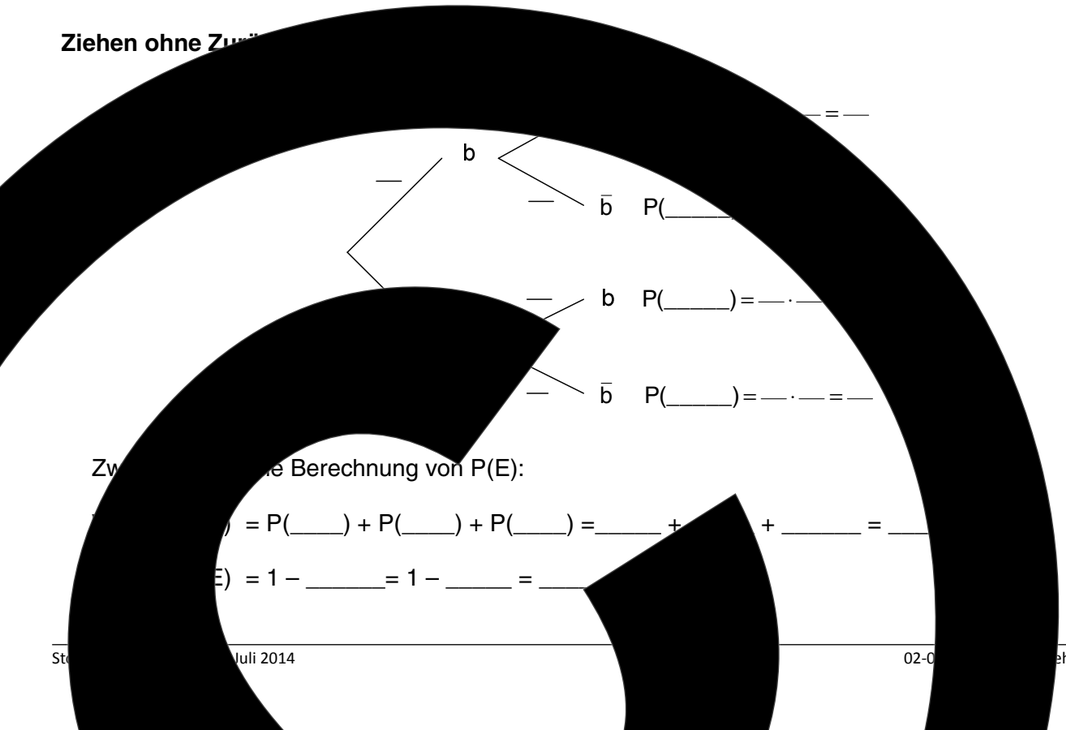
Ziehen mit Zurücklegen:

Wege für die Berechnung von P(E):

Weg 1: P(E) = P(bb) + P(b b̄) + P(b̄ b) = _____ + _____ + _____ = _____

Weg 2: P(E) = 1 – P($\bar{E}$) = 1 – P(b̄ b̄) = 1 – ____ = _____

Ziehen ohne Zurücklegen:



Zwei Wege für die Berechnung von P(E):

P(E) = P(____) + P(____) + P(____) = _____ + _____ + _____ = _____

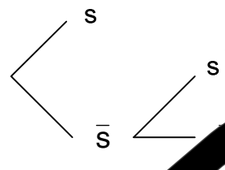
P(E) = 1 – _____ = 1 – _____ = _____

Aufgabe 2.8

Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der Baumdiagramme, und überprüfen Sie durch Rechnung die angegebenen Ergebnisse.

a) Aus der bereits bekannten Urne soll so lange ohne Zurücklegen gezogen werden, bis die schwarze Kugel gezogen wird. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Pfaden des zughörigen Baumdiagramms und bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller angegebenen Ereignisse.

Ein Zufallsversuch ist immer beendet, wenn die schwarze Kugel gezogen wurde. Damit muss an diesen Pfaden auch kein weiterer Ast gezeichnet werden.



Im ersten Zug s... P(s) = _____ = 0,2

Im z... schw... P(s̄ s) = _____ = 0,2

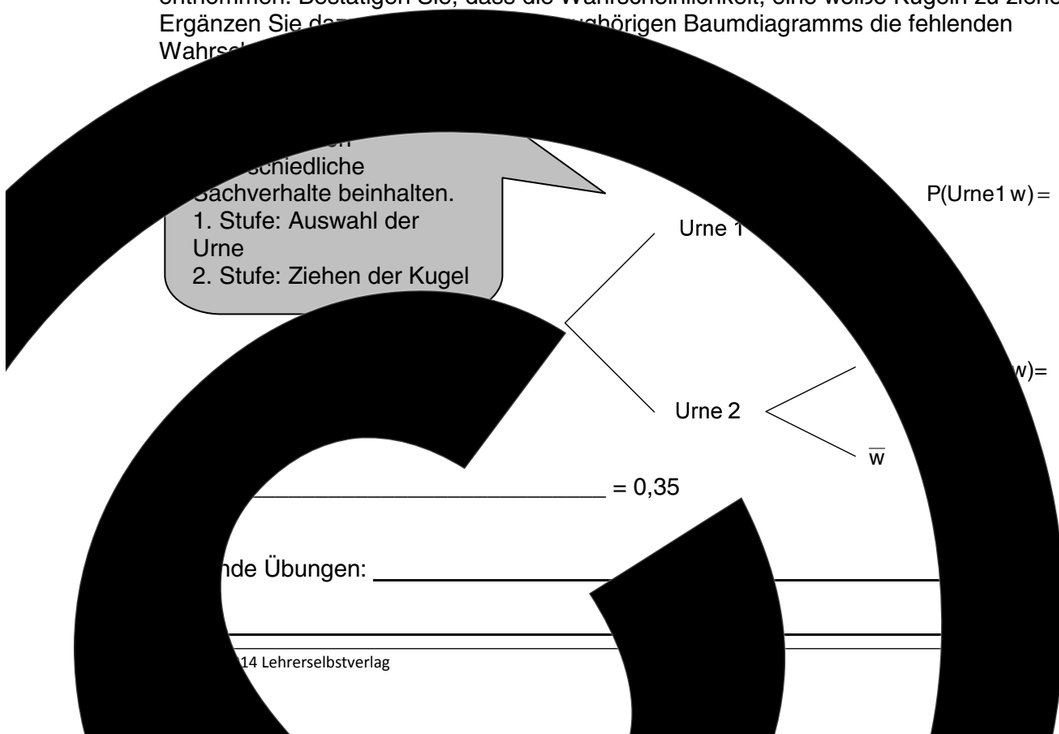
...n Zug s... warz: P(s̄ s̄ s) = _____ = 0,2

...vierten ... schwarz: P(s̄ s̄ s̄ s) = _____ = 0,2

...ten Zug schwa... P(s̄ s̄ s̄ s̄ s) = _____ = 0,2

b) Zusätzlich zur ersten Urne gibt es eine zweite Urne, in der eine weiße und eine schwarze Kugel liegt. Es wird zuerst eine der beiden Urnen ausgewählt und dann aus dieser ausgewählten Urne eine Kugel entnommen. Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugeln zu ziehen, 35% beträgt. Ergänzen Sie das ... zughörigen Baumdiagramms die fehlenden Wahrsch...

...schiedliche Sachverhalte beinhalten.
1. Stufe: Auswahl der Urne
2. Stufe: Ziehen der Kugel



...nde Übungen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …den

Kapit…

Vierfeldertafel

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapitel 8
Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9
Binomialverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10
Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

Weitere Betrachtungen zur Normalverteilung 139

Kapitel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtausgabe: Stochastik selbstorganisiert erlernen (Bestellnummer: 278)

Stochastik

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Das Werk, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, die sich aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

Lehrerselbstverlag
Pirkl Medien & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
www.lehrerselbstverlag.de
Druck: www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

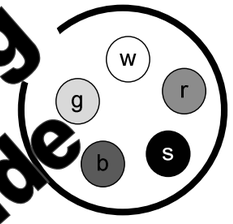
Kapitel 3: Vierfeldertafel

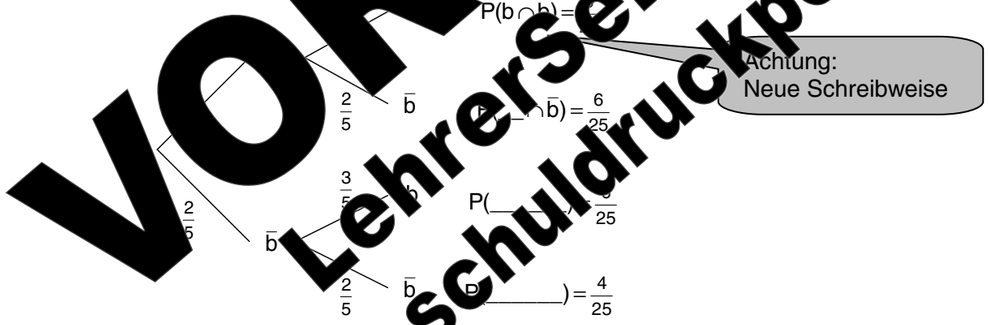
Als Alternative zu Baumdiagrammen kann man bei geeigneten Zufallsversuchen das Baumdiagramm durch eine sogenannte **Vierfeldertafel** ersetzen. Die Verwendung der Vierfeldertafel ist bei der Behandlung von bedingten Wahrscheinlichkeiten (s. Kapitel 5) sehr hilfreich.

Aufgabe 3.1

a) Struktur der Vierfeldertafel bei stochastisch unabhängigen Zufallsversuchen, wie beim Ziehen mit Zurücklegen

Aus der durch Kapitel 2 bekannten Urne mit zwei roten und drei grünen mit Zurücklegen gezogen werden und das Ereignis „Es wird mindestens eine bunte Kugel gezogen“ erneut betrachtet werden. Dazu gehört das Baumdiagramm. Haben Sie bereits in Aufgabe 2.7 erstellt. Die Schreibweise für die Ereignisse soll allerdings auf eine etwas vereinfachtere Form erweitert werden:
Wenn das Ereignis „Zwei bunte Kugeln gezogen“ eintritt, ist ja rot **und** bunt gezogen worden. Das wird durch die Schreibweise b ∩ b gekennzeichnet, wobei das Zeichen „∩“ bedeutet. Ergänzen Sie fehlende Angaben bei den angegebenen Ereignissen.





Die folgende Abbildung zeigt eine Vierfeldertafel für diese Aufgabenstellung. Verdeutlichen Sie sich, dass die Wahrscheinlichkeiten, welche man an die Äste des Baumdiagramms schreibt, in den hellgrauen **äußeren** Feldern der Vierfeldertafel erscheinen und die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse in den inneren Feldern eingetragen werden.

		zweite Ziehung	
erste Ziehung	$\frac{9}{25}$		$\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$
$\bar{b}$ erste Ziehung	$\frac{6}{25}$		$\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$
	$\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$	$\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$	

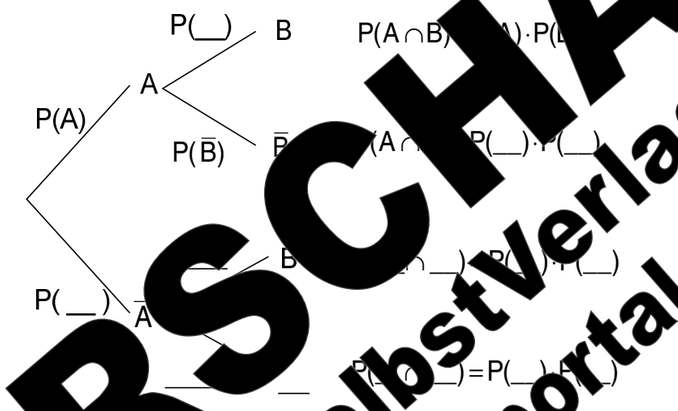
Verdeutlichen Sie sich die folgenden Zusammenhänge bei der Vierfeldertafel:

- Die Summe zweier Werte in den inneren Feldern ergibt immer den Wert in den entsprechenden Zeile bzw. Spalte in den äußeren Feldern.
- Die Summe der Werte in der äußeren Zeile bzw. Spalte ergeben immer 1.
- Die inneren Werte lassen sich durch Multiplikation der beiden Werte der äußeren Felder in der gleichen Zeile und Spalte ermitteln. Diese Eigenschaft ist allerdings nicht immer gegeben, sondern nur dann ein Zufallsversuch vorliegt, bei dem die beiden Zufallsversuche **voneinander unabhängig**, man sagt **stochastisch unabhängig,** voneinander sind. Es ist beim Ziehen mit Zurücklegen erfüllt.

Stochastik © Ursula Pirkl, Juli 2014

Aufgabe 3.2

a) Ergänzen Sie im folgenden Überblick für den Zusammenhang von Baumdiagramm und Vierfeldertafel bei einem **stochastisch unabhängigen** Zufallsversuch die fehlenden Angaben.

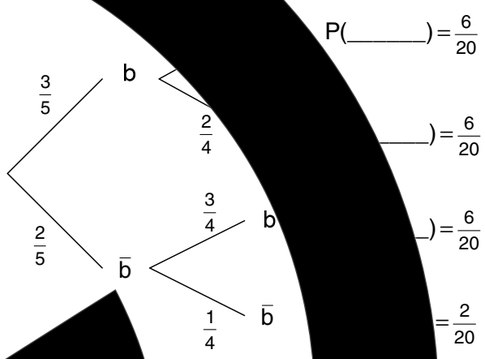


	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(\_\_ \cap \_\_) = P(\_\_) \cdot P(\_\_)$	$P(\_\_)$
$\bar{A}$	$P(\_\_ \cap \_\_) = P(\_\_) \cdot P(\_\_)$	$(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A})$
	P(B)	P(__)	

b) Struktu… …fallsversuchen, wie beim Ziehen ohne Zu…

…on Aufgabe a) wird nun e… …rogenen Kugel betrachtet. Auch …gabenstellung haben Sie bereits in Aufg… …Baumdiagramm erstellt.

…nzen Sie die fehlenden Angaben, und …läutern Sie, woran man im Baumdiagramm erkennt, dass ein Zufallsversuch ohne Zurücklegen erfolgt ist.



P(_____) = 6/20

…) = 6/20

…) = 6/20

… = 2/20

Vierfeldertafel:

Da beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten der … Stufe … von dem Ausgang der Ziehung in der ersten Stufe abhängen, bezeichnet … mit dieser Eigenschaft als **abhängige** bzw. **stochastisch abhängige** Zufall… …erdeutlichen Sie sich die Auswirkungen der Abhängigkeit auf die Zusammen… bei … Vierfeldertafel:

	b zweite Ziehung	…weite …ng	
b erste Ziehung	$\frac{6}{20}$	$\frac{…}{20}$	$\frac{12}{20} = \frac{3}{…}$
$\bar{b}$ erste Ziehung	$\frac{6}{2…}$	$\frac{…}{20}$	$\frac{…}{20} = \frac{…}{5}$
	$\frac{12}{20} = \frac{…}{5}$	$\frac{8}{20} = \frac{2}{…}$	1

- Die vertikale und h…rizon… Sum… der Wahrsc…inlichkeiten in den inneren Feldern ergibt immer den W… entsp…chenden Zei… bzw. Spalte in den äußeren Feldern.
- Die Summe … äußeren Z…le bzw. Spalte … immer _____
- …Wahrsch…inlichkeiten für die … Stufe des Bau… werden an den entsprechenden Stellen … äuße… Feld… angegeben.
- …Wahrs…inlichkeiten für die zweite Stufe des Baumes kann man der Vierfeldertafel nicht di… …en zug…hörigen äußeren F…dern entnehmen.
- Die Wahrscheinl…keiten der inneren Felder lassen sich **nicht** durch Multiplikation der beiden …gehörige… Werte der äuße… Felder in der gleichen Zeile und Spalte ermitteln.

Aufgabe 3.3

In einer Vierfelde… …heinlichkeiten für einen stochastisch unabhängigen und einen st… …tragen. Fassen Sie die Gemeinsamkeiten und Un… Sie die folgenden Texte ergänzen:

…chen die in den äußeren Feldern …gebenen Wahrscheinlichkeiten den Werten … …lichkeiten an den Ästen der _____ und _____ Stufe eine… …aumdiagramms, während bei einem stochastisch abhängigen Zufallsversuch nur die Wah… …n der _____ …zugehörigen Baumdiagramms … …en Feldern der Vierfe…

b) … …ängigen und _____ …ch kann man die …inlichkeiten der äußeren Felder durch entsprechende Summe… …s den Werten _____ Feldern ermitteln.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

c) Bei einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch kann man die Werte für die Wahrscheinlichkeiten der inneren Felder durch entsprechende Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten der _____ Feldern ermitteln. Das ist bei einem stochastisch abhängigen Zufallsversuch _____.

d) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten in der Zeile und Spalte der inneren Feldern ergeben bei einem _____ und einem _____ Zufallsversuch bei jeder Vierfeldertafel den Wert 1.

e) Die Summe der Werte für die Wahrscheinlichkeiten aller inneren Felder ergibt ____.

Übungen

3.1 Prüfung auf stochastische Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit bei der Vierfeldertafel

a) Begründe ggf. unter Anwendung einer Rechenregel, dass die folgende Vierfeldertafel zu einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch gehört.

	Merkmal B	Merkmal $\overline{B}$	
Merkmal A	0,15	0,25	0,4
Merkmal $\overline{A}$	0,45	0,45	0,6
	0,3	0,7	1

_____

_____

b) Begründe ggf. unter Anwendung einer Rechenregel, dass die folgende Vierfeldertafel zu einem stochastisch abhängigen Zufallsversuch gehört.

	Merkmal D	Merkmal $\overline{D}$	
Merkmal C	0,08	0,12	0,2
Merkmal $\overline{C}$	0,32	0,48	0,8
			1

_____

_____

Ü3.2 Aus einer Urne mit 2 roten und 4 schwarzen Kugeln werden zwei Kugeln gezogen.

Die Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen. Erstellen Sie ein Baumdiagramm. Übertragen Sie die Werte für Wahrscheinlichkeiten und Ereignisse an die entsprechenden Stellen einer Vierfeldertafel, und prüfen Sie, ob die Regeln für die Addition und Multiplikation bei der Vierfeldertafel erfüllt sind.

Baumdiagramm:

Vierfeldertafel:

Die Regeln für die Addition sind _____

Die Regeln für die Multiplikation sind _____

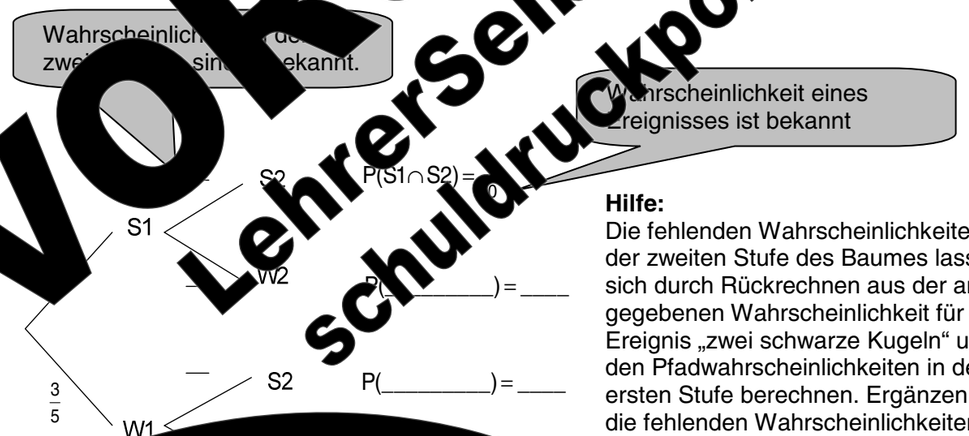
VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Ü3.3 Bei einem Glücksspiel gibt es eine Urne mit 2 schwarzen und drei weißen Kugeln. Es soll ermittelt werden, wie die Mischung aus schwarzen und weißen Kugeln bei einer zweiten Urne aussehen muss, damit die Wahrscheinlichkeit zwei schwarze Kugeln zu ziehen bei 10% liegt, wenn aus jeder Urne ein Kugel gezogen wird.

Abkürzungen: S1 schwarze Kugel aus Urne 1, W1 weiße Kugel aus Urne 1
S2 schwarze Kugel aus Urne 2, W2 weiße Kugel aus Urne 2

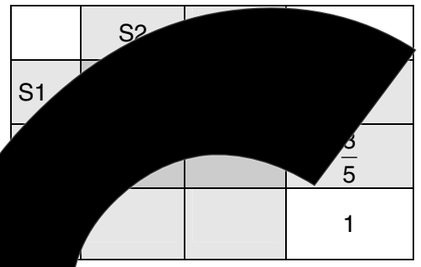
a) Begründen Sie, warum es sich bei diesem Spiel um ein stochastisch unabhängigen Zufallsversuch handelt, obwohl es sich hier nicht um einen Versuch „mit Zurücklegen" handelt.

b) Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiter aller Ereignisse mithilfe eines Baumdiagramms:



Hilfe:
Die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumes lassen sich durch Rückrechnen aus der angegebenen Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zwei schwarze Kugeln" und den Pfadwahrscheinlichkeiten in der ersten Stufe berechnen. Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe und zeigen Sie, dass es in Urne 2 eine schwarze und vier weiße Kugeln geben muss.

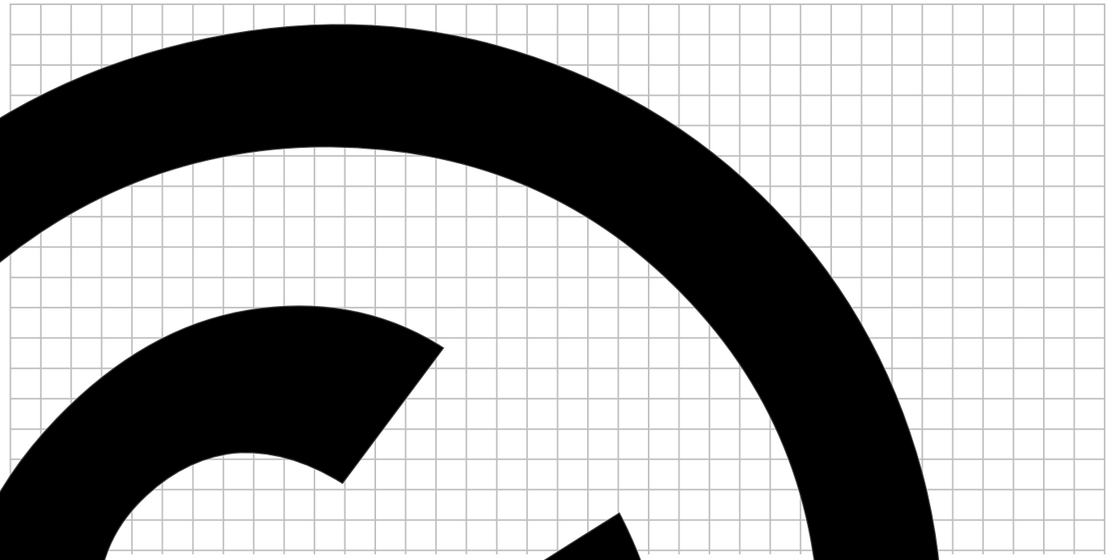
Alternativ zum Baumdiagramm kann die Lösung auch mithilfe einer Vierfeldertafel ermittelt werden. Berechnen Sie die Felder, ohne auf die Ergebnisse des Baumdiagramm zurückzugreifen, und vergleichen Sie anschließend die Werte.



Hilfe:
Da es sich um einen unabhängigen Zufallsversuch handelt, kann man die Additions- und Multiplikationsregel beim Ausfüllen der Vierfeldertafel anwenden. Beispielsweise kann P(S2) mithilfe des Ansatzes $\frac{2}{5} \cdot P(S2) = \frac{1}{10}$ berechnet werden. Es gibt sich $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{4}$

Ü3.4 Ein Falschspieler wirft gleichzeitig eine ideale und eine gefälschte Münze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt die gefälschte Münze Wappen an, wenn das Ereignis „Beide Münzen zeigen Zahl" eine Wahrscheinlichkeit von 30% hat. Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit zunächst mit einer Vierfeldertafel, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Baumdiagramm.

Bei einem Würfelspiel werden zwei Würfel geworfen. Ein Spieler verliert, wenn mindestens eine 1 fällt. Wie muss ein Falschspieler einen der beiden Würfel fälschen, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% gewinnen will? Lösen Sie die Aufgabe mithilfe einer Vierfeldertafel und vergleichsweise mit einem Baumdiagramm.



...k © Ursula Pirkl, Juli 2014

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 3.5

Die Vierfeldertafel mit absoluten Werten

Es gibt häufig Aufgabenstellungen, bei denen keine Angaben zu den Wa[illegible]he[illegible]eiten eines Merkmals gegeben sind, sondern absolute Zahlen vorgegeben w[illegible]den. Au[illegible] in [illegible] Fall kann man mit Vierfeldertafeln arbeiten.

Zahlenbeispiel:
An einer Schule mit 720 Mädchen und 480 Jungen sind wä[illegible] einer [illegible]pewelle 20[illegible] Schüler und Schülerinnen erkrankt. Die Sekretärin hat 144 Kr[illegible]dunge[illegible] Mädchen gezä[illegible] Fü[illegible]ne Statistik soll untersucht werden, ob die Grippeerkrankun[illegible]om Geschlec[illegible]hängt und [illegible] stochastisch abhängig ist.

Abkürzungen für die Vierfeldertafel: [illegible]en M[illegible] [illegible]erkrankt [illegible] [illegible] erkrankt $\overline{K}$

Info: Aussehen der Vierfeldertafel für absolute Werte

	K	$\overline{K}$	
M	[illegible]$\cap$K	M$\cap$[illegible]	Anza[illegible] M
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]zahl $\overline{M}$
	[illegible]nzahl K	[illegible]zahl $\overline{K}$	G[illegible]samtzahl

Erläutern Si[illegible] Kontex[illegible] Aufgabenstell[illegible] die Bedeutun[illegible]:

$M \cap K$: ______________________

M[illegible]: ______________________

$\overline{M} \cap K$: ______________________

$\overline{M} \cap \overline{K}$: ______________________

Schritt 1: Aus dem gege[illegible] [illegible] [illegible]schließen.

	[illegible]	[illegible]	
M	144	[illegible]	[illegible]20
$\overline{M}$	_____	_____	[illegible]
	240	_____	[illegible]

Schritt 2: Durch Anwendung der Additionsregel fehlende Werte ermitteln.

Erläutern Sie, waru[illegible] [illegible]ld $M \cap K$ eingetragen wird.

____

____

Er[illegible] [illegible]ie der Wert 240 ermittelt wird.

____

____

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Schritt 3: Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten für die Felder der Vierfeldertafel

	K	$\overline{K}$	
M	0,12	0,48	[illegible]
$\overline{M}$	0,08	[illegible]32	0,4
	0,2	0,[illegible]	1

a) Erläutern Sie, wie die Werte für die Fe[illegible]erech[illegible] wurden.

____

____

____

b) Begründ[illegible] Sie, w[illegible] man [illegible] die Unt[illegible]su[illegible]ng auf stoch[illegible]tische Abhängigkeit die Werte der Vierf[illegible] [illegible]s pr[illegible]tuale Anteile[illegible]s über Wahrsc[illegible]lichkeiten angibt.

____

____

____

c) [illegible]gründen Sie a[illegible]d einer R[illegible]ung, dass die Erkrankung an Grippe stochastisch unabhängig ist.

____

____

[illegible]ungen: ______________________

____

Aufgabe 3.6

Die Vierfeldertafel und der allgemeine Additionssatz

In Kapitel 2 haben Sie die einfache Additionsregel für die Berechnung der [illegible]lichkeit von Ereignissen kennengelernt. Lesen Sie ggf. zur Wiederholung in A[illegible]abe 2[illegible] [illegible]an unter dieser Regel versteht. Anhand des folgenden Beispiels soll gezeigt wer[illegible] dass [illegible] einfache Additionsregel nicht immer angewendet werden kann und zu einer **allgem[illegible]inen A[illegible]onsr[illegible]l** erweitert werden muss.

Zahlenbeispiel:

In einer Glasbläserei entstehen bei der F[illegible]rikat[illegible] [illegible]wei Fe[illegible]r. Die Gl[illegible] [illegible]nnen Lufte[illegible]sse oder Formfehler oder auch beide Fehler h[illegible] Luftein[illegible] [illegible]erden bei [illegible]% [illegible]er Gläser un[illegible] Formfehler bei 8% der Gläser festgestellt. Die F[illegible]er t[illegible] [illegible]nabh[illegible]gig von[illegible] [illegible] auf. Ein fe[illegible]erbehaftetes Glas wird als Ausschuss aussortiert und [illegible] [illegible]hmolzen. Es so[illegible]ermittelt werde[illegible] wie viel Prozent Ausschuss entsteht.

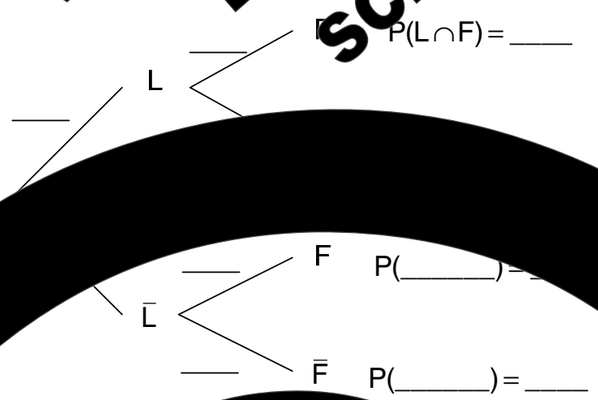
Abkürzungen

Lufte[illegible]us[illegible]	[illegible]	kein Lufte[illegible]schuss	$\bar{L}$
Formfe[illegible]	[illegible]	kein F[illegible]mfehler	$\bar{F}$

Die Lösung [illegible] Aufgab[illegible]ellung soll auf dre[illegible]verschiedene[illegible] [illegible]gen ermittelt werden:

1. Lösu[illegible]ber [illegible]ndiagra[illegible]

   [illegible] das Baumdiagra[illegible] aus, und zeigen Sie durch entsprechende Rechnung, dass 12,6% der Glas[illegible] Fehler h[illegible]en und damit A[illegible]sschussware sind:



2. Lösung über die Vierfeldertafel.

   Füllen Sie die Vierfeldertafel aus, und zeigen Sie, dass sich für P[illegible]schuss[illegible] [illegible]alls ein Wert von 12,6% ergibt.

	F	$\bar{F}$	
L			
$\bar{L}$			

Dieses Ergebnis st[illegible]nt mit den ausführlich er[illegible]ten Ergebnissen [illegible]cht überein und muss da[illegible] **falsch** sein.

3. Lösung über die einf[illegible] Ad[illegible]sreg[illegible]

   P(Ausschuss) [illegible]L) + [illegible]) = 0,[illegible],08 = 1[illegible]%

D[illegible] Fehl[illegible]f de[illegible]ur!

D[illegible] Lö[illegible]3 entstande[illegible] Fehler kann [illegible]ilfe der Vierfeldertafel sehr anschaulich analysiert un[illegible]hoben werden. Dazu [illegible]den die am [illegible]beispiel erfolgten Überlegungen mithilfe der [illegible]en Vierfeldertafe[illegible]allgemeinert da[illegible]stellt.

	F	$\bar{F}$	
L	$P(F \cap L)$	$P(\bar{F} \cap L)$	P(L)
$\bar{L}$	$P(F \cap \bar{L})$	$P(\bar{F} \cap \bar{L})$	$P(\bar{L})$
	P(F)	$P(\bar{F})$	

Lösu[illegible]

[illegible]

[illegible]ganzen Sie: Der Ausschussanteil setzt sich aus [illegible] _____ Fehlern und aus Gläsern mit einem der beiden Fehler zusammen und [illegible]rechnet.

Lösungsweg 3 in allg[illegible]stellung:

P(Aus[illegible]

[illegible]) + P(F ∩ $\bar{L}$) + P(F ∩ L)

[illegible]$\bar{L}$) + 2 · P(F ∩ L)

[illegible] P(Ausschuss) aus der Summe von P(L) und P(F) berechnet[illegible]n, dass das [illegible]ten beider Fehler, nämlich $P(F \cap L)$ _____ Rechnung [illegible]eßt und das ist _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Begründen Sie allgemein, dass der Ansatz: $P(\text{Ausschuss}) = P(L) + P(F) - P(F \cap L)$ das richtige Ergebnis liefert, und weisen Sie dies auch am Zahlenbeispiel der obigen Aufgaben[illegible]ng nach.

Begründung: _____

_____

_____

Nachweis am Zahlenbeispiel: P(Ausschuss) = P(L) + P(F) – [illegible] L)

_____ + _____ – _____ = _____ = _____ %

Verallgemeinerte Formu[illegible]ge

Damit in unserem Zahlenbeispiel ein Glas zur Ausschussware zählt, reicht es aus, dass mindestens einer der beiden Fehler auftritt. Alternativ formuliert kann man sagen: Es tritt ein Formfehler oder ein Lufteinschluss auf. Mathematisch wird dieses Oderbeziehung mit dem Zeichen $\cup$ angegeben. Für zwei beliebige Ereignisse A bzw. B bezeichnet weiter folgt: $P(A \text{ oder } B) = P(A \cup B)$

Für [illegible]einen Additionssatz ergibt sich:

Allgemeine Additionsregel

Für zwei Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ra[illegible]

_____

_____

_____

_____

Ergä[illegible]ngen: _____

_____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert [illegible]en

Kapit[illegible]

Kombinatorische Abzählv[illegible]n

02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte hrsche chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl keitsv ilung 61

Wahrscheinlich erteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapite
Vari und lard ichung 69

Kap 9
no verteil 75

pothesentests

l 10
seitiger Sign ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

de Betrachtungen zur Normalve 139

pitel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa elbstorganisiert erlernen (Beste 278)

S

orbehalten. A ghts reserved.
k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

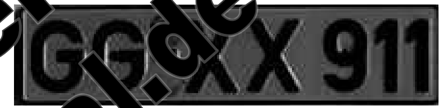
SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 4: Kombinatorische Abzählverfahren

Wir haben bisher in erster Linie Zufallsversuche betrachtet, bei den an die chkeit eines Ereignisses mithilfe von Baumdiagrammen, die aus wenigen Äste nigen bestanden, berechnen konnte. Ergeben sich bei einer Aufgabenstellung jedoch me mit vielen Ästen und Stufen, können diese sehr umfangreich und unübersic ch wer n in diesen Fällen auf rechnerische Möglichkeiten, welche als **kombinatorische hlver** n bezeichnet werden, zurückgreifen.

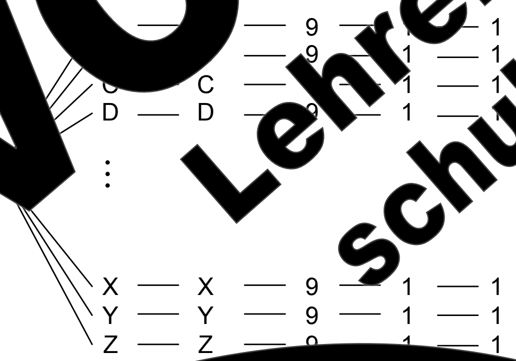
Aufgabe 4.1

Produktregel



Jemand möchte im Kreis Groß-Ge eine rsche zulass und wünscht sich ein Kennzeic as nac zwei w gleiche Buchstaben hat und d ch istellige Zahl 91

a) Für die Berechnun zahl der Mö chkeiten, ei schgemäße Kennzeichen zu erhalten, kann man sich diese ufga ung an se noch mit em Baumdiagramm behelfen. Begründen Sie folgenden Baumdia mms und de zahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen arum es in samt genau zeichen mit einer Wunschnummer gibt, Um ausschließt, Vereinfach eine weiteren gesetzlichen Eins ber Vergabe vo staben tionen berücksichtigt.



Stufe	Anzahl der Möglichkeiten am Ende jeder Verzweigung
1	
2	
3	
4	
5	

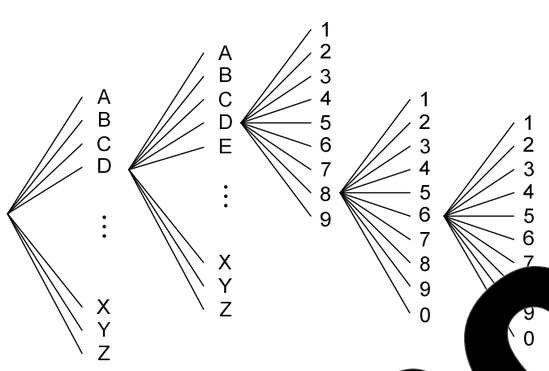
Begrü

b) Für die Berechnun scheinlichkeit, rein zufällig ein w Kennzeichen wie oben zu erhalten öglichen Kennzeichen bestin ereinfachend soll hier angen oß-Gerau nur Nummernschilde chstaben und drei Ziff usschluss von Umlauten und eine der dreistelligen Z ngen geben soll. Ermitteln Sie mithilf folgenden Seite Baumdiagramms, warum man die Anza nzeichen mit der

$26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585\,000$

mmen kann, indem Sie in der Tabelle für m Baum die Anz lichkeiten an nden jeder Verzweigung eintragen, warum nur ei und nicht das nte Baumdiagramm dargestellt wird.

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de



Stufe	Anzahl der Möglichkeiten am Ende der Verzweigung
1.	
2.	
5.	

Begründung und Erläuterung:

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Wunschkennzeichnen anhand der Definition der Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Wunschkennzeichen}) = \frac{\text{Anzahl der Wunschkennzeichen}}{\text{Anzahl aller Kennzeichen}} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad \%$$

Wenn Sie die Erläuterung [illegible] haben, wird ersichtlich, dass man die Anzahl aller Möglichkeiten [illegible] Anzahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen in jeder [illegible]. Diese Berechnungsmethode wird in der Ko[illegible]

[illegible]

[illegible]rallsversuch bestehe aus k unabhängigen Stufen, wo[illegible]tufe n_1, in der 2. Stufe n_2 [illegible]d in der k-ten Stufe n_k mögliche Ergebnisse gibt. Dann wird d[illegible] möglichen Ereignisse N des Produkts $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ berechnet.

Die Produkt[illegible]ung von Wahrscheinlichkeiten be[illegible]uchen herange[illegible]erschieden zwischen:

- Z[illegible]urücklegen.
- [illegible]en, bei denen die **Reihenfolge** der Ergebnisse **eine Rolle** s[illegible] Zeichen). Man bezeichnet diese Stichproben als **geordnete Stic[illegible]**
- [illegible]rsuchen, bei denen die **Reihenfolge** der Er[illegible]se **keine Rolle** s[illegible] Man [illegible]net diese Stichproben als **ungeordnete S[illegible]n**.

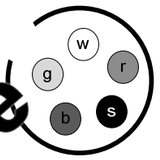
Aufgabe 4.2

Geordnete Stichproben mit Zurücklegen oder **Variation**

N Anzahl aller Möglichkeiten
n Anzahl der Kugeln in einer Urne
k Anzahl der Ziehungen

N =

a) Erläutern Sie beispielhaft anhand der bereit[illegible]us K[illegible]2 bek[illegible]ten Urne die Rechenregel zur Ermittlung der Anzahl [illegible]glichen Ereignisse, wenn:
   - 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen [illegible]den.
   - die Reihenfolge der Kugeln eine Ro[illegible]pielt, a[illegible]beispielsweise d[illegible] Reihenfolge wrs und rsw al[illegible]ersch[illegible]he E[illegible]gnisse g[illegible]werten werden.



b[illegible]n F[illegible]ds[illegible]s hat vier Zahlenräder mit den Ziffern 0 bis 9. Begründen Sie, warum die oben [illegible]regel[illegible]-Regel bei [illegible]m Zahlenschloss zur Berechnung von allen Kombinationsmöglichkeiten a[illegible]wendet werden kann, und zeigen Sie, dass es im ungünstigsten Fall mehr als zweieinhalb S[illegible]den dauert, eine vergessene Zahlenkombination durch Probieren herauszufinden, wenn für jede [illegible]he Einstellung eine Sekunde benötigt wird.

[illegible]abe 4.3

Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen oder **Permutati[illegible]**

N Anzahl aller Mö[illegible]
n Anzahl der[illegible]
k Anzahl[illegible]

N = n(n–1)(n–2)[illegible]

We[illegible]gilt k = n **N = n(n–1)(n–2) … 1** [illegible]rich: n-Fakultät)

Wenn Sie einen wissenschaftlichen Taschen[illegible]chner verwenden, [illegible]Möglichkeit n! mit einer entsprechenden Taste oder Ta[illegible]bination zu bere[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

a) Bestätigen Sie diese Regel zur Ermittlung der Anzahl aller möglichen Ereignisse [illegible] spielhaft, wenn aus der bekannten Urne (s. Aufg. 4.2) drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden und die Reihenfolge der Kugeln eine Rolle spielt. Erläutern Sie auch, warum [illegible] k-ten [illegible] die k-te Ziehung mithilfe der Summe (n – k + 1) berechnet.

1. Ziehung: n = 5 Kugeln [illegible] damit [illegible] Möglichkeiten

2. Ziehung: n – 1 = n – **2** + 1 = 5 –1 = ___ Kugeln [illegible] mit ___ Möglichkeiten

3. Ziehung: n – __ = n – **3** + 1 = 5 – 2 = ___ Kugeln [illegible] damit ___ Möglichkeiten

Insgesamt gibt es also N = ___·___·___ = 60 mögliche Kombinationen.

Erläuterung:

_____

_____

_____

b) Wenn man [illegible] zieht gilt: N = ___·___·___·___·___ = ___ **!** = 120

c) Begründen Sie, warum die Kugeln N = n(n–1)(n–2) … (n-k+1) bzw. N = n! bei der folgenden Aufgabe angewendet werden können und berechnen Sie jeweils die Anzahl der unterschiedlichen Kombinationsmöglichkeiten.

Ein Möbelhersteller bietet für ein Regalsystem 10 verschiedene Module an. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich mehr als 150 000 Varianten für die Zusammenstellung der Regalwand ergeben, wenn man im Laden 6 [illegible] kauft bzw. mehr als 3 500 000 unterschiedliche Regalwände [illegible] Module einmal gekauft wird. Zeigen Sie auch, dass [illegible] Regalwände zusammenstellen kann.

[illegible] im Möbelmarkt _____

_____

(2) Auswahl 10 Module im Möbelmarkt N = _____

(3) Variationen [illegible] N = _____

Erg[illegible]ungen: _____

_____

Aufgabe 4.4

Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder unvollständige Permutation

Beim Lotto werden aus einer Urne mit 49 Kugeln mithilfe des Ziehungsgerätes [illegible] Kugeln ohne Zurücklegen entnommen, wobei die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, keine Rolle spielt, ob man gewinnt oder verliert. Stichproben, bei denen es, wie beim Lotto, nicht auf eine bestimmte Reihenfolge bei der Ziehung ankommt, werden als **ungeordnete Stichproben** bezeichnet. Die Formel, mit der man die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten [illegible], soll anhand der folgenden Aufgabenstellungen veranschaulicht werden.

Aufgabenstellung:

Aus einer Urne mit **n** bunten Kugeln werden [illegible] Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten, ungeordnete Stichproben zu entnehmen, soll mit N bezeichnet werden. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben [illegible] folgenden Tabelle.

Anmerkung zum Verstehen der Überlegungen:

Um das Zustandekommen der Formel verstehen zu können, ist es notwendig zu akzeptieren, dass es neben den Möglichkeiten [illegible] mehrere Kugeln aus einer Urne zu entnehmen, auch immer **eine** Möglichkeit gibt, keine Kugel, also k = 0 Kugeln zu ziehen. Das entspricht der **einen** Möglichkeit, nichts zu tun. Die Möglichkeit besteht selbst bei einer leeren Urne also für eine Urne mit n = 0 Kugeln.

1. In der Urne befinden sich **n = 0** Kugeln

keine Kugel ziehen: k = 0	Es gibt **eine** Möglichkeit N nichts zu tun:	⇒ N = 1

2. In der Urne befindet sich eine rote Kugel also **n = 1** Kugeln

keine Kugel ziehen k = ____	Es gibt eine Möglichkeit N nichts zu tun:	⇒ N = 1
[illegible]	eine Möglichkeit eine Kugel zu ziehen:	⇒ N = 1

[illegible] Urne befinden sich eine rote (r) und eine grüne [illegible] **= 2** Kugeln.

keine Kugel ziehen	k = ____	[illegible] Möglichkeit N nicht [illegible]	⇒ N = ____
eine Kugel ziehen [illegible]		Es gibt [illegible] Möglichkeiten [illegible] rot oder grün [illegible]	⇒ N = ____
[illegible]	k = ____ < r — g → rg; g — r → gr	Da zwischen rg [illegible] unterschieden [illegible] die eine Möglichkeit [illegible] und g gezogen [illegible]	⇒ N = ____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

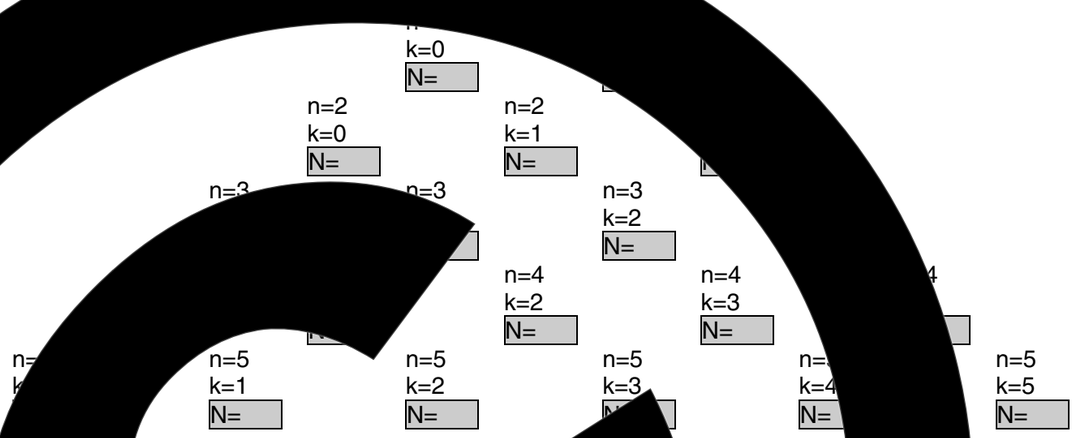
4. In der Urne befinden sich eine rote (r), eine grüne (g) und eine blaue (b) Kugel, [illegible] **n=3** K[illegible]n.

Beachten Sie bei der Bestimmung der Anzahl unterschiedlicher Komb[illegible]en jew[illegible] zwischen Kugelkombinationen wie rg und gr nicht unterschieden wird [illegible] Ereignisse somit nur als eine Kombinationsmöglichkeit gewertet werden.

keine Kugel ziehen	k = ____			⇒ N =____
eine Kugel ziehen	k = ____	r g b	[illegible]ahl unterschiedlicher M[illegible]lichkeiten	⇒ N =____
zwei Kugeln ziehen	k = ____	[illegible]	Anzahl unterschiedlicher Kombinationen: (Hinweis: rg und gr [illegible] gb und bg w[illegible] als gleiche Kombinationen gewertet)	⇒ N =____
drei Kug[illegible] ziehen	[illegible]	[illegible]	Anzahl unterschiedlicher Kombinationen: (Hinweis: Alle Ereignisse können als eine Kombination aus rot grün blau angesehen werden)	⇒ N =____

5. [illegible] zunächst im fo[illegible]den Schema [illegible]den entsprechenden Stellen die in Aufgabenteil 1. bis 4. [illegible]elten We[illegible] für N ein.

Wie Ihnen vielleicht schon bekan[illegible] bilden die Werte von N das sogenannte Pascalsche Dreieck. Informieren Sie sich in geeigneter Weis,e wie das Schema für n=4 und n= 5 fortgesetzt wird, und bestimmen Sie diese Werte ohne Verwendung weiterer Betrachtungen von Ziehungen aus Urnen bzw. ohne Erstellung von weiteren Baumdiagrammen.



6. Verallgemeinerungen

Die Werte von N werden auch als **Binomialkoeffizienten** bezei[illegible] Hierfu[illegible] man die Schreibweise $\binom{n}{k}$ **(sprich: „n über k“)**. Damit ergeben sich bei [illegible] 5 [illegible] beispielsweise die oben berechneten Werte:

$$\begin{matrix} n=5 \\ k=0 \end{matrix} \Rightarrow \binom{5}{0}=1 \qquad \begin{matrix} n=5 \\ k=1 \end{matrix} \Rightarrow \binom{5}{1}=5 \qquad \begin{matrix} n=[illegible] \\ k=2 \end{matrix} \Rightarrow \binom{[illegible]}{2}=[illegible] \qquad \dots \qquad \begin{matrix} n=5 \\ k=5 \end{matrix} \Rightarrow \binom{5}{5}=1$$

Rechnerische Ermittlung der Binom[illegible]effizi[illegible]en

Die Werte für die Binomial[illegible]effizi[illegible] $\binom{n}{k}$ [illegible]en auf drei [illegible]schiedene Arten ermittelt werden.

a) Mithilfe de[illegible]scals[illegible]en Drei[illegible]s

b) [illegible]ilfe d[illegible] $\boxed{\text{nCr}}$ - [illegible]e* des Taschenrechners, Bsp.: $\binom{5}{2}$ Eingabe: 5 $\boxed{\text{nCr}}$ 2 ergibt 10

$\binom{10}{4}$ Eingabe: 10 $\boxed{\text{nCr}}$ 4 ergibt 210

c) Mithilfe der Fo[illegible]el $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Bsp.: $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\frac{5\cdot2}{1}=10$

*Englisch: Combinations

7. [illegible] Berechnen Sie mit dem Taschenrechner, wie [illegible]nehmen, wenn die Reihenfolge der [illegible]elle spielt.

$\binom{\_\_}{\_\_}$ = _____

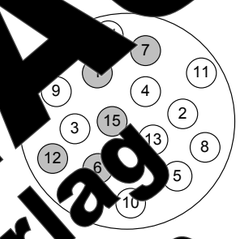
8. In einem Getränkem[illegible] 8 verschiedene Sorten Fruchts[illegible] kauft vier Flaschen. Berechnen S[illegible]hkeiten, eine Mischung aus [illegible]hen Saftsorten zusamm[illegible] Sorte nur eine Flasche gekau[illegible]

[illegible]e Übungen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 4.5

Anwendung der ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen auf das Lottoprob



Wir betrachten zunächst die abgebildete Urne, in der sich n = 15 unterschiedliche Kugeln befinden, von denen 5 grau gefärbt (n_{grau} = ... und 10 weiß sind ($n_{weiß}$ = 10). Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter k = 5 gezogenen Kugeln 3 graue (k_{grau} = 3) und weiße ($k_{weiß}$ = 2) Kugeln befinden.

Die folgende Vorgehensweise beruht auf der Definition der Wahrscheinlichkeit sowie dem Produktsatz bei kombinatorischen Abzählverfahren. Es zeigt eine zusätzliche Möglichkeit bei Aufgabenstellungen dieses Typs vorzugehen. Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise, und wenden Sie das Verfahren anschließend auf das Glücksspiel Lotto.

Die Ziehungen von grauen und weißen Kugeln können als jeweils getrennte und voneinander unabhängige Vorgänge betrachtet werden.

Gesamtzahl der Kugeln in die Merkmale grau und weiß aufteilen.

Anzahl der Möglichkeiten aus 5 grauen Kugeln 3 graue zu ziehen.

Anzahl der Möglichkeiten aus 10 weißen Kugeln 2 weiße zu ziehen.

$n_{gesamt} = 15$ — $n_{grau} = 5$, $n_{weiß} = 10$

$k_{gesamt} = 5$ — $k_{grau} = 3$

$$P(3\,\text{graue}) = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{10\cdot 45}{3003} = 0{,}14985 \approx 15\%$$

Gesamtzahl der Ziehungen in die Merkmale grau und weiß ziehen aufteilen.

allen ... zie...

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten beim Lotto ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl

Wenn man die Vorgehensweise auf die wöchentliche Ziehung der Lottozahlen überträgt, kann man wie folgt vorgehen. Aus den 49 Kugeln werden 6 gezogen. Diese 6 Kugeln macht man wie in der Urne oben als grau markiert. Hat man auf dem Tippschein grau markierte Kugeln ankreuzt, entspricht das dem Ziehen einer grauen Kugel aus der Urne oben.

a) Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige, also der Ziehung von 6 in Gedanken grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \_\_$ — $n_{grau} = 6$, $n_{weiß} = 43$

$k_{gesamt} = \_\_$ — $k_{grau} = 6$, $k_{weiß} = 0$

$$P(6\,\text{Richtige}) = \frac{\binom{\ }{\ }\cdot\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \frac{1}{14\,\text{Mio}} \approx 0{,}00000\,\%$$

b) Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige, also der Ziehung von 5 in Gedanken grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \_\_$ — $n_{grau} = 6$, $n_{weiß} = 43$

$k_{gesamt} = \_\_$ — $k_{grau} = 5$, $k_{weiß} = 1$

$$P(5\,\text{Richtige}) = \frac{\binom{\ }{\ }\cdot\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \frac{\ }{14\,\text{Mio}} \approx 0{,}002\%$$

c) Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige, also der Ziehung von 4 in Gedanken grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \_\_$ — $n_{grau} = \_\_$, $n_{weiß} = \_\_$

$k_{gesamt} = \_\_$ — $k_{grau} = \_\_$

$$P(4\,\text{Richtige}) = \frac{\binom{\ }{\ }\cdot\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \frac{\ }{\ } \approx 0{,}1\%$$

d) Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige, also der Ziehung von 3 in Gedanken grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \_\_$ — $n_{grau} = \_\_$, $n_{weiß} = \_\_$

$k_{gesamt} = \_\_$ — $k_{grau} = \_\_$

$$P(3\,\text{Richtige}) = \frac{\binom{\ }{\ }\cdot\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \frac{\ }{\ } \approx 1{,}8\%$$

Verfeinerung des Lottoproblems

Wenn Sie den Ansatz für das „Lottoproblem“ ... angewendet haben, ... Verfahren ... verfeinert und auf Problemstellungen übertragen, die auf den e... war wenig mit ... von Lottozahlen zu tun haben, je... gleichen Weg bea... den können.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

In einem Behälter befindet sich eine begrenzte Anzahl n von beliebigen Gegenst[illegible]n, die [illegible]n Gegenstände mit einem Merkmal 1 und einem Merkmal 2 einteilen kann, wobei es [illegible]e Rolle [illegible]elt, ob die Gegenstände mit dem jeweiligen Merkmal voneinander unterschieden [illegible]rden ko[illegible] M[illegible] entnimmt k dieser Gegenstände und berechnet die Wahrscheinlichkeit, w[illegible] Teile [illegible] Merkmal 1 bzw. 2 in der Stichprobe enthalten sind.

Verallgemeinerter Ansatz:

Aufteilen der Gesamtanzahl n bzw. aufteilen der Ziehungen k in die jeweilige Anzahl mit Merkmal 1 und 2.

$n \to n_1, n_2$

$k \to k_1, k_2$

$$P(E) = \frac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} n_1 + n_2 = n \\ k_1 + k_2 = k \end{array}$$

a) Wenden Sie diesen Ans[illegible] folgende Auf[illegible]e an, und ü[illegible]rüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Baumdiagramms (Be[illegible]en [illegible] dabei [illegible]es sich u[illegible] Ziehen ohne Zur[illegible]klegen handelt).

In einer Lostrommel be[illegible] 20 Losen 4 Gewinne und 6 Nieten. Zeigen Sie, dass die Wahrschein[illegible] unte[illegible] gezogenen L[illegible] genau z[illegible] Nieten zu erhalten, bei 15% liegt.

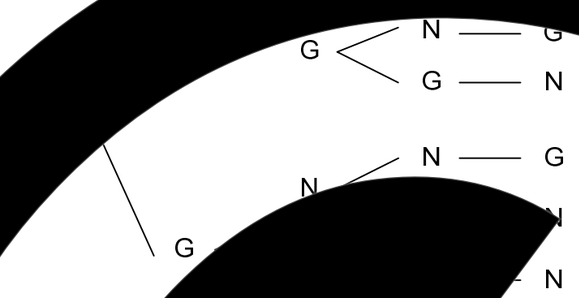
Abkürzun[illegible]: Gewi[illegible], Niete N

$n = \_\_ \to n_N = \_\_$, $n_G = \_\_$

$k = \_\_ \to k_N = \_\_$, $k_G = \_\_$

$$P(2\ \text{Nieten}) = \frac{\binom{\ }{\ }\cdot\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \_\_\_\_\_ \approx$$

Baumdiagramm[illegible]



b) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Wege, und beurteilen S[illegible]e Mögl[illegible]it, die Wahrscheinlichkeit, bei 8 gekauften Lose 5 Nieten zu erhalten, über ein Ba[illegible]iagram[illegible] zu ermitteln.

Ergänzende Übungen: _____

Aufgal[illegible].6

[illegible]eit[illegible] Betrac[illegible]ngen für Ur[illegible] mit mehr als [illegible]ei Merkmalen

Be[illegible]t ma[illegible] beim Lot[illegible] Ziehung der Zusatzzahl mit ein, so hat man in der Trommel Kugeln mit drei [illegible]rkmalen: Gewinn[illegible]kugel, Zusatzkugel und Verliererkugel. In diesem Fall kann man das [illegible]schema wie folg[illegible]weitern:

$n = 49 \to n_1 = 6$ (Gewinnkugeln), $n_2 = 1$ (Zusatzkugel), $n_3 = 42$ (Verliererkugeln)

$$P(A) = \frac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}\cdot\binom{n_3}{k_3}}{\binom{n}{k}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} n_1 + n_2 + n_3 = n \\ k_1 + k_2 + k_3 = k \end{array}$$

[illegible] $k_3 = 0$

Durch Einsetzen in die obige modifizierte Formel lässt sich d[illegible]heinlichkeit ermitteln.

Zeigen Sie [illegible]sse „5 Richtige mit Zusatzzahl[illegible]chance von etwa 1 zu 2,3[illegible]

[illegible] mit Zusatzzahl) =

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …lernen

Kapit…

Einführung in den Be…
…en Wahrscheinl…

02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinli[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]nor[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]de Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 5: Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinli[illegible]it

Im Kapitel 3 haben Sie sich im Zusammenhang mit den Vierfeldert[illegible]bereits [illegible]tisch abhängigen Zufallsversuchen befasst.

Aufgabe 5.1

a) Nennen Sie zur Wiederholung, mit welchem Krit[illegible]m ma[illegible]em [illegible]umdiagramm bzw. in einer Vierfeldertafel erkennen kann, dass ein Zufallsve[illegible]h abhängig i[illegible]

Kriterium bei einem Baumdiagramm:

Kriterium bei e[illegible]Vie[illegible]afel:

b) [illegible] Zu[illegible]g mit stoch[illegible]stisch abhän[illegible] Zufallsversuchen entstehen Fragestellungen, die [illegible] Beg[illegible] **bedingt[illegible]ahrscheinl[illegible]** führen. Verdeutlichen Sie sich die Vierfeldertafel für [illegible]folgende Beispiel [illegible]estätigen S[illegible]urch Rechnung, dass die Wahrscheinlichkeit an Grippe zu [illegible]nken vom Gesc[illegible]t stoch[illegible]abhängig ist:

Beispiel:

In einer Region, in der 45% der Bevölkerung männlich sind, haben sich 35% der gesamten Bevölkerung mit einem neuen gefährlichen Grippevirus infiziert. Mithilfe der Angabe, dass das Merkmal eine F[illegible]haben mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% auftritt und den A[illegible]

[illegible]hilfe der Additionsregel die fo[illegible]rstellen:

Vierfeldertaf[illegible]

	G	[illegible]	
M	P(M∩G) = 0,2	P([illegible]	P(M) = 0,45
[illegible]	P($\overline{M}$∩G) = 0,15	P($\overline{M}$∩[illegible]	P($\overline{M}$) = 0,55
[illegible]	P(G)=0,35	P($\overline{G}$) = [illegible]	1

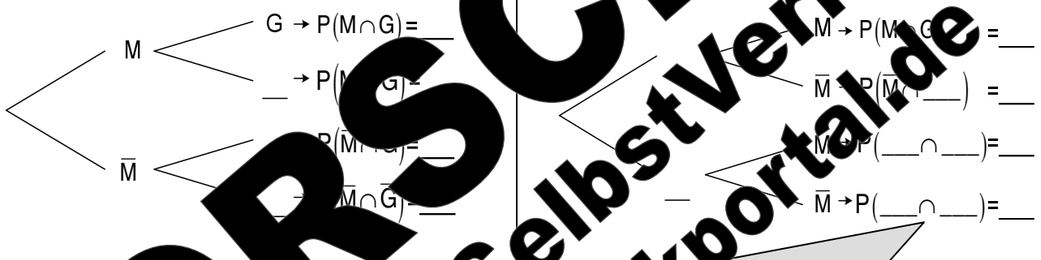
[illegible]der stochastisc[illegible]n Abhängigkeit:

Aufgabe 5.2

Erstellen von Baumdiagrammen zu der Vierfeldertafel aus Aufgabe 5.1

Zu dieser Vierfeldertafel kann man unter zwei Gesichtspunkten ein Baumdiagramm erstellen, da die erste Stufe des Baumes das Merkmal männlich M oder nicht männlich $\overline{M}$, oder das Merkmal an Grippe erkrankt G oder nicht an Grippe erkrankt $\overline{G}$ enthalten kann. Ergänze in den beiden Baumdiagrammen die fehlenden Ereignisse.

1. Stufe:
Merkmal Mann oder Frau (nicht Mann)



1. Stufe:
Merkmal Grippe erkrankt oder nicht erkrankt

Es spielt keine Rolle, ob man hier P(M ∩ G) oder P(G ∩ M) etc. schreibt. Das Ergebnis wird aus dem Produkt der Pfadwahrscheinlichkeiten gewonnen und es gilt das Kommutativgesetz. Man kann die Schreibweise so verwenden, wie sie in der Vierfeldertafel verwendet wird.

Aufgabe 5.3

Beschriftung der Pfade mit Wahrscheinlichkeiten

Da es sich um einen stochastisch abhängigen Zufallsversuch handelt, hängen die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumes vom Ausgang des Zufallversuchs in der ersten Stufe ab. D.h., dass beispielsweise die Wahrscheinlichkeit P(G) an Grippe zu erkranken in der zweiten Stufe des linken Baumdiagramms davon abhängt, ob in der ersten Stufe das Merkmal M oder das Merkmal $\overline{M}$ eingetreten ist. Damit [illegible] die Wahrscheinlichkeit in der zweiten Stufe nur den Ausdruck P(G) [illegible]. Die Schreibweise* für die formale Darstellu[illegible]aumdiagramme im Folgenden auf[illegible]

[illegible]er Baum:
[illegible]der Wahrscheinlichkeit an Grippe zu [illegible]nken unter der **Bedingung**, dass man
– ein Mann ist $\mathbf{P_M(G)}$
– eine Frau ist $\mathbf{P_{\overline{M}}(G)}$

Angabe der W[illegible]ppe zu erranke[illegible]man
– ei[illegible]
– $\mathbf{P_{\overline{M}}(\overline{G})}$

2. St[illegible]
Angabe [illegible]hkeit ein Mann zu sein unter der Be[illegible]man
– an Grippe [illegible] $\mathbf{P_G(M)}$
– nicht an Gripp[illegible] $\mathbf{P_{\overline{G}}(M)}$

Angabe der Wahrschei[illegible] Frau zu sein unter der **Bedingung**, da[illegible]
– an Grippe erkrankt is[illegible]$\overline{M}$)
– nicht an Grippe erkran[illegible])

*A[illegible] Anstatt der indizierten Schreibweise $\mathbf{P_M(\overline{G})}$ [illegible]$_{\overline{M}}(\overline{G})$ verwendet [illegible]

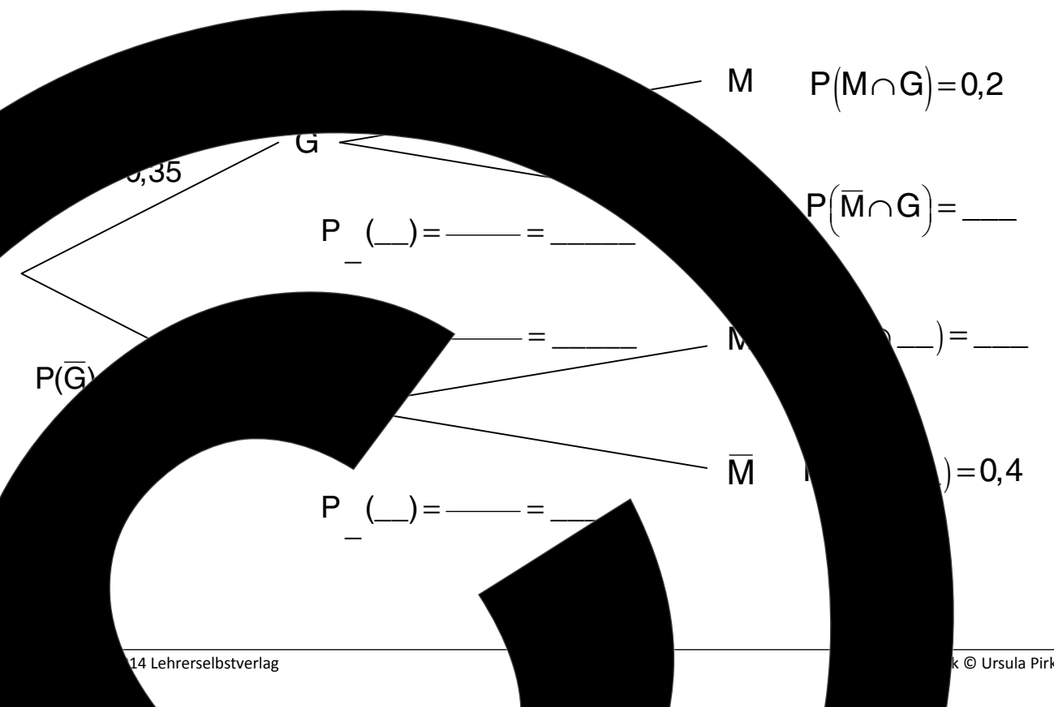
[illegible]auch $\mathbf{P(\overline{G}|M)}$ bzw. $\mathbf{P(\overline{G}|\overline{M})}$

Da die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe beider Baumdiagramme [illegible]von der [illegible]**ingung** abhängen, welches Ereignis in der ersten Stufe eingetreten ist, spricht man v[illegible]**dingt**e **Wahrscheinlichkeiten.**

Ergänzen Sie mithilfe der Vierfeldertafel aus Aufgabe 5.1 in beiden [illegible]mmen die Beschriftung der Pfade, und ermitteln Sie, wie im Beispiel $\mathbf{P_M(G)}$ mithil[illegible]r Pfad[illegible]sregel die Wahrscheinlichkeiten für alle Verzweigungen an den Ästen.

Baumdiagramm für die Bedingung M und $\overline{M}$ [illegible]erst[illegible]ufe:

Baumdiagramm für die Bedingung G und $\overline{G}$ in der ersten Stufe:



VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 5.4

Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der 1. Stufe in beiden Baumdiagrammen stimmen mit den entsprechenden Werten der äußeren Felder der Vierfeldertafel überein. ja ❍ nein ❍

b) Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse am Ende der Äste stimmen mit den inneren Werten der Vierfeldertafel und sind daher in beiden Baumdiagrammen identisch. ja ❍ nein ❍

c) Die vier Wahrscheinlichkeiten an den Verzweigungen der Äste in der 2. Stufe in einem Baumdiagramm entsprechen vier Werten der äußeren Felder der Vierfeldertafel. ja ❍ nein ❍

d) Die vier Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe im Baum kann man der Vierfeldertafel nicht direkt entnehmen. Diese Werte errechnet man durch entsprechende Quotientenbildung aus den inneren und äußeren Feldern der Vierfeldertafel. ja ❍ nein ❍

e) Der Ausdruck $P_{\bar{G}}(M)$ gibt die bedingte Wahrscheinlichkeit der zweiten Stufe eines Baumdiagramms an, wo die erste Stufe sich auf das Merkmal Mann oder Frau bezieht. ja ❍ nein ❍

f) Der Ausdruck $P_G(M)$ gibt die bedingte Wahrscheinlichkeit der zweiten Stufe eines Baumdiagramms an, wo die erste Stufe sich auf das Merkmal an Grippe erkrankt zu sein bezieht. ja ❍ nein ❍

g) Der Ausdruck $P_{\bar{M}}(G)$ bedeutet, dass man die Wahrscheinlichkeit Grippe zu haben untersucht, unter der Bedingung eine Frau zu sein. ja ❍ nein ❍

h) Der Ausdruck $P_{\bar{M}}(G)$ bedeutet, dass man die Wahrscheinlichkeit eine Frau zu sein untersucht, unter der Bedingung Grippe zu haben. ja ❍ nein ❍

i) Der Ausdruck $P_{\bar{G}}(M)$ bedeutet, dass man die Wahrscheinlichkeit Grippe zu haben untersucht, unter der Bedingung ein Mann zu sein. ja ❍ nein ❍

j) Der Ausdruck $P_{\bar{M}}(\bar{G})$ bedeutet, dass man die Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein untersucht, unter der Bedingung Grippe zu haben. ja ❍ nein ❍

k) Die erste Stufe im Baum enthält die Bedingung, von der die Wahrscheinlichkeit der zweiten Stufe im Baum abhängt. ja ❍ nein ❍

l) Die bedingte Wahrscheinlichkeit in der zweiten Stufe wird berechnet, indem die Wahrscheinlichkeit für das Merkmal in der ersten Stufe durch die Wahrscheinlichkeit ... ja ❍ nein ❍

m) Die bedingte Wahrscheinlichkeit in der zweiten Stufe wird berechnet, indem die Wahrscheinlichkeit für das Merkmal durch die Wahrscheinlichkeit für das ... ja ❍ nein ❍

Aufgabe 5.5

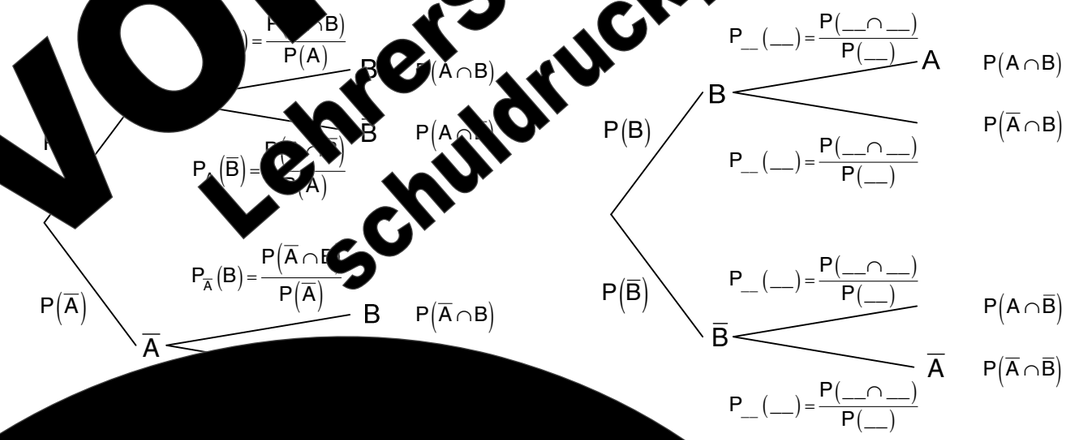
Verallgemeinerung des Zusammenhangs zwischen der Vierfeldertafel und den bedingten zugehörigen Baumdiagrammen

	B		
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

In der Vierfeldertafel kann man die bedingten Wahrscheinlichkeiten, welche in der zweiten Stufe in dem Baumdiagramm erscheinen, nicht direkt ablesen.

Für die Berechnung dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe bei beiden Baumdiagrammen bildet man jeweils den Quotient aus der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Merkmals in der ersten Stufe des Zufallsexperimentes. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

Erste Stufe im Baum: Merkmal A — Erste Stufe im Baum: Merkmal B



...tern Sie, wie Sie bedingte Wahrscheinlichkeiten di... ...ldertafel, und damit ohne ein ...Baumdiagramm, ermitteln können.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 5.6

Standardformulierungen bei Aufgabenstellungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Die Interpretation der Aufgabenstellungen bei bedingten Wahrscheinlichkeiten bereitet oft Schwierigkeiten. Daher sollen hier anhand des Beispiels Grippeerkrankung Verständnishilfen für die Entschlüsselung von Standardformulierungen gegeben werden. Ergänzen Sie fehlende Angaben bzw. verdeutlichen Sie sich die Beispiele und bearbeiten Sie die jeweiligen Aufgabenstellungen.

1. Fragestellungen, die sich auf die Gesamtheit der Merkmalsträger beziehen

Bei Fragestellungen zu Wahrscheinlichkeiten, welche sich auf die Gesamtheit von Männern und Frauen beziehen, besteht zwischen den beiden Baumdiagrammen kein Unterschied. Typische Fragestellungen sind hier:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man Grippe (Mann und Grippe): $P(\_\_\_\_\_) = 0{,}2$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man zu Grippe (Frau und Grippe): $P(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mann gesund (Mann und gesund): $P(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Frau gesund (Frau und gesund): $P(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$

2. Fragestellungen, die sich auf die bedingte Wahrscheinlichkeit der 2. Stufe im Baum beziehen

Beispiel

Bei den folgenden Fragestellungen (Standardformulierungen in Aufgaben) wird bei gegebener Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und gegebener Wahrscheinlichkeit der ersten Stufe im Baum nach bedingten Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe im Baum gefragt. Der Wert für die bedingte Wahrscheinlichkeit kann dann entweder mithilfe der Wahrscheinlichkeiten in einer Vierfeldertafel oder mithilfe eines passenden Baumdiagramms berechnet werden.

Textalternativen

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist man als Grippe erkrankt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken, wenn man ein Mann ist?
- Wie groß ist, unter der Bedingung ein Mann zu sein, die Wahrscheinlichkeit zu erkranken?

Lösung

$$= \frac{0{,}2}{0{,}45}$$

$$= 0{,}44$$

Textalternativen zur Aufgabenstellung:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den Erkrankten auf einen Mann?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein, wenn man an Grippe erkrankt ist?
- Wie groß ist, unter der Bedingung Grippe zu haben, die Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein?

Lösungsansatz: $P_G(\_\_\_\_\_)$

$=$

$=$

Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, und formulieren Sie zusätzlich zur gegebenen Fragestellung eine zweite Fragestellung, welche das Wort „wenn" enthält.

$P_{\overline{M}}(\overline{G}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{G})}{P(\overline{M})} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeitt trifft man unter den Männern auf einen nicht erkrankten.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit _____

$P_{\overline{G}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter Gesunden auf einen Mann.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit _____

$P_{\overline{M}}(G) = \frac{P(\overline{M} \cap G)}{P(\overline{M})} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den Frauen auf eine erkrankte.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit _____

$P_G(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M} \cap G)}{P(G)} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den an Grippe Erkrankten auf eine Frau.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit _____

Formulieren Sie eine zweite Fragstellung, und ermitteln Sie mit dem passenden mathematischen Ansatz die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den Personen auf eine Frau?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit _____

Ansatz

Ansatz und Re...

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 5.7

Anhand des Beispiels in dieser Aufgabe soll eine weitere Hilfe für die Entschlüsselung Aufgabentexten bei bedingten Wahrscheinlichkeiten gegeben werden.

Zahlenbeispiel:
In Deutschland sind etwa 0,5% der Bevölkerung an einem [illegible] Krebs erkrankt. Man weiß, dass ein spezieller Bluttest 90% der Gesunden und [illegible] richtig diagnostiziert.
a) Wie viel Prozent der Tests fallen positiv aus?
b) Bei einer Routinekontrolle zeigt der Test ein [illegible] Ergebnis an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Person bei einem positiven Testergebnis nicht erkrankt ist.
c) Bei einer Routinekontrolle zeigt der Test ein negatives Ergebnis an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man trotzdem an dem Krebs erkrankt ist.

Lösungschritte

Schritt 1:

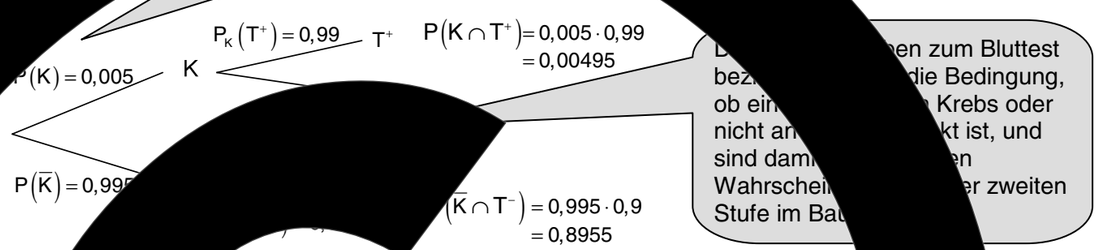
Festlegen der Merkmale und passender Abkürzungen:

- Person hat Krebs: K
- Person hat keinen Krebs: $\overline{K}$
- Test ist positiv: T^+
- Test ist negativ: T^-

Schritt 2:

Baumdiagramm durch Zuordnen der Zahlenangaben zu der ersten bew. zweiten Stufe des Baumdiagramms erstellen.

Hier muss analysiert werden, welche Zahlenangaben sich auf die erste Stufe eines Baumdiagramms beziehen.
Da sich [illegible] der Bevölkerung [illegible] des [illegible]



Die Zahlenangaben zum Bluttest beziehen sich auf die Bedingung, ob ein [illegible] Krebs oder nicht an [illegible] ist, und sind damit [illegible] Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe im Baumdiagramm.

Schritt 3:

Erstellen einer Vierfeldertafel durch Übertragen der Werte aus dem [illegible]diagramm und Vervollständigung der Felder mithilfe der Additionsregel.

	T^+	T^-	
K	0,00495	0,000[illegible]	[illegible]05
$\overline{K}$	0,0995	0,8955	0,[illegible]
	0,10445	0,89555	1

Schritt 4:

Analyse der Aufgabenstellung [illegible] Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit der Vierfeldertafel und gegebenenfalls Formeln für die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Dazu kann man die Aufgabenstellung [illegible] wenn [illegible] Satz [illegible] formulieren.

zu a) Gesucht ist [illegible] wahrscheinlich $P(T^+)$

$P(T^+) = [illegible]445 [illegible],45\%$

Das Ergebnis kann sofort aus der Vierfeldertafel abgelesen werden.

zu b) [illegible] welcher [illegible] Wahrscheinlichkeit ist eine Person nicht erkrankt, wenn [illegible] ein positives Ergebnis anzeigt.

$$P_{T^+}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{0,0995}{0,1044[illegible]} [illegible] \approx 95,3\%$$

Die Werte für die Berechnung können der Vierfeldertafel entnommen werden.

Bei einem positiven Test ist man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% nicht erkrankt.

zu c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person erkrankt, wenn der Test ein[illegible]

Die Werte für die Berechnung können der Vierfeldertafel entnommen werden.

[illegible]

Ein negativer Test kann als sicherer Hinweis, [illegible] auch nicht erkrankt ist, angesehen werden, da man [illegible] negativen Testergebnis nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,006% trotzdem erkrankt ist.

Ergänz[illegible]

An[illegible] Vierfeldertafel kann man auch ein Baumdiagramm entwickeln, dessen [illegible] Merkmal T^+ und T^- hat, da sich die Aufgabenstellung auf ein Merkmal bezieht, in dessen [illegible] nicht mehr die Merkmale K und $\overline{K}$, sondern die Merkmale T^+ und [illegible]en.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

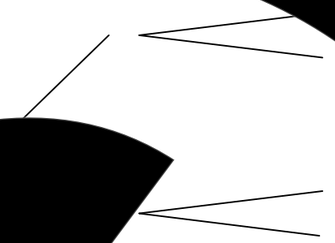
Aufgabe 5.8

Bei 4,5 Millionen Wohneinheiten in Deutschland werden jährlich 200 000 Wohnungsbrände gemeldet. 600 Brände mit tödlichen Folgen für Menschen führen zu Überlegungen, [illegible] Rauchmelder [illegible] Wohnungen Pflicht werden sollten. Jedoch funktionieren Rauchmelder in [illegible] nicht zu 100% fehlerfrei. Ein handelsüblicher Rauchmelder bei einem Schnäppchenangebot löst [illegible] Brandfall mit einer WK von 99,8% einen Alarm aus. Es kann jedoch auch nicht ausgeschlossen [illegible], dass der Rauchmelder einen Fehlalarm aussendet, wenn es nicht brennt. [illegible] Fehlalarm wird einmal jährlich also mit einer Wahrscheinlichkeit von 1:365 erwartet.

a) Begründen Sie, warum sich die gegebenen Werte auf ein [illegible] Baumdiagramm beziehen, [illegible] dem die Merkmale Brand B und nicht Brand $\overline{B}$ der ersten Stufe zugeordnet werden. Erstellen Sie dieses Baumdiagramm, und ermitteln Sie mit dessen Hilfe eine zugehörige Vierfeldertafel. Verwenden Sie für das Merkmal Alarm A und kein Alarm $\overline{A}$.

			1

b) [illegible] kein Alarm $\overline{A}$ der ersten Stufe [illegible] Sie die Zusammen[illegible] den Baumdiagrammen und der [illegible]



c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Brandmelder im Laufe eines Jahres einen Alarm aussendet.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es beim Auslösen des Alarms wirklich brennt. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung dazu zu[illegible] des „Wenn-Satzes“.

$P\_(\_\_\_) = \frac{P(\_\_\_\_\_)}{P(\_\_\_\_\_)} = \_\_\_\_\_ \%$

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, [illegible] unbemerkten Wohnungsbrand, weil der Brandmelder keinen Alarm [illegible]. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung dazu auch hier zunächst mithilfe eines „Wenn-Satzes“ und beurteilen Sie anschließend die Sicherheit des Brandmelders.

$P\_(\_\_\_) = \frac{P(\_\_\_\_\_)}{P(\_\_\_)} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ \%$

Beurteilung der Sicherheit:

F[illegible]ungen:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 5.9

Ergänzende Betrachtung zu Mehrfeldertafeln

In einer Studie zur Berufstätigkeit von Frauen werden in Zufallsland folgende Zahlen erhoben: Von den 34% kinderlosen Frauen sind 95% berufstätig. Während von den 41% der Frauen mit einem Kind noch 30% einer Berufstätigkeit nachgehen sind, geben von den 25% der Frauen mit zwei Kindern 80% ihre Beruftätigkeit auf. Unter den Frauen mit drei oder mehr Kindern üben nur noch 20% Ihren Beruf aus.

a) Zeigen Sie, dass in Zufallsland 53,1% der Frauen nicht berufstätig sind.
b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, unter den berufstätigen Frauen eine Frau mit zwei oder mehr Kindern anzutreffen, nur bei 1% liegt.

Lösungshinweise:

Bei Baumdiagrammen mit mehr als zwei Ästen bzw. mit mehr als zwei Stufen kann man analog zu Baumdiagrammen mit zwei Ästen und zwei Stufen sogenannte Mehrfeldertafeln erstellen. Tragen Sie im Baumdiagramm an den markierten Stellen die in der Aufgabe gegebenen Zahlen ein und füllen Sie mithilfe dieser Zahlenwerte und der Additionsregel die Mehrfeldertafel aus. Berechnen Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten in Aufgabe a) durch Ablesen aus der Mehrfeldertafel und in Aufgabe b) durch Rechnung mit der Vierfeldertafel entsprechende Formel.

	B	$\overline{B}$	
0K			
1K			
2K			
3K			
			1

zu b)

Aufgabe 5.10

Ergänzende Betrachtungen zum Begriff der totalen Wahrscheinlichkeit

a) Verdeutlichen Sie sich anhand der beiden Baumdiagramme aus Aufgabe 5.5 folgende Zusammenhänge und den Begriff der **totalen Wahrscheinlichkeit**.

Die **erste Stufe** im linken Baum in Aufgabe 5.5 bezeichnet **Merkmal A**	Die **erste Stufe** im rechten Baum in Aufgabe 5.5 bezeichnet **Merkmal B**
Aus dem Baumdiagramm kann man nur die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe P(A) und $P(\overline{A})$ direkt ablesen.	Aus dem Baumdiagramm kann man nur die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe P(B) und $P(\overline{B})$ direkt ablesen.
$P(B)$ und $P(\overline{B})$ können nur mithilfe der entsprechenden Ereignisse berechnet werden.	$P(A)$ und $P(\overline{A})$ können nur durch Addition der entsprechenden Ereignisse berechnet werden.
$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ oder $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ oder $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$
Man bezeichnet die hier berechnete Wahrscheinlichkeit P(B) als **totale Wahrscheinlichkeit P(B).**	Man bezeichnet die hier berechnete Wahrscheinlichkeit P(A) als **totale Wahrscheinlichkeit P(A).**

b) Ergänzen Sie den folgenden Satz, und geben Sie mithilfe der beiden Baumdiagramme aus Aufgabe 5.5 die totalen Wahrscheinlichkeiten $P(\overline{B})$ und $P(\overline{A})$ entsprechend der Definition im Kasten an.

Man berechnet die totale Wahrscheinlichkeit $P(\overline{B})$ bzw. $P(\overline{A})$, indem man im entsprechenden Baum aus Aufgabe ... aller Pfade, die zum Ereignis ___ bzw. ___ führen,

Wenn die 1. Stufe im Baum das Merkmal A bezeichnet, gilt:	Wenn die 1. Stufe im Baum das Merkmal B bezeichnet, gilt:
$P(\overline{B}) =$ _____	$P(\overline{A}) =$ _____
_____	$P(\overline{A}) =$ _____

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

Zusammenfassung zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten

Die Aufgab[illegible]ng bez[illegible] auf ein Baum[illegible]ag[illegible] mit dem Merkmal A in [illegible] e[illegible]fe.

Häufig sind bei Aufgabenstellungen zu bedingten Wahrsc[illegible]ich[illegible]ga[illegible]n zum Merkmal A also P(A) für die erste Stufe des Baumes und Wahrscheinlichkei[illegible] Ereig[illegible]e oder bedingte Wahrscheinlichkeiten der zweite Stufe im Baum s[illegible]ben, [illegible] man die Vierfel[illegible]tel ausfüllen kann. Gefragt wird dann in der Regel nach eine[illegible]dingten Wah[illegible]einlichkeit, [illegible] die Wahrscheinlichkeit des Merkmals B, also P(B), [illegible]er erste[illegible]tufe des Baum[illegible]agramms ver[illegible]ndet wird, also die Wahrscheinlichkeit für A unter d[illegible] Bedi[illegible]g, das [illegible] eingetreten ist, berechnet [illegible] soll. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann da[illegible] der b[illegible]nten Formel berechnet werden.

[illegible]e Frag[illegible]stellung bezieht sich auf ein Baumdiagramm mit de[illegible] Ereignis B in der ersten Stufe.

[illegible]erech[illegible]g der [illegible]gten Wah[illegible]einlichkeit [illegible] we[illegible] B in der ersten St[illegible] des Baumes ein[illegible]t.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Gleichwertig dazu ist die Formulierung von Bayes, bei der jeweils die totalen Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden.

$$[illegible] = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$$

P[illegible]

[illegible] Bayes

$$P_B(A) = [illegible] \frac{[illegible](B)}{P([illegible]) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$$

Ergänz[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert [illegible]en

Kapit[illegible]

Definition der [illegible]nlichkeitsverte[illegible]

02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte… …hrsche… …chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinli… …keitsv… …ilung 61

Wahrscheinlich… …rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit…
Vari… und … …lard… …ichung 69

Kap… 9
…no… …verteil… 75

…othesentests

…l 10
Z… …seitiger Sign… …ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F… …ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

…de Betrachtungen zur Normalve… 139

…pitel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

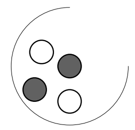
Gesa… …elbstorganisiert erlernen (Beste… …278)
S…
…orbehalten. A… …ghts reserved.
…k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
… aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 6: Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagramm… …n Sie … …elernt, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse immer den Wert … …rgi… …mit ist Ihnen bereits ein wichtiges Merkmal einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beka…nt. Es … …lgt … …hand eines einfachen Beispiels, eine Formalisierung und Erweiterung von Begri… …eiten.

Aufgabe 6.1

Definition der Zufallsvariablen und Darst… …von … …rschei…lichkeits… …gen



Aus einer Urne … …wei ro… …und zwei we… …Kugeln w… …alle Kugeln ohne … …iege… …g…

Aufgabenstellung: Bere… …Sie … …eils die Wah… …lichkeit da… …an die beiden roten …geln nach de… 2. Ziehen, … dem 3. Zi… … oder erst nach dem letzten …hen … …hat.

Neue Be… …die Aufgab… …tellu…: …ur Vereinfach… …Formalis… …der Schreibweise wird nun eine …allsvariabl… X … …gegeben. …ie …ufallsvariable X gibt hier die Anzahl der Ziehungen …die man ben… …damit das Ereignis e, zwei rote Kugeln zu ziehen, … …ritt.

… = P(2. … …gel im 2. Zug) = P(X = 2)
…(…rr) = P(2. …r… Kugel im 3. Zug) = P(X = 3)
…(wwrr) … …ote Kugel im 4. Zug) = P(X = __)

Alterna…:

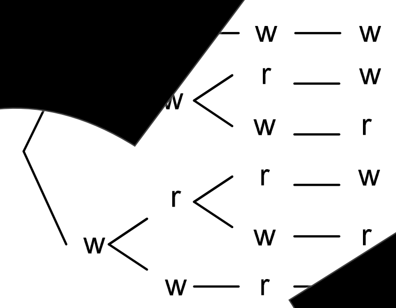
P(e) … (2. rote Kugel im k. Zug) = P(X = k) für k = 2, 3, 4

…de Wahrscheinlichkeit in der Form
…
…tsprechend der Aufgaben-
…st… …Verte.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie fehlende … …zen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen des Baum… …nd verdeutlichen Sie sich danach … …enden Seite.

Baum…



Darstellung des Zufallsversuchs mithilfe einer tabellarischen Wahrscheinlichkeitsverteilung				
Angabe der Ereignisse e_i als Klartext	2 rote Kugeln nach **k = 2** Ziehungen	2 rote Kugeln nach **k = 3** Ziehungen	2 rote Kugeln nach **k = 4** Ziehungen	
Festlegen der Werte für die Zufallsvariable hier: $\mathbf{x_i = k}$	2	3	4	
Berechnen der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignis $\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$	Summe aller $P(X = x_i)$: $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=1$

Die Summe aller $P(X = x_i)$ ist immer 1.

Geben Sie anhand der Tabelle die folgenden Werte an.

$P(X = 2) =$ ____ $P(X = 3) =$ ____ $P(X = 4) =$ ____

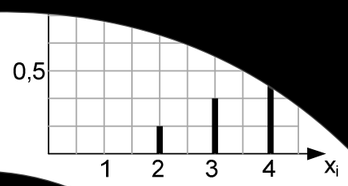
b) Bei der Bearbeitung von Aufgaben ist es nicht immer notwendig, die Wahrscheinlichkeitsverteilung in allen Einzelheiten anzugeben. Oft ist eine Darstellung in Kurzform ausreichend. Füllen Sie nachfolgende Tabelle aus.

Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung in Kurzform:

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$			

c) Häufig werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch mithilfe von Balkendiagrammen dargestellt. Verdeutlichen Sie sich das abgebildete Balkendiagramm, und vervollständigen Sie den nachfolgenden Text.

Balkendiagramm



Auf der _____ die Zahlenwerte eingetragen, die die Zufallsvariable $X = x_i$ annehmen kann. Auf der _____ Achse werden die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ eingetragen.

Ergänzungen: _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik selbstorganisiert erarbeiten

Kapitel

Erwartungswert

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]hkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]nor[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]e Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 7: Erwartungswert

Aufgabe 7.1

Definition des Erwartungswerts

Zur Information:

Erwartungswerte sind jedem Schüler unter dem Begr[illegible]itte[illegible] bekannt. [illegible]n man gefragt wird, welche Zeit man am Morgen durchschnittlic[illegible]n W[illegible]r Arbe[illegible] benötigt, [illegible]n, wie in der Tabelle unten, aus mehreren Zeitmessun[illegible] den Mittelw[illegible]stimmen. [illegible]es[illegible]erechnung entspricht prinzipiell der Ermittlung des Erwartungsw[illegible]s einer Z[illegible]allsv[illegible]ablen be[illegible]ein[illegible]n Zufallsversuch.

Berechnung des Mittelwerts a[illegible]ekal[illegible]

Gemessene Zeit in Mi[illegible]n	25	[illegible]	35	[illegible]	45
Absolute Häufig[illegible]des [illegible]sswert[illegible]	[illegible]	9	[illegible]	4	2

Vervolls[illegible]ie d[illegible]chnung:

$$\frac{\cdot [illegible] \cdot 30 [illegible] \cdot 35 + [illegible] \cdot 45}{30} = \_\_\_\_\_ \text{ Minuten}$$

[illegible]ung des [illegible]ittelwerts unte[illegible]wendung der Begrifflichkeit der Wahrscheinlichkeits[illegible]echung

Verwendet man die Begrifflichk[illegible] der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so entspricht jede gemessene Zeit dem Wert x_i, den eine Zufallsvariable X annehmen kann. Die relative Häufigkeit, mit der eine Zeitmessung auftritt, wird als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Zufallsvariable interpretiert. Da bei 30 Mes[illegible]ftritt, schreibt man: $P(X = 40) = \frac{4}{30}$. Den Mittelwert aus al[illegible]rechung als **Erwartungswert E(X).**

[illegible] oben kann unter dem Ge[illegible]heinlichkeitsrechnung dann wie folgt [illegible] werden:

Werte der Zufallsvariablen x_i	25	3[illegible]	[illegible]	40	45
Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ für das Auftreten von x_i	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	[illegible]	[illegible]	$\frac{2}{30}$

$$E(X) = [illegible] + 30 \cdot \frac{9}{30} + 35 \cdot \frac{10}{30} + 40 \cdot \frac{4}{30} + 45 \cdot \frac{2}{30}$$

$$E(X) = \frac{1}{30}(125 + 270 + 350 + 160 + 9[illegible] = \_\_\_\_\_ \text{ Minu[illegible]}$$

Ergänzen Sie:

Der Erwartungswert E(X) einer Zufallsvariable X wird berechnet, indem m[illegible] alle We[illegible] w[illegible] die Zufallsvariable X annimmt, jeweils mit den zugehörigen Wahrscheinlichke[illegible] P([illegible]) _____ und die einzelnen Produkte anschlie[illegible] _____.

Allgemein lässt sich der Erwartungswert einer Zufallsvaria[illegible] [illegible]inieren:

Ist X eine Zufallsvariable, welche die W[illegible] $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt, so heißt die Summe $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$ Erwartungswert der Zufallsv[illegible]ble[illegible]er Erwartungswert [illegible]) wird auch mit dem griechischen Buchstaben μ ([illegible]) [illegible]zeichnet.

Aufgabe 7.2

Die Wahrsc[illegible]nlichk[illegible]erte[illegible]ng unter d[illegible]m Gesichtspu[illegible]kt des Erwartungswerts

Die Au[illegible]er[illegible]ng v[illegible] Aufgabe 6.1 wi[illegible] wie folgt [illegible]eitert.

[illegible]ird n[illegible]zusätzlich zu den in A[illegible]fgabe 6.1 ermi[illegible]eiten Wahrscheinlichkeiten berechnet, wie viele Zi[illegible]n bei häufigem Wiederholen des Zufallsversuchs durchschnittlich oder im Mittel benötigt, um zw[illegible]ugeln zu [illegible]halten. Ergänze[illegible] [illegible]ehlende Angaben.

Der Erwartungswert beschreibt das Ergebnis, das bei häufiger Durchführung eines Zufallsversuchs [illegible]erwarten ist.

[illegible]verteilung aus Aufg. 6.1

		3	4
$P(X = x_i)$			$\frac{3}{6}$

[illegible]erechnung des Erwartungswerts anhand der Definition oben:

$E(x) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots x_3 \cdot P(X = x_3)$

$E(x) = \_\_ \cdot \_\_ + \_\_ \cdot \_\_ + \_\_ \cdot \_\_ \ldots 3$

Ergebn[illegible]

Man benötigt bei sehr häufiger D[illegible] des Spiels durchschnittlich _____ Züge, a[illegible] 3 Züge, um zwei r[illegible]eln zu erhalten.

Aufgabe 7.3

Wahrscheinlichkeitsverteilung unter dem Gesichtspunkt eines [illegible]ären G[illegible]s Erwartungswert.

Eine entscheidende Frage bei Glückspielen ist nicht nur, [illegible]n gew[illegible]er verliert, sondern auch wie viel man gewinnen oder verlieren kann und ob ein Spiel als [illegible]nzus[illegible] ist. Betreiber von Spielcasinos müssten Konkurs anmelden, wenn di[illegible]ebe[illegible]lück[illegible]piele keinen ausreichenden Gewinn abwerfen, um laufende Kosten abzudecken. [illegible]ch[illegible] sich die f[illegible]nde Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn bei ein[illegible]iel u[illegible]ertragen Sie die [illegible]rgehensweise auf das anschließende Beispiel.

Die Aufgabenstellung aus Aufgabe 7.2 wi[illegible]n so v[illegible]rt, dass die [illegible]rechnung e[illegible] Gewinns bzw. Verlusts im Mittelpunkt der Betra[illegible]g ste[illegible] Spielei[illegible] von 1,00 € li[illegible]folgender Gewinnplan vor:

[illegible]gnis	Ausz[illegible]
[illegible]te Ku[illegible] der 2. Z[illegible]	[illegible]00 €
[illegible]te Kugeln nach der [illegible] Z[illegible]	[illegible]1,00 €
[illegible]eln nach d[illegible] Ziehung	0 €

Für di[illegible]ewinn- [illegible] Verlustberechnu[illegible] darf man jet[illegible] nur den ausgezahlten Gewinn laut G[illegible]win[illegible] betra[illegible]n, sondern m[illegible] von der Bila[illegible] Ein- und Auszahlung ausgehen, d.h. von d[illegible] wa[illegible] Spi[illegible] oder der A[illegible]richter des S[illegible] nach dem Spiel in der Tasche hat. Man muss sich in [illegible] Rege[illegible]heiden, [illegible] Berechnu[illegible] Sicht des Spielers oder des Ausrichters erfolgen.

F[illegible] Tabelle s[illegible]llt die Gewinn- [illegible] Verlustrechnung aus Sicht des Spielers dar:

Ere[illegible]	Auszahlung	Gewinn- /Verlustrechnung
2 rote Kugeln nach der 2. Ziehung	3,00 €	2,00 €
2 rote Kugeln nach der 3. Ziehung	1,00 €	0 €
2 rote K[illegible]	0 €	–1,00 €

[illegible]us Sicht des Spieleausrichters.

Ereignis	[illegible]winn- /Verlustrechnung
2 rote Kugeln nach der 2. Ziehung	3,[illegible]
2 rote Kugeln nach der 3. Ziehung	1,00 €
2 rot[illegible]hung	0 €

Wie S[illegible]dern Sie nur die Vorzeichen der Za[illegible] der Gewinn-/ Ver[illegible] das Ergebnis keine Rolle, aus welche[illegible]ein Spiel b[illegible]genden Be[illegible]nungen und die entsprechende Wahrsche[illegible]erteilung werden [illegible] Spielers durchgeführt.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

In der Wahrscheinlichkeitsverteilung ändert sich im Vergleich zu Aufgabe 7.2 bei [illegible]chtung [illegible] monitären Gewinns die Bedeutung der Zufallsvariablen $X = x_i$. Die Zufallsvariable X [illegible] nun n[illegible] mehr die Anzahl der Ziehungen an, sondern ordnet den einzelnen x_i den Gewi[illegible] Verlu[illegible] Spiel zu. Für die Beschreibung des eingetretenen Ereignisses beim Ziehen ka[illegible] zus[illegible] die Variable e_i verwenden. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ere[illegible]sse[illegible] für den Gewinn/Verlust x_i bleibt hinsichtlich der Aufgabe 7.2 unveränder[illegible]

[illegible]ile f[illegible]ie Formulierung der Ere[illegible]e e_i sorgt f[illegible]ehr Transparenz hin[illegible]der [illegible]ufgabenste[illegible]st zu [illegible]mpfehlen [illegible] nicht notwendig.

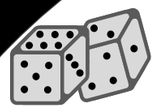
Darstellung des Zufallsv[illegible]bellarische Wa[illegible]rscheinlichk[illegible]verteilung			
Auflistung der Erei[illegible]	e_1: 2 [illegible]ugeln nach 2 Ziehungen	e_2: 2 rote Kugeln [illegible]n 3 Ziehungen	e_3: 2 rote Kugeln nach 4 Ziehungen
Jedem Er[illegible] e_i wi[illegible] zahlen[illegible] des Gewin[illegible] x_i zuge[illegible]et.	2,00 €	[illegible] €	–1,00 €
[illegible]	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Der mittl[illegible]ewinn bei v[illegible] durchgeführt[illegible] Spielen, also der Erwartungswert, wird nun entsprechend zur Definition berechnet.

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) = 2{,}00\ € \cdot \frac{1}{6} + 0\ € \cdot \frac{2}{6} + (-1{,}00\ €) \cdot \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}\ € = -0{,}17\ €$$

Das bedeutet, d[illegible] Durchführung des Spiels 17 Cent pro Spiel verliert.

[illegible]ufgabe zur Berechnung des Erwartungswerts be[illegible]iel



Folgendes Glücksspiel wird Ihnen vorgeschlagen:

Es we[illegible]geworfen. Sie erhalten die von [illegible]n angezeigte A[illegible] diese geradzahlig ist, und S[illegible] angezeigte [illegible] eine ungerade Zahl ergibt.

Entsc[illegible]ontan, d.h. ohne die folgenden Rechnungen zu b[illegible] Sie sich auf dieses Spiel einlassen würden: [illegible]nein❍

Übersicht der Augensummen beim Werfen von zwei Würfeln

Ereignis e_i: mögliche Augensumme	Würfelkombinatio[illegible]n für di[illegible] möglichen Auge[illegible]n: (erster Würfel;zw[illegible]er W[illegible])	[illegible]zahl der Ereignisse
2	(1;1)	
3	(1;[illegible](2;1)	
4	(1;3[illegible];1)	
5	[illegible]1;4)(2[illegible];2)(4;1)	
6	(1;5)[illegible];4)([illegible];3)(3;2)(3[illegible])	
7	(1;[illegible];5)(3;4)(4;[illegible])(5;2)(6;1)	
8	[illegible])(3;5)(4;4)([illegible]3)(6;2)	
[illegible]	(3;6)(4;5)(5;[illegible])(6;3)	
10	(4;6)([illegible];5)(6;4)	
11	(5;6)(6;5)	
12	(6;6)	

[illegible]ell[illegible] Wahr[illegible]einlichkeits[illegible]eilung und B[illegible]echnung des Erwartungswerts

[illegible]eignis e_i (A[illegible]nsumme)										
[illegible]ariable x_i Ein[illegible]Auszahlung										
$P(X = x_i)$										

Erwar[illegible] _____

_____

[illegible]**bnis:** Der Erwartungswert nimmt den Wert Null an[illegible]ür Sie und den Mitspieler weder ein Gewinn noch ein _____. Man erken[illegible]iel fair ist, und weiß nun sich[illegible]uf einlassen kann.

[illegible]e spontane Entscheidung getroff[illegible] nein❍

[illegible]e Übungsaufgaben: _____

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …lernen

Kapit…

Varianz und Standardabw… …g

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]dard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]nor[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]

[illegible]de Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

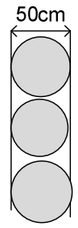
VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 8: Varianz und Standardabweichung

Wie Sie bereits wissen, entspricht die Berechnung des Erwartungs[illegible]E(X) de[illegible]g eines Mittelwerts für eine Zufallsvariable X. Bei vielen Prozessen in der A[illegible] wie beispielsweise bei Messungen in der Physik oder bei der Herstellung von Bauteilen, re[illegible]es [illegible]s nicht aus, diesen Mittel- bzw. Erwartungswert zu kennen. Vielmehr benötigt [illegible] eine A[illegible], ob und wie viel die gemessenen Werte oder Bauteile von diesem Mittelwert abw[illegible]en. B[illegible]ertigungsprozessen in der Praxis werden diese Abweichungen auch als **Ferti[illegible]sto[illegible]** be[illegible]chnet. Die Abweichungen vom Erwartungswert werden mithilfe der sog. **Varian[illegible]er [illegible]dardabwei[illegible]ng**, gewonnen. Verdeutlichen Sie sich anhand von Aufgabe [illegible]d 8.[illegible] man diese Größ[illegible] be[illegible]hnet. Übertragen Sie Ihre Erkenntnisse dann auf die folgen[illegible]bungsaufga[illegible]

Aufgabe 8.1

Varianz und Standardabwei[illegible]ng bei Fert[illegible]leranz[illegible]



Ein Hersteller von kreisförmige[illegible]en vermutet auf[illegible]und von Res[illegible]erden seiner Kunden, dass seine S[illegible]schine nicht [illegible]hr exakt ge[illegible]arbeitet und [illegible]ch eine neue ersetzt werden mu[illegible]m [illegible]erzu[illegible]dass sei[illegible]mutung hinsichtlich der Fertigungstoleran[illegible]tim[illegible]lässt er aus der Produkt[illegible]n 100 Sche[illegible]en vermessen. Die Scheiben sollen ein[illegible] von 50 cm haben.
Überschr[illegible]durc[illegible]mittliche Abwe[illegible]ng diesen W[illegible]ert mehr als 1 cm, muss er sich für eine ne[illegible]was[illegible]ent[illegible]iden und damit hohe Investi[illegible]sten in Kauf nehmen.

Anmer[illegible]g: Die [illegible]lenwerte sind [illegible]gewählt, dass die Rechnungen möglichst einfach we[illegible], entsprechen damit allerdings nicht realistischen Gegebenheiten.

Ze[illegible] Sie durch Rechnung, dass sich als Erwartungswert für den Durchmesser der Scheiben der [illegible] von 50 cm ergibt. Die Zufallsvariable nimmt hier die Messwerte für den Durchmesser der 100 [illegible] an.

Zufallsvariable $X = x_i$	x_1	[illegible]	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Messwerte für die x_i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50	51	52	53	
[illegible] $(X=x_i)$	[illegible]/100	[illegible]/100	[illegible]	[illegible]	[illegible]23	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\sum = 1$

Erwartungswert:

E(x) $= P(X = x_1)\cdot x_1 + P(X = [illegible]) \cdot x_2 + P(X = x_3)\cdot x_3 + P(X = x_4)\cdot x_4 + P([illegible]X = x_6)\cdot x_6 + P(X = x_7)\cdot x_7$

$= [illegible]$ + _____ + _____ + _____ + [illegible]

B[illegible]arum die [illegible]nung des Erwartungswerts nicht ausreic[illegible] Entscheidung für [illegible]e Neuinvestition zu treffen.

Ergänzen Sie für die folgenden Berechnungen die fehlende Angaben.

Für den Erwartungswert wird hier μ verwendet.

Um das Rechnen mit negativen Vorzeichen zu vermeiden und um größere Abweichungen stärker zu gewichten, werden die einfachen Abweichungen quadriert.

Einfache Abweichung der x_i vom Erwartungswert	$x_1 - \mu$	$x_2 - \mu$	$x_3 - \mu$	$x_4 - \mu$	$x_5 - \mu$	$x_6 - \mu$	$x_7 - \mu$
	47 – 50	48 – ___	49 – ___	50 – ___	51 – ___	52 – ___	53 – ___
$x_i - \mu$	–3			0			
Quadrierte Abweichung der x_i vom Erwartungswert **$(x_i - \mu)^2$**	$(x_1 - \mu)^2$	$(x_2 - \mu)^2$	$(x_3 - \mu)^2$	$(x_4 - \mu)^2$	$(x_5 - \mu)^2$	$(x_6 - \mu)^2$	$(x_7 - \mu)^2$
		___	___	___		___	___

Varianz V(X)

$V(x) = P(\_\_) \cdot (x\_\_ - \mu)^2 + P(X = x_2) \cdot (x_2 - \mu)^2 + P(X = x_3) \cdot (x_3 - \mu)^2 + P(X = x_4) \cdot (x_4 - \mu)^2 + P(X = x_5) \cdot (x_5 - \mu)^2$

$+ P(X = x_6) \cdot (x_6 - \mu)^2 + P(X = x_7) \cdot (x_7 - \mu)^2$

$V(x) = \frac{1}{100} \cdot 9 + \frac{10}{100} \cdot 4 + \frac{\_\_}{\_\_} \cdot \_\_\_ + \frac{\_\_}{\_\_} \cdot \_\_\_ + \frac{\_\_}{\_\_} \cdot \_\_\_ + \frac{\_\_}{\_\_} \cdot \_\_\_ + \frac{\_\_}{\_\_} \cdot \_\_\_$

$V(x) = 1{,}62$

Durch das Ziehen der Wurzel aus dem berechneten Wert für die Varianz wird die **Standardabweichung σ** (Sprich: sigma) damit wird das Quadrieren der Abweichungen relativiert.

Standardabweichung σ

$\sigma = \sqrt{1{,}62} = 1{,}27$

Entscheidung des Herstellers: Der Hersteller entscheidet sich aufgrund der Stichprobe _____ den Kauf einer neuen Maschine, da _____

Allgemeine Definition der Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sum_i^n P(\_\_) \cdot (x_i - E(x))^2}$$

Aufgabe 8.2

Varianz und Standardabweichung bei der Auswertung von Messungen

Wie Sie aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht sicherlich wissen, muss bei jeder Messung beachten, dass Messfehler auftreten. Bei der vollständigen Auswertung einer Messung müssen diese Messfehler angegeben werden. Im Allgemeinen wird das als Fehlerrechnung bezeichnet. Ergänzen Sie die für die folgende Messung fehlenden Angaben.

Zur Bestimmung der Beschleunigung a bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung wird die folgende Messreihe aufgenommen:

Zeit t in [s]	Geschw. v in $\left[\frac{m}{s}\right]$	Beschleunigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ in $\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Einfache Abweichung der Werte von a vom Erwartungs- bzw. Mittelwert $a_i - \bar{a}$	Quadrierte Abweichung der Werte von a vom Erwartungs- bzw. Mittelwert $(a_i - \bar{a})^2$
1	0,9	0,9	0,9 – 0,69 = 0,21	0,0441
2	1,0			
3	2,4	0,8		
4	2,5	0,3		
	3,1	0,62		
	4,2	0,7		
Mittelwert für a: $E(a) = \bar{a}$		0,69		

Technik

gekennzeichnet. Hier a (sp...

Varianz: $V(a) = \frac{1}{6} \cdot (0{,}0441 + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_)$

dieser Messung für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\_\_\_\_\_}$

...k © Ursula Pirkl, Juli 2014

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

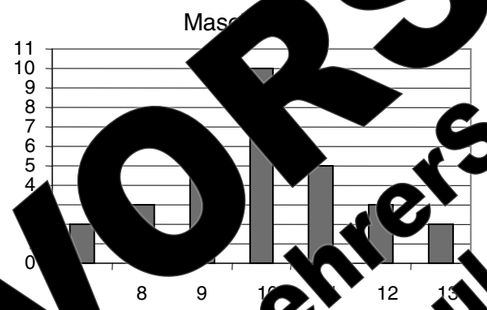
Übungen

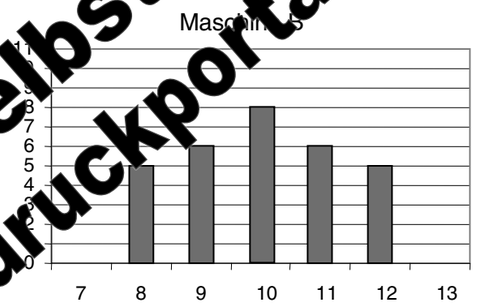
Ü8.1: Varianz und Standardabweichung bei Fertigungstoleranzen

Zwei Maschinen A und B schneiden Stahlstifte auf die Länge von 1[illegible] wobei [illegible]eichungen bei der Stiftlänge auftreten. Bei 30 Stiften werden jeweils die gemes[illegible]en [illegible] in einer Häufigkeitsverteilung dargestellt. Entscheiden Sie intuitiv, [illegible]he der [illegible] besser arbeitet bzw. die kleinere Fertigungstoleranz hat, und prüfen Sie du[illegible]e Be[illegible]ung der Standardabweichung, ob Ihre Entscheidung richtig [illegible]

❍ Maschine A arbeitet besser
❍ Maschine B arbeitet besser

Bei den Stabdiagrammen sind auf der ho[illegible]talen A[illegible]e die Informati[illegible]en über die [illegible]ge der Stifte aufgetragen und auf der ve[illegible]n A[illegible]dere[illegible]bsolute [illegible]iten. Entn[illegible] Sie die Informationen zu Messwerten [illegible] Wahrsche[illegible]en den [illegible] Diagram[illegible]en, [illegible] füllen Sie die Tabelle entsprechend zur [illegible]us:





R[illegible]g für Mas[illegible]ine A:

	Maschine A						
Messwerte x_i	$x_1 = 7$	$x_2 = 8$	$x_3 = 9$	$x_4 =$ ___	$x_5 =$ ___	$x_6 =$ ___	$x_7 =$ ___
relative Häufigkeit: $H(x_i)$ bzw. Wah[illegible]							

[illegible]wert: E(X) = _____

_____ = 10

Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert x_i – [illegible]							
Quadrie[illegible] Abwei[illegible] (x_i [illegible]							

[illegible]) = _____

_____

[illegible]labweichung: σ = _____

Rechnung für Maschine B:

	Masc[illegible]				
Messwerte x_i	$x_1 =$ _____	$x_2 =$ _____	$x_3 =$ _____	[illegible]	$x_5 =$ _____
relative Häufigkeit: $H(x_i)$ bzw. Wahrscheinlichkeit: $P(X=x_i)$					

Erwartungswert: E(X) = _____

_____

Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert x_i – E[illegible]					
Quadrierte Abweichung: $(x_i – E(x_i))^2$					

V[illegible]anz: V([illegible]) = _____

_____ = _____

[illegible]tandardabweichung: [illegible] = _____ = 1,31

[illegible]rgebnis:

Anhand des Erwartungsw[illegible]s kann man nicht entscheiden, welche der Maschinen eine kleinere Toleranz hat, da diese Werte bei beiden Maschinen _____.

Ma[illegible]ranz als Maschine ___, da die Standard-[illegible]bweichung bei Maschine ___ ist.

[illegible]tuitive Entscheidung war: ❍ richtig[illegible]

Ü8.2 Recherchieren Sie in geeigneten Quellen, welche Bedeutu[illegible]dabweichung bei Glücksspielen [illegible]

_____

_____

_____

[illegible]nde Übungen: _____

_____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert lernen

Kapitel

Binomialverteilung

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]hkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible] und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]no[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Sign[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]

[illegible]e Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 9: Binomialverteilung

Die Binomialverteilung stellt eine wesentliche Basis bei der statisti[illegible]swert[illegible] Daten dar und nimmt damit hinsichtlich vieler Anwendungsprobleme in der Wirtsch[illegible] M[illegible] und anderen Gebieten einen besonderen Stellenwert in der Wahrscheinlichkeitsre[illegible]ung ein[illegible]nh[illegible]olgenden Aufgabe soll verdeutlicht werden, was man unter einer Binomialvert[illegible]g vers[illegible]

Aufgabe 9.1

Herleitung der Formel von Bernoulli

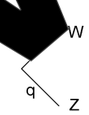
Eine verbeulte Münze zeigt beim Werfen [illegible]pen mi[illegible]r unbekann[illegible] Wahrscheinlichkeit p und Zahl [illegible] dami[illegible] [illegible]nbekannt[illegible] Wahrscheinlichkeit q = 1 – p. [illegible] Mün[illegible]ird [illegible]als gewor[illegible]

p(Wappen) = p(W) = [illegible]
p(Zahl) = p(Z) [illegible] p

Die Zufallsvariable [illegible] oft Wappen ge[illegible]llen ist.

Ermittel[illegible]fe d[illegible]gegebenen B[illegible]iagramme d[illegible]eiligen Wahrscheinlichkeiten P(X = k) in allgem[illegible]er For[illegible] Pro[illegible]te von p u[illegible] q beachten Sie dabei, wie oft der jeweilige Pfad auftritt, und ergänz[illegible] Sie die [illegible]drücke für die [illegible]scheinlichke[illegible] sowie weitere fehlende Angaben in der a[illegible]hli[illegible]d ang[illegible]benen Tabell[illegible]

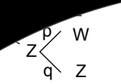
a) 1[illegible]l werfen



P(0[illegible] Wappen) = P(X = 0) = q

P(1-mal Wappen) = P(X = 1) = p

b) 2-m[illegible]

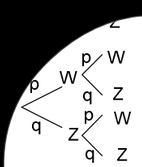


[illegible] q^2

P(1-mal Wappe[illegible]

P(2-mal Wappen) = P(X = [illegible]

c) 3-mal werfen



[illegible]al Wappen) = P(X = 0) = _____

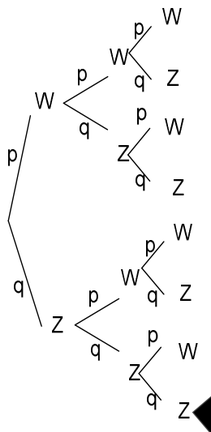
[illegible]1-mal Wappen) = P(X = 1) = _____

P(2-mal Wappen) = P(X = 2) = _____

P(3-mal Wappe[illegible] = _____

d) 4-mal werfen

Ergänzen Sie die vierte Stufe im Baumdiagramm, und bestimmen Sie [illegible] Wahrsch[illegible]n.



P(0-mal Wappen) = P(X = 0) = _____

P(1-mal Wappen) = P(X = [illegible] _____

P(2-mal Wapp[illegible] = P(X = 2) = _____

P(3-[illegible]al Wappen) = [illegible]) = _____

[illegible]-mal Wapp[illegible] = P(X = 4) = _____

Wahrscheinlich[illegible]werte[illegible] für die Zufall[illegible]variable X. Erg[illegible]en [illegible]e fehlende Angaben.

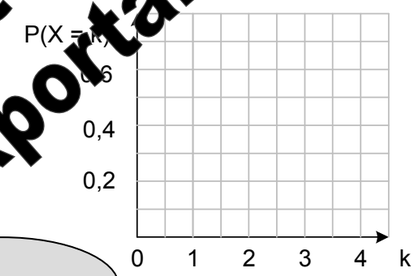
Ereignisse [illegible]		[illegible] x Wappen	[illegible] x Wappen	2 x Wappen	3 x Wappen	4 x Wappen
Werte [illegible]k d[illegible] [illegible]fallsv[illegible]blen		0	1	2	3	4
Wa[illegible]hkeit für die Zufa[illegible]riable P(X = k) bei n Würfen		P(X = 0)	P(X = 1)	P(X = 2)	P(X = 3)	P(X = 4)
Anzahl n der Wü[illegible]	n=1	q	p			
	n=2			p^2		
	[illegible]				p^3	
	n=4	q^4	_____		_____	p^4
[illegible]tzen von [illegible]nomialkoeffizienten und Vervollständigen der Potenzen von p und q		$\binom{4}{0}p^0q^4$	$\binom{4}{1}p^1q^3$	$\binom{\ }{2}p^2q^2$		$\binom{\ }{\ }p^{\square}q^0$
Umformen [illegible] Expone[illegible]		[illegible]	$\binom{4}{1}p^1q^{4-1}$	$\binom{4}{2}p^2q^{4-2}$	$\binom{4}{3}p$[illegible]	$\binom{4}{\ }p^4q^{4-\square}$
Vera[illegible]g für **n** [illegible] **k** [illegible]		$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\binom{\ }{\ }p^{\square}(1-p)^{\square}$			**Form[illegible]noulli**	

e) Ermitteln Sie für den Münzwurf die Zahlenwerte für die Wahrscheinlichke[illegible]teilung [illegible] vier Dezimalstellen genau, wenn die Wahrscheinlichkeit für Wappen bei der ver[illegible]en M[illegible]e p = 0,3 beträgt.

Ereignisse e_i als Klartext	0 x Wappen	1 x Wappen	2 x [illegible]en	[illegible]Wappen	4 x Wappen
k	0	1	[illegible]	3	4
P(X = k)	$\binom{4}{0}0{,}3^0\cdot 0{,}7^4$ = _____	$\binom{4}{1}0{,}3^1$ [illegible]	$\binom{4}{2}$[illegible]$0{,}7^2$ [illegible]	$\binom{\ }{\ }0{,}3^{\square}\cdot 0{,}7^{\square}$ [illegible]	$\binom{\ }{\ }0{,}3^{\square}\cdot$ ___ _____

Zeigen Sie, dass die Summ[illegible]ahr[illegible]einlichkeiten für die Ereignisse [illegible] den Wert 1 [illegible]gibt, und stellen Sie die berechn[illegible] W[illegible] von [illegible]) als Säulendiagram[illegible]r.

Summ[illegible] X = k[illegible] _____



Die Wahrscheinlichkeiten P(X = k) werden mit der Formel von Bernoulli berechnet. Da diese Formel aus dem Pascal[illegible]hen Dreieck und [illegible] aus der Berechnung von Binomen[illegible] Form (p + q)[illegible] hervorgeht, bezeichnet man die hier vorliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung als

Binomialverteilung.

[illegible] von Bernoulli wurde anhand des Münz[illegible]o einem Zufallsversuch, bei dem [illegible] die beiden Ausgänge Wappen und Zahl gibt und [illegible]rscheinlichkeiten p und [illegible] = 1 – p für Wappen und Zahl bei jedem Werfen der Mün[illegible] Stufe des Zufallsversuchs gleich bleiben. Diese beiden Eigenschaften sind Grundvoraus[illegible] Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Formel von Bernoulli. Damit gi[illegible]

Eine Zufalls[illegible] binomialverteilt , wenn

- **da[illegible]m Ereignis E und dem zugehörig[illegible]eignis $\overline{E}$ nur zwei**

[illegible]stellt werden kann, dass die Wahrscheinlichkeit p für das [illegible] und die [illegible]cheinlichkeit q = 1 – p für das Gegenereign[illegible] $\overline{E}$ in jeder Stuf[illegible] [illegible]sexperimentes gleich bleibt.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 9.2

Anwendungsbeispiele für binomialverteilte Zufallsgrößen

Problemstellungen, die man auf einen Zufallsversuch mit gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten in jeder Stufe und zwei Ausgängen zurückführen kann, können mithilfe der Binomialverteilung also mit der Formel von Bernoulli gelöst werden. Dies soll nun anhand der nachfolgenden drei Beispiele exemplarisch gezeigt werden. Arbeiten Sie die Beispiele durch, ergänzen Sie dabei fehlende Angaben und formulieren Sie entsprechende Begründungen.

Beispiel 1

Bei der automatisierten Produktion von Biergläsern für die Gastronomie haben 10% der Gläser Fehler, sind daher nicht verkäuflich, werden bei der Kontrolle aussortiert und wieder eingeschmolzen.

a) Um die Fehlerrate bei der Produktion zu ermitteln, werden der laufenden Produktion 20 Gläser entnommen und auf Fehler geprüft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Stichprobe genau drei Gläser mit einem Fehler befinden.

> Der laufenden Produktion entnehmen heißt, dass die Wahrscheinlichkeit von 10% für das Auftreten eines Fehlers bei jeder Entnahme gleich ist, ständig neue Gläser mit der gleichen Fehlerrate hinzukommen.

Zuordnen der Bedeutungsgrößen n, p, k und P(X = k) der Formel von Bernoulli.

Es handelt sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable, da es nur die beiden Ausgänge „Glas mit Fehler" und „Glas ohne Fehler $\overline{F}$" gibt und die Wahrscheinlichkeit für F bzw. $\overline{F}$ bei jedem Ziehen gleich bleibt.

Anzahl der entnommenen Gläser: n = ___

Anzahl der Gläser mit dem Merkmal Fehler: k = ___

Wahrscheinlichkeit: [illegible]

[illegible]

[illegible] enthält in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von [illegible] Gläser mit einem Fehler.

b) In einer Kiste mit 100 [illegible] sich 100 nicht geprüfte Gläser, [illegible] Gläser mit Fehler. Wie groß ist die [illegible] man hier bei der Entnahme von [illegible] genau ein fehlerbehaftetes [illegible]

> [illegible] Zufallsversuch, der den Bedingungen [illegible] binomialverteilten Zufallsvariablen entspricht, da man ohne Zurücklegen zieht und [illegible] die Wahrscheinlichkeit in den verschiedenen Stufen des Zufallsversuchs ändert, [illegible] an die Stichprobe jedoch aus einer umfangreichen Menge von 100 Gläsern entnommen, [illegible] hier Wahrscheinlichkeiten von Stufe zu Stufe [illegible] wenig, und man kann [illegible] Formel von Bernoulli für die Berechnung einer Näherung anwenden.

i) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit näherungsweise mithilfe der Formel von Bernoulli.

Anzahl der entnommenen Gläser: n =___

Anzahl der Gläser mit Fehler: k =___

Wahrscheinlichkeit für das Merkmal Fehler: p =___

P(X = ___) = _____ = 38,74%

ii) Zeigen Sie, dass sich mithilfe von kombinatorischen Verfahren der genaue Wert 19,8%, das heißt nur eine Abweichung von [illegible]% zu [illegible] näherungsweise ermittelten Wert, ergibt.

n = __ n_F = __ $n_{\overline{F}}$ = __

k = __ k_F = __

P(X = [illegible]

> **Achtung:** Die Bedeutungen von n und k unterscheiden sich in der Kombinatorik von der bei der Binomialverteilung.

In einem Karton mit 20 ungeprüften Gläsern befinden sich 10% Gläser mit Fehler. Berechnen Sie auch hier die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 entnommenen Gläsern eines mit einem Fehler befindet, als Näherungswert mit der Formel von Bernoulli und mit dem kombinatorischen Verfahren. Zeigen Sie durch Rechnung, dass die beiden Werte nun fast 14% voneinander abweichen und die Verwendung der Formel von Bernoulli hier nicht mehr geeignet ist.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

d) Der laufenden Produktion wird eine Stichprobe von 50 Gläsern entnomm[illegible] Zeigen [illegible] durch Rechnung, dass sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 61,6% in dieser Stichp[illegible] höchs[illegible] fünf Gläser mit Fehler befinden.

Anzahl der entnommenen Gläser: n =

Anzahl der Gläser mit Fehler: k =

Wahrscheinlichkeit für Fehler: p =

Höchstens [illegible] in der [illegible]probe [illegible], 3, 4 oder 5 Gläser mi[illegible]ler e[illegible]lten sein können.

$P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = \_\_) + P(X = \_\_) + P(X = \_\_) + P(X = \_\_) + P(X = \_\_)$

Kapitel 9

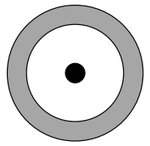
= _____

_____

= _____

In der Stichprobe [illegible] mit einer Wahrsch[illegible]lichkeit von 6[illegible]6% höchsten 5 Gläser mit einem Fehler.

Beispiel 2



Ein ge[illegible] S[illegible] trifft [illegible] der abgeb[illegible] Zielscheib[illegible] beim Dart mit einer Wahrsc[illegible]lich[illegible]% den sch[illegible]zen Punkt, [illegible] einer Wahrscheinlichkeit von [illegible] den [illegible]ßen und einer Wahrs[illegible]lichkeit von 5[illegible] den grauen Ring.

a) Beg[illegible] Sie, waru[illegible] die gesuchte W[illegible]heinlichkeit bei der folgenden Aufgabenstellung nicht mit der Fo[illegible] von Bernou[illegible]erechnet w[illegible] kann.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie [illegible] Wahrscheinlichkeit, mit welcher der geübte Spieler bei 10 Würfen 7-mal den schwarzen Punkt, zweimal den weißen und einmal den grauen Ring trifft.

Begründung: _____

_____

[illegible], warum die gesuchte Wahrscheinlic[illegible] Aufgabenstellung mit der [illegible] Bernoulli berechnet werden kann, und zeige[illegible] Wert von 20,1% ergibt.

[illegible]fgabenstellung: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit we[illegible] bei 10 Würfen genau 7-mal das schwarze und dreimal nicht das schwarze Feld tr[illegible]

Begründung: _____

_____

Rech[illegible]

_____

[illegible]= _____

P(_____) =

Beispiel 3

Im Rahmen eines Bewerbungsverfahrens muss ein Multiplechoice-T[illegible] hinsich[illegible] [illegible]ntnisse in Algebra ausgefüllt werden. Der Test gilt nur dann als bestanden, w[illegible]stens [illegible]ufgabe falsch beantwortet wird. Ein Bewerber hat keine Kenntnisse und kreuzt die [illegible]tw[illegible]ein zufällig an.

Kreuzen Sie die richtigen Antworten selbst an, und begrün[illegible] Sie da[illegible] [illegible]ass man die Wahrscheinlichkeit, den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, n[illegible] im T[illegible] und nicht beim Test B mithilfe der Formel von Bernoulli berechnen kann, Z[illegible]en Si[illegible] sich [illegible]erfür beim Test A eine Wahrscheinlichkeit von etwa 10% ergibt.

Test A: Aufgabe A1 bis A4

A1: $-\frac{2^2}{3} = \begin{cases} -\frac{4}{9} & \bigcirc \\ -\frac{4}{3} & \bigcirc \\ \frac{4}{3} & \bigcirc \end{cases}$

A2: $\left(-\frac{2}{[illegible]}\right.$ [illegible] $\begin{cases} -\frac{[illegible]}{25} & \\ [illegible] & \\ \frac{9}{[illegible]} & \bigcirc \end{cases}$

[illegible] $\left.\right)^3 = \begin{cases} a^3 & \bigcirc \\ a^6 & \bigcirc \\ a^8 & \bigcirc \end{cases}$

A4: $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \begin{cases} \frac{4}{a+b} & \bigcirc \\ 2\frac{a+b}{[illegible]} & \bigcirc \end{cases}$

[illegible] B: Aufgab[illegible] B1 bis B4

B1: $\sqrt{a^3} = \begin{cases} a^{\frac{3}{2}} & \bigcirc \\ a\sqrt{a} & \bigcirc \\ a^{[illegible]} & \bigcirc \end{cases}$

B2: $(x^2-1)^2 = \begin{cases} x^4+1 & \bigcirc \\ (x+1)^2(x-1)^2 & \bigcirc \\ x^4-2x^2+1 & \bigcirc \end{cases}$

B3: $\frac{a}{\frac{1}{a}} = \begin{cases} 1 & \bigcirc \\ \frac{1}{a^2} & \bigcirc \\ a^2 & \bigcirc \end{cases}$

B4: $\frac{a}{\frac{3}{2}} = \begin{cases} \frac{3a}{2} & \bigcirc \\ \frac{2a}{3} & \bigcirc \\ \frac{3}{2}a & \bigcirc \end{cases}$

[illegible]ndung: _____

_____

_____

Rechnung[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Zusammenfassung und Ergänzungen zur Schreibweise

Sie haben in den Beispielen von Aufgabe 9.2 gelernt, unter welchen Bedingungen die Formel von Bernoulli für Berechungen von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden kann, wenn davon ausgegangen werden kann, dass von einer binomialverteilten Zufallsvariablen ausgegangen werden kann. Es wurde deutlich, dass sich vielseitige Problemstellungen aus der Praxis mithilfe der Formel von Bernoulli lösen lassen, dass jedoch Aufgabenstellungen, die in der Form $P(X < k)$ oder $P(X \leq k)$ vorliegen, einen ausreichen Rechenaufwand nach sich ziehen, da die Formel mehrfach für verschiedene Werte berechnet werden muss. Da man diesen Rechenaufwand erheblich verringern kann, wie in der nächsten Aufgabe lernen, spielt die Anwendung der Binomialverteilung in der Praxis eine große Rolle. Bei der Verwendung der Formel von Bernoulli im Rahmen der Berechnung von binomialverteilten Zufallsvariablen wird häufig die Schreibweise $B_{n;p}(k)$ wie folgt angewandt:

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X gilt:

$$P(X = k) = B_{n;\,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

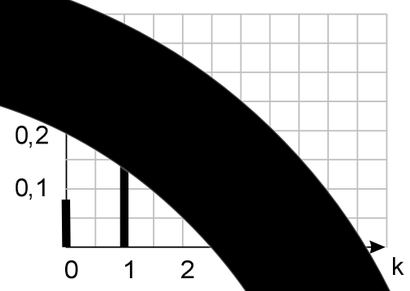
Für n = 10, k = 7 und p = 0,8 schreibt man: $P(X = 7) = B_{10;\,0,8}(7) = \binom{10}{7} 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}2013$

Aufgabe

Umgang mit der Binomialverteilung

a) Berechnen Sie die binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten $P(X = k) = B_{5;\,0,4}(k)$ mithilfe der Formel von Bernoulli, und tragen Sie Ihre Ergebnisse an den vorgesehenen Stellen ein. Vervollständigen Sie anschließend das Säulendiagramm.

k	
0	
	$B_{5;0,4}(2) =$
3	$B_{5;0,4}(3) =$
4	$B_{5;0,4}(4) =$
5	$B_{5;0,4}($



Die W[illegible]verteilungen in Tafelwerken und oft auch Schulbüchern vor und können mit Taschenrechner oder Computer ermittelt werden. Vergleichen Sie die B[illegible]hnung ermittelten Werte mit einer entsprechenden Tabelle aus einem Werk oder mit [illegible]chenrechner erzeugten Liste. Lesen Sie dazu in der Bedienung[illegible]des [illegible]ners nach, wie die Werte einer Binomialverteilung als Liste oder Ei[illegible]zeugt [illegible]nen.

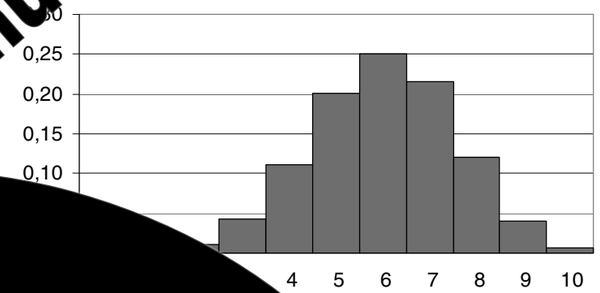
b) Im Säulendiagramm ist eine $B_{5;\,0,7}(k)$-Verteilung abgebildet. Lesen Sie die Werte für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ aus dem Diagramm näherungsweise ab, und tragen Sie diese Werte in der Tabelle ein. Berechnen Sie die Werte anschließend mit der Formel von Bernoulli für vier Nachkommastellen genau.

k	P(X = k)	
	Werte abgelesen	Werte berechnet
0		
1		
2		
3		
4		
5		

c) Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X < k)$, $P(X > k)$, $P(X \leq k)$ und $P(X \geq k)$.

Wieder sind im Säulendiagramm sind die Zahlenwerte einer $B_{10;\,0,6}(k)$-Verteilung gegeben.

k	P(X = k)
0	0,0001
1	0,0016
2	0,0106
3	0,0425
4	0,1115
5	0,2007
6	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	0,0060



d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X < 5) = P(X$ [illegible]en Sie im Stabdiagramm, welche Balken hier aufsummiert werden.

$P(X < 5) = P(X$ [illegible] $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X$ [illegible]

_____ + _____ + _____ [illegible] _____ = _____

[illegible] dieser Wahrscheinlichkeiten kann ebenfalls mithilfe von Tafelwerken in Tafelwerken oder Taschenrechner erfolgen. Man verwendet hier die **Binomialverteilungsfunktion $F_{n;\,p}(k)$**. Lesen Sie den gesuchten Wert in einer derartigen Tabelle, bzw. [illegible]ie den Wert mithilfe Ihres Taschenrechners.

$P(X < 5) = P(X \leq 4) = F_{10;0,6}(4) =$ _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

ii) Ermitteln Sie anhand der Tabelle oder mithilfe des Taschenrechners für eine $B_{50;0,5}$(k)-Verteilung die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

$P(X < 20) = P(x \leq 19) = F_{50;\,0,5}(19) =$ _____

$P(X < 30) =$ _____

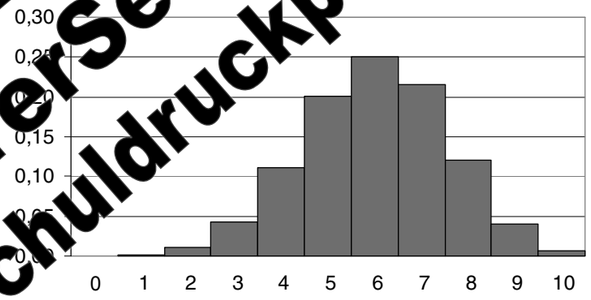
$P(X \leq 25) =$ _____

$P(X \leq 11) =$ _____

$P(X < 40) =$ _____

iii) Markieren Sie in der folgenden [illegible] Verteilung und im Säulendiagramm die Werte bzw. Balken, die man aufsummieren [illegible] diese Verteilung die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 5)$ zu ermitteln, und zeigen [illegible] Verwendung der gedruckten Tabellen, durch entsprechende Summenbildung a[illegible] [illegible] folgenden Tabelle, dass sich der Wert 0,8377 ergibt.

k	P(X = k)
0	[illegible]01
1	0,[illegible]
2	0,0[illegible]
3	0,04[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	0,2007
[illegible]	0,2508
[illegible]	0,21[illegible]
8	0,1209
9	0,0403
10	0,0060



$P(X \geq 5) =$ _____

[illegible] und auch nicht direkt mit dem [illegible] erhalten. Man muss hier mit [illegible] [illegible]chkeit arbeiten. Da die [illegible] der Werte aller Balken bei einer Verteilung [illegible] [illegible]pricht die Summe des [illegible] 10. Balkens der Gegenwahrscheinlichkeit der Sum[illegible] [illegible]n 4 Balken. Für die Rechnung bedeutet das:

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_{10;\,0,6}(4) = 1 - 0{,}1663 = 0{,}8337$

iv) Bestimmen [illegible] [illegible]ung die folgenden Werte:

$P(X$ [illegible] _____

P [illegible] _____

_____

= _____

Übungen

Ü9.1 Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten mit der Binomialsummen[illegible] $F_{50;\,0,3}$([illegible]) [illegible]kieren Sie die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten im dargestellten Auss[illegible] [illegible]ulendiagramms der $B_{50;0,3}$(k)-Verteilung, und bestätigen Sie jeweils die a[illegible]gebene[illegible] [illegible]lichkeiten mithilfe des Taschenrechners und oder einer entsprechenden Ta[illegible]

a) $P(X \leq 13) = F_{50;0,3}(\_\_\_)$

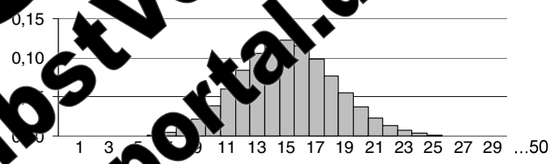
$= 0{,}3270$

b) $P(X > 17) = 1 - (\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_ (\_\_\_)$

$= 1 - \_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_78$

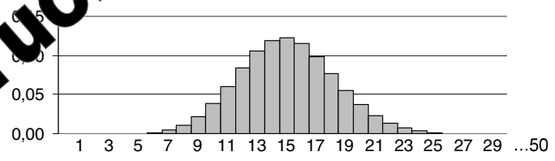


c) $P(X \geq 2[illegible]$ [illegible] _____

$=$ _____

$=$ _____

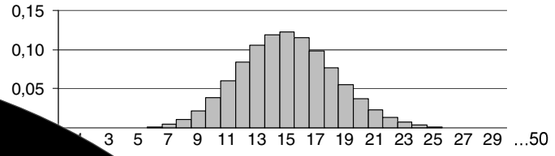
$= 0{,}0478$



d) $P(X \leq 9) + P(X \geq 20)$

$= P(X \leq 9) + 1 - P(X \leq 19)$

$= F$ [illegible]

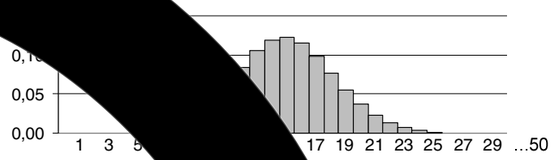


[illegible] $< X < 18)$

$= P(X \leq 17) - P(X \leq 11)$

$= F_{\_\_;\_\_\_}(\_\_\_) - F_{\_\_;\_\_\_}(\_\_\_)$

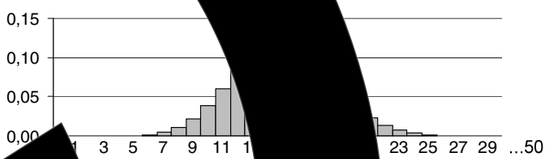
$=$ [illegible]



[illegible] _____) – F(_____)

$F_{\_\_;\_\_\_}(\_\_\_) - F_{\_\_;\_\_\_}(\_\_\_)$

$=$ _____ – _____ $= 0{,}9804$



VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 9.4

Ermitteln von k bei der Binomialsummenfunktion

Anhand des folgenden Beispiels soll verdeutlicht werden, dass es auch Aufgabenstellungen gibt, bei denen k ermittelt werden muss. Verdeutlichen Sie sich dazu das folgende Beispiel.

Bei der Produktion von T-Shirts einer hochpreisigen Marke sind laut Produktionsleiter bei p = 30% eines umfangreichen Auftrags wegen eines Defekts an einer Nähmaschine Fehler an den Nähten aufgetreten. Es werden zur Überprüfung der Angaben des Produktionsleiters Stichproben von 50 T-Shirts in jeder Größe untersucht. Der Wert k zählt die T-Shirts mit einem Fehler.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 10, 15, 20 T-Shirts mit den Fehlern an der Naht in einer Stichprobe?

Die aus Aufgabe 9.3 bekannte Art der Fragestellung kann mithilfe der F-Tabelle oder dem Taschenrechner gelöst werden.

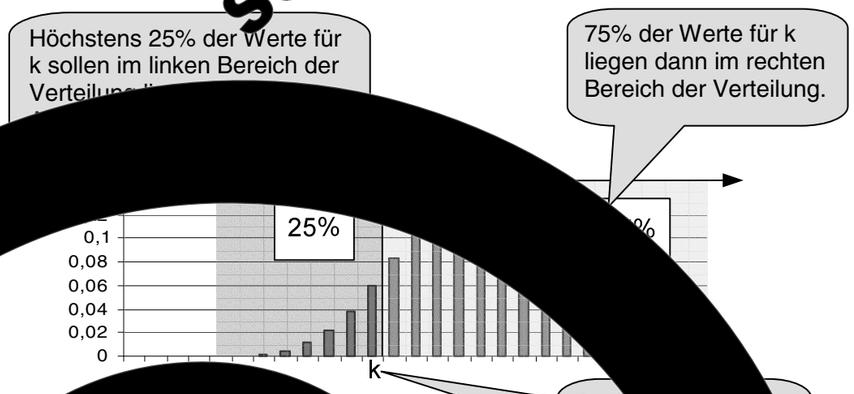
$P(X \leq 10) = F_{50;\,0,3}(10) = 7{,}9\%$
$P(X \leq 15) = F_{50;\,0,3}(15) = 57\%$
$P(X \leq 20) = F_{50;\,0,3}(20) =$

In den Stichproben sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 7,9% bis zu 10, mit einer Wahrscheinlichkeit von [illegible] bis [illegible] und mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% bis zu 20 T-Shirts mit Fehler [illegible], wenn 30% der T-Shirts [illegible] Fehler aufweisen.

b) In den Stichproben sollen sich mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 25 % bis zu k T-Shirts mit einem defekten Naht befinden. Welche Werte kann k dabei annehmen, wenn die Angaben des Produktionsleiters [illegible] der Fehlerrate stimmen?

Bei dieser Fragestellung ist k gesucht. Es werden neue Überlegungen notwendig.

Verdeutlichen Sie sich die Zusammenhänge anhand der folgenden Darstellungen:



Aus einer Tab[illegible]s zu welchem W[illegible]k) ≤ 0,25 erfüllt ist[illegible]rfüllt, denn aus der T[illegible]

I[illegible]probe befinden sich mit einer Wahrscheinlichk[illegible] von 22,29% bis z[illegible]ts mit [illegible]r, wenn die Angabe des Produktionsleiters

Aufgabe 9.5

Allgemeine Formulierung der Aufgabenstellung zur Bestimmung von k

In der Aufgabenstellung sind n, p und P(X = k) gegeben. Gesucht ist [illegible] k. Zur Veranschaulichung der Rechnung wird in den folgenden Abbildungen anstelle eines Säulendiagramms ersatzweise eine einhüllende Kurve für das Säulendiagramm und den in die Rechnung relevanten Balken verwendet.

Die grundlegende Aufgabenstellung wird jeweils durch die folgenden Abbildungen verdeutlicht und anhand der Verteilung $B_{100;\,0,5}(k)$ beispielhaft berechnet.

Bis zu welchem Wert von k gilt, dass die Wahrscheinlichkeit P(X ≤ k) höchstens 10% ist?

$P(X \leq$ [illegible] $\leq 0{,}1$
$\leq 0{,}1$
$k = 43$ ← aus der Tabelle*

Ab welchem Wert von k gilt, dass die Wahrscheinlichkeit P(X ≥ k) höchstens 10% ist?

$P(X \geq k) \leq 0{,}1$
$1 - P(X \leq k-1) \leq 0{,}1$
$-P(X \leq k-1) \leq -0{,}9$
$P(X \leq k-1) \geq 0{,}9$
$F_{100;\,0,5}(k-1) \geq 0{,}9$
$k - 1 = 56$ ← aus der Tabelle*
$k = 57$

*Hinweis zum Ablesen aus einer entsprechenden Tabelle:

1. Tabelle F_{100} auswählen.
2. In der Spalte für [illegible] von oben nach unten durchgehen, bis man auf den ersten Wert [illegible]
3. [illegible] her Wert für k zuzuordnen ist.

[illegible]gen

9.2 Bestimmen Sie für die angegebenen Wahrscheinlichkeiten [illegible] der Binomialsummenfunktion $F_{n;p}(k)$ die Werte für k. Die Ergebnisse sind zur [illegible]eben. Raum für Rechnungen auf der folgenden Seite.

Ver[illegible]	[illegible]g	Ergebnis
a) [illegible]	[illegible]05	k = 1 k = 9
[illegible](k)	P(X [illegible] ≤ 0,85 P(X ≥ k) ≥ 0,85	k = 20 k = 13
$B_{100;\,0,97}(k)$	P(X ≤ k) ≤ 0,33 P(X ≥ k) ≤ 0,33	k = 95 k = 99
$B_{100;\,0,6}(k)$	P(X ≤ k) ≥ 0,2 P(X ≥ k) ≥ 0,95	k [illegible] k [illegible]

Verte[illegible]	[illegible]enstellung	Ergebnis
b) $B_{100;\,\frac{1}{6}}(k)$	[illegible] ≤ 0,025 [illegible] ≤ 0,025	k = 9 k = 25
d) $B_{100;\,0,8}(k)$	[illegible],1 [illegible],1	k = 74 k = 86
f) $B_{100;\,\frac{5}{6}}(k)$	[illegible]1 [illegible]1	k = 78 k = 88

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Er[illegible]bungen: _____

Aufgabe 9.6

Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialver[illegible]g

Zeigen Sie mit den in Kapitel 8 verwendeten Verfahren, dass sich fü[illegible]en [illegible]ungswert und die Standardabweichung bei den folgenden binomialverteilten [illegible]allsgrö[illegible] die angegebenen Werte berechnen lassen.

a) Die Zufallsvariable X ist $B_{5;\,0,4}(k)$ verteilt. Berechne[illegible]en Er[illegible]ungswert μ. Ergänzen Sie fehlende Angaben in der folgenden Tab[illegible]echn[illegible]ie anschließend [illegible]Varianz V(x) sowie die Standardabweichung σ.

μ = __ · 0,0778 + __ · 0,2592 + _[illegible]3456 [illegible]· 0,23[illegible] + __ · 0,[illegible]76 [illegible]· 0,0102 = [illegible]__ ≈ 2

k	Wahrscheinlichke[illegible] P(X = k)	Ein[illegible]weichung ngswert	Qu[illegible]iert[illegible] Abwe[illegible]ung
0	0[illegible]	0[illegible]	
1		1 – 2 =	
2	0,34[illegible]		
3	[illegible]304		
4	[illegible],0768		
[illegible]	0,010[illegible]		

V(x) = __ · 0,0778 + __ · 0,25[illegible] + __ · 0,3456 + __ · 0,2304 + __ · 0,076 + __ · 0,0102 = _____ ≈ 1,197

σ = _____ ≈ 1,1

b) Die [illegible]Sie wie in a).

[illegible]_____≈ 2,4

k	Wahrscheinlichkeit P(X = k)	Einfache Abweichun[illegible] vom Erwartungswert	[illegible]
0	0,0080	0 – 2,4 =	
1	0,0[illegible]	[illegible]_____ =	
2	[illegible]	[illegible]_____ =	
[illegible]	[illegible]	[illegible]_____ =	

[illegible]3

_____ ≈ 0,69

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

c) Ermitteln Sie für die in Aufgabenteil a) und b) gegebenen Größen die folgende[illegible]dukte, vergleichen Sie die Ergebnisse jeweils mit den berechneten Werten für μ und σ. [illegible]nzen anschließend den Merksatz.

zu a) $n \cdot p =$ ____ und $\sqrt{n \cdot p \cdot q} =$ ____ zu b) $n \cdot p =$ ____ [illegible] ____

Für eine binomialverteilte Zufallsgrö[illegible]
Berechnung des Erwartung[illegible] = ____
Berechnung der Standard[illegible]eichung[illegible] = ____

Aufgabe 9.7

Eigenschaften der Bi[illegible]alve[illegible]lung

In den Abbildungen 9.1 bis [illegible] sind j[illegible]s in ge[illegible]ig[illegible] Ausschnitte[illegible] der k-Achse die Säulendiagra[illegible]erer [illegible]mialverteilun[illegible]gebildet. Be[illegible]ten Sie hinsichtlich des Erscheinung[illegible]des d[illegible]rteil[illegible]en die nachfolg[illegible]den Aufg[illegible]enstellungen.

a) Unt[illegible]ch[illegible]ie, we[illegible] Auswirkung[illegible] die Werte von n und p auf das Erscheinungsbild der Vert[illegible]g h[illegible]der Symmetrieeigenschaften der Lage und Höhe des höchsten Balkens und der B[illegible] der Verteilung habe[illegible]

[illegible] wird, desto symmetrischer ist das Erscheinungsbild der Verteilung, wenn man den höch[illegible] Balken als Symmetrieachse verwendet.

- Je größer n wird, desto _____ wird die Höhe des höchsten Balkens.
- Je größer n wird, desto _____ wird die Breite der Verteilung.
- Wenn p größer [illegible] der k-Achse nach _____.

b) [illegible] Standardabweichung [illegible]npq sowie jeweils die 2-fache u[illegible]weichung 2σ und 3σ. Tragen [illegible]erte an den vorgesehenen Stellen ein.

[illegible]äutern Sie, welche Beziehung zwischen dem Wert von μ und [illegible]alken der Verteilung besteht.

_____

_____

d) Fo[illegible]einen Zusammenhang zwischen den Symmetrieeigenschafte[illegible] S[illegible]ms und dem Wert von σ.

_____

_____

$B_{10;\,0,1}(k)$

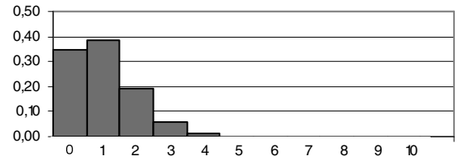


Abb. 9.1

$B_{10;\,0,7}(k)$

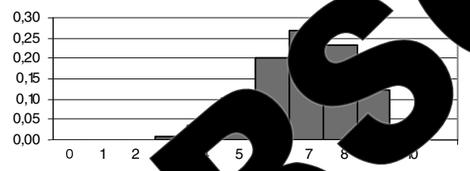


Abb. 9.2

$B_{[illegible]}$

Abb. 9.3

$B_{20;\,0,1}(k)$

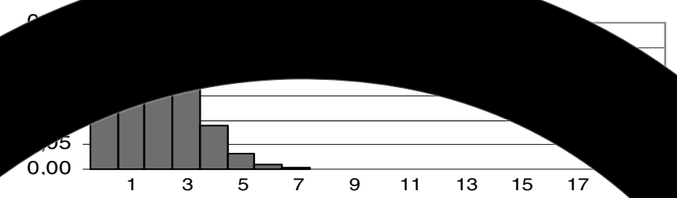


Abb. 9.4

$B_{20;\,0,8}(k)$

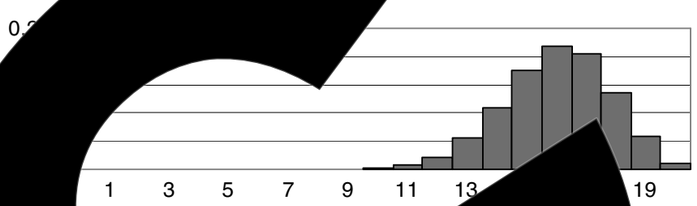


Abb. 9.5

[illegible] = ____

1σ = ____

2σ = ____

3σ = ____

[illegible] = ____

1σ = ____

2σ = ____

3σ = ____

μ = ____

1σ = ____

2σ = ____

3σ = ____

μ = ____

1σ = ____

2σ = ____

3σ = ____

[illegible] = ____

[illegible] = ____

[illegible] = ____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

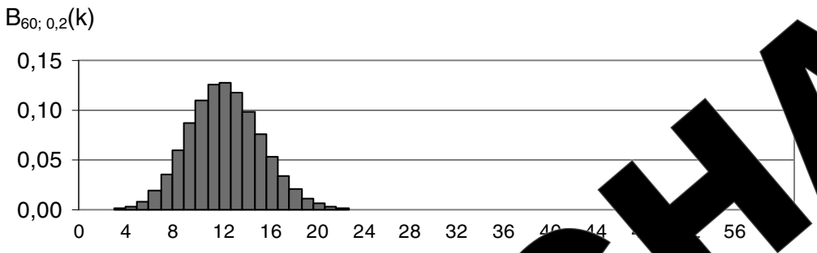


Abb. 9.6

μ = _____

1σ = _____

2σ = _____

3σ = _____

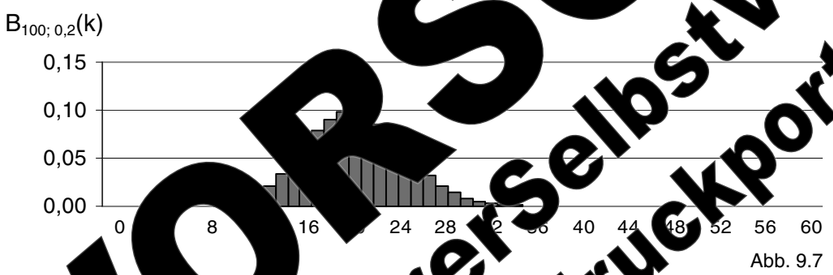


Abb. 9.7

μ = _____

1σ = _____

2σ = _____

3σ = _____

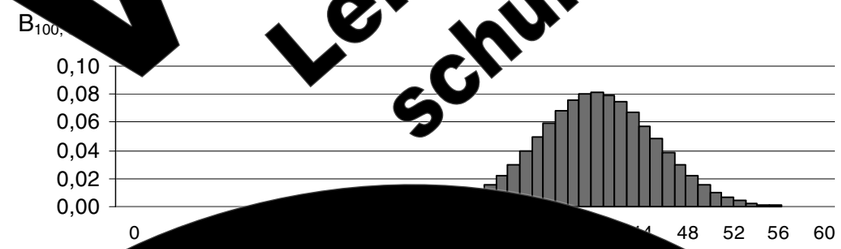


Abb. 9.8

μ = _____

1σ = _____

2σ = _____

3σ = _____

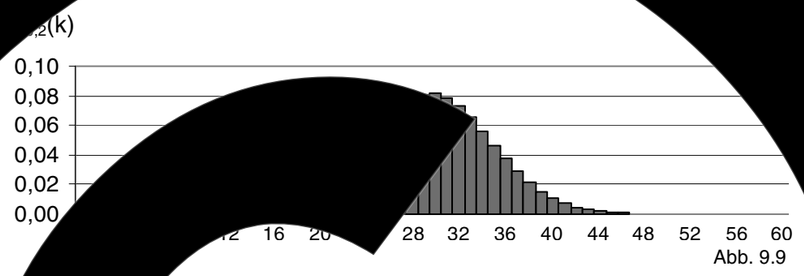


Abb. 9.9

= _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 9.8

Die σ-Umgebungen bei der Binomialverteilung

Im Rahmen von Aufgabe 9.2 wurden im Beispiel 1 die Wahrscheinlichkeit … …net, in einer Stichprobe vom Umfang n eine bestimmte Anzahl k an fehlerhaften G… zu erhalten. Würde man in der Praxis viele dieser Stichproben entnehmen, könnte man … …eller… …ss die Anzahl k der Gläser mit Fehler in jeder der Stichprobe meistens nicht genau … …swert μ für das Auftreten eines Fehlers entspricht, jedoch häufig in der Nähe des Erw… …swert … …gt. Fragestellungen zu Wahrscheinlichkeiten hinsichtlich der Abwei… …des … …s von k vom Erwartungswert in einer Stichprobe werden bei einer Binomialvert… …ng oft mit den … …enannten σ-Umgebungen untersucht. Daher soll in der folgenden Aufgabe der B… …iff der σ-Umgebungen gek…rt werden.

a) Graphische Darstellung d… σ-U…ungen

In der Abbildung is… …$_{20;0,6}(k)$-Vert…ng abgebildet. Unterhalb der Säulen sind drei Bereiche markiert, die al… **…, 2σ …nd 3σ-…ebung** …in… Binomialverteilung bezeichnet werden. Da bei einer Binomialv… …fallsvariable nur ganzzahlige We… …nnimmt, geht man bei der Ermittlung dieser … …che … …olgt vor.

Bei der Ermittlung der **σ-Umgebungen** wird unabhängig von der Dezimalstelle zum nächsten Balken in Richtung des Erwartungswertes gerundet.

F… die **1σ-Umgebung** gilt:

…ke Grenze: … – 2,2 = 9,8 Damit liegt der Balken Nr. 10 in der **1σ-Umgebung**

…echte Grenze: 12 + 2,2 = 14,… Damit liegt der Balken Nr. 14 in der **1σ-Umgebung**

Für die **2σ-Umgebung** gilt:

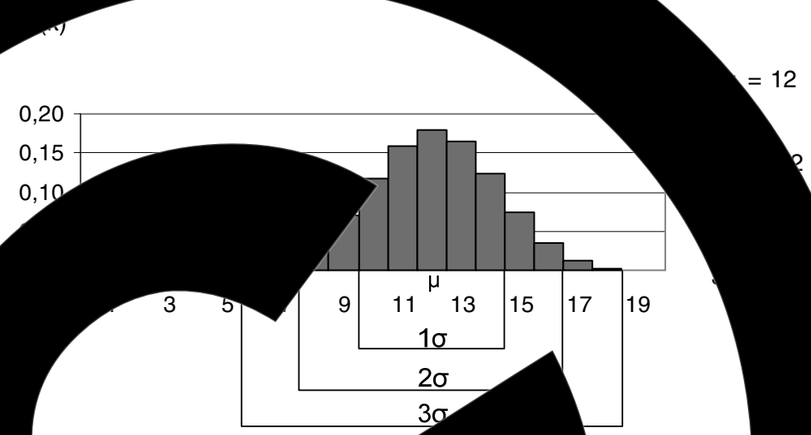
Linke Grenze: 12 – 4,4 = 7,6 Damit liegt der Balken Nr. 8 in der **2σ-Umgebung**

Rechte Grenze: 12 + 4,4 = 16,4 Damit liegt der Balken Nr. 16 in der **2σ-Umgebung**

Für di…

…Balken Nr. 6 in der **3σ-Umgebung**

…en Nr. 18 in der **3σ-Umgebung**



VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

i) Markieren Sie in den Abbildungen 9.2, 9.5, 9.6, 9.8 und 9.9 entsprechend [illegible] Beispi[illegible]ben jeweils die 1σ-, 2σ- und 3σ-Umgebung.

ii) Vergleichen Sie, welchen Bereich die 3σ-Umgebung bei allen in A[illegible]ab[illegible]lgten Markierungen in den jeweiligen Verteilungen abdeckt u[illegible]gänze[illegible]

Bei allen Verteilung liegen unabhängig von n und [illegible] fast a[illegible]rte v[illegible] innerhalb der __σ-Umgebung.

iii) Wie Sie sicher erkannt haben, liegen be[illegible]nter i[illegible]kierten Verteilu[illegible] fast alle Werte von k innerhalb der 3σ-Umgebung. Sc[illegible]en mit einer p[illegible]ntualen Angabe ab, welchen Bereich bei diesen Verteilungen jeweil[illegible] 1σ-, 2[illegible]nd 3σ-Umgebu[illegible] abdeckt.

Der Wert für k liegt bei etwa [illegible] % [illegible]ben im 1[illegible]-Bereich.

Der Wert für k liegt bei etwa [illegible]er Stichproben [illegible] 2σ-Bereich.

Der Wert für k li[illegible] a [illegible] der Stic[illegible]en im 3σ-Bereich.

b) Berechne[illegible]er σ[illegible]ebu[illegible]n für eine $B_{100,0,3}$(k)-Verteilung mit μ = 30

Ver[illegible]tlic[illegible] Sie sic[illegible]e Berechnun[illegible]anhand des Beispiels für die 1σ-Umgebung und gehen Sie für d[illegible]σ- u[illegible]ebungen a[illegible]log dazu vor.

[illegible]ein[illegible] $B_{100;\,0,3}$(k)-Verteilu[illegible] μ = 30

1σ-Umgebung: $1\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot [illegible]} = 4{,}58$

Grenzen des 1σ-Bereichs berechnen:

μ – 1σ [illegible]

30 [illegible]

[illegible] ≤ x ≤ 34

Da es für k bei der Binomialverteilung nur ganzzahlige Werte gibt, müssen die berechneten Werte gerundet werden. Um innerhalb der [illegible]en σ-Umgebung zu bleiben, wird der linke [illegible]ngig von der Nachkommastelle [illegible]t und der rechte Wert immer [illegible] rundet in Richtung des Er[illegible]

[illegible]erechnen der Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert für k bei der B[illegible] innerhalb der 1σ-Umgebung liegt:

P(26 ≤ x ≤ 34)

[illegible]674 = 67,4%

2σ-Umgebung: 2σ = 9,2

Grenzen des 2σ-Bereichs berechnen:

μ – __σ ≤ x ≤ μ + __σ

30 – _____ ≤ x ≤ 30 + _____

_____ ≤ x ≤ _____

____ ≤ x ≤ _____

Zum [illegible]ngs[illegible]ert h[illegible]den!

Berechnen der Wahrscheinlichkeit, das[illegible] Wert [illegible]k bei der Binomialverteilung innerhalb der 2σ-Umgebung liegt:

P(____ ≤ x ≤ ____) = P(x ≤ [illegible] ≤ ____)

[illegible] = F[illegible]0,3(__[illegible]100, 0,3([illegible]

[illegible] – _____ = _____ [illegible]9[illegible]%

[illegible]Umge[illegible]g: 3σ = 1[illegible]

[illegible]en des 3σ-Bere[illegible]s berechn[illegible]

__ – __σ ≤ x ≤ __ + [illegible]

___ – ____ ≤ x ≤ __ + _____

_____ ≤ x ≤ [illegible]

Zum Erwartungs-[illegible]ert hin runden!

[illegible] der Wahrscheinlichkeit, dass ei[illegible]omialverteilung innerhalb der [illegible]mgebung liegt:

P(____ ≤ x ≤ ____) = P(x ≤ ____) – P(x ≤ ____)

[illegible]) – $F_{100,\,0,3}$(____)

[illegible]_____ = _____ ≈ 99,6%

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Literaturwerte zu den σ-Umgebungen

Sie haben in Aufgabe 9.7 festgestellt, dass die Symmetrieeigenschaft der Säulendiagramme von n und damit auch von σ abhängig ist. Je größer der Wert von n bzw. σ wird, desto symmetrischer wird die Verteilung bezüglich des höchsten Balkens. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten für die σ-Umgebungen werden ebenfalls umso genauer, je größer der Wert von n ist.

Wenn der Wert von σ größer als drei ist, also **$\sigma > 3$** gilt, ist die sogenannte **Laplace-Bedingung** erfüllt, und es können mit guter Näherung die folgenden Werte verwendet werden.

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X ist mit der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} > 3$ die Laplace-Bedingung erfüllt, und es gelten die folgenden Regeln.

1σ-Regel: $P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) = 68\%$

2σ-Regel: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$

3σ-Regel: $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert erarbeiten

Kapitel
Zweiseitiger Signifikan...

02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]nor[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]

[illegible]e Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 10: Zweiseitiger Signifikanztest

Aufgabe 10.1

Grundidee des Testens

Grundsätzlich entspricht das Testen von Hypothesen der Ers[illegible]g ei[illegible] Wahlprognose. Da man nicht alle Wahlberechtigten nach ihrer Stimmabgabe bef[illegible] k[illegible]hrä[illegible]t man sich bei den Umfragen auf eine mehr oder weniger zufällig ausgewählte Gru[illegible] Pe[illegible]n und schl[illegible]B von deren Wahlverhalten auf den Ausgang einer Wahl[illegible]undi[illegible]de Vorgehensw[illegible] bei der Auswertung von solchen Erhebungen und auch Fehlern, d[illegible]egebenenfa[illegible]bei auftrete[illegible] s[illegible] Gegenstand der hier zu bearbeitenden Thematik.

Als einführendes Beispiel soll n[illegible]folge[illegible]nstellung be[illegible]eitet werde[illegible]

Aufgabenstellung:

Ein Geflügelzüch[illegible]este[illegible]ei einen [illegible]uttermitte[illegible]ten eine [illegible]ung aus S-Körnern und L-Körnern. Für eine [illegible]t müssen 3[illegible] S-Körner in d[illegible]chung vorhanden sein. Die Einhaltung[illegible]r Vo[illegible]n wi[illegible] aufgru[illegible]zufällig ent[illegible]enen Stichprobe überprüfen.

1. Ent[illegible]me de[illegible]ichp[illegible]be

a[illegible]es[illegible]fallsv[illegible]uch soll nu[illegible]isch du[illegible]e Entnahme einer Stichprobe von jedem Schüler/ [illegible]er S[illegible]aus ein[illegible]ilter mit S-K[illegible]rn und L-Körnern simuliert werden. Zählen Sie alle [illegible]ommenen Körner, tra[illegible]Sie die We[illegible] **Ihre gezogene Stichprobe** in den folgenden Feldern [illegible]nd berechnen S[illegible]ren Erwartu[illegible]ert. (Sollten Sie den Zufallsversuch nicht durchgeführt [illegible], verwen[illegible]n Sie folgende W[illegible]: Umfang der Stichprobe: n = 210, Anzahl S-Körner: 85)

Prozentualer Anteil de[illegible]örner laut Hersteller: p = 33% = 0,33

Stichprobenumfang n Ihrer Stichprobe: n = _____

[illegible]be: k = _____

[illegible]n Sie den Erwartungswert μ für die [illegible]us Ihrer Stichprobe (auf eine [illegible]ze Zahl gerundet) für den Sollwert von 33% S-[illegible]hung.

Erwartungswert für die Anzahl der S-Körner μ = _____

c) Vergleiche[illegible]der S-Körner mit der Anzahl [illegible] im Versuch gezog[illegible]ch Ihre Mitschüler nach deren [illegible]Was stellen Sie fest?

_____

_____

[illegible]zahl der gezogenen S-Körner in einer Sti[illegible]timmt in der Reg[illegible]au mit dem [illegible]tungswert für die Anzahl von S-Körne[illegible], man zieht meh[illegible]ger Körner als [illegible]wartungswert angibt. Wenn man Ge[illegible]re, müsste man [illegible]eiden, ab

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

welcher Abweichung der Stichprobe vom Erwartungswert μ die Lieferung reklamiert wird, wenn man davon ausgehen kann, dass die Vorgabe von p = 33% nicht eingehalten wurde und das Zuchtergebnis gefährdet wird. Entscheiden Sie nun intuitiv, ob Sie aufgrund Ihrer Stichprobe die Lieferung beanstanden würden.

Als Geflügelzüchter würde ich die Stichprobe beanstanden bzw. reklamieren: Ja □ oder Nein □

2. Anwenden der Binomialverteilung für die Beurteilung der Stichprobe

Eine Hilfe für die Beurteilung Ihrer Stichprobe und die Entscheidung, ob man hier im Interesse des Geflügelzüchters die Lieferung reklamieren würde oder nicht, liefert die Anwendung von Eigenschaften der Binomialverteilung auf Ihre Stichprobe. Die prinzipielle Vorgehensweise wird nun zunächst anhand der Abbildung unten erläutert.

a) Stellen Sie die Werte Ihrer Stichprobe im Term $B_{n,p}(k)$ dar: B_____;_____(_____)

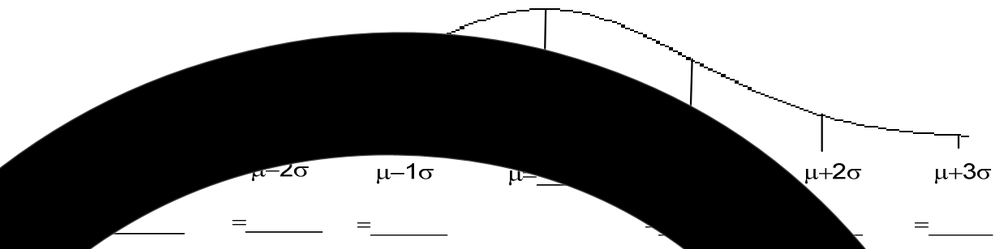
b) Berechnen Sie für Ihre Stichprobe die einfache, zweifache und dreifache Standardabweichung:

Einfache Standardabweichung 1σ = _____

Zweifache Standardabweichung 2σ = _____

Dreifache Standardabweichung 3σ = _____

c) In der folgenden Abbildung sind die Hüllenkurven für eine idealisierte Binomialverteilung und nur die Balken zu übertragen, welche die 1σ-, 2σ bzw. 3σ-Umgebung begrenzen. Berechnen Sie für Ihre Stichprobe aus den oben ermittelten Werten die **ganzzahligen** Werte für diese Grenzen, und tragen Sie die Zahlenwerte in der Abbildung ein.



d) Markieren Sie, farblich abgesetzt, mit einem weiteren senkrechten Balken an geeigneter Stelle der Verteilung der Wahrscheinlichkeiten und ergänzen Sie den folgenden Satz:

Die Anzahl der S-Körner einer Stichprobe liegt

❍ innerhalb der Stichprobe mit sehr nahe am Erwartungswert.

❍ außerhalb des 1σ-Bereichs.

❍ außerhalb des 2σ-Bereichs.

❍ außerhalb des 3σ-Bereichs.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mischung mit 33% S-Körnern eine Stichprobe zufällig in diesen Bereich fällt, ist gleich / kleiner / größer als _____%.

e) Entscheiden Sie nun erneut, ob Sie die Lieferung reklamieren würden. Begründen dies.

Beanstanden der Lieferung: Ja □ oder Nein □

Begründung: _____

_____

_____

Zusammenfassung und Verallgemeinerungen

Ob Sie die Lieferung in diesem Beispiel aufgrund Ihrer Stichprobe annehmen oder beanstanden würden, hängt also davon ab, in welchen Bereich der Binomialverteilung der Wert für die Anzahl der S-Körner fällt. Je weiter die Anzahl der S-Körner in der Stichprobe vom Erwartungswert liegt, desto eher wird man davon ausgehen, dass die Forderung für eine 33%-Mischung erfüllt ist. Je weiter die Anzahl der S-Körner der Stichprobe vom Erwartungswert entfernt liegt, desto eher wird man von einem falschen Mischungsverhältnis ausgehen und die Lieferung beanstanden. Betrachtet man bei diesem Versuch eine Vielzahl von Stichproben, so wird deutlich, dass fast alle Schüler und Schülerinnen Stichproben entnommen haben, die innerhalb der zu der Stichprobe gehörenden 3σ-Umgebung liegen. Durch Zufall können jedoch auch Stichproben vorhanden sein, die eine große Abweichung vom Erwartungswert aufweisen und außerhalb dieser 3σ-Umgebung liegen. Aufgrund der Stichprobe würde man dann davon ausgehen, dass die geforderte 33%-Mischung nicht eingehalten wurde, obwohl in der Mischung wirklich 33% S-Körner vorhanden sind. Würde man in diesem Fall eine Lieferung beanstanden, so begeht man einen Irrtum und handelt sich ggf. Ärger mit dem Lieferanten ein, wenn dieser nachweisen kann, dass seine Lieferung in Ordnung ist. Die Wahrscheinlichkeit, genau diesen Fehler zu machen, bezeichnet man als **Irrtumsrisiko**.

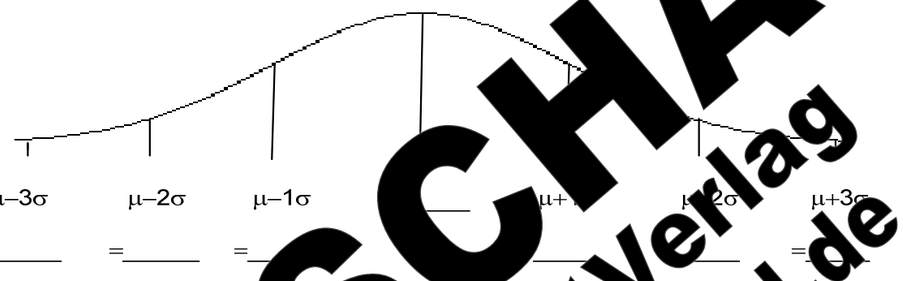
Bestimmung des Irrtumsrisikos in Abhängigkeit vom

Als Grundlage für die Betrachtungen des Irrtumsrisikos soll weiterhin der Mischversuch aus Aufgabe 10.1 dienen. Allgemein werden nun einheitlich die folgenden Bezeichnungen für die entnommene Stichprobe zugrunde gelegt:

Wahrscheinlichkeit für S-Körner:	p = 0,33
Anzahl der Körner in der Stichprobe:	n = 231
Erwartungswert für S-Körner:	μ = np = 231 · 0,33 ≈ 76
Einfache Standardabweichung:	1σ ≈ 7,14
Zweifache Standardabweichung	2σ ≈ 14,28
Dreifache Standardabweichung	3σ ≈ 21,4

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

a) Tragen Sie die Grenzen für die jeweiligen σ-Umgebungen als **ganzzahlige** W[illegible] der fo[illegible]den Graphik ein. Achten Sie darauf, dass man bei der Bestimmung der σ-Umgebung[illegible]mer [illegible] Erwartungswert hin rundet. (Vgl. Kapitel 9 Aufg. 9.8)



b) Es werden von 8 verschi[illegible]n Personen z[illegible]llig Stichpro[illegible]entnommen. Für die Anzahl der S-Körner ergeben sich [illegible]folgen[illegible]erte.

Person 1	Person 2	[illegible]rso[illegible]	Person 4	Person 5	[illegible]rson 6	Person 7	Person 8
59	[illegible]	[illegible]	65	93	98	54	89

Mar[illegible]n S[illegible]e für die erm[illegible]tene Anzahl [illegible]n S-Körnern bei den 6 Stichproben in der Abbild[illegible]n oben [illegible]hilfe von w[illegible]n senkrech[illegible]Balken und ergänzen Sie:

Die St[illegible]roben der P[illegible]nen _____ liegen mit _____ S-Körnern innerhalb der 1σ-Umgebung.

Die Stichproben der Personen _____ liegen mit _____ S-Körnern innerhalb der 2σ-Umgebung.

Die Stichprob[illegible] [illegible]t _____ S-Körnern innerhalb der 3σ-Um[illegible]

[illegible]nen _____ S-Körnern außerhalb [illegible]ng.

[illegible]sierend auf dem Testergebnis muss nun jede Person mithilfe [illegible]n Stichprobe entscheiden, ob man davon ausgehen kann, dass die Lieferung in [illegible]d angenommen werden sollte, oder ob ma[illegible]usgehen muss, dass das Mischu[illegible]nicht in Ordnung ist, weil die Stichp[illegible]tungswert abweicht. Eine Er[illegible]rd hier mithilfe der σ-Umgeb[illegible]sogenannte **Annahme-** und **Ab[illegible]reiche** für eine Stichprob[illegible]σ-Umgebungen als Grundlage für [illegible]idung, so ergebe[illegible]ür die Ermittlung dieser Annahme- ur[illegible]sbereiche.

c) Betrachtung der 3σ-Umgebung

Bei einer Binomialverteilung liegen mehr als 99% aller zufällig [illegible]nen [illegible]proben im **3σ-Bereich**, d.h. in weniger als 1% der Fälle liegen Stichprobenerg[illegible]niss[illegible]rhalb dieses Bereiches. Es ist üblich, diese große Abweichung vom [illegible]artungs[illegible] **[illegible]chsignifikante Abweichung** zu bezeichnen.

Werte innerhalb des 3σ-Bereichs geben den **Annahmebereich** für die Stichprobe an.

_____ ≤ X ≤ _____

[illegible]e [illegible]rhalb des 3[illegible]ereichs geben den **[illegible]lehnu[illegible]sbereich** f[illegible]e Stichprobe an.

[illegible]Grenzwerte [illegible]bei denen der Ablehnungsbereich beginnt, sind:

g_{links} _____ g_{rechts} = _____

Die Stichproben mit den W[illegible]_____ liegen hier im **Annahmebereich**[illegible]e Lieferung [illegible]d hier angenommen.

Die Stichprob[illegible]t [illegible]ten _____ liegen im **Ablehnungsbereich** der **3σ-Umgebung** und man wird sich hi[illegible]ür [illegible]ntscheiden, die Lieferung zu reklamieren.

Be[illegible]

Da[illegible]rtumsri[illegible]für eine unberechtigte Ablehnung [illegible]. Reklamation gibt die Wahrscheinlichkeit an, das[illegible]e Stic[illegible]obe zufällig a[illegible]erhalb der 3[illegible]-Umgebung liegt, und hat hier den sehr kleinen Wert [illegible]von _____. [illegible]n. man hat [illegible]n sehr kleines Risiko, sich wegen einer unberechtigten Reklamation mit [illegible]m Lie[illegible]rten Ärger [illegible]nzuhandeln, g[illegible]ht aber bei der Annahme der Lieferung ein relativ großes [illegible]iko ein, dass die [illegible]ung nicht st[illegible]m und sich die Tiere nicht gut entwickeln.

d) Betrachtung der 2σ-Umgebung

Bei einer Binomialverteilung liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe in den **2σ-Bereich** fällt, bei 95%, d.h. 5% aller Stichproben liegen durch Zufall nicht in diesem Bereich. Es ist üblich, diese recht[illegible]ungswert als **signifikante Abweichung** zu bezeichnen.

_____≤ X ≤ _____

[illegible]rte außerhalb des 2σ-Bereichs geben den [illegible]ungsbereich** für die Stichprobe an.

[illegible]bei denen der Ablehnungsbereich

[illegible] g_{rechts}= _____

Die Stichp[illegible]_____ liegen im[illegible]reich,** und die Liefer[illegible]

[illegible]_____ liegen i[illegible]gsbereich,** und die [illegible]nommen.

[illegible]ung:

[illegible]rtumsrisiko für eine unberechtigte Ablehnung [illegible]v. Reklamation gi[illegible]scheinlichkeit an, [illegible]eine Stichprobe zufällig außerhalb der 2σ-[illegible]ng liegt, und hat [illegible]Wert von [illegible]_%. D.h., man hat ein relativ kleines R[illegible]gen einer unber[illegible]eklamation mit Lieferanten Ärger einzuhandeln.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de
© Ursula Pirkl, Juli 2014

e) Betrachtung des 1σ-Bereichs

Bei einer Binomialverteilung liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine S[illegible] in de[illegible]**bereich** fällt, bei 68%, dh. 32% aller Stichproben liegen durch Zufall nicht in d[illegible]m [illegible]ich.	
Werte innerhalb des 1σ-Bereichs geben den **Annahmebereich** für die Stichprobe an. _____≤ X ≤ _____	Werte a[illegible]halb d[illegible]σ-Bereichs geben den **Ablehnu[illegible]reich** für die Stichprobe an. Gi[illegible]rt g_{links} [illegible]d g_{rechts}, be[illegible]en der Ablei[illegible]gsbereich b[illegible]gi[illegible]: [illegible]$_{links}$ = _____ g_{rechts}= _____
Die Stichproben mit den Werten [illegible] liegen [illegible]**Annahmebereich** der 1σ-Umgebung, und die Lieferung wird hier wohl angenom[illegible] Wert nahe am Erwartungswert liegt. Die Stichproben mit d[illegible] _____ liegen im **Ablehnungsbereich** der 1σ-Umgebung und [illegible]iefe[illegible]g wird nicht angenom[illegible], wenn verlangt wird, dass die Stichprobe in der 1σ-Umgebung [illegible] Da hier b[illegible]8 S[illegible]roben die Lieferung abgelehnt [illegible]rd, erkennt man bereits, dass das Irrtumsri[illegible]o für ei[illegible]berechtigte Ablei[illegible]ung bzw. Reklamation relativ hoch liegt und hier den Wert _____ % [illegible]immt. L[illegible]man sich in unse[illegible]em Beispiel mit [illegible]ner Wahrscheinlichkeit wegen einer un[illegible]ch[illegible] Rekl[illegible]mation Ärger mit dem Liefe[illegible]en einhandelt, wird man die 1σ-Umgebung nicht als [illegible]cheid[illegible]grundlage [illegible]. Daher spielt der 1σ-Bereich bei der Beurteilung von Tests auch [illegible] de[illegible]axis keine Rolle.	

f) Erklären Sie die Bedeutung der Begriffe „signifikante Abweichung“ und „hochsignifikante Abweichung“ in eigenen Worten, ordnen Sie diesen Begriffen das Signifikanzniveau von 1% bzw. 5% zu und erläutern Sie, welches Signifikanzniveau Sie für eine Entscheidung wählen würden, wenn eine Fehlentscheidung hohe Unkosten bzw. Unannehmlichkeiten für Sie bedeuten würde.

An[illegible] Anlehnung an das 5%-ige Irrtumsrisiko bei d[illegible]2σ-Umgebung arb[illegible]ei vielen [illegible] Tests mit diesem Wert für die Irrtumswah[illegible]keit bzw. als Sig[illegible]au.

Aufgabe 10.3

Berechnung von k, wenn das Irrtumsrisiko nicht den Wahrsch[illegible]hkeiten [illegible]gebungen entspricht

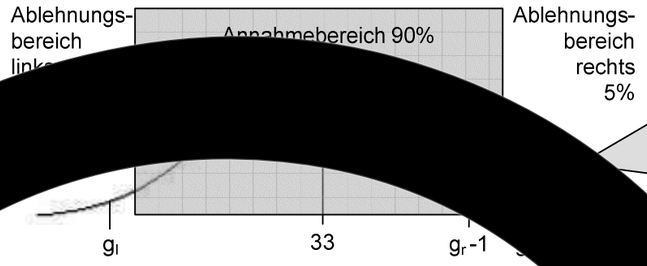
Bei dem Körnerversuch aus Aufgabe 10.1 ($p = \frac{1}{3}$) wird fest[illegible]legt, da[illegible]m[illegible]tichprobe von 100 Körnern entnimmt und dass das Irrtumsrisiko höchstens 10[illegible]tragen[illegible]. Es sollen der linke Ablehnungsbereich $k \leq g_l$ und der rechte Ablehnung[illegible]ereich[illegible], fü[illegible]sen Test ermittelt werden. Zur Veranschaulichung des Annahme- und Ablehnu[illegible]s[illegible]hier, anstell[illegible]iner Binomialverteilung mit einzelnen Säulen, verei[illegible]chen[illegible]e Hülle[illegible]rve, in der [illegible]e für die Aufgabe relevanten Balken eingetragen werden, ve[illegible].

a) Erläutern Sie, warum der rechte und li[illegible] Ablehn[illegible]sbereich jeweils [illegible]ine Wahrsch[illegible]lichkeit von 5% haben.

Erläutern Sie, [illegible] nicht mit den σ-Umgebungen arb[illegible]n kann.

[illegible]deutli[illegible] Sie sich d[illegible]visualisierung [illegible]nahme- und Ablehnungsbereich sowie die Rechnung i[illegible]eispiel, und ermitt[illegible]e anschließ[illegible]nd analog dazu den rechten und linken Ablehnungsbereich, [illegible] das Irrtumsrisi[illegible]auf höchst[illegible]% festgelegt wird. Ergänzen Sie dabei fehlende Angaben in [illegible]isualisierun[illegible].

Beispiel:



Vereinbarung für folgende Aufgaben:
Die Grenzen g_l und g_r für den Annahmebereich werden zur Vereinheitlichung der Betrachtung so gewählt werden, dass sie links und rechts außerhalb des Annahmebereichs liegen.

Rechnung:

linke Grenze g_l [illegible] [illegible]chte Grenze g_r

$P(x \leq g_l) \leq$ [illegible] [illegible]1) ≤ 0,5

$F_{100;[illegible]}$ [illegible] [illegible]$_r$ – 1) ≤ 0,5

[illegible] [illegible]$_{100;\frac{1}{3}}(g_r - 1) \leq 0{,}5$

$F_{100;\frac{1}{3}}(g_r - 1) \geq 0{,}95$

$g_r - 1 =$ _____

$g_r =$ _____

We[illegible]er als _____ oder mehr

als _____ [illegible]er in der Stichprobe

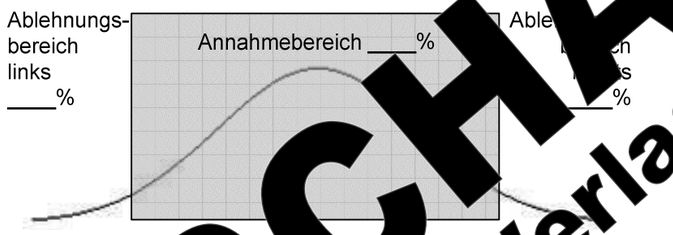
befinden, [illegible]e Lieferung

reklamieren[illegible]

[illegible]en Annahmebereich gilt: A= {26, 27[illegible]

VORSCHAU
LehrerselbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lösungsweg für ein Irrtumsrisiko von 16%



Rechnung:

(Kontrollergebnis: A = {37, …, 40}

Aufgabe 10.4

Irrtumsrisiko bei vorgegebenem Wert für k berechnen

Bei dem Körnerversuch aus Aufgabe 10.1 ($p = \frac{1}{3}$) wird festgelegt, dass eine Körnerlieferung reklamiert, wenn sich in einer Stichprobe von 100 Körnern weniger als 20 oder mehr als 45 S-Körner befinden. Es soll das Irrtumsrisiko, mit dem dieser Test arbeitet, ermittelt werden. Zur Veranschaulichung des Annahme- und Ablehnungsbereiches wieder, anstelle einer Binomialverteilung, mit einzelnen Säulen vereinfachend eine Hüllkurve, in der nur die für die Aufgabe relevanten Balken eingetragen werden, verwendet.

a) Verdeutlichen Sie sich den Lösungsweg anhand des folgenden Beispiels.

Visualisieren der Annahme- und Ablehnungsbereiche:

Rechnung:

$\alpha = P(x \le 20) + P(x \ge 46)$

$\alpha = P(x \le 20) + 1 - P(x \le 45)$

$\alpha = F_{100;\frac{1}{3}}(20) + 1 - F_{100;\frac{1}{3}}(45)$

$\alpha =$ _____ + 1 − _____ = _____

$\alpha = 0{,}81\%$

Annahmebereich A = {_____}

Ergebnis: Der Test arbeitet mit einem Irrtumsrisiko von _____%

b) Bestimmen Sie das Irrtumsrisiko, wenn die Lieferung für weniger als 20 und mehr als 46 S-Körner in der Stichprobe abgelehnt wird. (Kontrollergebnis: $\alpha = 1{,}48\%$)

Visualisieren der Annahme- und Ablehnungsbereiche: Rechnung:

Annahmebereich: A = { _____ }

Der Test arbeitet mit einem Irrtumsrisiko von _____%

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Übungen 10.1

Ü10.1 Die Freie Wählergemeinschaft FWG in Zufallsstadt hatte bei der letzten Kommunalwahl 20% der Stimmen erhalten. Um herauszufinden, ob sich der Stimmenanteil verändert hat, wird rechtzeitig vor der kommenden Kommunalwahl eine Umfrage unter allen Wahlberechtigten durchgeführt. Da die Umfrage durch Zufall ein Ergebnis liefern kann, bei dem man falsche Rückschlüsse auf den momentanen Stimmenanteil ziehen könnte, soll bei der Auswertung das Irrtumsrisiko berücksichtigt.

a) Bei der Umfrage werden 400 Personen befragt, das Irrtumsrisiko soll weniger als 5% betragen. Bestimmen Sie den Annahme- und Ablehnungsbereich bei diesem Test, veranschaulichen Sie die Bereiche anhand einer Graphik und beurteilen Sie, ob man bei dieser Umfrage von einem unveränderten Stimmenanteil ausgehen kann, wenn 92 Personen angeben, die FWG wählen zu wollen.

b) Der Parteivorstand legt fest, dass 100 Personen befragt werden sollen und dass man nur dann, wenn weniger als 20 oder mehr als 30 Personen angeben die FWG nicht zu wählen, von einem veränderten Stimmenanteil ausgehen will. Veranschaulichen Sie die Aufgabenstellung anhand einer Graphik und berechnen Sie, mit welchem Irrtumsrisiko der Test arbeitet.

c) Der Parteivorstand legt das Irrtumsrisiko bei einer Umfrage unter 100 Personen auf einen Wert von 5% fest. Veranschaulichen Sie die Aufgabenstellung anhand einer Graphik und ermitteln Sie den Annahmebereich für diese Stichprobe, wenn der Stimmenanteil nach wie vor bei 20% liegt.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

...ide Übungen:

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …den

Kapite…

Signifikanztest –
…er beim Testen

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]nor[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]e Betrachtungen zur Normalv[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 11: Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen

Nachdem Sie sich in Kapitel 10 anhand von zweiseitigen Tests sch[illegible] Erke[illegible]zu den grundlegenden Zusammenhängen beim Testen von Hypothesen e[illegible]en, erfolgen in diesem Kapitel anhand von sogenannten **einseitigen** Tests weiterg[illegible]hende [illegible]ach[illegible], vor allem hinsichtlich der Fehler, die bei der Beurteilung einer Stichprobe auftret[illegible]innen.

Aufgabe 11.1

Aufgabenstellung

Ein Forschungslabor hat zur Behandlung [illegible]er selten[illegible] jed[illegible]n meist t[illegible]lich verlaufenden Krankheit eine verbesserte Therapie entwickelt. Wä[illegible]d die a[illegible] Therapie in [illegible]al 20% d[illegible] eine Heilung ermöglichte, wird aufgrund erste[illegible]rsuch[illegible]n v[illegible]utet, das[illegible] neue Therap[illegible] eine Heilung bei mehr als 20% der Erkrank[illegible]erzielt. Man g[illegible]von aus, [illegible] nun mind[illegible]tens 40% der Erkrankten geheilt werden können. Es ste[illegible]eine kleine Gru[illegible]e von 20 Patie[illegible]zur Verfügung, an denen die Wirksamkeit [illegible]neuen Therap[illegible]etestet werden kann. Der G[illegible]ftsführer der Forschungseinrichtu[illegible]st, das[illegible]ie Forsch[illegible]gsergebnisse [illegible]rzeitig als Innovation auf einer Ärztetagung verö[illegible]che[illegible]nd das[illegible]ent an ei[illegible]rmakonze[illegible]verkaufen will, wenn **mindestens 8** Personen in dies[illegible]ilt werden. B[illegible]en Sie, ob [illegible]tscheidungsregel des Geschäftsf[illegible]s sin[illegible]ist.

1. [illegible]ch[illegible] Formu[illegible]en von Hypo[illegible]sen und Zuo[illegible]en der Werte aus der Aufgabenstellung

Es werd[illegible] Kontext d[illegible]gabenstellung zwei sich gegenseitig auss[illegible]ende Hypoth[illegible]sen formuliert.

- D[illegible]**ullhypo[illegible]** H_0 bezieht sich **meist** auf einen **gesicherten [illegible]ert**. Hier [illegible]t man an, dass die neue Therapie genauso hilft wie die alte Th[illegible]ie und in 20% der Fälle heilt.
- Die **Alt[illegible]tivhypothese H_1** bezieht sich hier auf die ungesicherte Annahme, dass die neue Therapie besser wirkt. Man nimmt hier 40% an.

	Nullhypothese [illegible]	**Alternativhypothese H_1**
[illegible]po-[illegible]sen und zuordnen der Zahlenwerte	Die neue Therapie wirkt wie die alte Therapie.	[illegible]herapie ist besser.
	$n = 20$ $p_0 = 0{,}2$ $\mu_0 = 4$	$n =$ [illegible] $0{,}4$ $\mu_1 \geq 8$

[illegible]sungswegs [illegible] der kleineren [illegible]heinlichkeit p in der linken Spalte [illegible] abelle zu notieren. Da in dieser [illegible]gabe p_0 kleiner als p_1 ist, wird demnach [illegible]$_0$ hier in der linken Spalte notiert. Begründung wird in Schritt 2 deutlich.)

Anmerku[illegible]
Die Vertei[illegible]othese mit der größeren W[illegible]hkeit p liegt, wie in Schrit[illegible]chtlich wird, weiter rechts[illegible] Aufgaben-stellung ist p_1 [illegible]$_0$, also liegt H_1 rechts von [illegible]in der rechten Spalte notiert.

2. Schritt: Festlegen und Visualisieren des Annahme- und Ablehnungsbere[illegible]

Für die folgenden Betrachtungen wird hinsichtlich der Visualisierung für [illegible] der Alternativhypothese H_1 der in der Aufgabenstellung angegebene Wert p_1 [illegible] Färben Sie in der Abbildung alle Balken, welche zur Verteilung von H_0 ge[illegible] Balken, welche zur Verteilung von H_1 gehören mit zwei verschiedenen Farben [illegible] Übersichtlichkeit werden die Balken jeweils mit einem Zwischenab[illegible] dar[illegible]ellt.

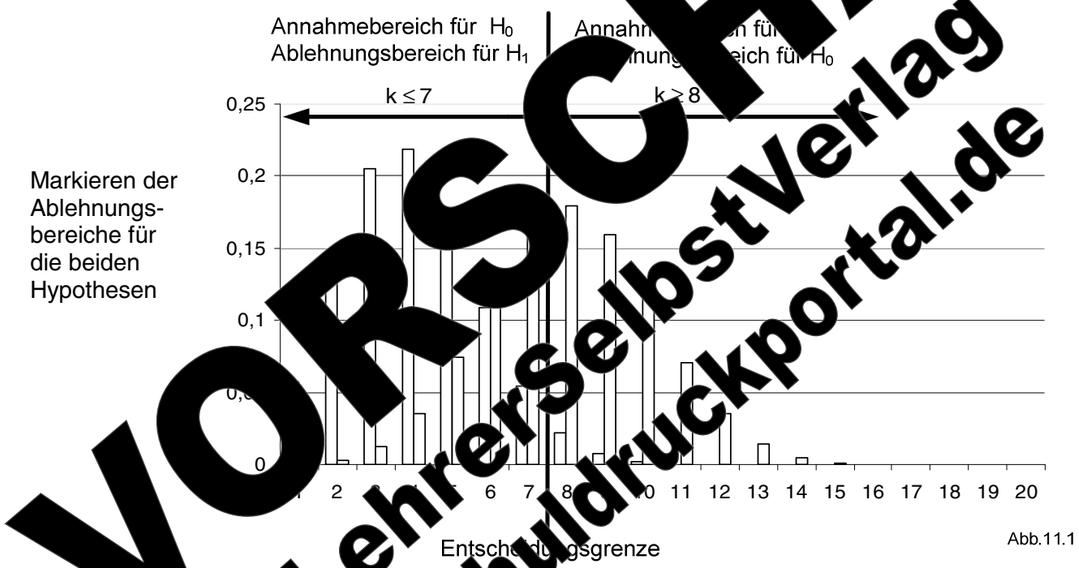
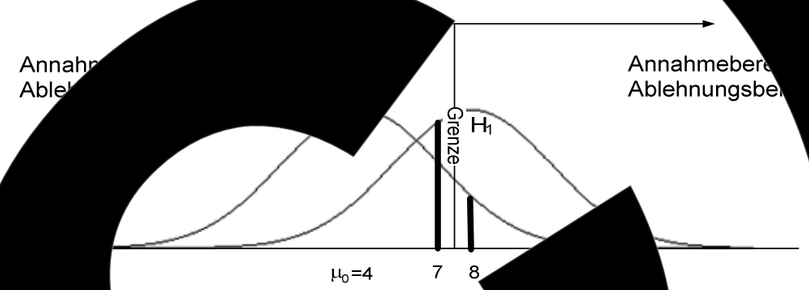


Abb.11.1

Begründen Sie, warum der Bereich $k \leq$ [illegible] als Ablehnungsbereich für H_1 und der Bereich $k \geq 8$ als Ablehnungsbereich für H_0 bezeichn[illegible]

[illegible]ndig ist, detaillierte Balkendiagramme wie in Ab[illegible]n, visualisiert man die [illegible]gen, entsprechend zu den Überlegungen beim zweise[illegible]d der Hüllenkurven von [illegible]idealisierten Binomialverteilungen. Hier werden, wie in Abb. 1[illegible]ur die beiden Balken [illegible] der Entscheidungsgrenze eingetragen.



[illegible].11.2

3. Schritt: Betrachtung von Fehlentscheidungen

Für welche der beiden Hypothesen man sich in der Praxis nun ent[illegible] hän[illegible]gebnis der Stichprobe ab. Wie Sie im Körnerversuch in den Aufgaben 10.1 un[illegible]ren haben, kann eine Stichprobe durchaus ein Ergebnis liefern, das zu einer falschen Ents[illegible]idu[illegible]. Wir haben hier gesehen, dass es Stichproben gab, die den Schluss zuge[illegible]n habe[illegible] sich in dem Glas keine 33% S-Körner befinden, obwohl das Mischungsverhältnis ta[illegible]lich b[illegible]3% liegt. Dies führt beim Körnerversuch zu der Fehlentscheidung, die Liefer[illegible]nbe[illegible]erw[illegible]e zu reklamieren. Verdeutlichen Sie sich anhand der folgenden Tabelle die [illegible]gung[illegible]u mögliche[illegible]hlentscheidungen hinsichtlich der hier beschriebenen Testsitua[illegible]Wirks[illegible]it eine[illegible] Medikam[illegible]tes.

In dieser Sp[illegible]ht m[illegible] davon aus[illegible]ass die Nullhypot[illegible]hkeit zutr[illegible]

[illegible]dieser Spal[illegible]ht man davon aus, dass die Hypothese H_1 in Wirklichkeit zutr[illegible]

F[illegible]lier[illegible] der [illegible]hler [illegible]se-[illegible]	**Fo[illegible]hlers:** [illegible]ohl [illegible]eue Therapie [illegible]ht besser als di[illegible]e ist, w[illegible]aufgrund der S[illegible]probe irrtümlich [illegible]genommen, dass die neue Therapie besser ist.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie **nicht** besser ist.
	Konsequenz der Fehlentscheidung: Blamage durch die Veröffentlichung eines nicht zutreffenden Forschungsergebnisses. (Wird in Wissenschaft und Forschung als schlimmer Fehler angesehen.)	**Konsequenz der Fehlentscheidung:** Die Erkrankten erhalten kein besseres Medikament, bzw. es wird ggf. unnötigerweise Geld für weitere Forschung ausgegeben.

Wi[illegible]iner Stichprobe zwei unterschiedliche [illegible]n Hypothesentest daher zwischen dem [illegible]er oder **Fehler 1. A**[illegible] **Fehler 2. Art**.

[illegible]ordnung zu den beiden Hypothesen ist festgele[illegible] Regel wie folgt vorgenommen:.

α-Fehler:
- Man ordnet der **Nullhypothese H_0** den α-Fehl[illegible]
- Der α-Fehler ist im Allgemeinen der Fehler, welch[illegible]tion, die den Test durchf[illegible]Auftrag gibt, die gravierenderen b[illegible]en Folgen hat.
- [illegible]rendere Fehler ist, sollte di[illegible]öglichst klein und nicht [illegible]ein.

β-Fe[illegible]**nativhypothese H_1** den β-Fehler zu.
[illegible] Allgemeinen der Fehler, der als weniger [illegible]angesehen wird. Der β-Fehler sollte in der Regel nicht kleiner als der α-Fehle[illegible]die Konsequenzen dieses Fehlers ebenfalls nicht unerheblich, so[illegible] so gestaltet werden, dass auch dieser Fehler möglich[illegible]lein wird.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Beide Fehler können nun, um der Aufgabenstellung eine übersichtliche Struktur zu geben, in Verbindung mit den Werten für die Entscheidungsgrenze ebenfalls tabellarisch dargestellt werden.

In dieser Spalte der Tabelle geht man davon aus, dass die Nullhypothese H_0 zutrifft und das neue Medikament nicht besser ist. Befinden sich in der Stichprobe weniger als 8 geheilte Patienten, spricht das für die Gültigkeit der Nullhypothese H_0 und man entscheidet sich zu Recht für sie. Erhält man jedoch durch Zufall eine Stichprobe mit vielen geheilten Personen, entscheidet man sich zu Unrecht gegen die Nullhypothese und begeht mit den α-Fehler.

In dieser Spalte der Tabelle geht man davon aus, dass die Nullhypothese H_1 zutrifft und das neue Medikament besser ist. Befinden sich in der Stichprobe mindestens 8 oder so viele geheilte Patienten, spricht das für die Gültigkeit der Hypothese H_1 und man entscheidet sich zu Recht für sie. Erhält man jedoch durch Zufall eine Stichprobe mit wenigen geheilten Personen, begeht man den β-Fehler, da man sich zu Unrecht gegen die Alternativhypothese entscheidet.

Ausgang des Zufallsversuchs

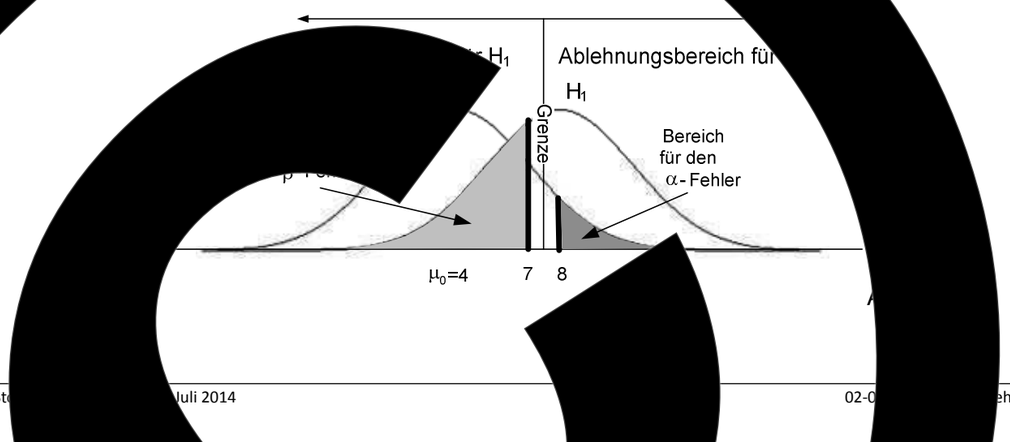
$k \leq 7$	richtige Entscheidung	**β-Fehler**
$k \geq 8$	**α-Fehler**	richtige Entscheidung

4. Schritt: Visualisieren und Berechnen des α- und β-Fehlers

Der α-Fehler gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wert von k in der Stichprobe in den Ablehnungsbereich von H_0 fällt. Bei dieser Aufgabe betrifft das alle Balken der Verteilung von H_0, welche rechts von der Entscheidungsgrenze liegen (vgl. Abb. 11.1).

Der β-Fehler gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wert von k in der Stichprobe in den Ablehnungsbereich für H_0 fällt. Bei dieser Aufgabe betrifft das alle Balken der Verteilung von H_1, welche links von

Bevor Sie die Fehler berechnen, ist es hilfreich, sich diese zu visualisieren. Man kann dazu Abb. 11.1 bzw. 11.2 zugrundelegen, und die Bereiche für die Fehler entsprechend der Aufgabe markieren.



Aus Abb.11.3 kann man nun die Ansätze für die Berechnung der beiden Fehler entnehmen. Berechnen Sie die beiden Fehler, indem Sie die entsprechenden Felder in der Tabelle unten ergänzen. (Für die Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese H_1 wird der Wert $p_1 = 6$ verwendet. Aufgabenstellung)

Berechnung der Fehler	**Berechnung des α-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__**	**Berechnung des β-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__**
	$\alpha = P(X \geq \_\_\_)$ $\alpha = 1 - P(X \leq \_\_\_)$ $\alpha = 1 - F_{20;0,2}(\_\_)$ Verteilung von H__ $\alpha =$ _____ $\alpha =$ _____ α = 3,2%	$\beta = P(X \leq \_\_\_)$ $\beta = P(\_\_\_)$ Verteilung von H__ $\beta =$ β = 42%

5. Schritt: Formulieren der Antwort

Aufgrund der Entscheidungsregel des Gesundheitsführers tritt nur ein sehr kleiner α-Fehler von 3,2% auf. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, sich durch die Veröffentlichung eines falschen Forschungsergebnisses lächerlich zu machen bzw. zu blamieren, gering. Allerdings ist der β-Fehler mit fast 42% sehr groß.

Aufgabe 11.2

Begründen Sie, warum man bei gleichem Stichprobenumfang den β-Fehler von Aufgabe 11.1 nur verkleinern kann, wenn man einen größeren α-Fehler zulässt.

_____

_____

_____

Auf der folgenden Seite ist eine Tabelle abgebildet, die aus den Teiltabellen der Aufgabe 11.1 dargestellten Teiltabellen zusammensetzt. Um die Vorgehensweise bei einem Test zusammenzufassen und zu vertiefen, soll diese Tabelle aufgrundlage der Aufgabe für einen Stichprobenumfang von **50 Personen** ausgefüllt werden. Der Gesundheitsführer legt hier fest, dass man von einer verbesserten Heilung ausgehen will, wenn mindestens geheilt werden. Orientieren Sie sich an der modifizierten Aufgabenstellung und an vorgegebenen Lösungsschritten und führen Sie die Schritte 1 bis 4 durch.

Schritt: Hypothesen, ermitteln Sie jeweils die Wert
Skizzieren Sie beiden Verteilungen mit H_0 und H_1 und zeichnen die Grenze sowie angrenzende Balken für die Entscheidungsregel an geeigneten Stellen der Abbildung ein.

Formulieren Sie die Fehler, notieren Sie die zugehörigen Wertebereiche für k und ordnen Sie den α-Fehler und β-Fehler zu.

Markieren Sie die Fehlerbereiche in der Skizze und berechnen die Fehler. Verwenden Sie für H_1 wieder p_1 =

k © Ursula Pirkl, Juli 2014

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	_____**hypothese H_**	_____**hypothese H_**
	n = ___ p__ _____ μ__ _____	n = _____ μ__ _____
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H_	Ablehnungsbereich für H_ **Tipp:** Graphik immer vervollständigen!
Formulieren der Fehler und Konsequenzen	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k __ __		___**-Fehler**
k	___ Fehler	richtige Entscheidung
	Berechnung des __-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__	**Berechnung des __-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__**

Aufgabe 11.3

Die Testsituation von Aufgabe 11.1 wird nun wie folgt verändert.

- Das Medikament wird nun an 50 Personen getestet.
- Die Wirksamkeit des bestehenden Medikamentes bei 2 ... der Pat... gilt als sicher.
- Die Wirksamkeit des neuen Medikamentes ist besser als ...
- Der Geschäftsführer möchte, dass das Risiko, sich durch ... Veröffentlichung eines falschen Forschungsergebnisses hinsichtlich einer verbesserten Wirksamkeit des Medikamentes zu blamieren, weniger als 1% beträgt.

Damit wird nun der α-Fehler vorgegeben, ... es muss die Grenze für die Entscheidungsregel ermittelt werden.

a) Verdeutlichen Sie sich anhand der Tabelle auf der folgenden Seite, was im Lösungsverfahren gleich bleibt und was sich verändert ... Sie das für die einzelnen Lösungsschritte.

1. Schritt: Formulieren der ... und Notieren der gegebenen Werte

_____

_____

_____

2. Schritt: Visualisieren der Problemstellung

_____

_____

_____

3. Schritt: Betrachtung von Fehlentscheidungen

_____

...ieren und Bere...

_____

_____

_____

_____

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	**Nullhypothese H_0** Die neue Therapie ist nicht besser als die alte Therapie. n = 50 $p_0 = 0,2$ $\mu_0 = 10$	**Alternativhypothese H_1** Die neue Therapie ist besser als die alte Therapie. n = 50 $p_1 > 0,2$ $\mu_1 > 10$
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H_0 / Annahmebereich für H_0 H_0 H_1 β α g_r-1 g_r	
Formulieren der Fehler und Konsequenz	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie nicht besser ist.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie **nicht** besser ist.
	Konsequenz der Fehlentscheidung: Blamage durch die Veröffentlichung einer nicht zutreffenden Forschungsergebnisses. Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Konsequenz der Fehlentscheidung:** Die Erkrankten erhalten kein besseres Medikament bzw. es wird ggf. unnötigerweise Geld für weitere Forschung ausgegeben. Fehler ~~ist gravierend~~ / weniger gravierend.
$k \le g_r - 1$	richtige Entscheidung	**β-Fehler**
$k \ge g_r$	**α-Fehler**	richtige Entscheidung
Berechnung der Fehler	**Berechnung von g_r unter Verwendung des α-Fehlers und der Verteilung H_0** $P(X \ge g_r) \le \alpha$ $1 - P(X \le g_r - 1) \le 0,01$ $P(X \le g_r - 1) \ge 0,99$ $F_{50;\,0,2}(g_r - 1) \ge 0,99$ $g_r - 1 = 16$ $g_r = 17$	**Berechnung des β-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_1, wenn $p_1 = 0,4$ gilt** $\beta = F_{50;\,0,4}(16)$ $\beta = 0,2377$ $\beta \approx 24\%$

Antwort: Ist in der Stichprobe mindestens 18 geheilte Personen befinden, kann man mit einem Risiko von weniger als 1% behaupten, dass die neue Therapie besser ist als die alte. Der Fehler 2. Art beträgt dann 24%.

Übung 11.2

Verwenden Sie für diese Übung die Aufgabenstellung von Aufgab... Verwe... dabei für die Stichprobe nun **100 Patienten** und zeigen Sie, indem Sie die folgel... T... ausfüllen, dass der β-Fehler bei diesem veränderten Stichprobenumfang einen W...rt von 2...% a... Da sich wegen der unveränderten Aufgabenstellung bei der Formulierung der... er und ... Konsequenzen keine Veränderungen ergeben, ist dieser Schritt hier nicht erforder... und e... eint in dieser Tabelle nicht noch einmal.

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	**Nullhypothese ...** Die neue Therapie ist nicht ...ser als di... alte Therapie. n = ___ p... ___ μ_0 _____	**Alternativhypothese H_1** ...e neue Therapie ist besser als die alte Therapi... n = ___ p_1 ___ μ_1 _____
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsb...ich für H_ H_	Ablehnungsb...ich für H_ H_
	T... V...m Ber...nen ...der ...Graphik ...ervollständigen.	
k_ ___	richtige Ent...idung	**__-Fehler**
k__ ___	**...ehler**	richtige Entscheidung
Berechnung der Fehler	**Berechnung von g_r unter Verwendung des α-Fehlers und der Verteilung H_0**	**Berechnung des __-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__, wenn $p_1 = 0,4$ gilt**

VORSCHAU
LehrerselbstVerlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 11.5

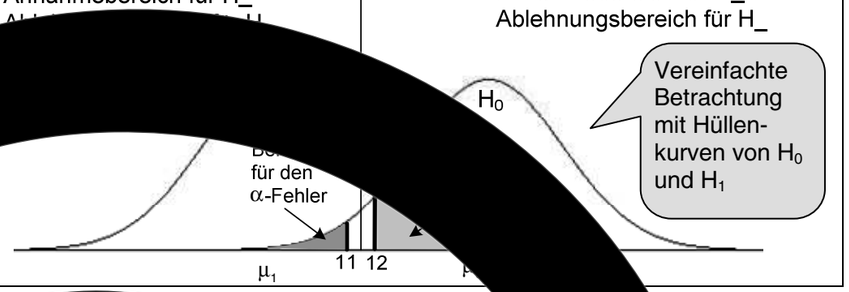
Bei Einnahme des verbesserten Medikaments (vgl. Aufgabenstellung 11.1 bis 11.3) wird erwartet mehr Erkrankte geheilt. Allerdings treten nun bei 30% der Patienten lebensbedrohliche Nebenwirkungen auf. Durch eine Beimischung eines weiteren Wirkstoffes soll erreicht werden, dass nur noch bei 10% der Patienten Nebenwirkungen auftreten. Für einen Test des modifizierten Medikaments stehen 50 Personen zur Verfügung. Man entscheidet, dass man von einer Verringerung der Nebenwirkung ausgehen will, wenn in dieser Stichprobe weniger als 12 Personen schwerwiegende Nebenwirkungen haben.

a) Ergänzen Sie die Tabelle unten, erläutern Sie, welche Fehler bei diesem Test auftreten können, und zeigen Sie, dass der α-Fehler einen Wert von etwa 14% hat und der β-Fehler 1% beträgt, wenn man für H_1 die Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0{,}1$ verwendet.

b) Begründen Sie, warum dieser Test nicht genügt.

zu a)

Bei der Alternativhypothese H_1 ist es günstig die linke Spalte zu wählen da die Wahrscheinlichkeit für H_1 kleiner als die Wahrscheinlichkeit von H_0 ist und somit die Verteilung von H_1 links von der Verteilung der Nullhypothese H_0 liegt.

	Alternativhypothese H_1	**Nullhypothese H_0**
Formulieren der Hypothesen und Zahlenwerte	Die neue Therapie hat weniger Nebenwirkungen wie die alte.	Die neue Therapie hat die gleichen Nebenwirkungen wie die alte.
	n = 50 $p_1 < 0{,}3$ $\mu_1 < 15$	n = 50 $p_0 =$ _____ $\mu_0 =$ _____
Visualisieren und Markieren der Ablehnungsbereiche	Annahmebereich für H_ Ablehnungsbereich für H_ / Annahmebereich für H_ Ablehnungsbereich für H_  Vereinfachte Betrachtung mit Hüllenkurven von H_0 und H_1	
Bezug auf	Spalte trifft H_1 zu.	trifft H_0 zu.
	Formulieren des Fehlers: Obwohl _____ _____	**Formulieren des F** wohl _____ _____,
Bezug auf H_0		

Formulieren der Fehler und Konsequenzen	wird irrtümlich angenommen, dass _____ _____ _____	wird irrtümlich angenommen, dass _____ _____ _____
	Konsequenz der Fehlentscheidung: _____ _____ _____ _____ _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ _____ _____ _____ _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k __ __	richtige Entscheidung	__-Fehler
k __ __	__-Fehler	richtige Entscheidung
Berechnung des Fehlers	**Berechnung des β-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__ und der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0{,}1$** $\beta = P(x \geq$ ___ $)$ $\beta = 1 - P(x \leq$ ___ $)$ $\beta = 1 - F_{20;\,0{,}1}($ ___ $)$ Verteilung von H_	**Berechnung des α-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__ und der Wahrscheinlichkeit $p_0 = 0{,}3$** $\alpha = P(x \leq$ ___ $)$ $\alpha = F_{50;0{,}3}($ __ $)$ Verteilung von H__ $\alpha =$ _____ $\alpha =$ _____ %

zu b): _____ _____ _____

Aufgab

D gabe 11 α-Fehler größer als der β-Fehler ist und mit als nicht stuft werden kann, soll eine Entscheidungsregel gefunden we elcher der iner als 5% wird. Ermitteln Sie eine geeignete Entscheidungsreg en Sie sich Aufgabe 11.3 bzw. Übung 11.2.
ergebnis: In der Stichprobe dürfen sich hö Personen mit Ne gen befinden; nn β = 5,8%)

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

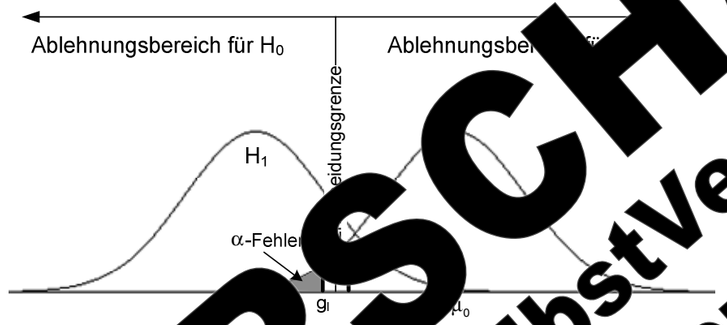
Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	**_____hypothese H_**	**_____ypothe H_**
	n = ___ p__ _____ μ__ _____	n = ___ p__ _____ μ__ _____
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H_ Graphik vervollständigen!	ungsbereich für H_ H_
Formulieren der Fehler und Konsequenzen	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl _____, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl _____, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k __ __	**___-Fehler**	**___-Fehler**
k	**___-Fehler**	richtige Entscheidung
	Berechnungen zum __-Fehler	**zum __-Fehler**

Aufgabe 11.7

Links- und rechtsseitiger Test

Verdeutlichen Sie sich die beiden folgen Abbildungen und ergänzen Sie die Lücken im Text.

Linksseitiger Test

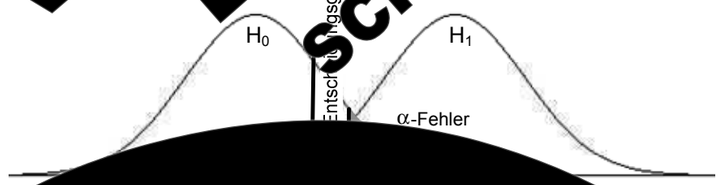


Berechnen des α-Fehlers: $\alpha = P(X < g_l) = F(g_l - 1)$, mit $p = p_0$

Die Verteilung von H_1 liegt **links** von der Verteilung H_0.

Die Entscheidungsgrenze zwischen dem Annahme- und dem Ablehnungsbereich von H_0 und damit auch der **kritische Wert** g_l sowie der α-Fehler liegen ebenfalls auf der _____ Seite der Verteilung von H_0. Man bezeichnet den Test daher als _____ Test.

Rechtsseitiger Test



Berechnen des α-Fehlers: $\alpha = P(X > g_r) = 1$

Die Verteilung von H_1 liegt **rechts** von der Verteilung H_0.

Die Entscheidungsgrenze zwischen dem Annahme- und dem Ablehnungsbereich von H_0 und damit auch der kritische Wert g_r sowie der α-Fehler liegen ebenfalls auf der _____ Seite der Verteilung von H_0. Man bezeichnet den Test daher als _____ Test.

Übersicht der Testarten in den bisher behandelten Aufgaben

Testart	Berechnen von	Aufgabe/Übung
linksseitig		Aufgabe 11.1, Übu
linksseitig	d β	Aufgabe 11.3, Übung
rechts		Aufgabe 11.4
rech	el und β	Aufgabe 11.5

Hilfestellung für die Tabelle zur Bearbeitung einseitiger Tests in ergä ungen befindet sich auf der Folgeseite.

Weitere Übungen: _____

k © Ursula Pirkl, Juli 2014

VORSCHAU
LehrerselbstVerlag
Schuldruckportal.de

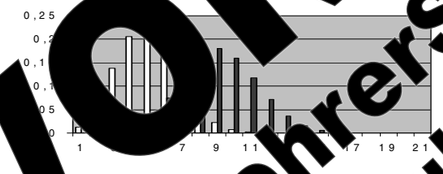
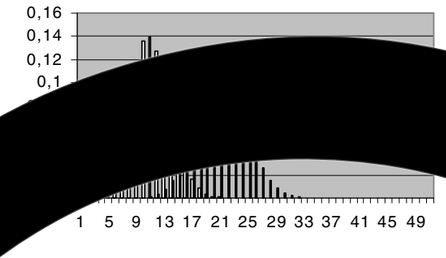
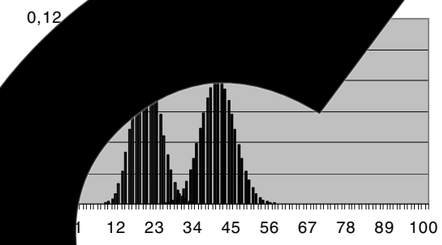
Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	_____**hypothese H_**	_____**ypothese H_**
	n = ___ p_ _____ μ_ _____	n = ___ p_ _____ μ_ _____
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H_	Ablehnungsbereich für H_
Formulieren der Fehler und Konsequenzen	**Formulieren des ___lers:** Obwohl _____, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl _____, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k ___		
	Berechnung zum ___ Fehler	**___ Fehler**

Aufgabe 11.8

Ergänzende Betrachtungen zur Abhängigkeit der Fehler vom Stichprobenu

Wenn man die Werte für die beiden Fehler aus Aufgabe 11.2 sowie [illegible] vergleicht, erkennt man, dass bei einem gleich bleibenden α-Fehler der β-Fehler bei umfangreicherer Stichprobe kleiner wird. Dieser Zusammenhang soll anhand der folgenden Beispiele näher untersucht werden. Dazu werden die im Folgenden abgebildeten Verteilungen heran[illegible] gestellt. Zur besseren Übersichtlichkeit erhalten die Balken Zwischenabstände.) Der kritische Wert für die Entscheidungsregel wird jeweils so gewählt, dass der α-Fehler etwa bei 3% liegt.

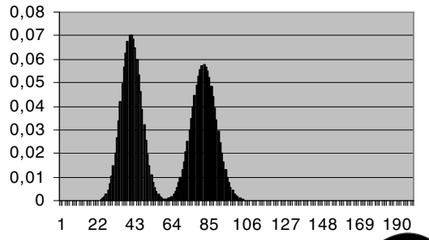
a) Markieren Sie jeweils näherungsweise die Grenze zwischen den Ablehnungs- und Annahmebereichen. Ergänzen Sie die fehlenden Berechnungen:

Verteilungen	**H_0: p = 2[illegible]** **H_1: p = 4[illegible]**	Größe des α-Fehlers	Größe des ß-Fehlers
$B_{20;0,2}(k)$ und $B_{20;0,4}(k)$ **kritische Zahl k = 13** 		Wert für α aus Aufgabe 11.1 α = 3,2%	Wert für β aus Aufgabe 11.1 β = 41,6%
$B_{50;0,2}(k)$ und $B_{50;0,4}(k)$ **kritische Zahl k = 16** 		α = P(x≥_____) α = 1–P(x≤_____) α = 1–F___; ___(___) α = _____	β = P(x ≤ ___) β = F____; _____ (___) β = _____ β = 9,6%
$B_{100;0,2}(k)$ und $B_{100;0,4}(k)$ **kritische Z[illegible]** 		α= P(x≥_____) α=1–P(x≤_____) α=1–F___; ___(___) α=_____ α=_____	β = P(x ≤ ___) = F____; _____ (___) [illegible]%

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

$B_{200;\ 0,2}(k)$ und $B_{200;\ 0,4}(k)$

kritische Zahl k = 51



$\alpha = P(x \geq \_\_\_\_)$

$\alpha = 1 - P(x \leq \_\_\_\_)$

$\alpha = 1 - F_{\_\_\_;\ \_\_\_\_}(\_\_\_)$

$\alpha = \_\_\_\_\_$

$\alpha = \_\_\_\_\_$

3,5%

$\beta = \_\_\_\_\_)$

$\beta = F\_\_\_\_\_(\_\_\_)$

0,0000

$\beta = 0\%$

b) Formulieren Sie ein Ergebnis, ind[illegible]genden Satz ergänzen:

Wenn der gravierendere [illegible] klein bleiben soll, kann man den β-Fehler ebenfalls verkleinern, indem man den Umfang n d[illegible]

c) Erläutern Sie [illegible] des Erscheinungsbild[illegible] beiden Verteilungen, warum der β-Fehler bei wachsend[illegible] Stichprobenumfang abnimmt.

Informationen zum Umfang [illegible] in der Praxis des Testens

1. Priorität [illegible] gehalten werden. Hier werden in [illegible] 1% angestrebt.

[illegible] Kosten eines Tests, die beispielsweise [illegible] dige Testverfahren oder hohen Personalaufwand bestimmt werden können, [illegible] Praxis im Allgemeinen niedrig gehalten werden. Daher wird man den Umfang [illegible] probe nur so groß wählen, dass bei einem möglichst kleinen α-Fehler [illegible] vertretbares Maß annimmt. Die Größe der Stichprobe wird daher vom ern[illegible] fehler bestimmt.

Die [illegible] beispielsweise bei Tests in [illegible] kann auch durch [illegible] banden nach oben begrenzt sein [illegible] technische [illegible] schränkt werden.

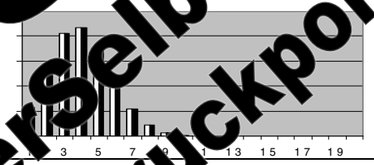
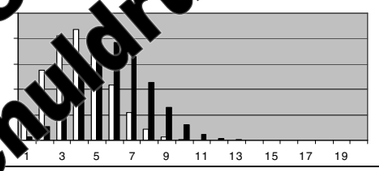
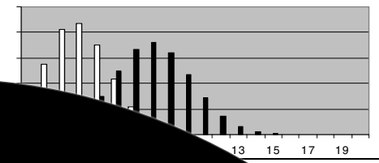
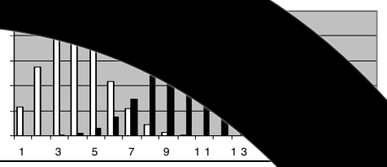
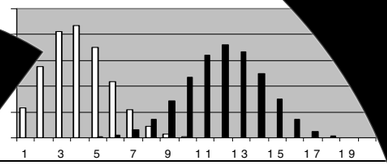
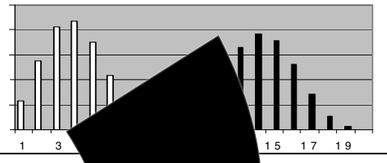
Folge[illegible] der Fehler 2. Art als unwichtig zu bewerten, wird man n klein [illegible] ist der Fehler 2. Art ebenfalls gravierend, wird man versuchen, n [illegible] len.

Aufgabe 11.9

Ergänzende Betrachtungen zur Abhängigkeit des β-Fehlers v[illegible] Wahrs[illegible]keit p_1 der Alternativhypothese H_1

Für die folgenden Betrachtungen wird für den Umfang der [illegible]probe [illegible]ert n = 20 und als Annahmebereich für H_0 der Bereich A = {0, …, 7} gewählt. D[illegible] allen [illegible]enbeispielen unten für H_0 eine Wahrscheinlichkeit von $p_0 = 20\%$ verwendet wird, [illegible] de[illegible]r m[illegible] **= 3,21%** jeweils gleich (vgl. Aufgabe 11.1).

Für die Hypothese H_1 wird die Wahrschein[illegible]keit p begin[illegible] bei 20% jeweils um 10% vergrößert. Markieren Sie in allen Abbildungen die E[illegible]heidungsgrenze k und bestimmen Sie die für den jeweiligen β-Fehler angegebenen Werte durch Rech[illegible]. (Zur besseren Übersichtlichkeit erhalten die Balken Zwischenabstände.)

Verteilungen für n = 2[illegible]	Abb[illegible]ung der Verteilungen	Größe des β-Fehlers
H_0: $p_0 = 20\%$ H_1: $p_1 = 20\%$ $\Rightarrow$ $B_{20;\ 0,2}(k)$		$\beta = P(x \leq \_\_\_)$ $\beta = F_{20;\ \_\_\_\_}(\_\_\_)$ $\beta = \_\_\_\_\_ = 96{,}7\%$
H_0: $p_0 = $[illegible] H_1: [illegible] = 30[illegible] $\Rightarrow$ $B_{20;\ 0,2}(k)$ $B_{20;\ \_\_\_}(k)$		$\beta = P(x \leq \_\_\_)$ $\beta = F_{20;\ \_\_\_\_}(\_\_\_)$ $\beta = \_\_\_\_\_ = 77{,}23\%$
H_0: $p_0 = 20\%$ $\Rightarrow$ $B_{20;\ 0,2}(k)$ H_1: $p_1 = 40\%$ $\Rightarrow$ $B_{20;\ \_\_\_}(k)$		$\beta = P(x \leq \_\_\_)$ $\beta = F_{20\ \_\_\_\_}(\_\_\_)$ $\beta = \_\_\_\_\_ = 41{,}59\%$
[illegible] $\Rightarrow$ $B_{20;\ \_\_\_}(k)$		$\beta = P(x \leq \_\_\_)$ $\beta = F_{20;\ \_\_\_\_}(\_\_\_)$ $\beta = \_\_\_\_\_ = 13{,}16\%$
H_0: p = 20% $\Rightarrow$ B[illegible] H_1: p = 60%		P(x ≤ ___) ___(___) ___ = 2,1%
[illegible] $\Rightarrow$ $B_{20;\ 0,2}(k)$ [illegible]% $\Rightarrow$ $B_{20;\ \_\_\_}(k)$		___) ___(___) ___ = 0,13%

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Ergänzen Sie anhand der Untersuchung die folgenden Sätze.

Je _____ die Werte für die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 der Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1 voneinander abweichen, desto weniger überlappen sich die beiden Verteilungen. Das bedeutet, dass bei vorgegebenem konstantem α-Fehler der β-Fehler _____.

Als Folge für die Stichprobengröße ergibt sich demnach:

- Bei einer _____ Differenz der Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 erhält man auch bei kleinem Stichprobenumfang einen kleinen β-Fehler.
- Bei einer kleinen Differenz der Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 kann man bei vorgegebenem α-Fehler den β-Fehler nur klein halten, wenn man einen _____ Stichprobenumfang wählt.

Aufgabe 11.10

Erweiternde und vertiefende Betrachtungen zum Begriff Operationscharakteristik

Wie Sie in Aufgabe 11.8 und 11.9 sicherlich erkannt haben, hängt die Größe des β-Fehlers von der Differenz der Wahrscheinlichkeiten p_0 der Nullhypothese und p_1 der Alternativhypothese sowie vom Stichprobenumfang n ab. Diesen Zusammenhang stellt man in einem Diagramm, in dem man auf der horizontalen Achse die Werte für die Wahrscheinlichkeiten p_1 und auf den vertikalen Achse den Wert für den jeweils bestehenden β-Fehler abträgt, dar stellen. Ein derartiges Diagramm wird als **Operationscharakteristik** oder kurz **OC-Funktion** bezeichnet, und es gilt **$\beta = OC(p_1)$**

a) **OC-Funktion für einen rechtsseitigen Test**

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse von Aufgabe 11.9, ergänzt durch einige weitere Werte für p_1, angegeben. Tragen Sie diese Werte als Punkte im dazugehörigen Diagramm ein und verbinden Sie [illegible]

	1,0
0,2	0,97
0,3	0,77
0,4	0,42
0,5	0
0,6	
0,7	
	,0
	0,0

Abb. 11.10.1

Die folgende Tabelle enthält für einen Stichprobenumfang von n = 100 die Wertepaare eines rechtsseitigen Tests. Fertigen Sie ebenfalls den Graphen der OC-Funktion.

p_1	β-Fehler
0,0	1,0
0,1	1,0
0,2	0,98
0,3	0,38
0,4	0,01
0,5	0,00
0,6	0,00
0,7	0.00
0,8	0,00
0,9	0,0
1,0	0,00

Abb. 11.10.2

Erklären Sie, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede die Graphen in Abb. 11.9.1 und 11.9.2 aufweisen. Vervollständigen Sie den Lückentext.

Wenn bei einem rechtsseitigen Test die Wahrscheinlichkeit p_1 wesentlich kleiner als p_0 ist, nimmt der β-Fehler den Wert _____ an. In diesem Fall liegt die Verteilung von H_ vollständig im Annahmebereich von H_. Wenn bei einem rechtsseitigen Test die Wahrscheinlichkeit p_1 und p_0 etwa _____ sind, liegt der Wert für den β-Fehler nahe bei 1. In diesem Fall liegt der größte Teil der Verteilung [illegible] von H_. Wenn bei einem rechtsseitigen Test die [illegible] nimmt der β-Fehler ab. Je größer der [illegible] _____ wird der β-Fehler. Bei [illegible] Unterschieden nimmt der β-Fehler schließlich _____ an, da sich die beiden Verteilungen nicht mehr überlappen und die Verteilung [illegible] den Ablehnungsbereich von H_ fällt.

Je größer [illegible] ist der Bereich, in dem sich [illegible] auch bei nahe beieinander liegenden Werten von p_1 und p_0 überlappen (vgl. Aufgabe [illegible]). Daher nimmt der β-[illegible] bei Werten von p_1 sehr schnell ____. In der Operationscharakteristik erkennt man daran, dass die Kurve in der Umgebung von p_0 bei _____ [illegible] n wesentlich [illegible] verläuft als bei kleinen Werten von n. Man sagt auch, dass bei großem [illegible] die Schärfe des Tests [illegible]mt.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Operationscharakteristik bei einem linksseitigen Test

Begründen Sie, warum die OC-Funktion in Abb. 11.10.3 einen linksseitigen Test (vgl. Aufg. 10.7) beschreibt, indem Sie den Text vervollständigen:

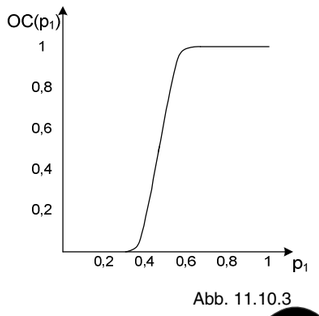


Abb. 11.10.3

Die Verteilung von H_1 liegt bei einem linksseitigen Test _____ von der Verteilung von H_0. Wenn die Wahrscheinlichkeit p_1 viel _____ als die Wahrscheinlichkeit von H_0 ist, dann es keine Überlappung der Verteilungen von H_0 und H_1, die Verteilung von H_1 liegt dann vollständig im _____bereich von H_0. Damit macht der Fehler bei einem linksseitigen Test für _____ Werte von p_1 den Wert Null an. Der β-Fehler _____, wenn sich der Wert von p_1 dem Wert von p_0 annähert, und nimmt den Wert _____ an, wenn gilt: $p_1 = p_0$.

c) Operationscharakteristik bei einem zweiseitigen Test

Begründen Sie, warum die OC-Funktion in Abb. 11.10.4 einen zweiseitigen Test beschreibt, indem Sie den Text vervollständigen:

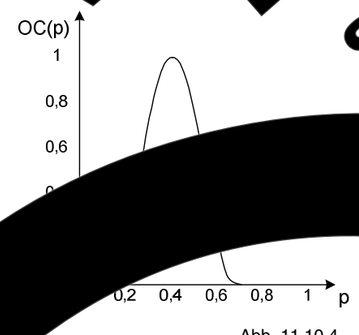


Abb. 11.10.4

Da eine Hypothese bei einem zweiseitigen Test nach links und nach rechts getestet wird (vgl. Aufg. 10.3 und 10.4), tritt der Fehler auf _____ Seiten der Hypothese auf. Liegt der _____ der Wahrscheinlichkeit, welcher der _____ mt der Funktionswert der Operationscharakt_____ Wert an. Der Funktionswert von _____, wenn p _____ und die Wahrscheinlichkeit der _____ k von einander _____chen.

Übung 11.3

Zusammenfassende Übungsaufgabe zu einseitigen Tests

Testsituation:

In der Automatisierungstechnik werden zur Visualisierung von Abläufen Geräte mit LED-beleuchteten Displays eingesetzt. Diese Geräte sind oft extremen Bedingungen, wie beispielsweise großen Temperaturschwankungen, ausgesetzt und haben daher eine begrenzte Lebensdauer. Halten die Displays dieser Beanspruchung nicht stand und versagen vorzeitig aus, so wird meist das gesamte Produkt unbrauchbar und muss ersetzt werden, was sehr hohe Kosten für die Erfüllung von Garantieleistungen entstehen können. Daher wird die vom Hersteller angegebene Lebensdauer von einer Firma, die diese Displays einsetzen möchte, geprüft. Man verwendet dazu Thermoschränke, in denen die Displays untergebracht werden können und die zyklisch in Zweistundenzyklen von 10°C auf 70°C und zurück, wobei ein Zyklus als Simulation für einen Lebenstag angesehen wird. Sollte sich bei dem Test herausstellen, dass die Lebensdauer der Displays den Anforderungen im Einsatz nicht entsprechen, bedeutet dies eine Zeitverzögerung für die Produktion, die Verbesserungen beim Hersteller eingefordert werden müssen und eine Testreihe erforderlich sind. Dies kann zur Folge haben, dass die Konkurrenz Wettbewerbsvorteile hat.

a) Begründen Sie anhand einer Berechnung, wann ein Test, in dem geprüft werden soll, ob die Herstellerangaben zur Lebensdauer der Displays zutreffen, über einen Zeitraum von mindestens 5 Monaten laufen muss, wenn für die Endgeräte eine Lebensdauer von 5 Jahren angesetzt werden soll.

_____

_____

Der Hersteller der Displays gibt an, dass mindestens 95% seiner Ware unter extremen Temperaturschwankungen eine Lebensdauer von fünf Jahren hat. Da die Geschäftsleitung aus Erfahrungen mit anderen Herstellern von vergleichbaren Displays weiß, dass nur 80 % der Displays die geforderte Lebensdauer von 5 Jahren haben, wird folgender Test vorgeschlagen: Die Geschäftsleitung legt fest, dass der Test mit der Nullhypothese: „80% der Displays haben eine Lebensdauer von 5 Jahren“ bzw. der Alternativhypothese: „95% der Displays haben eine Lebensdauer von _____ Signifikanzniveau von 1% durchgeführt werden soll. Formulieren Sie, welche Fehler bei diesem Test auftreten können und welche Konsequenzen die zugehörige Entscheidungsregel und den _____ {47, …, 50}, ß = 24%). Verwenden Sie _____ der Aufgabe die _____ Seite.)

_____ finden Sie anhand der Konsequenzen für die _____, dass das Signifikanzniveau von 1% nur bedingt angemessen ist, und erläutern Sie, _____ dem Test der β-Fehler nur verkleinert werden kann, wenn ein größerer α-Fehler vorg_____

_____

_____

_____

_____

_____ Sie beide Fehler, wenn folgende Entscheidungsregel festgelegt _____ geht davon _____ dass die Angaben des Herstellers zur Lebe_____ der Displays zutr_____ höchstens 45 _____ys bei dem Test ausfallen.
_____ für Rechnung übernächste Seite; _____ 1,85%, β = 10,4_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	_____**hypothese H_**	_____**hypothese H_**
	n = ___ p_ _____ μ_ _____	n = _____ μ_ _____
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H_	Ablehnungsbereich für H_
Formulieren der Fehler und Konsequenzen	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl _____ _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ _____ _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl _____ , _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____ _____ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** _____ _____ _____ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k __		
	Berechnung zum ___ Fehler	**Berechnung zum ___ Fehler**

Raum zu Berechnungen zur Übung 11.3 d)

…k © Ursula Pirkl, Juli 2014

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Übung 11.4

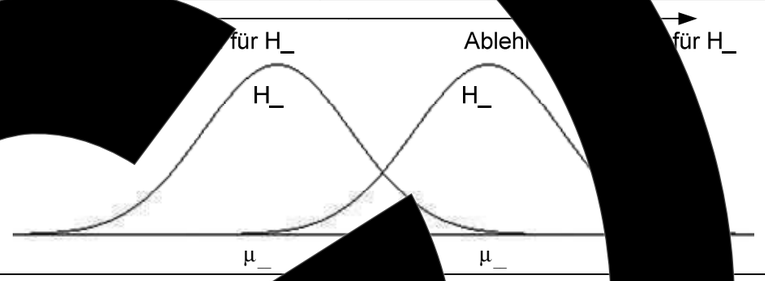
Nicht immer ist bei Signifikanztests die Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese H_1 [illegible] In diesem Fall wird aufgrundlage des gegebenen Signifikanzniveaus oft nur [illegible] für die Nullhypothese ermittelt und auch kein Fehler 2. Art berechnet. Die folgende Probleme [illegible] soll nun beispielhaft für diese Testvariante bearbeitet werden.

Aus mehrjährigen Beobachtungen weiß man, dass 70% der Bevölkerung eines Ballungszentrums die Stadt A für einen Einkaufsbummel wählen und dazu mit dem [illegible] in der Innenstadt anfahren. Um die Feinstaubbelastung zu senken, sollen kostenlose Park-Ride-Angebote am Stadtrand eingerichtet und die Parkgebühren in der Innenstadt drastisch [illegible] werden. Da der Einzelhandel aufgrund der Maßnahme eine Abwanderung von Kunden in andere Städte und damit einen Umsatzrückgang befürchtet, soll zunächst auf einem Signifikanzniveau von 3% eine entsprechende Umfrage unter 100 Passanten durchgeführt werden.

a) Begründen Sie, warum es sinnvoll ist, [illegible] Test für die Hypothese H_0 den Wert $p_0 = 0{,}7$ und für die Hypothese H_1 eine Wahrscheinlichkeit von $p_1 < 0{,}7$ anzunehmen.

b) Formulieren Sie beide Hypothesen und begründen Sie, warum es sinnvoll ist, die Hüllenkurve für die Verteilung der Hypothese H_1 zu skizzieren, obwohl der Wert von p_1 nicht gegeben wird. Ergänzen Sie die Entscheidungsgrenze und fehlende Werte in der Tabelle sowie in der Abbildung und markieren Sie den Bereich für den α-Fehler.

	Alternativhypothese H_1			Nullhypothese H_0	
[illegible] und [illegible]dnung der Zahlenwerte	n = 100	$p_1 < 0{,}7$	$\mu_1 <$ ____	n = ___	$\mu_{\_} =$ ____
Markieren Ablehnung [illegible]					



c) Ermitteln Sie den Annahmebereich für die Nullhypothese und formulieren Sie eine gerundete Antwort.

d) Diskutieren Sie [illegible] und deren Konsequenzen.

α-Fehler:

β-Fehler:

Er[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …lernen

Kapite…

Vertrauensinterva…

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]nor[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
2[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]

[illegible]e Betrachtungen zur Normalv[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 12: Erweiternde Betrachtungen zur Ermittlung eines Vert[illegible]nsinte[illegible]ls

Aufgabe 12.1

Bei Wahlprognosen stützt sich die Vorhersage für das Abs[illegible]heiden [illegible] Pa[illegible]n Wahltag auf repräsentative Umfragen. Hierbei wird aufgrundlage diese[illegible]frage [illegible]ein Intervall ermittelt, in dem mit einer vorgegebenen Sicherheit der zu erwartende prozen[illegible] We[illegible] eine Partei liegt. Dieses Intervall wird als **Vertrauensintervall** oder **Konfid[illegible]ter[illegible]ich[illegible]**.

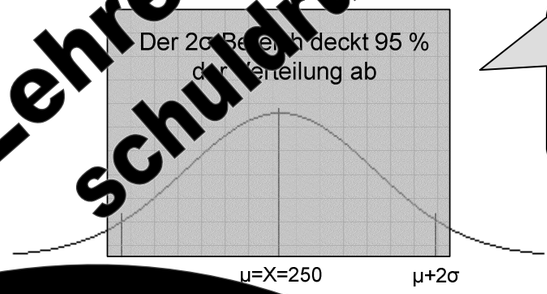
Zahlenbeispiel:

Bei einer repräsentativen Umfrage unter [illegible]0 Person[illegible] ge[illegible]n 250 an[illegible]as[illegible] sie die Partei A wählen wollen. Es soll auf einem Signifikanzniveau [illegible]n 5%, [illegible] über die V[illegible]endung der [illegible]gebung, ein Vertrauensintervall für den zu e[illegible]nden [illegible]eil p ermi[illegible]rden.

Für die Berechnung des Vertr[illegible] werden zwei W[illegible]ge vorgestellt.

1. Abschätzen des [illegible]nsinte[illegible] über di[illegible]gebung

Für die Ermittlu[illegible]len Stimme[illegible]ils bzw. de[illegible]scheinlichkeit p, mit der die Partei gewählt [illegible]steh[illegible]er nur [illegible]e Umfrageer[illegible]hisse zur [illegible]ung. Man geht für die zugehörige Vert[illegible] au[illegible]s der Umfra[illegible]t X = 250 in [illegible] die Realität widerspiegelt, und ver[illegible]det die[illegible] We[illegible]s Erwartu[illegible]swert der Verte[illegible]. Daraus ergibt sich die folgende Abbildung:



Zur Erinnerung:
Wenn die 2σ-Umgebung verwendet wird, teilt sich der Fehler zu je 2,5% auf den linken und rechten Rand auf.

Abb.12.1

[illegible]wählen zu wollen, erhält man aus diesen [illegible]il bzw. die Wahrscheinlichkeit p, mit der [illegible]wählt wird, $p = \frac{250}{1000} = 25\%$. De[illegible] um diesen Wert herum schwanken. [illegible]ie Abweichungen abzuschätzen, d.h. angeb[illegible]chem Bereich der Wert von p [illegible]egen kann, werden die folgenden Betrachtungen dur[illegible]rn Sie die einzelnen Rechenschritte und Umformungen.

(1) $\mu = X = 250$
$p =$ [illegible]

$\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma$

(3) $222,6 \le X \le 277,4$

(4) $\frac{222,6}{n} \le \frac{X}{n} \le \frac{277,4}{n}$

(5) $\frac{222,6}{1000} \le \frac{X}{n} \le \frac{277,4}{1000}$

(6) $22,26\% \le p \le 27,74\%$

Ergebnis:
Man kann [illegible] also schätzen, dass der Stimmenanteil der Partei zum Zeitpunkt der Umfrage zwischen [illegible]% und 2[illegible] liegt.

2. Herleitung des Vertrauensintervalls für p

Die Herleitung einer Formel zur Berechnung des Konfidenzintervalls und die Lösung der entstehenden Gleichung erscheint auf den ersten Blick im Vergleich zum oben beschriebenen Weg aufwendig. Bei Verwendung einer entsprechenden Rechnertechnologie (z.B CAS-System) kann man mithilfe der hergeleiteten Formel das Konfidenzintervall für p lediglich durch Eingabe der beiden Werte von n und X computergestützt schnell und einfach berechnen lassen.

a) Herleitung

[illegible] wert für die Anzahl der Stimmen [illegible], stimmt mit den Überlegungen [illegible] Abschätzung überein. [illegible]gs wird hier eine Gleichung für die Berechnung [illegible]. Erläutern Sie die [illegible]henschritte und Umformungen.

(1) $\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma$

(2) $X \ge \mu$ [illegible]

[illegible] -2σ und $X - \mu \le 2\sigma$

(4) $-(X - \mu) \le 2\sigma$ und $X - \mu \le 2\sigma$

(5) $|X - \mu| \le 2\sigma$

(6) $|X - np| \le 2\sqrt{np(1-p)}$

(7) $\left|\frac{X}{n} - [illegible]\right| \le 2\sqrt{\frac{[illegible]}{n}}$

(8) $|[illegible]| \le 2\sqrt{\frac{[illegible]p)}{n}}$

(9) [illegible] nur [illegible] beiden Randwerte von p [illegible]nd, kann zur Vereinfachung der Berechnung ein Gleichheitszeichen verwendet werden:

$\left(\frac{X}{n} - p\right)^2 = \frac{4}{n}p(1-p)$

b) Berechnung von p für die gegebenen Umfragewerte

Zeigen Sie [illegible] Gleichung nach p bzw. mithilfe Ihres Taschenrechners, [illegible] für p ergibt.

[illegible] $\frac{[illegible]}{1000} = p(1-p)$ [illegible] p_2

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …lernen

Kapitel …

Grundlegende Betracht…
…ormalverteilung

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

02-032-278

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[n] [Wa]hrsche[inli]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinl[ich]keitsv[ert]eilung 61

Wahrscheinlich[keitsv]erteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapite[l 8]
Vari[anz] und [Stand]ardab[w]eichung 69

Kap[itel] 9
[Bi]no[mialv]erteil[ung] 75

[Hyp]othesentests

[Kapite]l 10
[Zwe]iseitiger Sign[ifika]nztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[e]hler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[...]de Betrachtungen zur Normalve[rteilung] 139

[Ka]pitel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[...] [s]elbstorganisiert erlernen (Beste[...] [...]278)
S[...]

[...]orbehalten. A[ll ri]ghts reserved.
[...]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[...] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

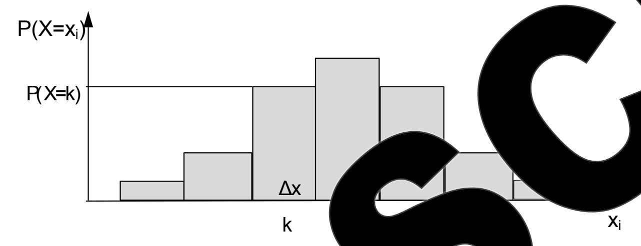
[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[any])
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

Kapitel 13: Grundlegende Betrachtungen zur Normalverteilung

Aufgabe 13.1 Grundlegende Idee

Die Entwicklung der Normalverteilung wird notwendig, da di[e] Binomi[alve]rte[ilung ni]cht für alle n und alle p tabelliert vorliegt und für große n nur aufwendig zu bere[chnen] ist.

Für den Übergang von der Binomialverteilung zur N[ormal]ve[rteilung] ist [fol]gende Idee grundlegend:



Idee:
[Di]e Fläche de[s] k[-]ten Balkens entspricht [d]er Wa[hr]s[ch]einlichkeit f[ür das] [A]uft[r]eten des Merkm[als] k.

Die Fläche A des [...]eine[...]ten B[...] kann aus [d]em Produkt $A = P(X = k) \cdot \Delta x$ berechnet werden. Begründen Sie, w[...] di[e] [Su]mme der Fläche all[er] k [B]alken den W[ert] 1 ergibt.

____

____

D[...] gilt: [...] $= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot \Delta x = 1$

[...] bereits aus der [In]tegralrechnu[ng] [...]ssen, kann man die Fläche unter einer Kurve durch Ober- bz[w.] [Un]tersummen [a]nn[ä]hern, wobei [je]der der k Balken für große Werte von n immer schmaler wird und sich die Höhe der Balken einer Kurve f(x) annähert. Wendet man dieses Verfahren für die Berechnung der Flächen aller k Balken ein[er] [Bi]nomialverteilung an, so geht die Aufgabe für ein ausreichend großes n dazu über, in einem Intervall [a;b] die Fläche einer zur Binomialverteilung passenden Hüllenkurve f(x) zu ermitteln. Da diese Fläche aus der Summe aller Balken hervorgeht, hat sie den Wert 1.

Fläche unter der Kurve: $A_a(b) = \int_a^b f(x)dx = 1$

Da die[...] [f]ür eine beliebige Binomialverteilung [...] die Grenzen a und b v[...] [...]ung ab. Erläutern Sie diesbezüglich, w[...] [Wi]rkung n und p auf di[...] [...] b sowie [...] [H]öhe des höchsten Balkens einer Binomial[verteilung ...]aben.

____

____

Wie Sie sicherlich erkannt haben, verschiebt der Wert von p die Funktion f(x) nach [illegible]s und [illegible]s und n beeinflusst die Höhe bzw. Breite der Verteilung und damit den Abstand von a[illegible]b. Die[illegible] Problem haben auch die Mathematiker De Moivre (1667–1754), Laplace[illegible]–1827) und Gauss (1777–1855) erkannt. Überlegungen dieser drei Mathematiker wa[illegible]lage d[illegible], eine Funktion f(x) zu entwickeln, die unabhängig von den Werten p und n ist und [illegible]standardisierte bzw. normierte Verteilung darstellt, mit der Wahrscheinlichkeiten [illegible]beliebi[illegible]e von n und p berechnet werden können. Diese Verteilung wird heute als **Norma[illegible]teilu[illegible]** bezeichnet.

In den nun folgenden Aufgaben wird das Verfahren der N[illegible]be[illegible]tet und sonst erläutert, warum man aus dem Wert der Zufallsvariablen X = [illegible]m E[illegible]ungswe[illegible] μ und d[illegible] Standardabweichung σ eine neue Variable z erm[illegible]t, mit der [illegible]kann ähnlich wie bei der Binomialverteilung die Tabelle für Normalverteil[illegible] nutzen k[illegible]nn. [illegible] hier jedoch einige Kenntnisse bezüglich der Transformation von Koordinatens[illegible]men be[illegible]igt werden, [illegible]folgt mit Aufgabe[illegible]a 2.2 zunächst ein Einschub, der die notwen[illegible]Sch[illegible]ierf[illegible]klärt bzw. wiederholt.

Aufgabe 13.2 Transformation von K[illegible]natensystemen für das Verschieben von Funktionen

Am Beispiel einer Para[illegible]wird e[illegible]utert, [illegible]welche Transformation ei[illegible]Funktion verschoben wird.

Achtung: Im transformiert[illegible]koordi[illegible]sysstem wird die horizontale Achse mit r bezeichnet.

Koordinaten[illegible]em w[illegible]echt: [illegible]chse Koordinatensystem waagrecht: r-Achse

f(x) = [illegible]² h(r) = [illegible]²

[illegible]

f(0) = 4	f(0) = h(–2) [illegible] $(0-2)^2 = 4$
f(1) =	f(1) = h(–1) = _____
f(2) =	f(2) = h(0) = h(2[illegible] _____
f(3) =	f(3) = h(___) = h(_____
f[illegible]	f(4) = h(___) = h(_____) _____
	$f(x_0)$ = h(r_0) = h(_____) = [illegible]$)^2$

Sie e[illegible]s die Funktionswerte von h(r) und f(x) identisch sind, wenn man[illegible]nt von h(r) [illegible]bung von f(x) um 2 in Richtung positiver x-Ach[illegible]e berücksichtigt. D[illegible] h(r) lief[illegible]elle $r_0 = x_0 – 2$ den gleichen Funktionswert [illegible] Funktion f(x) an [illegible]

A[illegible] = f(x – 2)

Aufgabe 13.3 Normierung der Binomialverteilung

a) Verschieben der Binomialverteilung in den Ursprung eines [illegible]linaten[illegible]

Das Balkendiagramm wird durch eine Verschiebung, entsprechen[illegible]dem [illegible]n Beispiel, so verschoben, dass der höchste Balken, also der Erwartu[illegible]wert, a[illegible](X)-[illegible]chse liegt. In der Abbildung werden nur der höchste Balken und die Hüllen[illegible] darg[illegible]t.

Zei[illegible]en Sie [illegible]einer beliebigen Stelle X = k im linken Diagramm und an der entsprechenden Stelle [illegible]n Diag[illegible]mm einen senkrechten Balken ein und begründen Sie, warum sich auf den [illegible]rizo[illegible]n A[illegible]en aus der [illegible]-Koordinate X = [illegible] im linken Diagramm, die y-Koordinate Y = k – μ im [illegible]hten [illegible]mm ergi[illegible]

Begründen Sie, warum für die Wahrscheinlichkeiten P(X) und P(Y) gilt: P(X = k) = P(Y = k – μ)

b) Normierung der Breite

Wie Sie b[illegible]alverteilung für jedes n eine[illegible]e und andere Höhe.

Be[illegible]enden Binomialverteilungen den Ert[illegible] die [illegible]ahrscheinlichkeit für das Eintreten des [illegible]wertes, also

[illegible]e aus der F-Tabelle jeweils die ersten Werte k = a und k = b ab, [illegible]$F_{n;\,p}(a) > 0$ und [illegible]≤ 1. Ermitteln Sie die um μ verschobenen W[illegible]a – μ und b – μ u[illegible]ie alle Werte an [illegible]rgesehenen Stellen ein.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Berechnen Sie auch die Breite d der Verteilung über die Bildung der Differenz d[illegible] – a und [illegible]gen Sie die Werte an den vorgesehenen Stellen ein. Ergänzen Sie den nachfolgende[illegible]

Bsp. 1 n = 100

p = 0,3

μ = ____

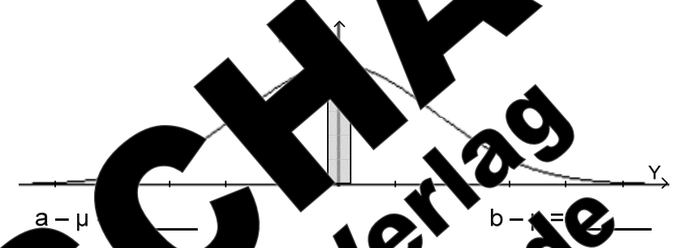
P(X = μ) =_____

σ = _____

a = ___

b = ___

Breite d =____



Bsp.2 n = 100

p = 0,5

μ =

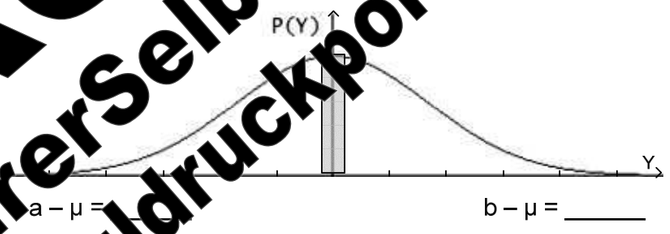
P[illegible] = μ)

[illegible]

a [illegible]

[illegible] = ___

[illegible]eite d =___



Anhand der beiden Werte a und b sowie d für die Breite erkennt man, dass hier beispielsweise die

Randwerte a – μ unterschiedlich sind und die $B_{100;0,5}$ (k)-Verteilung _____ als die

$B_{100;0,3}$ (k)- Verteilung ist.

Damit erg[illegible] [illegible]gabe 13.1 schon erwähnt, bei der Fläch[illegible] [illegible]e Grenzen. Um dieses Problem zu l[illegible] [illegible]e Breite der Hüllenkurve für alle [illegible]gleich ist und somit a – μ un[illegible] [illegible]rt annehmen.

[illegible] wendet man die Ihnen bereits bekannten Zusamm[illegible] [illegible]reiche an. Bei einer [illegible]mialverteilung mit σ > 3 (Laplacebedingung vgl. Aufgabe 9[illegible] [illegible]scheinlichkeit, dass ein Wert für k in einen der Sigma-Bereiche fällt, für den 1σ-Bereich 68[illegible] [illegible]ereich 95,4% und für den 3σ-Bereich 99,7%. Interpretiert man diese Wahrscheinlichkeit[illegible] [illegible] dann decken bei diesen Binomialver[illegible] [illegible]ngen jeweils die gleiche Bre[illegible] [illegible]erteilung ab. Diese Eigensc[illegible] [illegible]Breite zu normieren.

Bereche[illegible] [illegible]en den Quotient h aus d und σ und v[illegible] [illegible]ie die beide[illegible]

fü[illegible] [illegible]it $h_{0,3} = \frac{d}{\sigma} = \frac{\quad}{\quad} \approx$ _____ und für $B_{100;\,0,5}$ (k) gilt $h_{0,5} = \frac{d}{\sigma} =$ [illegible]

Das Ergebnis zeigt, dass sich bei einer Division durch σ für beide Hüllenk[illegible] etwa [illegible]gleiche Wert ergibt, also nach Anwendung des Stauchungsfaktors $\frac{1}{\sigma}$ beid[illegible]rteilung[illegible]llenkurven die gleiche Breite annehmen.

Man bezeichnet die waagerechte Achse der mit dem Fa[illegible] $\frac{1}{\sigma}$ gest[illegible] Hüllenkurve nun mit z und die senkrechte Achse mit P(Z). Ergänzen Sie [illegible] Skali[illegible]der [illegible]hse in der Abbildung mit den entsprechenden Zahlenwerten.

Vergleich des P(Z[illegible]gra[illegible]mit dem P([illegible]diagramm u[illegible]der Ausgangsverteilung im P(X)-Di[illegible]

– Im [illegible]X)-Diag[illegible]m wird für die Berechnung von P(X = x_i) für x_i ein beliebiger Wert k festgelegt, so[illegible] gilt: X[illegible]

– [illegible] P(Y) [illegible]gramm wi[illegible]er Wert für [illegible]nfach links um μ verschoben und nun mit y bezeichnet. Für [illegible] Berechnung von [illegible]he bekanntem [illegible]gilt: y = _____

– [illegible](Z)-Diagra[illegible]m werden die [illegible]prünglich im P(X)-Diagramm festgelegten Werte von k mit z bezeichnet. Die Werte von [illegible]sind bezüglich der ursprünglichen Lage von k um μ nach links verschoben, und die Abst[illegible]e werden aufgrund der Division durch σ gestaucht. Die Position der der Werte von z können daher aus dem ursprünglich vorgegeben Wert k wie folgt berechnet werden: $\mathbf{z = \frac{k - \mu}{\sigma}}$

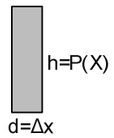
[illegible]nkurve

[illegible] der Verteilung mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$ [illegible]uch jeder Balken in der [illegible]prünglichen P(X)-Verteilung genau um diesen Fakt[illegible]i die Höhe der Verteilung bzw. der Balken gleich geblieben ist. Erläutern Sie, welch[illegible]s für die Summe der Fläche aller Balken bzw. die Fläche unter der Hüllenkurve hinsichtli[illegible]nen für die Fläche, nämlich: $A_{ges} = \sum^{n} P(X[illegible]) \cdot [illegible] = 1$ bzw. $A_a(b) = \int_a^b f(x)dx =$ [illegible]gabe 13.1) hat.

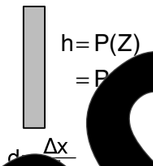
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

c) Normierung der Höhe der Verteilung

Durch das Stauchen der Verteilung ist die ursprüngliche Balkenbreite [illegible] gewor[illegible] gleicher Höhe der Balken wird die Gesamtfläche aller Balken daher kleiner. Un[illegible] [illegible]änderung auszugleichen, muss die Höhe der Balken um den gleichen Faktor verg[illegible]ert [illegible] Begründen Sie anhand der Abbildung unten, dass für die neue Höhe P(Z) de[illegible]ken gi[illegible] $= P(X) \cdot \sigma$.



$A_1 = d \cdot h$
$= \Delta x \cdot P(X)$



$A_2 = d \cdot h = \frac{\Delta x}{\sigma} \cdot P(Z) = \frac{\Delta x}{\sigma} \cdot P(X) \cdot \sigma$

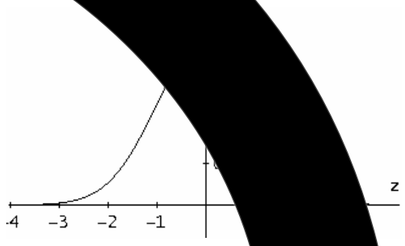
Die Höhe d[illegible]urve [illegible] durch die Hö[illegible]s höchsten [illegible] der Binomialverteilung bestimmt [illegible]gründ[illegible]e, w[illegible]n die Höhe de[illegible] höchsten Balkens in den beiden Beispielverteilungen aus $B_{100;0,[illegible]}$ und $B_{[illegible]}$ (k) jeweils d[illegible] den Wert für d[illegible] Wahrscheinlichkeit $P(X = \mu)$ berechnet wird.

Berechnen Sie nun für beide Verteilungen das Produkt aus $P(X = \mu)$ und σ. Vergleichen Sie die beiden Werte und interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Normierung der Binomialverteilung.

Für $B_{100;0,3}$ (k) gilt: P([illegible] = _____

Für B[illegible] = _____

Für größere Werte von n zeigt sich, dass die Höhe des größten Balkens d[illegible] also die Höhe der Hüllenkurve [illegible]rt 0,4 annimmt. U[illegible]ten Breite ergibt sic[illegible] nebenan abgebi[illegible]**ard-norm**[illegible] einfa[illegible]**malverteilung** be[illegible]



[illegible]assung:

[illegible] entspricht die Summe aller Balken[illegible]e.

d) Die Glockenkurve von Gauß und ihre Näherungsformel als Funktion[illegible]ichung [illegible] Hüllenkurve

Gauß hat für die Hüllenkurve, die der Form einer Glocke ähnelt [illegible] a[illegible]forderten Bedingungen enthält, die folgende Funktionsgleichung entwickelt und mit $\varphi(z)$ b[illegible]ich[illegible]

Glockenkurve von Gauß [illegible]$(z) =$ [illegible]$^{-0,5z}$

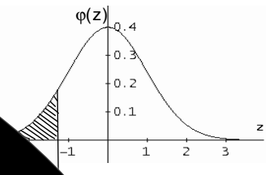
Da $\varphi(z)$ aus einer Verdichtung (Stauchu[illegible] Binom[illegible]rteilung ent[illegible]ist, wird $\varphi(z)$ auch als **Dichtefunktion** bezeichnet.

Begründen Sie, warum für die [illegible]chnu[illegible]er ge[illegible]nten Fläche unter dieser Ex[illegible]ntialfunktion bzw. Glockenkurve der folg[illegible]e Ansatz v[illegible] wird:

$$A_{ges} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\,dz = 1$$

Au[illegible]be 13.4 Die Glocken[illegible]e von Gau[illegible] die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

[illegible]genden A[illegible]bildu[illegible] wird hin[illegible] der Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X \le k)$ entsprechend zu Au[illegible]be 13.1 ein Balkendiagramm mit der normierten Hüllenkurve der Normalverteilung verglichen.

Balkendiagramm	Normalverteilung
	
Berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(X \le k)$ mit Hilfe der F-Tabelle, gilt:	Die Wahrs[illegible] $X \le k$) entspricht nun der Fläche zwisch[illegible] unter der Funktion $\varphi(z)$ also dem Integr[illegible]
$P(X \le$ [illegible]	$P(X \le k) \approx \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi($[illegible]$^{-0,5z^2}\,dz$
	$\Phi(z)$ wird als **Gaußsch**[illegible]**funktion** bezeichnet und gibt den [illegible]wert für die ges[illegible]te Wahrscheinlich[illegible]) an. Damit [illegible]erung hinreiche[illegible], muss die [illegible] **Bedingung $\sigma >$** [illegible]in.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Da die Funktion $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5z^2}$ keine Stammfunktion besitzt, kann man $\varphi(z)$ nic[illegible]egriere[illegible]e Werte für $\Phi(z)$ liegen daher in der **Tabelle zur Gaußschen Summenfun[illegible]on** tabe[illegible]vor.

Damit gilt für die Berechnung von Wahrs[illegible]nlichk[illegible]
$P(X \le k) = F_{n;p}(k) \approx \Phi(z)$

Für sehr große Werte von n (Richtwert n > 1000) [illegible] die [illegible]n der Binomialv[illegible]ilung extrem schmal und die Glockenkurve deckt die Fläche [illegible] Balken weit[illegible]nd exakt a[illegible] In diesem Fall ist die Variable z durch die Standardisierung der Bino[illegible]verteilu[illegible]estimmt, und d[illegible] Berechnung [illegible]folgt über den bereits hergeleiteten Zusammenhang:

$$z = \frac{k - \mu}{\sigma}$$

Die Laplace-Bedingu[illegible]
$\sigma > 3$
muss erfü[illegible]sein.

Für Binomialverteilungen [illegible] Be[illegible] von [illegible]00 ist die [illegible]herung der Glockenkurve an die Balken der Binomialverteilung [illegible] exa[illegible] diese Ungenauig[illegible]ausgleich[illegible], verwendet man in der Regel die Ausgleichszahl 0,5. Da[illegible]

$$z = \frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}$$

[illegible]spiel

Eine [illegible]ße sei $B_{500;\,0,3}(k)$ [illegible]rteilt.
Für die Be[illegible]nnung der W[illegible]scheinlichk[illegible]t $P(X \le 140)$ bzw. $P(X > 140)$ ergibt sich:

$P(X \le 140) \quad = F_{500;\,0,3}(140)$

Genauer Wert mit dem Taschenrechner oder der F-Tabelle ermittelt.

$P(X > 140) \quad =$ [illegible]

Steht keine passende F-Tabelle oder kein Taschenrechner zur Verfügung, wird die WK [illegible]herungsweise über die [illegible]alverteilung bestimmt.

[illegible]nnen der Variablen z für k = 140 mit der Formel für z:

$$z = \frac{k - \mu + 0,5}{\sigma} = \frac{k - np + 0,5}{\sqrt{[illegible]}} = \frac{140 - 500 \cdot 0,3 + 0,5}{[illegible] \cdot 0,3 \cdot 0,7} = -0,93$$

(2) Bestimm[illegible] Ablesen aus der Tabell[illegible]ktion:

$P([illegible],93) = 0,1761 = [illegible],61\%$

[illegible]

[illegible] $= 1 - \Phi(-0,93) = 1 - 0,1761 = 0,8239 = 82,39\%$

An de[illegible] vom genau ermittel[illegible]nnt man, dass die [illegible]**ilung** nur eine **Nähr**[illegible] für die gesuchte W[illegible]hkeit liefert.

Beispiel 2

Die Fernsehshow Mutandenstadel hat in der Zielgruppe Ü70 eine [illegible]altquot[illegible]. Nach dem Austausch des Moderators befürchtet man, dass die Beliebtheit de[illegible] gesun[illegible] ist und als Folge die Einschaltquote zukünftig sinken wird, was einer Verringerung de[illegible]erb[illegible]men für den Sender bedeutet. Daher führt man eine Befragung unter 500 Pers[illegible] der Z[illegible]e durch. Man will von einer gesunkenen Beliebtheit ausgehen, wenn weniger als 335 P[illegible]en b[illegible]eser Umfrage angeben, dass ihnen die Sendung noch gefällt. Mit welcher Irrtums[illegible]rsch[illegible]eit a[illegible]itet der Test?

Lösung:

Begründen Sie, warum es sich um einen [illegible]sseitigen Test [illegible]delt.

Erläutern Sie die [illegible] Rechenschritte (1) bis (6).

(1) α [illegible] (4)

(2) [illegible] $F_{500;\,0,7}$ (g[illegible]

(3) $\alpha \approx \Phi($[illegible]

(4) [illegible] $\frac{334 - 35[illegible] + 0,5}{10,25} = -1,51$

(5) $\alpha \approx \Phi(-1,51)$

(6) $\alpha \approx 0,0655 = 6,55\%$

(1)

(2)

(3)

(4)

(6)

Antwort[illegible]rtumsrisiko von 6,6%.

[illegible]Übungen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …lernen

Kapite…

Anwendung der Normalv… …g

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Einführung in den Begriff der bedingte[illegible]hrsche[illegible]chkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinli[illegible]keitsv[illegible]ilung 61

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapit[illegible]
Vari[illegible]und [illegible]lard[illegible]ichung 69

Kap[illegible]9
[illegible]no[illegible]verteil[illegible] 75

[illegible]othesentests

[illegible]l 10
Z[illegible]seitiger Signi[illegible]ztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – F[illegible]ler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

[illegible]

[illegible]de Betrachtungen zur Normalve[illegible] 139

[illegible]itel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 14: Anwendung der Normalverteilung

Aufgabe 14.1

Bestimmen der Hilfsgröße z bei gesuchtem kritischen W[illegible]rt

a) Bestimmen eines linksseitigen kritischen Wert[illegible]s k = g[illegible] vor[illegible]ebenem α-Fehler

Gegebe[illegible]e:

Darstellung anhand der Binomialverteilung

$n = 30$[illegible]

p [illegible]

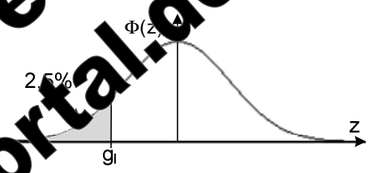
$\mu = 50$

$\sigma = 6{,}45 > 3$

[illegible]

$\alpha \leq 2{,}5\%$

[illegible]arstellung anhand der Normalverteilung



Re[illegible]ng:

Bes[illegible]n z

$$
\begin{aligned}
[illegible](X \leq g_l) &\leq 0{,}025 \\
[illegible]_{300;\frac{1}{6}}(g_l) &\leq 0{,}025 \\
\Phi(z) &\leq 0{,}025 \\
z &\leq -1{,}96
\end{aligned}
$$

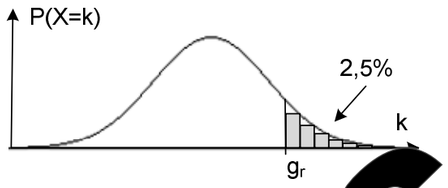
2. Bestim[illegible]rmel für z

$$
\begin{aligned}
g_l - \mu + 0{,}5 &\leq [illegible] \\
g_l &\leq -1{,}96 \\
g_l &\leq -1{,}96 \cdot 6{,}45 \\
g_l &\leq 36{,}84
\end{aligned}
$$

3. Ru[illegible]ahligen Wert, der $P(X \leq g_l)$ also [illegible] erfüllt,

b) Bestimmen eines rechtsseitigen kritischen Wertes $k = g_r$ bei vorgegebene[illegible] Fehler[illegible]

Darstellung anhand der Binomialverteilung



Gegebene Werte:

$n = 300$

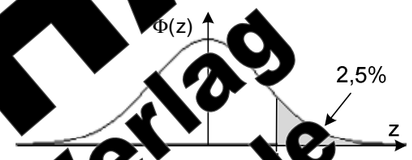
$p = \frac{1}{6}$

[illegible] $= 6{,}45 >$ [illegible]

[illegible]

$\alpha \leq 2{,}5\%$

D[illegible]tell[illegible]and der [illegible]alverteilung



Rechnung

1. Bestimmen [illegible] z

$P(X \geq g_r) \leq$ [illegible]25

$1 - P(X \leq g_r - 1) \leq$ [illegible]5

[illegible]$_{0;\frac{1}{6}}$ [illegible]75

$\Phi(z) \geq 0{,}975$

$z \geq 1{,}96$

2. Bestimmen von g_r durch Einsetzen in die Formel für z

$$z = \frac{g_r - 1 - \mu + 0{,}5}{\sigma} \rightarrow \frac{g_r - 1 - \mu + 0{,}5}{\sigma} \geq -1{,}96$$

[illegible]

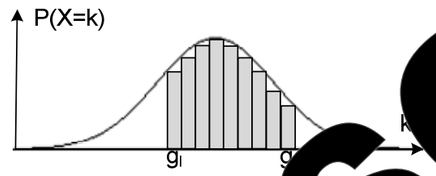
g_r [illegible]

$g_r \geq 63{,}15$

3. Runden auf den nächsten ganzzahligen Wert, der $P(X \geq g_r)$ als [illegible] erfüllt, liefert $g_l = 64$.

c) Allgemeine Betrachtungen zum Umgang mit der Normalverteilung u[illegible]erechn[illegible] der kritischen Werte g_l und g_r bei einer $B_{n;\,p}(k)$-Verteilung

Darstellung anhand der Binomialverteilung



Gegebene Werte:

n = bekannt

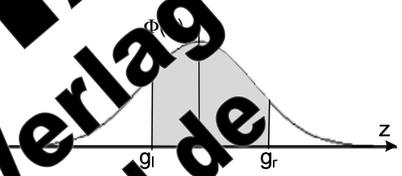
p = b[illegible]

[illegible]eka[illegible]

σ = bekannt

$g_l \leq k$ [illegible]

[illegible]stellung anhand der Normalverteilung



1. Berechnung [illegible] Wa[illegible]cheinl[illegible] $P(g_l \leq$ [illegible]

$$P(g_l \leq X \leq g_r) = P(X \leq g_r) - P(X \leq g_l - 1)$$
$$= F_{n;\,p}(g_r) - F_{n;\,p}(g_l - 1)$$
$$\approx \Phi(z_r) - \Phi(z_l)$$

2. Berechnen von z_l und [illegible]

$$z_l = \frac{g_l - 1 - \mu + 0{,}5}{\sigma} \qquad z_r = \frac{g_r - \mu + 0{,}5}{\sigma}$$

$$z_l = \frac{g_l - 1 - np + 0{,}5}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad z_r = \frac{g_r - np + 0{,}5}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$z_l = \frac{g_l - np - 0{,}5}{\sqrt{\ldots}} \qquad z_r = \frac{g_r - np + 0{,}5}{\sqrt{npq}}$$

Bei Ausdrücken der Form $P(X \geq k)$ ergibt sich ein negativer Ausgleichssummand.

[illegible]n z_l und z_r die Werte von $\Phi(z_r)$ [illegible]

Er[illegible]

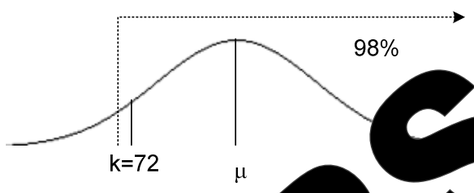
VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 14.2

Bestimmen des Stichprobenumfangs bei bekanntem p

Von einem hochwirksamen Schlafmittel ist durch Testreihen bekannt, da[illegible]s [illegible]on 6 Personen keine Nebenwirkungen erzeugt. Für die Zulassung des Arzneimit[illegible]ls soll [illegible]h [illegible]nprobe überprüft werden, ob diese Angabe zutrifft. Welchen Umfang muss die St[illegible]be ha[illegible]wenn man mit einer Sicherheit von mindestens 98% mehr als 71 nebenwirkungsfreie P[illegible]nen [illegible]lten will.

Aufgabenstellung anhand einer Skizze:



n = ?

p = [illegible]

[illegible]2

P(X ≥ 72) ≥ 0,98

a) Die Normalverteilung [illegible]endet werden, we[illegible] die Laplace-Bedingung erfüllt ist. Da die Wahrscheinlichkeit p v[illegible]ebe[illegible]kann man [illegible]über die Größe der Stichprobe den Wert von σ beeinfluss[illegible] Sie [illegible]h Rechnung [illegible]d der folgen[illegible]Überlegung, dass der minimale Stichprob[illegible]mfan[illegible] die [illegible]endbarkeit de[illegible]aplace-Bedingung 65 Personen beträgt.

Aus Laplace-Bedingung

[illegible] Verw[illegible]den der [illegible]erteilung [illegible]gilt: $\sigma = \underline{\quad} \Rightarrow \sigma^2 \geq \underline{\quad} \Rightarrow n\frac{5}{6}\frac{1}{6} \geq 9 \Rightarrow n = \underline{\quad}$ (minimale Stichprobe)

b) Verdeutlichen Sie sich die Herle[illegible] der Ungleichung (1). Formen Sie die Ungleichung (1) so um, dass sich die Ungleichung (2) ergibt, mit der sich dann n berechnen lässt. Lösen Sie die Ungleichung (2) nach n auf und bestätigen Sie damit die auf der folgenden Seite angegebenen Lösungen.

P(X[illegible]

[illegible]$\frac{5}{6}$(71) $\leq 0{,}02$

$\Phi(z) \leq 0{,}02$

$z \leq -2{,}06$ Einsetzen der Werte in Hilfsf[illegible]

(1) $\dfrac{71 - n\frac{5}{6} + 0{,}5}{\sqrt{n\frac{5}{6}\frac{1}{6}}} \leq -2{,}06$

(2) $429 - 5n + 4{,}606\sqrt{n} \leq 0$ Hinweis: Substitution $\sqrt{n} = m$

Lösen Sie die Ungleichung (2) unter Verwendung des Hinwei[illegible]auf und bestätigen Sie damit die angegebene Lösung.

$\Rightarrow m$ [illegible]ode[illegible] $\leq -8{,}808$

Da[illegible] ergibt s[illegible] für die gesuch[illegible] Anzahl n

[illegible]n ≥ [illegible]81 also n = [illegible]5 Personen.

A[illegible]erkung:

Um n zu erhalten, müssen [illegible]Werte von m quadriert werden. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, sollte für Gleichungen, bei denen die Lösungen durch Quadrieren der Lösungsvariablen gefunden wurden, eine Probe durch Einsetzen der Ergebnisse in die Ausgangsgleich[illegible] vorgenommen werden.

[illegible]

[illegible]der Probe erkennt man, dass nur $n_1 = 95$ die [illegible]löst. Damit ist ab einem [illegible]indeststichprobenumfang von n = 95 Personen, gew[illegible]an mit 98% Sicherheit mindestens 72 Personen ohne Nebenwirkungen erhält. B[illegible]robenumfang ist auch die Laplace-Bedingung erfüllt.

[illegible]e Übungen:_____

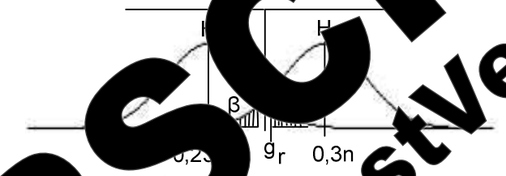
VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 14.3

Stichprobenumfang bei einem rechtsseitigen Test ermitteln, wenn α- und β-Fehler gleichzeitig fest vorgegeben sind

Eine Partei vermutet vor der Wahl, dass ihre Quote von 23% auf 30% gestiegen ist. Um unnötige Wahlkampfkosten zu vermeiden, soll diese Vermutung mit einer Befragung geprüft werden. Es soll berechnet werden, wie viele Personen befragt werden müssen, wenn der Fehler 1. Art und der Fehler 2. Art gleichzeitig unter 5% liegen sollen.

Verdeutlichen Sie sich den Ansatz und lösen Sie vergleichbare Aufgaben anhand dieses Verfahrens.



Bei ... Fehler ... unter 5% liegen, also gilt:

$$P(X \geq \ldots) \leq \alpha \qquad P(X < g_r) \leq \beta$$
$$P(\ldots - 1) \leq 0{,}05 \qquad P(X \leq g_r - 1) \leq 0{,}05$$
$$P(X \leq \ldots 1) \geq 0{,}95 \qquad F_{n;0,3}(g_r - 1) \leq 0{,}05$$
$$\ldots 1) \geq 0{,}95 \qquad \Phi(z) \leq 0{,}05$$
$$\Phi(z) \geq \ldots \qquad z \leq -1{,}65$$
$$z \geq \ldots 65 \qquad \frac{g_r - 1 - 0{,}3n + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} \leq -1{,}65$$
$$\frac{\ldots 1 - 0{,}23n \ldots 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}77}} \geq 1{,}65 \qquad g_r - 0{,}3n - 0{,}5 \leq -0{,}7561\sqrt{n}$$
$$g_r - 0{,}23n - 0{,}5 \geq 0{,}69\ldots\sqrt{n}$$

Der Ansatz liefert zwei Gleichungen mit den Variablen g_r und n. Zeigen Sie, dass man durch Elimination von g_r und anschließ... angegebene Ungleichung erhält. Begründen Sie, warum man ...

$$\begin{array}{lll} & & \\ \text{II} & g_r - & 0{,}3n - 0{,}5 \\ \hline \text{I} & g_r - 0{,}23n - 0{,}5 & \geq 0{,}694\ldots \\ \text{II} & -g_r + \ 0{,}3n + 0{,}5 & \geq 0{,}7561\sqrt{n} \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}$$

$$\sqrt{n} \geq 20{,}72$$
$$n \geq 429{,}4 \quad \Rightarrow \quad n = 43\ldots$$

Ant... muss mindestens 430 Leute befragen, um mit der geforderten Sich... ausgehen ...nnen, dass sich die Quote verbessert hat.

E... bungen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
Schuldruckportal.de

2014-15

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de