Stochastik
selbstorganisiert erlernen

Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-032-278

Umschlag Vorderseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert lernen

Kapit

Grundbegriffe

02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Gesa... ...elbstorganisiert erlernen (Beste... ...278)

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F...

Stoch...

selbsto...ganisiert ...lernen

...e Mathematik

...estellnummer 02-032-278

LEHRER SELBST VERLAG

Lehrer…
Sok… …z (Germany) 2014
…verlag…

…w.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Vorwort

Wie schon in den bereits erschienenen Arbeitsbüchern zum Thema Integralrechnung und Lineare Algebra beruht die Erarbeitung der Zusammenhänge auch im Themenbereich Stochastik auf selbstorganisierten Lernformen. Die Lernenden werden anhand von geeigneten Aufgaben- und Fragestellungen an den Stoff herangeführt, indem Erläuterungen sowie Erklärungen frei formuliert oder entsprechende Lückentexte ausgefüllt und Berechnungen selbst durchgeführt bzw. ergänzt werden. Durch das Lesen und Erfassen der Texte in allen Det[illegible] Formulieren von Erläuterungen und das schritt[illegible]e Beschreiben von Lösungswegen werden daher n[illegible] rein fachsystematischen auch Kompetenze[illegible] Um[illegible] mit der Fachterminologie erworben. [illegible] mittle[illegible] hohen sprachlichen Anteil der A[illegible]prü[illegible]fgaben ist der Erwerb dieser Kompetenzen [illegible]

Zielgruppe

Die selbstorganisierte[illegible] dert hier anhand der Erarbeitung mathe[illegible]cher [illegible]mmenhä[illegible]ge [illegible] dem die F[illegible]ch s[illegible]ndig auch ko[illegible] Zusammen[illegible]ge zu [illegible]eite[illegible]s in einer [illegible]esel[illegible]haft, in der le[illegible]langes L[illegible]n einen immer [illegible]eren Stellen[illegible]rt [illegible]mmt, [illegible] wachsende B[illegible]tung erhält. De[illegible]erb[illegible]petenzen ste[illegible] ferner eine grundlege[illegible] Notwe[illegible]gkeit für die [illegible]reiche Bew[illegible] [illegible]es[illegible]eren Studiums da[illegible] ist dieses Arbeitsbuch [illegible]r Schülerinnen u[illegible] Schüler ei[illegible]asialen Obe[illegible] geeignet, so[illegible] auch für St[illegible]anfänger mit Fachhochschulreife, die diesen T[illegible]enbereich im Rahmen des Mathematikunterrich[illegible] der Schule nicht behandelt haben, jedoch einen Studiengang wählen, in dem Kenntnisse im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausgesetzt werden [illegible] Lernfortschritt selbst [illegible] ab Sen[illegible] b[illegible]

[illegible]andhabung des [illegible]uchs

[illegible] Inhalte des Arbeitsbuchs stellen die grundlegenden Zusammenhänge zu einzelnen Themengebieten der Stochastik zur Verfügung und sind damit als Basis für die Bewältigung der Aufgaben[illegible] der Abiturprüfung zu sehen. Im Fo[illegible] komplexer Aufgabenste[illegible] zuwendende Lösungs[illegible]odische Konzept [illegible]nd Schüler mit Zu[illegible]ach [illegible]tik mit dem The[illegible]astik gut zurecht kommen, zumal hin[illegible]andhabung von Rechenkalkülen fehlende [illegible]ier nur eine untergeordnete Rolle spielen.

[illegible]sbuch ist für Lernende mit und ohne Vorkennt[illegible]er Wahrscheinlichkeitsrechnung geeign[illegible] [illegible]de Begriffe und Arbeitsmethoden, die b[illegible] in den Bildungsstandard[illegible] Sekun[illegible]ufe I verankert sind, im erste[illegible]pitel wi[illegible]lt [illegible]ertieft werden. Verweise au[illegible]gen, E[illegible]gen und erweiternde Betrachtu[illegible] zu[illegible]einzelnen Themenbereichen kön[illegible] an den[illegible] Stellen am Ende eines Kapitels [illegible]rt w[illegible] Anregungen und Verbesserungswünsch[illegible]rden [illegible]e entgegengenommen und können [illegible]ter der Adresse [illegible]service@lehrerselbstver[illegible] [illegible]zuges[illegible]t werden..

Da[illegible]einzelnen K[illegible] Arbeitsbuchs aufeinander aufb[illegible] und Que[illegible]weise auf Inhalte aus vorangegangenen Kapiteln [illegible]thalten sind, [illegible] notwendig, dass [illegible]e einzel[illegible] in der v[illegible]ebenen Reihenfolge bearbe[illegible]rden, wobei erg[illegible]de oder erweiternde Betrachtungen stets optional sind.

Kapitel 1 bis 3
I[illegible] Kapitel 1 werd[illegible] zunächst Begriffe und Definitionen zur Verfügun[illegible]estellt und elementare Arbeitsweisen, wie beis[illegible]weise der Umgang mit Baumdiagrammen, wie[illegible]lt [illegible]nd vertieft. Zusätzlich, insbesondere jedoch i[illegible] Hi[illegible]lick auf den allgemeinen Additionssatz und die [illegible]re Verwendung bei der Behandlung von bedingten Wahrscheinlichkeiten, erfolgt hier anhand von Vierfeldertafeln eine ausführliche Betrachtung abhängiger und unabhängiger Zufallsversuche

Kapitel 4
Die Betrachtungen zu kombinatorischen Abzählverfahren sind nur auf elementare Problemstellungen beschränkt. Vertiefende und komplexe Aufgabenstellungen können ergänzend eingefügt werden. Eine Herleitung für die formelmäßige Betrachtung des ungeordneten Ziehens ohne Zurücklegen, was in den Unterlagen auch als „Lottoproblem" bezeichnet wird, erfolgt über ein anschauliches Beispiel unter Einbeziehung des Pascalschen Dreiecks. Der [illegible]tisierung des Pascalschen Dreiecks an dieser Stelle [illegible]terlagen kommt eine vorbereitende Aufgabe [illegible] Binomialverteilung in Kapitel 9 zu.

[illegible]
Komp[illegible]llungen zu bedingten Wahrscheinlichkeite[illegible] Herausforderung für die Lernenden. Im [illegible] Unterlagen wird ein Schwerpunkt auf die[illegible] der Aufgabentexte gelegt, indem die Text[illegible]nd auf Standardformulierungen zurückgef[illegible] Die Lösung der Aufgaben erfolgt dann über d[illegible] der beiden möglichen Baumdiagramme un[illegible]neten Vierfeldertafel, die bereits aus Kapite[illegible]t. Vertiefend werden dann der Satz von Baye[illegible]ldertafeln ergänzt.

[illegible]el 6 bis 8
[illegible]ich der Wahrsche[illegible]rteilungen werden [illegible]ze Beispiele zur Er[illegible]r Zusammenhänge [illegible]zogen, wobei für [illegible]ng des Erwartungs-

wertes und der Standardabweichung eine tabellarische Form verwendet wird, mit der für diesen Aufgabentyp eine Systematisierung des Lösungswegs erreicht wird.

Kapitel 9
Nachdem der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung verankert ist, nimmt die Binomialverteilung nun eine zentrale Rolle ein. Anhand des schon bekannten Pascalschen Dreiecks wird die Formel von Bernoulli beispielorientiert hergeleitet, wobei der Bezug zur Bezeichnung Binomialverteilung für die Lernenden anschaulich ersichtlich wird. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt dann in der Handhabung entsprechender Tabellen. Auch kann hier die Verwendung von Taschenrechnern einfließen.

Da Erwartungswerte und Sigma-Umgebungen [illegible] Binomialverteilung beim Testen von Hypothesen eine hervorgehobene Rolle spielen, wird dieser [illegible] ausführlich behandelt. Anhand von exemp[illegible] ausgewählten Verteilungen wird zu[illegible]s Aussehen [illegible] Säulendiagramms einer Bi[illegible]alverteilung [illegible]gigkeit von n und p verdeu[illegible] für mehrere Verteilungen die Bedeutung [illegible] Sig[illegible]gebungen erarbeitet.

Kapitel 10
Der Eins[illegible] in [illegible]esten vo[illegible] Hypothesen erfo[illegible] meinem Unt[illegible] [illegible]weiseitigen Tests direkt im Anschluss [illegible] die Be[illegible] der Sigma-Umgebung über [illegible]rsuch. Im Rahmen [illegible]gebenen Aufg[illegible] [illegible]benst[illegible] nimmt jeder Lerne[illegible] aus dem gl[illegible] Behälter e[illegible]chprobe von Körnern. Ich verwende hier eine Mischung aus Linsen und Sonnenblumenkernen. Langjährige Beobachtungen des Versuchs [illegible], dass bei dieser Mischung bei jeder Lerngruppe Stichproben entstehen, die im Bereich des Erwartungswertes liegen, aber auch jedes Mal Stichproben auftreten, die außerhalb der 3σ-Bereichs liegen. (Fall[illegible] wird, können [illegible] lenbeispi[illegible] Pers[illegible] [illegible]eudlichste Ergebnisse auftreten, [illegible] Voraussetzung für das Verständnis der [illegible]matik beim Testen von Hypothesen dar.

[illegible]swertung des Tests erfolgt zunächst über die An[illegible]dung der Sigma-Umgebungen und endet schließlich [illegible] der Behandlung zweiseitiger Tests mit Fehlerbetrachtung. Schwerpunkt bei [illegible] stellungen zu Tests [illegible] von Annahme- und A[illegible] Hüllenkurven von Bi[illegible] dass die G[illegible] reinbart, [illegible] wählt werden, da[illegible]ste Wert im Ablehnungsbereich angeg[illegible]

Kapitel 11
Aufbauend auf die zweiseit[illegible] Tests w[illegible] nun, anhand eines Beispiels aus der M[illegible] die ein[illegible]gen Tests behandelt. Um die K[illegible]plexität [illegible] Aufga[illegible]stellung zu reduzieren und für [illegible]aben [illegible]gehend einheitliche Lösungssys[illegible] [illegible]zustellen, wird auf einen tabella[illegible] darst[illegible] [illegible]sweg hingearbeitet. Hierbei ste[illegible] [illegible]ualisierung von Annahme- und Ablehnungsbereich[illegible] mithilfe von Hüllenkurven der Bi[illegible] Mittelpunkt. Erfahrungen haben gezeigt, [illegible] Lerne[illegible] welche die [illegible] vorgeschlagene Vorgehensweise anwenden [illegible]reiche für den Alpha- und Beta[illegible] markieren, [illegible] Bestimmung der Grenzen der [illegible] Bereiche sicher beherrschen.

Fer[illegible] stellt die [illegible] Ausformulierung der Nullhypothese und [illegible] Alternativhypothese im Kopf der Tabelle eine wesentliche Hilfe bei der Formulierung der beiden Fehler und deren Konsequenzen dar. Anhand der vorgegebenen Formulierungshilfen „Obwohl …, wird irrtümlich angenommen, dass …“ kann man Bezug auf die im Kopf der Tabelle angegebenen Hypothesen nehmen und so eine für beliebige Testsituationen systematisch erfassbare Fehleranalyse vornehmen. In der Praxis hat es sich gezeigt, dass die Lernenden, nachdem sie mithilfe der systematischen Vorgehensweise anhand der Tabelle die Zusammenhänge beim Testen erfasst haben, die Aufgabenstellung auch ohne Tabelle richtig bearbeiten.

Betrachtungen der Abhängigkeit der Fehler vom Stichprobenumfang und den Wahrscheinlichkeiten der beiden Hypothesen sowie die Behandlung von Operationscharakteristiken können als erweiternde Aufgabenstellung interpretiert werden.

Kapitel 12
Für Testsituationen, die mit den zur Verfügung gestellten Tabellen zur Binomialverteilung nicht bearbeitet werden [illegible]nnen, kommt für näherungsweise zu bestimmende Lö[illegible] die Normalverteilung zum Tragen. Dazu werden [illegible] Normierungsverfahren selbst und anschlie[illegible] [illegible]on weiteren grundlegenden Testsitua[illegible] [illegible] der Tabelle zur Normalverteilung era[illegible] [illegible]emen, wie die Bestimmung des Stichprob[illegible] gegebenen Fehlern oder die Betrachtung [illegible]ervallen haben hier eine vertiefende bzw. [illegible]ktion.

Dank

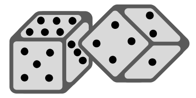
Für Anregungen zur inh[illegible] formalen Gestaltung danke ich meinem M[illegible] Gerold Pirkl, meiner langjährigen Freundin u[illegible] Oberstudienrätin Renate Benz-Heinbücher un[illegible] Dr. Torsten-Karl Strempel von der Hochschule [illegible]

Kapitel 1: Grundbegriffe

Aufgabe 1.1

Lesen Sie den folgenden Text und formulieren bzw. veranschaulich[illegible] Sie [illegible]emein wie möglich, was man unter den aufgeführten Fachbegriffen versteht.

Wie in jedem anderen Gebiet der Mathematik, hat m[illegible] sich [illegible] de[illegible] Stochastik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Verwendung e[illegible] Begriffe geeinigt. Im Folgenden werden grundlegende Fachbegriffe am Beispiel des Würfelns e[illegible]rt.



Wirft man einen Würfel, [illegible] weiß man zwar, dass die Zahlen 1 bis 6 fallen können, da man jedoch nicht vorhers[illegible]n kann, welche dieser Zahlen fällt, spricht man von einem **Zufallsversuch**.

Fällt beim Würfeln zufällig die[illegible] bezeichnet man das als **Ergebnis** des Zufallsversuchs, die Menge aller Ergebnisse, hier also die [illegible] wird im Allgemeinen als **Ergebnismenge** S bezeichnet.

Ist es beim Würfeln jedoch [illegible]spiel[illegible] wichtig, dass die geworfene Zahl eine gerade Zahl ist, dann spricht man nicht [illegible] von [illegible] Ergebnis des Zufallsversuchs, sondern man sagt, dass das **Ereignis** „gerade Zahl“ eingetreten ist, [illegible] eine der Zahlen der Menge A = {2, 4, 6} fällt. Das **Ereignis** ist nicht eingetroffen, [illegible] ein[illegible] ungeraden Zahl aus der Menge B = {1, 3, 5} gefallen ist. Alle Teilmengen der Ergebnismenge S, wie die Mengen A und B sowie beispielsweise auch die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen [illegible] = {3, 6} werden als **Ereignisse** bezeichnet.

W[illegible] sich [illegible]ignisse, wie die geraden Zahlen der Menge A und die ungeraden Zahlen der Menge B, gegenseitig ausschließen, jedoch gemeinsam die gesamte Ergebnismenge S bilden, so bezeichnet man A und B bzw. B und A als **Ereignis** und **Gegenereignis**. Man verwendet in diesem Fall [illegible]eibweise Ereignis [illegible] und Gegenereignis $\overline{A}$ bzw. Ereignis B und Gegenereignis $\overline{B}$.

Zufallsexperiment: ______________________

Ergeb[illegible] ______________________

[illegible]gebnismenge S: ______________________

Ereignis E[illegible] ______________________

[illegible]nis $\overline{E}$: ______________________

Gegenereignis zu A (Au[illegible] {Augenzahl ____________}

Aufgabe 1.2

Der Begriff Wahrscheinlichkeit

Bearbeiten Sie die Aufgaben mithilfe der folgenden Definition und Angab… …reibweise und zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten.

Definition Laplace-Versuch

Wenn man mit einem idealen Würfel spielt, weiß i… …ass …ahrscheinlichkeit… …u würfeln genauso groß ist wie beispielsweise für eine 4 … jedes ande… …gebnis der … …smenge, d.h. jedes Ergebnis hat die gleiche Wahrscheinlichk… Die Wah… …chkeiten … …man hier aus der Geometrie des Würfels erschließen. Man bezei… …t Zufal… …rsuche, bei … diese M… …ale zutreffen als **Laplace-Versuche**.

Schreibweise für Wahrsche…

- Kleines **p** für di… …nlichkei… ein **Erg**…
- Die Wahr… …lich… …r ein …**eignis** … …ie für das Beis… „Würfeln einer geraden Zahl" in der… …ade… …, durch ein … P mit einer … …enden Information, um welches Ereig… …es sic… …delt, …argestellt w… …den.

Berech… vo… …einlichkeiten

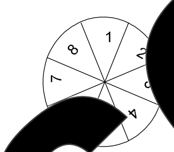
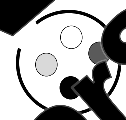
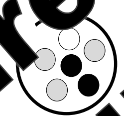
Be… …r Wahrscheinlic… **p** eines … …sses bei … Laplace-Ve…such: $p = \frac{1}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$

Berechnen der Wahrscheinlichkeit **P(E)** eines **Ereignisses** bei einem Laplace-Versuch: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten für E}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$

Berechnen vo… eines Erei… …n A Geo…

…em bisher betrachteten Würfeln gibt es eine Reihe ande… …he, die einem Laplace-…uch zugeordnet werden können. Geben Sie jeweils an, ob es s… …place-Versuch …andelt, und ermitteln Sie, wenn möglich, die gesuchten Wahrscheinl… …s Ergebnis p des Zufallsversuchs und die W… …keit P(E) für das jeweils angege…

	Laplace-Versuch	Wahrscheinlichke… für ein Ergebnis p	…heinlichkeit …reignis P(E)
Id… e… 	ja ❍ nein ❍	p =	…

Zufallsversuch	Laplace-Versuch	Wahrscheinlic… für ein Ergebnis…	Wa… …einlichkeit für da… …reignis P(E)
Roulette einmal drehen (37 Felder)	ja ❍ nein ❍	p =	P(rot) =
Eine Karte aus einem Skatspiel ziehen (32 Karten)	ja ❍ nein ❍		P(Bube) =
Glücksrad mit gleichen Sektoren einmal drehen 	…a ❍ …in ❍	p…	P(teil… …r durch 3) =
Glücksrad mit ungleichen Sektoren einmal dr… 	…a ❍ nein ❍		P(Zahl > 4) =
Ziehen … Kuge… eine… …ter… sch… …chen …n 	ja ❍ nein ❍	p…	P(schwarz) =
…ehe… …el aus …er Ur… …teilweise g… …hen Kugeln 	ja ❍ …ein ❍	p =	P(schwarz) =

Weit… Laplace-Ver…che: ____________________________

Aufgabe 1.3

Wertebereich bei Wahr…

Ermit… …den Wahrscheinlichkeiten, geben Sie die W… …digen Sie die Merksätze:

…ahl 1 fällt) = ——

…hlen 1 oder 2 fällt) = ——

…) P(eine der Zahlen 1 bis 3 fällt) = ——

d) P(e… …bis 4 fällt) = ——

e) P(eine der Zahlen 1 bis 5 fällt) = ——

f) P(eine de… …6 fällt) = —— =

g) P(keine Z… (un…

(sicheres Ere…

…achtungen beim Würfeln kann man schließen:

…ößte Wert, den die Wahrscheinlichkeit für e… …gnis E annehme… P(E) = _____

…kleinste Wert, den die Wahrscheinlic… …gnis E annehme… P(E) = _____

Für den Wert der Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses g

$\_\_\_ \leq P(E) \leq \_\_\_\_$

Beim Würfeln sind die Ereignisse E: „die geworfene Zahl ist durch … bar" … $\overline{E}$: „die geworfene Zahl ist nicht durch 3 teilbar" Ereignis und Gegenereignis.

Begründen Sie mit diesem Beispiel, dass gilt: P(…) = 1

Bei eine… iment ist die Summe aus dem Ereignis E und dem Gegenereignis $\overline{E}$ immer 1.

…(E) + $P(\overline{E}) = 1$

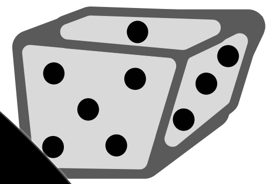
…chtig für viele Anwen… ist dieser Zusammenhang in der Form:

P(E) = … (Ē)

Aufgabe 1.4

Die empirische Wahr… …setz der großen Zahlen

Die … …ie, … …en ausgehen kann, d… …er …keit $p = \frac{1}{6}$ fällt.



Da hier kei… die Wahrscheinlichkeit, mit der eine … Augenzahl angezei… …igen Flächen nicht bestimmt werden k… …ur die Möglic… …scheinlichkeit … das Fallen einer bestimmten Augenzahl … Würfeln empi… …eln.

Ei… …t idealer Würfel wurde in 17 voneinander u… …igen Zufallsvers… u… … oft, geworfen. Das entstandene Zahlen… …d in den Tabellen … gestellt u… … von Excel als Diagramm ausgewer…

a) Erläutern Sie anhand der Tabellen, was man bei einem Zufallsversuch u… der abs… …en Häufigkeit H(i) und der relativen Häufigkeit h(i) versteht, und geben Sie die Formel an, … der … …lativen Häufigkeiten h(i) berechnet werden. Bezeichnungen: Nummer d… …fallsve… Anzahl der Würfe: n

Tabelle absolute Häufigkeiten H(i)

Nr	n	H(1)	H(2)	H(3)	H(4)	H(5)	H(6)
1	10	2	0	2	0	5	1
2	20	0	4	3	1	7	3
3	30	4	6	4	2	10	4
4	40	7	7	6	4	10	6
5	50	8	9	6	4	14	[illegible]
6	60	10	12	8	5	14	[illegible]
7	70	10	14	10	6	[illegible]	13
8	80	12	17	10	8	[illegible]	14
9	90	13	17	12	[illegible]	24	[illegible]
10	100	14	18	14	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	200	26	33	[illegible]	20	[illegible]	35
12	300	37	47	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	400	46	[illegible]	97	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	500	57	[illegible]	[illegible]	[illegible]	103	75
15	600	67	95	[illegible]	[illegible]	[illegible]	85
16	[illegible]	[illegible]	105	[illegible]	67	144	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	160	[illegible]

Ta… relat… …ten h(i)

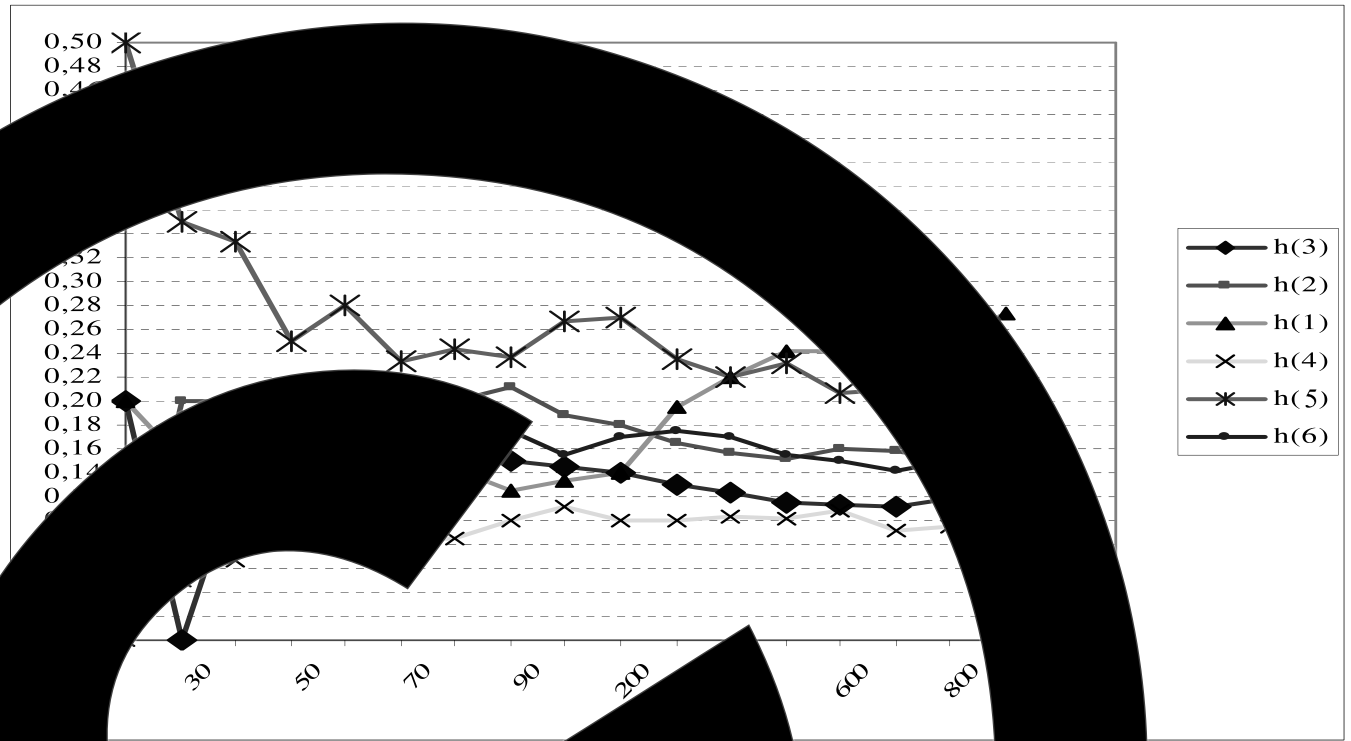
Nr	n	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,20	0,00	0,50	0,10
[illegible]	20	[illegible]	0,20	[illegible]	[illegible]	0,35	0,15
[illegible]	30	0,13	0,20	[illegible]	[illegible]	0,33	0,13
[illegible]	[illegible]	0,18	[illegible]	[illegible]	0,10	0,25	0,15
5	[illegible]	0,16	[illegible]	0,12	0,08	0,28	0,18
6	60	[illegible]	[illegible]	0,13	[illegible]	[illegible]	0,18
7	70	[illegible]	0,20	0,14	[illegible]	0,24	0,19
8	[illegible]	[illegible]	0,21	0,13	[illegible]	0,24	0,18
9	[illegible]	[illegible]	0,19	[illegible]	0,11	0,27	0,16
10	[illegible]	0,14	[illegible]	[illegible]	0,10	0,27	0,17
[illegible]	200	0,13	[illegible]	[illegible]	0,10	0,24	0,18
[illegible]	300	0,12	[illegible]	0,22	0,10	0,22	0,17
[illegible]	400	[illegible]	[illegible]	0,24	0,10	0,23	0,16
14	500	[illegible]	0,16	0,24	0,11	0,21	0,15
15	[illegible]	[illegible]	0,16	0,25	0,09	0,21	0,14
[illegible]	[illegible]	0,12	0,15	0,25	0,10	0,21	0,15
[illegible]	[illegible]	0,11	0,14	0,27	0,10	0,20	0,14

…so… …äufi…eit: ____________________

…ive Häufigkeit: ____________________

Formel: h(i) = …

b) Erläutern Sie die Bedeutung des Diagramms.



c) Beurteilen Sie, ob die 800 Würfe ausreichen, um eine Aussage zur Wahrschein… …it mac… zu können, mit der die Flächen 1 bis 6 bei dem vorliegenden nicht idealen …ürfel ang… …en. Erläutern Sie dabei auch, wie man an einem Diagramm für die relativ… …keiten… …en könnte, ob man von der Wahrscheinlichkeit, für das Auftreten des Erei… …se… …rechen kann.

____

____

____

____

____

____

____

Das Gesetz … gr… Zah…

Wenn … fü… …fgabe 1… …) die richtige … ermittelt … ist Ihnen sicherlich aufgefallen, dass die Berech… …g d… …lativ… …äufigkeit h(E) … ein Ere… E der Definition der Wahrscheinlichkeit sehr ähnlich … Für e… … große … von Du… …ungen des Zufallsversuchs nehmen die …rank… …en der Werte für die …lative Häufig… ab. Wenn sich der Wert stabilisiert, kann man den fü… … Häufigkeit h(E) … ermittelten Wert … Wahrscheinlichkeit P(E) annehmen. Man spricht dann von ei… …rischen W…rscheinlichkeit … es gilt:

$$h(E) = \frac{\text{absolute Häufigkeit des Ereignisses E}}{\text{Anzahl aller Zufallsversuche n}}$$

h(E) … H(…

… von n gilt: $P(E) \cong h(E)$

Ergä… …gen: ____

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert …le…en

Kapit…

Baumdiagramme u…
…ige Zufallsversu…

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich ... rteilung

... othesentests

Gesa ... elbstorganisiert erlernen (Beste ... 278)
S

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

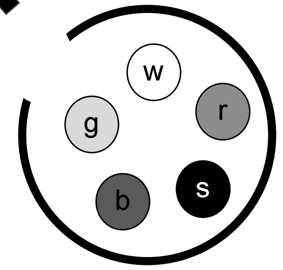
Kapitel 2: Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden Zufallsversuche untersu ... ei dene ... pielsweise nur die Wahrscheinlichkeit ermittelt hat, wenn ein Würfel einmal ge ... rd ode ... einzige Kugel aus einer Urne gezogen wurde. Man bezeichnet diese Zufallsversu ... als ... **fige Versuche**.

Zufallsversuche können jedoch auch mehrmals durchgefüh ... den, ... aus mehreren Stufen bestehen. Man bezeichnet diese Zufallsversuche al ... **ehrst** ... Vers ... e Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist dann die Verwendung von ... n hilfreich. A ... auend auf den Kenntnissen zu Baumdiagrammen, die Sie be ... s in d ... kunda ... fe I erwor ... ben, werden hier die grundlegenden Regeln wiederholt und ...

Dazu wird zunächst ein einfacher Zufallsv ... uch zug ... de gelegt, bei d ... aus einer U ... zwei Kugeln gezogen werden. Es wird dabei u ... schie ... ob ei ... gezoge ... vor dem n ... n Ziehen zurückgelegt wird oder nicht. M ... spricht da ... en m ... ohne Zurückleg ...

In der rechts abge ... ten ... e be ... sich jewe ... e weiße, eine schwarze, eine ro ... ne ... und eine grüne Kugel. Es sollen zwei Kugeln gezogen werden.



A ... gab ... 1

Au ... er Urne ... beim ers ... ug die blau ... gel gezogen. Geben Sie den Inhalt der Urne beim zwe ... Ziehen an, wenn ...

a) ... urücklegen gezogen wird: ____________________

b) ohne Zurücklegen gezogen wird: ____________________

c) Vervollständigen Sie:

Beim Zieh ... er Inhalt der Urne nicht. Daher ergeben sich bei beiden ... einlichkeit, eine Kugel in einer jeweiligen ...

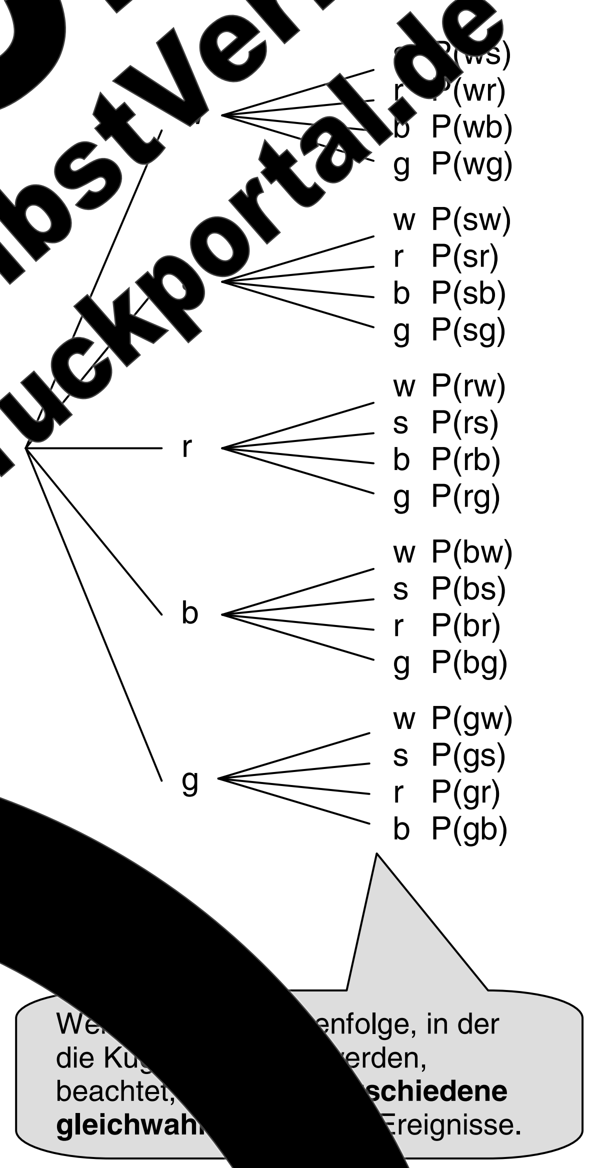
... Ziehen ohne Zurücklegen verändert sich der ... her ergeben sich bei der ersten und bei der zweiten Ziehung ____________________ die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel in der jeweiligen Farbe zu ziehen.

Aufga ...

A ... Seite sin ... ollständigen Baumdiagramme mit allen ... beim Ziehen von ... it und ohne Zurücklegen aus der oben abgebildeten Urne an ... e ... lichkeit für eine Kombination xy aus zwei gezogenen Kugeln wir ... ngegeben, ... mer die zuerst gezogene Kugel und y immer ... zweite gezogene ... t. D.h., wenn ... und dann schwarz gezogen wird gilt: P(r ... tlichen Sie sich ... agramm und die ... iede hinsichtlich der Ziehungen mit u ... legen.

Abb. 2.1 Baumdiagramm für Ziehen mit Zurücklegen

Abb. 2.2 Baumdiagramm ... Ziehen ... Zurückl...



Wendet ... nung von Wahrscheinlichkeiten an, erg... r die Wahr... eine bestimmte Kugelkombination xy zu ziehen, folgende We...

... rücklegen: $P(xy) = \frac{1}{\_\_\_} = 0,\_\_\_$

... e Zurücklegen: $P(xy) = \frac{1}{\_\_\_} = 0,\_$

Aufgabe 2.3

Einfache Additionsregel

Mithilfe der ausführlichen Baumdiagramme und der Kenntnis, dass ... kombination xy beim Ziehen mit Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{25} = 0,$... nd bei ... ne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{20} = 0,05$ hat, sollen nun R... n fü... ngab... mit Baumdiagrammen erarbeitet werden. Übertragen Sie die Vorgeh... weis... Beispi... 1 und 2 au... ufgabenstellung, und ergänzen Sie dann den Text für die **Pf... tionsr...**

Beispiel 1

Bestimmung der Wahrscheinlich... s E... nter den ... gezogenen ... n befindet sich mindestens eine rote Kugel", a... abgekürzt ... durch A... hlen im Baumdiagramm.

Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Aus dem Baumd... amm ... nn ma... rch Abzählen entnehm... von 25 Möglichkei... gibt, ... stens ... e rote Kug... erhalte... gibt	... s dem Bau... iagramm kann man durch Abzählen ... men, dass es 8 von 20 Möglichk... n gibt, eine rote Kugel zu erhalten. Dam... ibt sich:
... mit ... = P(wr) ... (sr) + P(rw) + ... rs) + P(rr) + P(r... P(rg) + P(b... P(gr) $= \ldots \frac{1}{25} = \frac{9}{25} = 0,36$	... mit rot) = P(wr) + P(sr) + P(rw) + P(rs) + P(rb) + P(rg) + P(br) + P(gr) $= 8 \cdot \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$

Beispiel 2

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „Es werden beim zweimaligen Ziehen zwei gleichfarbige Kugeln gezogen ..."

Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Durch Ab... ... (gg) $= 5 \cdot \frac{1}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,2$	Durch Abzählen ergibt sich: ... leiche) = 0 (unmögliches Ereignis)

Aufgabenstellung

Zeigen Sie analog zu ... Beispielen, dass sich für die Wa... ten die Werte 0,48 und 0,6 ergeben, w... Unter den zwei gezogenen ... t sich genau eine bunte Kug... rote oder eine blaue Kugel.

Zieh...	Ziehen ohne Zurück...
... bunte) =	P(genau eine bunte) ...

Ergänzen Sie anhand der Erkenntnisse aus den Beispielen und der Aufgabe de… für die …ende Regel:

Einfache Additionsregel

Besteht ein Ereignis E aus mehreren einzelnen disjunkten* …eignis…, mit E={e_1, e_2, e_3, ... },

dann kann die Wahrscheinlichkeit P(E) ______________ der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereig… e_i be…net werd…

P(E) = P(e… …(e_2) + P(e…

*die einzelnen Ereignisse e_i haben nur unterschi…he Ele…nte

Aufgabe 2.4

Reduzierte Baumdiagra… …n Zieh… …Zurückl…

Das Zeichnen eines volls… … mit allen E…nissen und E…issen, wie in den Abbildungen 2.1 …2.2, e… …t oft umfangreiche …umdiagramme, … denen das Heraussuchen bzw. Abzählen der … …abe…llung günstigen Ereignisse aufw…ig ist. Es sollen daher nun effektivere M…oden …s A…iten mit Baumdiagrammen …ickelt werden. Als Beispiel dient das schon … A…be 2.3 …spiel 1 bekan… …eignis: „Ma… …ält beim zweimaligen Ziehen mindestens eine ro… …ug… …so k… P(mit rot).

Be… …e dazu zunächs… …ch einmal mi… …oben verwendeten Abzählmethode anhand des umfan… …Baumes … Abb. 2.1 für da… …hen mit Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden …reignisse. Geb… Sie das E…nis jeweils als Bruch an.

Abkürzung für rotgezogen: r und Abk…zung für das Gegenereignis nicht rot gezogen: $\bar{r}$

– Beide Kugeln sind rot P(rr): P(rr) = ___

– Die erste K…

– …

– … …gel ist rot P($\bar{r}\,\bar{r}$): P($\bar{r}\,\bar{r}$) = ___

…e Wahrscheinlichkeiten für die vier Ereignisse sollen nun auf einem … …it einem reduzierten Baumdiagramm… … …r noch die für die Aufgabenstellu… …Ergebnisse rot r und nicht rot $\bar{r}$ ers…

Anstatt jede… …Ziehung zu zeichnen, fasst man me… …usammen. Somit füh… …u einem Ergebnis, sondern auch zu ei… …s.

Das W… … Ästen berücksichtigt man dann, indem man an einen Ast die … …lichkeit für das … …de Ereignis bei der Ziehung, hier die Wahrsch…nlichkeiten für $\bar{r}$ … …ibt.

Fi… …nung der Wahrscheinlichkeiten des hier … Ereignisses P(m… …sich das fo… …ndiagramm an. Ergänzen Sie die feh… … bei den Wahrsc… …en.

In beiden Stufen des Zufallsversuchs wird nun nur noch zwischen den Ereignissen rot und nicht rot unterschieden.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereig…e P(rr), P($r\bar{r}$), P($\bar{r}$r) und P(… …lt man, … man die Wahrscheinlichke… … …Ereignisse r bzw. $\bar{r}$ entlang d… …zugeh… … …der Stufen, d.h. entla… …es **P**… miteinander multipliziert.

$P(rr) = \frac{1}{25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

$P(r\bar{r}) = \frac{4}{25} = \ldots \cdot \frac{4}{5}$

$P(\bar{r}r) = \frac{4}{25} = \frac{\ }{5} \cdot \frac{\ }{5}$

$P(\bar{r}\bar{r}) = \frac{16}{25} = \frac{\ }{5} \cdot \frac{\ }{5}$

Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen ist in beiden Stufen $\frac{1}{5}$ und kein… rote Kugel zu… ziehen in beid… Stufen $\frac{4}{…}$

Die Summe … Wahrsche…lichkeiten an den Äs… …r Verzweigung ist i…er 1.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aller Pfade hier also P(rr) + P($r\bar{r}$) + P($\bar{r}$r) + P($\bar{r}\bar{r}$) ist immer 1.

Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis P(mit rot):

Weg 1: … $\frac{4}{\ }$ … $\frac{9}{\ }$

…mit rot) = $1 - P(\bar{r}\bar{r}) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

Erläutern Sie, welche Regeln für die Berechnung von P(mit rot) … …Wegen verwendet wurden:

____

____

____

____

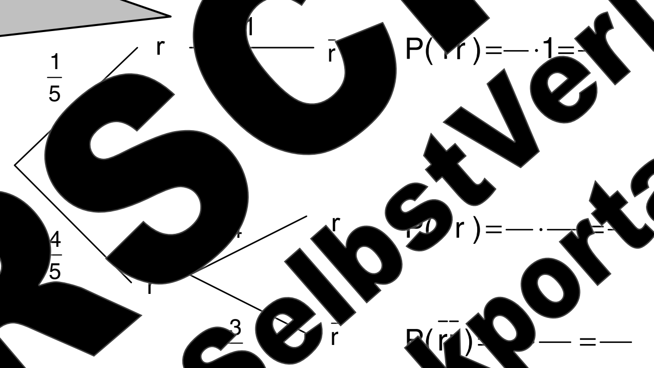
____

Aufgabe 2.5

Reduzierte Baumdiagramme beim Ziehen ohne Zurücklegen

Beim Ziehen ohne Zurücklegen ergibt sich für das Ereignis E: „Man erhä... maligen Ziehen mindestens eine rote Kugel“, das folgende reduzierte Baumdiagra...m.

Da nach dem ersten Ziehen keine rote Kugel mehr vorhanden ist, fehlt der Ast rot in der zweiten Stufe des Baums und es gilt: P(rr) = 0. Nicht rot zu ziehen ist damit das sichere Ereignis.



a) Beg... den ... sich die W...hrscheinlichk...en an den Ästen der zweiten Stufe des Baum...gramms von den Wa...scheinlichkeit... ...ersten Stufe unterscheiden.

b) Zeigen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten in jeder Verzweigung den Wert 1 annimmt.

c) ... Rechnung, dass sich für die Wa... einzelnen Pfade die Werte ... 5 5 und $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ ergeben, und tragen Sie die Werte ... Stellen in der Abbildung ...en ein.

d) Erläutern Sie dur... g, wie man aus den Wahrs... n der einzelnen Ereignisse a... einlichkeit des Ereignisses P(... erhält.

Aufgabe 2.6

Pfadmultiplikationsregel

Ergänzen Sie den folgenden Satz anhand der Betrachtungen von A... be... einer gültigen Regel:

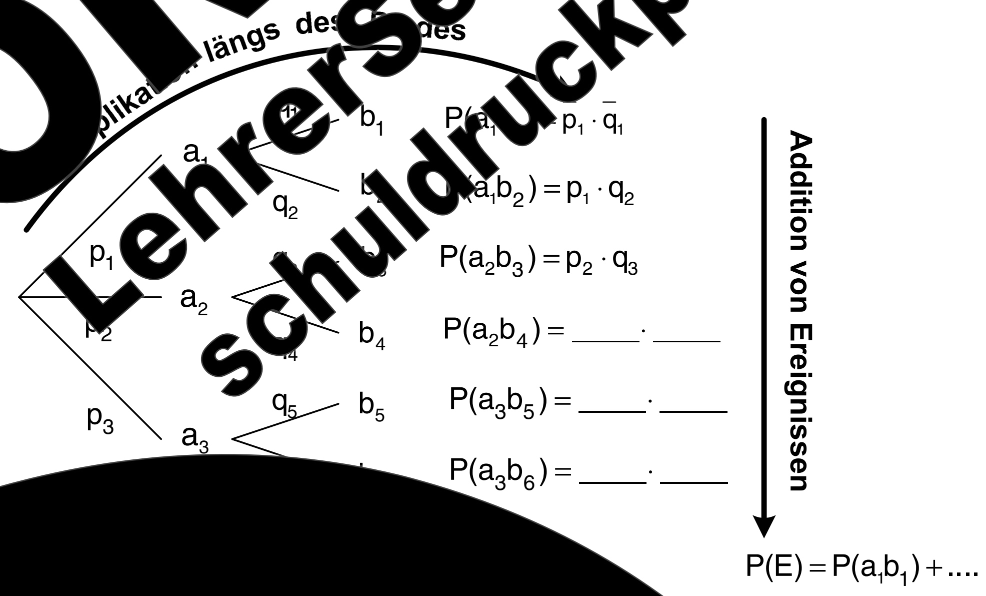
Pfadmultipli...tions...

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei einem ... ge... allsexperim... berechnet man durch ______________________ der ... ahrsch... hkeiten län... ...fades, der zu dem gesuchten Ereignis führt.

Aufgabe 2.7

Zusammenfassung A... n mit Baum...grammen

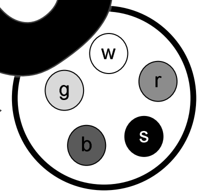
Ergänzen Sie an... des ...ebildeten Baumdia... es die folg...en Texte:



- Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $P(a_ib_j)$ werden ... tion der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang eines ________________ berechnet.
- Die Wah... sses P(E), das sich aus Ereig...) bilden lässt, wird du... zu E passenden Wahrscheinlichke... erechnet.
- ... aller Wahrsc... ichkeiten an den Ästen einer Verzweigun... ______ .
- ... mme aller Ereignisse $P(a_ib_j)$ ist immer ______

Aufgabe 2.7

Bestimmen anhand der bereits bekannten Urne (s. rechts) für das Ziehen mit und ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, mindestens eine bunte Kugel zu erhalten, indem Sie Ihre Kenntnisse über reduzierte Baumdiagramme, Pfadmultiplikationsregel und einfache Additionsregel anwenden. Ergänzen Sie die Angaben im Baumdiagramm, und vergleichen Sie Ihre Endergebnisse mit Aufgabe 2.3.



.

Verwendete Abkürzungen: bunt b und nicht bunt

Ziehen mit Zurücklegen:

P(bb) = ___ = ___

P(____) = — · — = —

P(____) = — · — = —

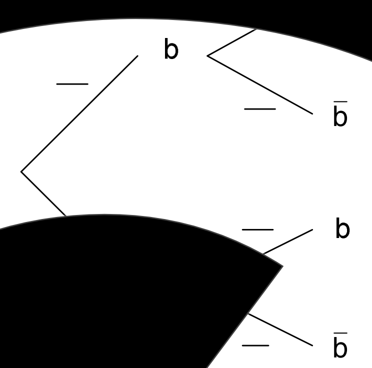
P(____) = — · — = —

Wege für die Berechnung von P(E):

Weg 1: P(E) = P(bb) + P(b$\bar{b}$) + P($\bar{b}$b) = _____ + _____ + ______ = _____

Weg 2: P(E) = 1 – P($\bar{E}$) = 1 – P($\bar{b}\bar{b}$) = 1 – ____ = _____

Ziehen ohne Zurücklegen:



— = —

P(____) = — · —

P(_____) = — · —

P(_____) = — · — = —

Zwei Wege für die Berechnung von P(E):

Weg 1: P(E) = P(____) + P(____) + P(____) = _____ + _____ + ______ = _____

Weg 2: P(E) = 1 – ______ = 1 – _____ = _____

Aufgabe 2.8

Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der Baumdiagramme, und bestätigen Sie durch Rechnung die angegebenen Ergebnisse.

a) Aus der bereits bekannten Urne soll so lange ohne Zurücklegen gezogen werden, bis die schwarze Kugel gezogen wird. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen des zughörigen Baumdiagramms und bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeit aller angegebenen Ereignisse.

Im ersten Zug schwarz: P(s) = ______________________ = 0,2

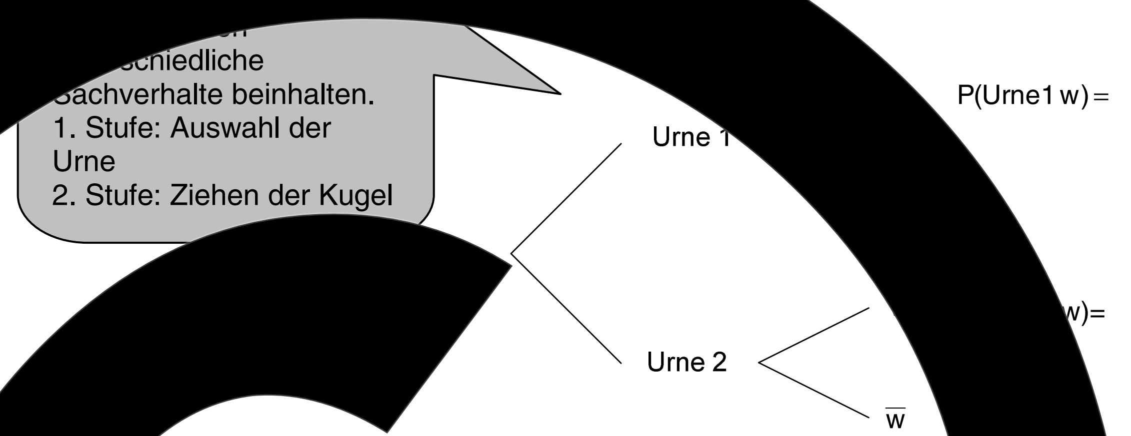
Im zweiten Zug schwarz: P($\bar{s}$s) = ______________________ = 0,2

Im dritten Zug schwarz: P($\bar{s}\bar{s}$s) = ______________________ = 0,2

Im vierten Zug schwarz: P($\bar{s}\bar{s}\bar{s}$s) = ______________________ = 0,2

Im fünften Zug schwarz: P($\bar{s}\bar{s}\bar{s}\bar{s}$s) = ______________________ = 0,2

b) Zusätzlich zur ersten Urne gibt es eine zweite Urne, in der eine weiße und eine schwarze Kugel liegt. Es wird zuerst eine der beiden Urnen ausgewählt und dann aus dieser ausgewählten Urne eine Kugel entnommen. Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugeln zu ziehen, 35% beträgt. Ergänzen Sie dazu ... des zughörigen Baumdiagramms die fehlenden Wahrs...



______________________ = 0,35

...nde Übungen: ______________________

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert lernen

Kapite

Vierfeldertafel

02-032-278

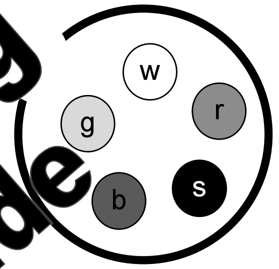
Gesa[...]elbstorganisiert erlernen (Beste[...]278)
S[...]
[...]orbehalten. A[ll ri]ghts reserved.
[...]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[...] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[Lehrer]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[any)]
[www.]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

Kapitel 3: Vierfeldertafel

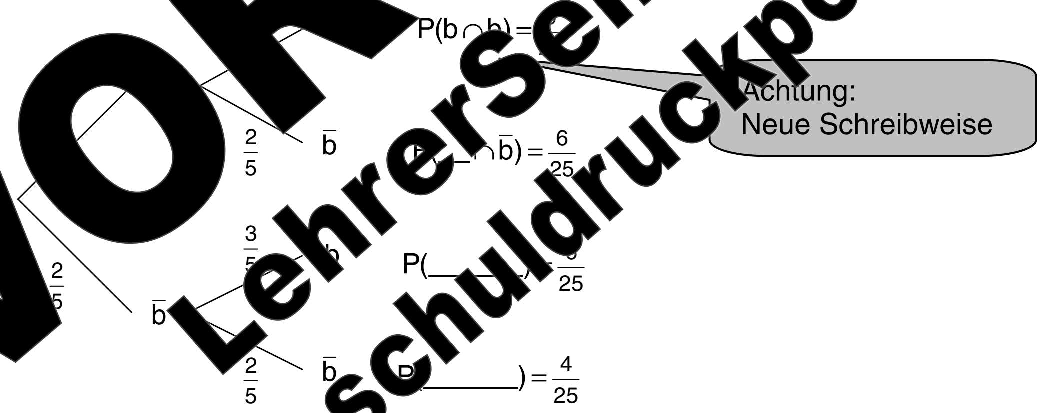
Als Alternative zu Baumdiagrammen kann man bei geeigneten Zuf[allsv]ersuche[n das Bau]mdiagramm durch eine sogenannte **Vierfeldertafel** ersetzen. Die Verwendung [der Vierfe]ldertaf[el i]st bei der Behandlung von bedingten Wahrscheinlichkeiten (s. Kapitel 5) sehr [hilfr]eic[h].

Aufgabe 3.1

a) Struktur der Vierfeldertafel bei stochastisch [unab]hä[ngigen] Zufallsversuchen, wie beim Ziehen mit Zurückl[egen]



Aus der durch Kapitel 2 bekannten Urn[e sollen] zwei K[ugel]n mit Zurückleg[en] gezogen werden und das Ereignis „Es [wir]d mindestens [eine] bunte Kug[el] gezogen“ erneut betrachtet werden. D[as zu]gehörig[e] Baumdiagramm haben Sie bereits in Aufgabe 2.7 erst[ellt]. Die S[chre]ibwei[se f]ür die Er[eig]nisse soll allerdings auf eine etwas ve[rall]gemeinerte [Weise er]weitert [w]erden.
Wenn das Ereignis „Zwei b[un]te K[ugeln] gezogen“ eintritt, [is]t ja b[un]t **und** bu[nt] gezogen worden. Das wird [in der] S[chr]eibweise $b \cap b$ g[eke]nnzeichne[t], wobei das Zeichen [...]d“ bedeutet. [Er]gänzen Sie [die fehle]nde Angabe[n] bei den angegebenen E[rei]gniss[en].



Die folgende Abbildung zeigt eine Vierfeldertafel für diese Aufgabenstellung. Verdeutlichen Sie sich, dass die Wahrscheinlichkeiten, welche man an die Äste des Baumdiagramms schreibt, in den hellgrauen **äuß[eren]** [...]rtafel erscheinen und die Wahrscheinlichkeiten für die Ereigni[sse ...] eingetragen werden.

		[...]hung	
[b erste] Ziehung	$\frac{9}{25}$		$\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$
$\bar{b}$ erste Ziehung	$\frac{6}{25}$	[...]	$\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$
	$\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$	$\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$	

Verde[utlichen Sie sich die] folgenden Zusammenhänge be[i der Vierfeld]ertafel:

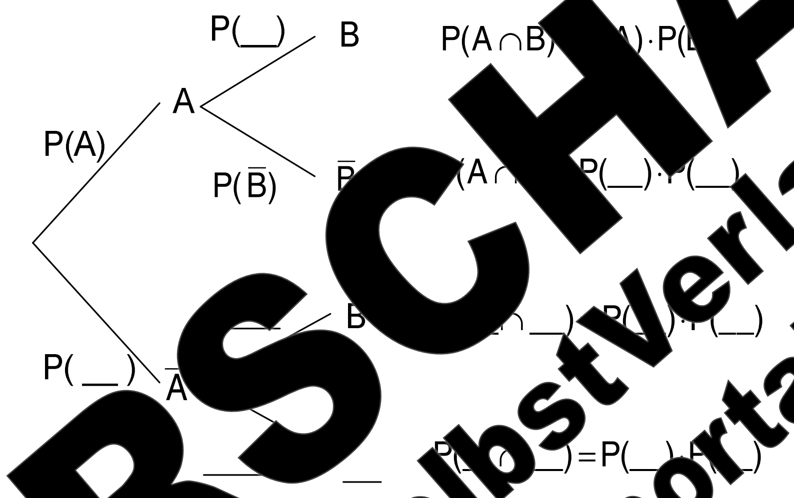
[...]e Summe zweier Werte in den inneren [Feldern ergi]bt immer den Wert [der ent]sprechenden [Ze]ile bzw. Spalte in den äußeren Feldern.

[...]Summe der Werte in der äußeren Zeile bzw. Spalte ergeben imm[er ...]

[...]e inneren Werte lassen sich durch Multipli[kation de]r beiden Werte [der äußeren] Felder in der [gl]eichen Zeile und Spalte ermitteln. Dies[e Eigenschaf]t ist allerdings n[ur gegeben, we]nn ein [Z]ufallsversuch vorliegt, bei dem die b[eiden] Zufallsversuch[e ...]**abhängig**, man [s]agt **stochastisch unabhängig,** vone[inander sind. Di]es ist beim Zieh[en mit Zurü]cklegen erfüllt.

Aufgabe 3.2

a) Ergänzen Sie im folgenden Überblick für den Zusammenhang von Bau[redacted]diagramm[redacted]Vi[redacted]dertafel bei einem **stochastisch unabhängigen** Zufallsversuch die fehlende[redacted]



	B	$\overline{B}$	
[redacted]	P(A∩B) =P(A)·P(B)	[redacted]__) =P(__)·P(__)	P(__)
[redacted]	[redacted]__∩__) =P(__)·P(__)	$(\overline{A}\cap\overline{B})$ $=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
	P(B)	P(__)	

b) Strukt[redacted]Zufallsversuchen, wie beim Ziehen ohne Zu[redacted]

[redacted] Aufgabe a) wird nun [redacted]zogenen Kugel betrachtet. Auch [redacted]gabenstellung haben Sie bereits in Aufg[redacted] Baumdiagramm erstellt.

[redacted]änzen Sie die fehlenden Angaben, und [redacted]läutern Sie, woran man im Baumdiagramm erkennt, dass ein Zufallsversuch ohne Zurücklegen erfolgt ist[redacted]

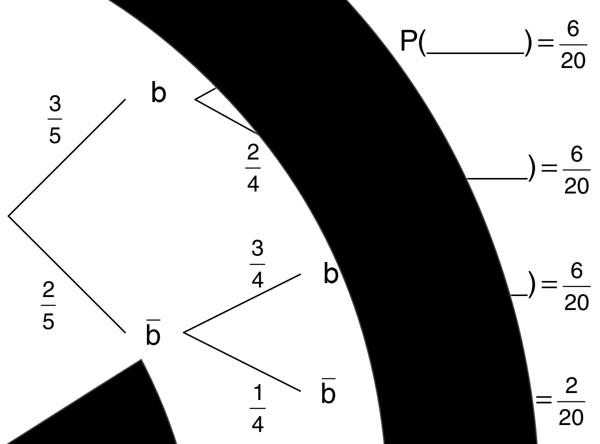
____

____

____

____

____



Vierfeldertafel:

Da beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten der[redacted]iten Stu[redacted]es von dem Ausgang der Ziehung in der ersten Stufe abhängen, bezeichnet[redacted]llsver[redacted] mit dieser Eigenschaft als **abhängige** bzw. **stochastisch abhängige** Zufa[redacted]rsu[redacted]erdeutlichen Sie sich die Auswirkungen der Abhängigkeit auf die Zusammen[redacted]e bei [redacted]fel:

	b zweite Ziehung	[redacted]weit[redacted]ng	
b erste Ziehung	$\frac{6}{20}$	[redacted]20	$\frac{12}{20}=$ 3[redacted]
$\overline{b}$ erste Ziehung	6[redacted]2	[redacted]20	[redacted]20 = [redacted]/5
	[redacted]12/20 = [redacted]5	8/20 = 2[redacted]	1

- Die vertikale und[redacted]rizon[redacted] Summ[redacted] der Wahrsc[redacted]inlichkeiten i[redacted]nneren Feldern ergibt immer den W[redacted] entsp[redacted]en Zeil[redacted]. [redacted]palte in de[redacted]äußeren Feldern.
- Die Summe[redacted]r äußeren Z[redacted]zw. Spalte [redacted]en immer _____
- [redacted]hein[redacted]eiten für die [redacted] Stufe des Bau[redacted]erden an den entsprechenden Stellen [redacted]äuße[redacted]Felde[redacted]ngegeben.
- [redacted]Wahrs[redacted]inlichkeiten f[redacted]e zweite[redacted]e des Baumes kann man der Vierfeldertafel nicht di[redacted]en zug[redacted] äußeren F[redacted] entnehmen.
- Die Wahrschein[redacted]eiten der in[redacted]Felder lassen sich **nicht** durch Multiplikation der beiden [redacted]ugehörige[redacted] Werte der äuße[redacted] Felder in der gleichen Zeile und Spalte ermitteln.

Aufgabe 3.3

In einer Vierfeld[redacted]heinlichkeiten für einen stochastisch unabhängigen und einen st[redacted]ragen. Fassen Sie die Gemeinsamkeiten und Un[redacted] Sie die folgenden Texte ergänzen:

[redacted]hen die in den äußeren Feldern [redacted]gebenen Wahrscheinlichkeiten den Werte[redacted]lichkeiten an den Ästen der _______________ und _______________ Stufe eine[redacted]aumdiagramms, während bei einem stochastisch abhängigen Zufallsversuch nur die Wa[redacted]n der _____________[redacted] zugehörigen Baumdiagramms[redacted]en Feldern der Vierfel[redacted]

b) [redacted]ngigen und _______________ [redacted]ch kann man die [redacted]einlichkeiten der äußeren Felder durch entsprechende Summe[redacted]s den Werten [redacted]_______________ Feldern ermitteln.

c) Bei einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch kann man die Werte fü[illegible] Wahrs[illegible]lichkeiten der inneren Felder durch entsprechende Multiplikation der W[illegible]eiten [illegible]en _______________________ Feldern ermitteln. Das ist bei einem st[illegible] abhä[illegible]gen Zufallsversuch _________________________________.

d) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten in der Zeile un[illegible] ergeben bei einem ______________________ und einem ______________________ Zufa[illegible]such bei jeder Vierfeldertafel den Wert 1.

e) Die Summe der Werte für die Wa[illegible]nneren Fe[illegible]gibt ____.

Übungen

3.1 Prüfung auf stoc[illegible]hängigkeit bzw. Unabhängigkeit [illegible] der Vierfeldertafel

a) Begrü[illegible]nd einer Re[illegible] dass die [illegible] Vierfeldertafel zu einem sto[illegible]Zufallsvers[illegible]hört.

	Merkmal B	Merkmal $\overline{B}$	
Merkmal A	0,15	0,25	0,4
Merkmal $\overline{A}$	[illegible]	0,45	0,6
	[illegible]	[illegible]	1

____

____

[illegible]de Vierfeldertafel zu einem [illegible]unabhängigen Zufallsversu[illegible]

	Merkmal D	Merkmal $\overline{D}$	
Merkmal C	0,08	0,12	0,2
Merkmal $\overline{C}$	0,32	0,48	0,8
	[illegible]	[illegible]	1

____

____

Ü3.2 Aus einer Urne mit 2 roten und 4 schwarzen Kugeln werden zwei Ku[illegible]gezogen. Die Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen. Erstellen Sie ein Baumdia[illegible]m. Ü[illegible]ragen Sie die Werte für Wahrscheinlichkeiten und Ereignisse an die ent[illegible]enden [illegible] Vierfeldertafel, und prüfen Sie, ob die Regeln für die Addition [illegible]likation bei der Vierfeldertafel erfüllt sind.

Baumdiagramm:

Vierfeldertafel:

[illegible]Regeln für die Addition sind ______________________

[illegible]Die Regeln für die Multiplikation sind ______________________

Ü3.3 Bei einem Glücksspiel gibt es eine Urne mit 2 schwarzen und drei weißen Kugeln. Es soll ermittelt werden, wie die Mischung aus schwarzen und weißen Kugeln bei einer zweiten Urne aussehen muss, damit die Wahrscheinlichkeit zwei schwarze Kugeln zu ziehen bei 10% liegt, wenn aus jeder Urne ein Kugel gezogen wird.

Abkürzungen: S1 schwarze Kugel aus Urne 1, W ... us Urne 1
S2 schwarze Kugel aus Urne 2, W2 ... Kuge... Urne 2

a) Begründen Sie, warum es sich bei dies... Spiel um ein... tochastisch ... hängigen Zufallsversuch handelt, obwohl es sich ... nicht ... einen Versuch „mit Zurücklegen" handelt.

____

____

b) Ermitteln Sie die ... inlich... ller Ereig... mithilfe eine... Baumdiagramms:

Hilfe:
Die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumes lassen sich durch Rückrechnen aus der angegebenen Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zwei schwarze Kugeln" und den Pfadwahrscheinlichkeiten in der ersten Stufe berechnen. Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe und zeigen Sie, dass es in Urne 2 eine schwarze und vier ...iße Kugeln geben muss.

...ernativ zum Baumdiagramm kann die Lösung au... ...feldertafel ermittelt werden. Berechnen Sie die Felder, ohne auf die Ergeb... ...gramm zurückzugreifen, und vergleichen Sie anschließend die We...

	S2		
S1			
			$\frac{3}{5}$
			1

Hilfe:
Da es sich um einen ... unabhängigen Zufallsv... ...elt, kann man die Additions- und ... ...sregel beim Ausfüllen der Vierfe... ...wenden. Beispielsweise kann P(S2) ... ...satz $\frac{2}{5} \cdot P(S2) = \frac{1}{10}$ berechnet w... ...gibt sich ... $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{4}$

Ü3.4 Ein Falschspieler wirft gleichzeitig eine ideale und eine gefälschte Mü... Mit we... Wahrscheinlichkeit zeigt die gefälschte Münze Wappen an, wenn das E... ...is „Be... Münzen zeigen Zahl" eine Wahrscheinlichkeit von 30% hat. Berechne... ...die ge... ...rscheinlichkeit zunächst mit einer Vierfeldertafel, und überprüfen Sie Ihr Erg... ...einem ...ndiagramm.

... einem W...rfelsp... werden ... Würfel geworfen. Ein Spieler verliert, wenn mindestens eine 1 ...llt. Wie muss ... Falschspi... ...inen der beiden Würfel fälschen, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von 75... ...winnen will? Lösen Sie die Aufgabe mithilfe einer Vierfeldertafel und vergleichsweise mit ... Baumdiagramm.

Aufgabe 3.5

Die Vierfeldertafel mit absoluten Werten

Es gibt häufig Aufgabenstellungen, bei denen keine Angaben zu den Wa[…]he[…]eiten eines Merkmals gegeben sind, sondern absolute Zahlen vorgegeben w[…]den. Au[…] in[…] Fall kann man mit Vierfeldertafeln arbeiten.

Zahlenbeispiel:
An einer Schule mit 720 Mädchen und 480 Jungen sind wä[…] einer [...]pewelle 20[…] Schüler und Schülerinnen erkrankt. Die Sekretärin hat 144 Kr[…]ungen[…] Mädchen gezä[…] Fü[…] eine Statistik soll untersucht werden, ob die Grippeerkrankun[…] om Geschlec[…] hängt und [...] stochastisch abhängig ist.

Abkürzungen für die Vierfeldertafel: […]en M[…] ge[…] erkrankt […] erkrankt $\overline{K}$

Info:
Aussehen der Vierfeldertafel für absolute Werte

	K	$\overline{K}$	
M	$\cap$K	M$\cap$[…]	Anza[…] M
M		[…]	[…]zahl $\overline{M}$
	[…]nzahl K	[…]zahl $\overline{K}$	G[…]samtzahl

Erläutern Si[…] Kontex[…] r Aufgabenstell[…] die Bedeutu[…]:

$M \cap K$: ______________________________

M[…]: ______________________________

$\overline{M} \cap K$: ______________________________

$\overline{M} \cap \overline{K}$: ______________________________

Schritt 1:
Aus dem gege[…]
[…]chließen.

M	144		720
$\overline{M}$	_____	_____	
	240	_____	

Schritt 2:
Durch Anwendung der Additionsregel fehlende Werte ermitteln.

Erläutern Sie, waru[…] ld $M \cap K$ eingetragen wird.

____

____

Er[…] ie der Wert 240 ermittelt wird.

____

____

Schritt 3:
Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten für die Felder der Vierfeldertafel

	K	$\overline{K}$	
M	0,12	0,48	
$\overline{M}$	0,08	[…]32	0,4
	0,2	0,[…]	1

a) Erläutern Sie, wie die Werte für die Fe[…] berech[…] wurden.

____

____

____

b) Begründ[…] Sie, w[…] man [...] die Untersuchung auf stochastische Abhängigkeit die Werte der Vierf[…] s pr[…]tuale Anteile[…] über Wahrsch[…]lichkeiten angibt.

____

____

____

c) Begründen Sie an[…]d einer R[…]hnung, dass die Erkrankung an Grippe stochastisch unabhängig ist.

____

____

[…]ungen: ______________________________

____

Aufgabe 3.6

Die Vierfeldertafel und der allgemeine Additionssatz

In Kapitel 2 haben Sie die einfache Additionsregel für die Berechnung der [...]ahr[...]lichkeit von Ereignissen kennengelernt. Lesen Sie ggf. zur Wiederholung in A[...]gabe 2[...] [...]man unter dieser Regel versteht. Anhand des folgenden Beispiels soll gezeigt wer[...] dass d[...] einfache Additionsregel nicht immer angewendet werden kann und zu einer **allgem[...]inen A[...]ons[...]l** erweitert werden muss.

Zahlenbeispiel:

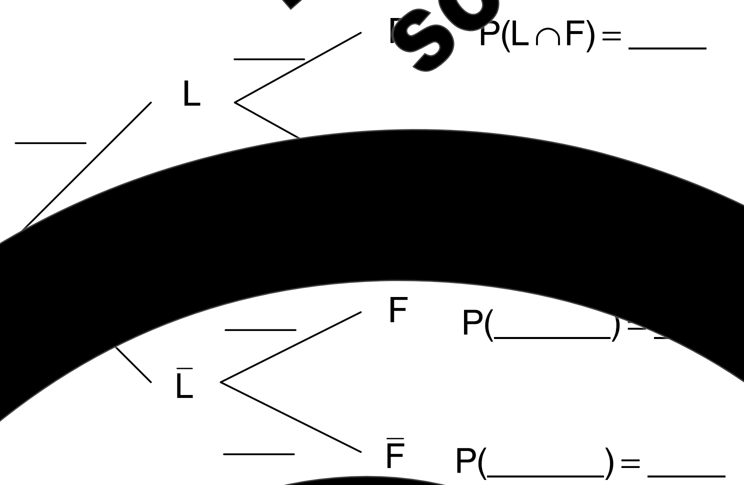
In einer Glasbläserei entstehen bei der F[...]rikat[...] wei Fe[...]r. Die Gl[...] [...]nnen Luftei[...]üsse oder Formfehler oder auch beide Fehler h[...] [...]ufteir[...] [...]erden bei [...]% der Gläser un[...] [...]rmfehler bei 8% der Gläser festgestellt. Die F[...]ler t[...] unabhängig vond[...]n[...] auf. Ein fe[...]l[...]haftetes Glas wird als Ausschuss aussortiert und [...] [...]hmolzen. Es so[...] [...]rmittelt werd[...] wie viel Prozent Ausschuss entsteht.

Abkürzungen Luftei[...]us[...] kein Luftei[...]schuss $\bar{L}$
Formfe[...] kein F[...]fehler

Die Lösung [...] Aufgab[...]ellung soll auf d[...] verschiedene[...] [...]gen ermittelt werden:

1. Lösu[...] über [...]ndiagra[...]

   [...]das Baumdiagra[...] aus, und ze[...]en Sie durch entsprechende Rechnung, dass 12,6% der Glä[...] [...]n Fehler h[...]ben und damit A[...]sschussware sind:



2. Lösung über die Vierfeldertafel.

   Füllen Sie die Vierfeldertafel aus, und zeigen Sie, dass sich für P[...]sschuss[...] [...]alls ein Wert von 12,6% ergibt.

	F	$\bar{F}$	
L			
$\bar{L}$			

Dieses Ergeb[...] st[...]t mit den ausführlich er[...]ten Ergebnisse[...] [...]cht überein und muss da[...] **falsch** sein.

3. Lösung über die einf[...] Ad[...]nsreg[...]

   P(Ausschuss) [...]L) + [...]) = 0,[...] [...],08 = 1[...]%

D[...] Fehl[...] [...]f de[...] [...]ur!

D[...] Lö[...] [...]3 entstande[...] Fehler kan[...] [...]lfe der Vierfeldertafel sehr anschaulich analysiert un[...] [...]hoben werden. Dazu we[...]en die am [...]enbeispiel erfolgten Überlegungen mithilfe der [...]lge[...]en Vierfeldertafe[...] [...]allgemeiner[...] dargestellt.

	F	$\bar{F}$	
L	$P(F \cap L)$	$P(\bar{F} \cap L)$	P(L)
$\bar{L}$	$P(F \cap \bar{L})$	$P(\bar{F} \cap \bar{L})$	$P(\bar{L})$
	P(F)	$P(\bar{F})$	

Lösun[...]

[...]ganzen Sie: Der Ausschussanteil setzt sich aus [...] ______ Fehlern und aus Gläsern mit einem der beiden Fehler zusammen und [...]rechnet.

Lösungsweg 3 in allg[...] [...]stellung:

P(Aus[...]
$[...]) + P(F \cap \bar{L}) + P(F \cap L)$
$[...]L) + 2 \cdot P(F \cap L)$

[...] P(Ausschuss) aus der Summe von P(L) und P(F) berechnet[...] [...]n, dass das [...]ten beider Fehler, nämlich $P(F \cap L)$ ______ [...] Rechnung [...]eßt und das ist ______

Begründen Sie allgemein, dass der Ansatz: P(Ausschuss) = P(L) + P(F) − P(F ∩ L) d… richtige … ebnis liefert, und weisen Sie dies auch am Zahlenbeispiel der obigen Aufgaben… nac…

Begründung: ______________________________

____

____

Nachweis am Zahlenbeispiel: P(Ausschu… = P(L) + P(F) − … ∩ L)

______ = ______ %

Verallgemeinerte Form…

Damit in uns… Za… eisp… in Glas zur Ausschussware … reicht es aus, dass mindestens einer der be… Fehle… tritt. Alternativ for…liert kann ma… gen: Es tritt ein Formfehler oder ein Luftei… lus… f. Math… atisch wird di… Oderbezie… mit dem Zeichen ∪ angegeben. Für zwei beliebig… ler… … A bzw. B … ezeichnet we… folgt : P(A oder B) = P(A ∪ B)

Für … … einen Additions… ergibt sich:

…llgemeine Additionsregel
Für zwei Ereignisse A und B gilt: P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B)

Ra…

____

____

Erg… …ngen: ______________________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert …le…en

Kapit…

Kombinatorische Abzählv…

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich... rteilung

...othesentests

Gesa... elbstorganisiert erlernen (Beste... 278)

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

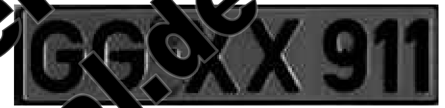
Kapitel 4: Kombinatorische Abzählverfahren

Wir haben bisher in erster Linie Zufallsversuche betrachtet, bei den... an die ... ... ichkeit eines Ereignisses mithilfe von Baumdiagrammen, die aus wenigen Äste... ... nigen ... bestanden, berechnen konnte. Ergeben sich bei einer Aufgabenstellung jedoch ... um... mme mit vielen Ästen und Stufen, können diese sehr umfangreich und unübersic... ch wer... ... in diesen Fällen auf rechnerische Möglichkeiten, welche als **kombinatorische ... hlver...** n bezeichnet werden, zurückgreifen.

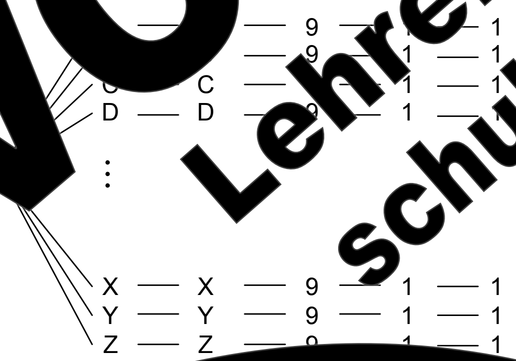
Aufgabe 4.1

Produktregel

Jemand möchte im Kreis Groß-Ge... eine... rsche... zulass... und wünscht sich ein Kennzeich... as nac... zwei ... gleiche Buchstaben hat und d... ch... ... istellige Zahl 91...



a) Für die Berechnun... nzahl der Mö... chkeiten, ein... nschgemä... Kennzeichen zu erhalten, kann man sich b... dies... ufga... ung an... se noch mit ei... m Baumdiagramm behelfen. Begründen Sie ... fo... lgenden Baumdia... mms und de... zahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen ... arum es in... samt genau ... nnzeichen mit einer Wunschnummer gibt, w... Um... ausschließt, ... Vereinfac... eine weiteren gesetzlichen Eins... ankun... be... Vergabe vo... ... stabenko... ationen berücksichtigt.



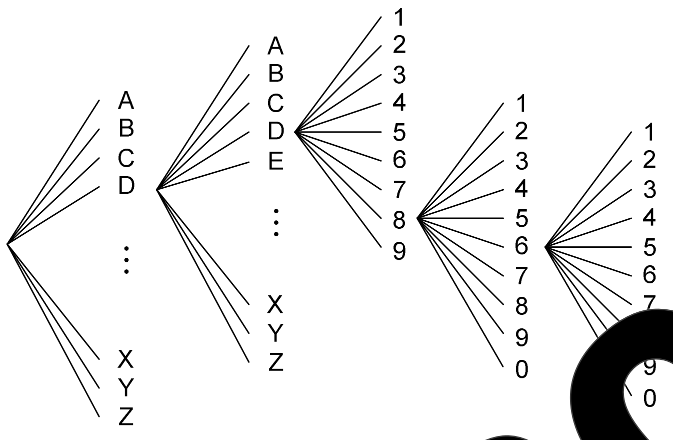
Stufe	Anzahl der Möglichkeiten am Ende jeder Verzweigung
1	
2	
3	
4	
5	

Begrü...

b) Für die Berechnun... ...scheinlichkeit, rein zufällig ein wu... Kennzeichen wie oben zu erhalten ... öglichen Kennzeichen bestim... ereinfachend soll hier angen... oß-Gerau nur Nummernschilde... chstaben und drei Ziffe... usschluss von Umlauten und eine... der dreistelligen Z... ngen geben soll. Ermitteln Sie mithilfe ... folgenden Seite ... eschn... Baumdiagramms, warum man die Anza... nzeichen mit der

$... 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585\,000$

...nmen kann, indem Sie in der Tabelle für ... m Baum die Anz... lichkeiten an ...nden jeder Verzweigung eintragen, ... , warum nur ein... und nicht das ...nte Baumdiagramm dargestellt wird.



Stufe	Anzahl … Möglic… ten am Ende … Verzw… ung
1.	
2.	
5.	

Begründung und Erläuterung:

Bere… u… …scheinl… …r das Wun… …nzeichnen anhand der Definition der …ahrs… …inlichkeit:

$$P(\text{Wunschkennzeichen}) = \frac{\text{Anzahl de… Wunschkennzeichen}}{\text{An… aller Kennzeichen}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_ \%$$

Wenn Sie die Erläuterung… …haben, wird ersichtlich, dass man die Anzahl aller Möglichkeiten … Anzahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen in jeder … Diese Berechnungsmethode wird in der Ko…

…allsversuch bestehe aus k unabhängigen Stufen, wo… …tufe n_1, in der 2. Stufe n_2 … in der k-ten Stufe n_k mögliche Ergebnisse gibt. Dann wird … möglichen Ereignisse N des Produkts $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ berechnet.

Die Produkt… …ung von Wahrscheinlichkeiten be… …uchen herange… …erschieden zwischen:

- Z… …urücklegen.
- …hen, bei denen die **Reihenfolge** der Ergebnisse **eine Rolle** s… …eichen). Man bezeichnet diese Stichproben als **geordnete Stich…**
- …rsuchen, bei denen die **Reihenfolge** der Er… …se **keine Rolle** s… Man …net diese Stichproben als **ungeordnete S… …n.**

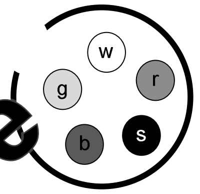
Aufgabe 4.2

Geordnete Stichproben mit Zurücklegen oder **Variation**

N Anzahl aller Möglichkeiten
n Anzahl der Kugeln in einer Urne
k Anzahl der Ziehungen

N = …

a) Erläutern Sie beispielhaft anhand der berei… …us Ka… …2 beka… …ten Urne di… Rechenregel zur Ermittlung der Anzahl … …öglicher… …ignisse, we…:
- 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen … …den.
- die Reihenfolge der Kugeln eine Ro… …pielt, a… …beispielsweise d… Reihenfolge wrs und rsw al… …rsch… …che E… …gnisse g… …werden.



b) … F… …ds… …s hat vier Z… …lenräder mit de… Ziffern 0 bis 9. Begründen Sie, warum die oben …egeb… …egel bei … …Zahlensch… …ur Berechnung von allen Kombinationsmöglichkeiten a… …ewendet werden k… …und zeigen Sie, dass es im ungünstigsten Fall mehr als zweieinhalb S… …den dauert, eine …gessene Zah… …ombination durch Probieren herauszufinden, wenn für jede … …che Einste… …ung eine Sekund… …nötigt wird.

…gabe 4.3

Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen oder **Permutati…**

N Anzahl aller Mö…
n Anzahl de…
k Anzahl…

N = n(n–1)(n–2)…

We… …gilt k = n **N = n(n–1)(n–2) … 1** …prich: n-Fakultät)

Wenn Sie einen wissenschaftlichen Taschen… …chner verwenden, … Möglichkeit n! mit einer entsprechenden Taste oder Ta… …bination zu bere…

a) Bestätigen Sie diese Regel zur Ermittlung der Anzahl aller möglichen Ereigniss... spielha... enn aus der bekannten Urne (s. Aufg. 4.2) drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen we... und ... Reihenfolge der Kugeln eine Rolle spielt. Erläutern Sie auch, warum m... k-ter... die k-te Ziehung mithilfe der Summe (n – k + 1) berechnet.

1. Ziehung: n = 5 Kugeln ... d dam... öglichkeiten

2. Ziehung: n – 1 = n – **2** + 1 = 5 –1 = ___ Kugeln ... mit ___ Möglichkeiten

3. Ziehung: n – __ = n – **3** + 1 = 5 – 2 = ___ ...geln ... d damit ... öglichkeiten

Insgesamt gibt es also N = ___·___ ... 60 mög... mbinati...

Erläuterung:

___

___

___

b) Wen... n a... n zieht gilt: N = ___·___·___·___·___ = ___ **!** = 120

c) Beg... Sie, waru... die ...geln N = ...1)(n–2) … (n-k+1) bzw. N = n! bei der folgenden Aufgabe angewe...et werden kö...n und ber...n Sie jeweils die Anzahl der unterschiedlichen Kombinationsmöglichkeiten.

Ein Möbelhersteller bietet für ein Regalsystem 10 verschiedene Module an. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich mehr als 150 000 Varianten für die Zusammenstellung der Regalwand ergeben, wenn man im Laden 6 ... kauft bzw. mehr als 3 500 000 unterschiedliche Regalwände ... ule einmal gekauft wird. Zeigen Sie auch, dass m... Regalwände zusammenstellen kann.

... im Möbelmark... ___

(2) Auswahl 10 Module im Möbelmarkt N = ___

(3) Variatione... N = ___

Erg... ngen: ___

Aufgabe 4.4

Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder unvollständig... mutati...

Beim Lotto werden aus einer Urne mit 49 Kugeln mithilfe des Ziehun... era... Kugeln ohne Zurücklegen entnommen, wobei die Reihenfolge, in der di... geln ge... n, keine Rolle spielt, ob man gewinnt oder verliert. Stichproben, bei denen es, wie ... Lott... cht auf eine bestimmte Reihenfolge bei der Ziehung ankommt, werden als **u...eordn... tichp...en** bezeichnet. Die Formel, mit der man die Anzahl der Kombinationsmöglichkeit... nn, soll anha... der folgenden Aufgabenstellungen veranschaulicht werden.

Aufgabenstellung:

Aus einer Urne mit **n** bunten Kuge... erde... ugeln ...he Zurück... gezogen. ... Zahl der unterschiedlichen Möglichkeite... ngeordnete... ben zu ... ehmen, soll mit ... bezeichnet werden. Ergänzen Sie die fehlenden A... be... folgenden Tabe...

Anmerkung zum Verst... der Überleg...en:

Um das Zustande... nen... Form... verstehe... können, ist ... wendig zu akzeptieren, dass es neben den Möglich... mehrere Kug... aus einer U... entnehmen, auch immer **eine** Möglichkeit ... kein... el, a... = 0 K...eln zu ziehen. Das ...pricht der **einen** Möglichkeit, nichts zu tun. D... chke... steht selbst b... er leeren Ur... für eine Urne mit n = 0 Kugeln.

1. ... de... e befi... n sich **n = 0** K...n

...e Kugel ziehen: k = 0	Es gibt **eine** Möglichkeit N nichts zu tun:	$\Rightarrow$N = 1

2. In der Urne befindet sich ein... te Kugel also **n = 1** Kugeln

keine Kugel ziehen k = ____	Es gibt eine Möglichkeit N nichts zu tun:	$\Rightarrow$N = 1
	eine Möglichkeit eine Kugel zu ziehen:	$\Rightarrow$N = 1

... Urne befinden sich eine rote (r) und eine grü... **... = 2** Kugeln.

keine Kugel ziehen	k = ____		...lichkeit N nic...	$\Rightarrow$N =____
eine Ku... zieh...			Es gibt ... edliche Möglichke... rot oder grün z...	$\Rightarrow$N =____
...n	k = ____	r — g → rg; g — r → gr	Da zwischen rg ... t unterschieden w... r die eine Möglich... und g gezogen w...	$\Rightarrow$N =____

4. In der Urne befinden sich eine rote (r), eine grüne (g) und eine blaue (b) Kugel, … **n=3** K… n.

Beachten Sie bei der Bestimmung der Anzahl unterschiedlicher Komb… en jew… zwischen Kugelkombinationen wie rg und gr nicht unterschieden wird … Ereignisse somit nur als eine Kombinationsmöglichkeit gewertet werden.

keine Kugel ziehen	k = ____			⇒N =____
eine Kugel ziehen	k = ____	r, g, b	…ahl untersc…dlicher M…chkeiten	⇒N =____
zwei Kugeln ziehen	k = ____	… g → … b → rb … r … b … b … r … r … bg	Anzahl un…schiedlicher Ko…bin…tionen: (H…weis: rg und gr … gb und bg w… als … che Kombinati…en gewertet)	⇒N =____
drei Kug… zieh…		g — b — …gb; b — … rbg; g … r — … b → grb; … gbr; b … g → brg; — r → b…	Anzahl u…schiedlicher Komb…tionen: (H…weis: Alle Ereignisse k…nnen als eine Kombination aus rot grün blau angesehen werden)	⇒N =____

5. … zunächst im fo…nden Schema … den entsprechenden Stellen die in Aufgabenteil 1. bis 4. …elten We… für N ein.

Wie Ihnen vielleicht schon bekann… is… bilden die Werte von N das sogenannte Pascalsche Dreieck. Informieren Sie sich in geeignete… Weis,e wie das Schema für n=4 und n= 5 fortgesetzt wird, und bestimmen Sie diese Werte ohne Verwendung weiterer Betrachtungen von Ziehungen aus Urnen bzw. ohne Erstellung von weiteren Baumdiagrammen.

k=0 N=

n=2 k=0 N= n=2 k=1 N=

n=3 … n=3 … n=3 k=2 N=

n=4 k=2 N= n=4 k=3 N= …4

n=… n=5 k=1 N= n=5 k=2 N= n=5 k=3 N=… n=… k=4 N= n=5 k=5 N=

6. Verallgemeinerungen

Die Werte von N werden auch als **Binomialkoeffizienten** bezei… Hierfü… man die Schreibweise $\binom{n}{k}$ **(sprich: „n über k“)**. Damit ergeben sich bei …5… beispielsweise die oben berechneten Werte:

$\begin{matrix} n=5 \\ k=0 \end{matrix} \Rightarrow \binom{5}{0}=1$ $\begin{matrix} n=5 \\ k=1 \end{matrix} \Rightarrow \binom{5}{1}=5$ n=… k=2 … 2)=… … $\begin{matrix} n=5 \\ k=5 \end{matrix} \Rightarrow \binom{5}{5}=1$

Rechnerische Ermittlung de… Binom…effizi…en

Die Werte für die Binomia…effizie… k) …nen auf dre… schiedene Arten ermittelt werden.

a) Mithilfe de… …scal…en Dreie…s

b) …ilfe d… …Cr-… e* des Tas…he…echners, B…: …2) Eingabe: 5 $\boxed{nCr}$ 2 ergibt 10

$\binom{10}{4}$ Eingabe: 10 $\boxed{nCr}$ 4 ergibt 210

c) Mithilfe der Fo…el $\binom{n}{k}$ = …n! / …k!(n – k)! Bsp.: $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\frac{5\cdot2}{1}=10$

*Englisch: Combinations

7. … Berechnen Sie mit dem Taschenrechner, wie … …nehmen, wenn die Reihenfolge der …olle spielt.

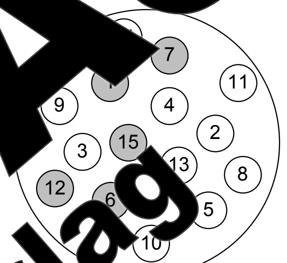
$\binom{\_\_}{\_\_}$ = ____________

8. In einem Getränkem… …t es 8 verschiedene Sorten Fruchts… … kauft vier Flaschen. Berechnen S… …ichkeiten, eine Mischung aus … …hen Saftsorten zusam… … Sorte nur eine Flasche gekau…

…e Übungen: ____________________

Aufgabe 4.5

Anwendung der ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen auf das [illegible]ttoprob[illegible]



Wir betrachten zunächst die abgebildete Urne, in der sich n = 15 [illegible] unterschiedliche Kugeln befinden, von denen 5 grau gefärb[illegible] (n_{grau} [illegible]) und 10 weiß sind ($n_{weiß}$ = 10). Berechnet werden soll die Wah[illegible], dass sich unter k = 5 gezogenen Kugeln 3 graue ($k_{...}$ = 3) u[illegible] [illegible]eiße ($k_{weiß}$ = 2) Kugeln befinden.

Die folgende Vorgehensweise beruht au[illegible] De[illegible]n der [illegible]ahrschei[illegible]ichkeit sowie dem Pr[illegible]uktsatz bei kombinatorischen Abzählverfahre[illegible] [illegible]zeigt e[illegible] [illegible]ätzlich[illegible] M[illegible]glichkeit bei Aufg[illegible]enstellungen dieses Typs vorzugehen. Verdeutlic[illegible] Si[illegible] die Vorgehensweise, [illegible] wenden S[illegible] das Verfahren anschließend auf das Glücksspiel Lo[illegible]

Di[illegible] Zi[illegible]hungen von grauen [illegible] weißen Kugeln können [illegible]ls jeweils getrennte und [illegible]oneinander unabhängige Vorgänge betrachtet werden.

G[illegible]amtzah[illegible] [illegible] K[illegible] [illegible]e [illegible]erkmale grau und [illegible]eiß aufteilen.

Anzah[illegible] [illegible] Möglich[illegible]eiten aus 5 grau[illegible] [illegible]n 3 graue z[illegible]ziehen.

Anzahl der Möglichkeiten aus 10 weißen Kugeln 2 weiße zu ziehen.

$n_{gesamt} = 15$ → $n_{grau} = 5$, $n_{weiß} = 10$

$k_{gesamt} = 5$ → $k_{grau} = 3$, [illegible]

$$P(3\,\text{graue}) = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{10\cdot 45}{3003} = 0{,}14985 \approx 15\%$$

[illegible]nzahl der [illegible]ehungen in die [illegible]erkmale grau und weiß ziehen aufteilen.

allen [illegible] zie[illegible]

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten beim Lotto ohne Berücksichtig[illegible] der Zu[illegible]zahl

Wenn man die Vorgehensweise auf die wöchentliche Ziehung der L[illegible]zahlen [illegible] [illegible]nn man wie folgt vorgehen. Aus den 49 Kugeln werden 6 gezogen. Diese 6 Ku[illegible] [illegible] man [illegible]ie in der Urne oben als grau markiert. Hat man auf dem Tippschein grau markierte [illegible]geln [illegible]kreuzt, entspricht das dem Ziehen einer grauen Kugel aus der Urne oben.

a) Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige, also der Zi[illegible]ung v[illegible] [illegible] Ge[illegible]ken grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \underline{\quad}$ → $n_{grau} = 6$, $n_{weiß} = 43$

$k_{gesamt} = \underline{\quad}$ → $k_{grau} = 6$, $k_{weiß} =$ [illegible]

$$P([\text{illegible}]\text{chtige}) = \frac{\binom{\ }{\ }\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]4\,\text{Mio}} \approx 0{,}0000[\text{illegible}]\%$$

b) Wahrscheinlichkei[illegible] [illegible]5 Richtige, al[illegible] der Ziehun[illegible] [illegible]n 5 in Ged[illegible]ke[illegible] grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \underline{\quad}$ → [illegible], [illegible]$=43$

[illegible] → $k_{grau} = 5$, $k_{weiß} = 1$

$$P(5\,\text{R[illegible]chtige}) = \frac{\binom{\ }{\ }\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \frac{\underline{\qquad}}{14\,\text{Mio}} \approx 0{,}002\%$$

[illegible]) W[illegible]hrscheinlichkeit [illegible]4 Richtige, al[illegible] der Ziehung von 4 in Gedanken grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \underline{\quad}$ → $n_{grau} = \underline{\quad}$, $n_{weiß} = \underline{\quad}$

$k_{gesamt} = \underline{\quad}$ → $k_{grau} = \underline{\quad}$, [illegible]

$$P(4\,\text{Richtige}) = \frac{\binom{\ }{\ }\cdot\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \underline{\qquad\qquad} \approx 0{,}1\%$$

[illegible] in Gedanken grau markierten Kugeln

$n_{gesamt} = \underline{\quad}$ → $n_{grau} = \underline{\quad}$, $n_{weiß} = \underline{\quad}$

$k_{gesamt} = \underline{\quad}$ → $k_{...} =$ [illegible]

$$P(3\,\text{Richtige}) = \frac{[\text{illegible}]}{\binom{\ }{\ }} \approx \underline{\qquad\qquad} \approx 1{,}8\%$$

[illegible]einerung des Lottoproblems

[illegible]n Sie den Ansatz für das „Lottoproblem“ [illegible]ngewendet habe[illegible] [illegible]Verfahren [illegible]neinert und auf Problemstellungen ü[illegible] [illegible]n, die auf den e[illegible] [illegible]twar wenig mit [illegible]en von Lottozahlen zu tun haben, je[illegible] [illegible]eichen Weg bea[illegible] [illegible]den können.

In einem Behälter befindet sich eine begrenzte Anzahl n von beliebigen Gegenst… n, die … in Gegenstände mit einem Merkmal 1 und einem Merkmal 2 einteilen kann, wobei es … e Rolle … elt, ob die Gegenstände mit dem jeweiligen Merkmal voneinander unterschieden … rden kö… M… entnimmt k dieser Gegenstände und berechnet die Wahrscheinlichkeit, w… Teile … Merkmal 1 bzw. 2 in der Stichprobe enthalten sind.

Verallgemeinerter Ansatz:

Aufteilen der Gesamtanzahl n bzw. aufteilen der Ziehungen k in die jeweilige Anzahl mit Merkmal 1 und 2.

$n \to n_1,\ n_2$

$k \to k_1,\ k_2$

$$P(E)=\frac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} n_1+n_2=n \\ k_1+k_2=k \end{array}$$

a) Wenden Sie diesen Ans… folgende Auf…e an, und ü…rüfen Sie Ih… Ergebnis mithilfe eines Baumdiagramms (Be…en …dabei …es sich u… Zi…hen ohne Zur…klegen handelt).

In einer Lostrommel be… … 20 Losen … ewinne und … ieten. Zeigen Sie, dass die Wahrschein… unte… …gezogenen L… …genau z… Ni…en zu erhalten, bei 15% liegt.

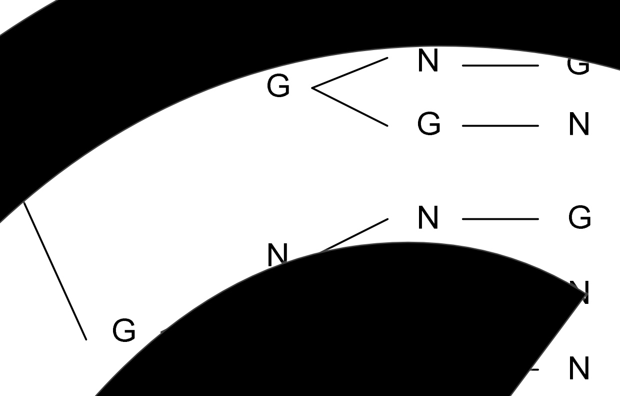
Abkürzun…: Gewi… …, Nie…e N

$n = \_\_ \to n_N = \_\_,\ n_G = \_\_$

$k = \_\_ \to k_N = \_\_,\ k_G = \_\_$

$$P(2\ \text{Nieten}) = \frac{\binom{\ }{\ }\cdot\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} \approx \_\_\_\_\_\_\_\_ \approx$$

Baumdiagramm…



b) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Wege, und beurteilen S… …e Mögl…it, die Wahrscheinlichkeit, bei 8 gekauften Lose 5 Nieten zu erhalten, über ein Ba…iagra… zu ermitteln.

____

____

____

____

Ergänzende Übungen: ______________________________

Aufga… …6

…eit… Betrac…ngen für Ur… mit mehr als … Merkmalen

Be… …t ma… beim Lott… Ziehung d… …satzzahl mit ein, so hat man in der Trommel Kugeln mit drei… …rkmalen: Gewinn…gel, Zusatzku… und Verliererkugel. In diesem Fall kann man das …schema wie folg… erweitern:

$n = 49 \to n_1 = 6$ (Gewinn…), $n_2 = 1$ (Zusatzkugel), $n_3 = 42$ (Verliererkugeln)

$$P(A)=\frac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}\cdot\binom{n_3}{k_3}}{\binom{n}{k}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k \end{array}$$

$k_3 = 0$

Durch Einsetzen in die obige modifizierte Formel lässt sich … …heinlichkeit ermitteln.

Zeigen Sie … …sse „5 Richtige mit Zusatzzahl" … …nchance von etwa 1 zu 2,3…

… mit Zusatzzahl) =

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …le…en

Kapite…

Einführung in den Be…
…en Wahrscheinli…

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich[...]rteilung

[...]othesentests

Gesa[...]elbstorganisiert erlernen (Beste[...]278)
S[...]

[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[...]
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

Kapitel 5: Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinli[...]eit

Im Kapitel 3 haben Sie sich im Zusammenhang mit den Vierfelderta[...]bereits [...]tisch abhängigen Zufallsversuchen befasst.

Aufgabe 5.1

a) Nennen Sie zur Wiederholung, mit welchem Krit[...]m ma[...]em[...]umdiagramm bzw. in einer Vierfeldertafel erkennen kann, dass ein Zufallsve[...]ra[...]h abhängig is[...]

Kriterium bei einem Baumdiagramm:

____

____

____

Kriterium bei e[...]Vie[...]tafel:

____

b) [...] Zu[...]g mit stoch[...]stisch abhäng[...] Zufallsversuchen entstehen Fragestellungen, die [...] Beg[...]er **bedingt[...] Wahrschein[...]** führen. Verdeutlichen Sie sich die Vierfeldertafel für d[...]folgende Beispiel [...]bestätigen S[...]urch Rechnung, dass die Wahrscheinlichkeit an Grippe zu [...]nken vom Gesc[...]t stochasti[...]abhängig ist:

Beispiel:

In einer Region, in der 45% der Bevölkerung männlich sind, haben sich 35% der gesamten Bevölkerung mit einem neuen gefährlichen Grippevirus infiziert. Mithilfe der Angabe, dass das Merkmal eine F[...]haben mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% auftritt und den Ab[...]

[...]hilfe der Additionsregel die fo[...]rstellen:

Vierfeldertaf[...]

	G		
M	$P(M \cap G) = 0{,}2$	P[...]	$P(M) = 0{,}45$
	$P(\overline{M} \cap G) = 0{,}15$	$P(\overline{M}$[...]	$P(\overline{M}) = 0{,}55$
	$P(G)=0{,}35$	$P(\overline{G}) =$[...]	1

[...]der stochastisc[...]n Abhängigkeit:

Aufgabe 5.2

Erstellen von Baumdiagrammen zu der Vierfeldertafel aus Aufgabe 5.1

Zu dieser Vierfeldertafel kann man unter zwei Gesichtspunkten ein Baumdiagramm erstellen, da die erste Stufe des Baumes das Merkmal männlich M oder nicht männlich $\overline{M}$, oder auch das Merkmal an Grippe erkrankt G oder nicht an Grippe erkrankt $\overline{G}$ enthalten kann. Ergänzen Sie in den beiden Baumdiagrammen die fehlenden Ereignisse.

Es spielt keine Rolle, ob man hier P(M∩G) oder P(G∩M) etc. schreibt. Das Ergebnis wird aus dem Produkt der Pfadwahrscheinlichkeiten gewonnen und es gilt das Kommutativgesetz. Man kann die Schreibweise so verwenden, wie sie in der Vierfeldertafel verwendet wird.

Aufgabe

Beschriftung der Pfade mit Wahrscheinlichkeiten

Da es sich um einen stochastisch abhängigen Zufallsversuch handelt, hängen die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumes vom Ausgang des Zufallversuchs in der ersten Stufe ab. D.h., dass beispielsweise die Wahrscheinlichkeit P(G) an Grippe zu erkranken in der zweiten Stufe des linken Baumdiagramms davon abhängt, ob in der ersten Stufe das Merkmal M oder das Merkmal $\overline{M}$ eingetreten ist. Damit ... die Wahrscheinlichkeit in der zweiten Stufe nur den Ausdruck P(G) ... Die Schreibweise* für die formale Darstell... Baumdiagramme im Folgenden auf...

... Baum:
... der Wahrscheinlichkeit an Grippe zu ...nken unter der **Bedingung**, dass man
– ein Mann ist $\mathbf{P_M(G)}$
– eine Frau ist $\mathbf{P_{\overline{M}}(G)}$

Angabe der W... Grippe zu erkrank... man
– ei...
– ... $\mathbf{P_{\overline{M}}(\overline{G})}$

2. St...
Angabe ...hkeit ein Mann zu sein unter der **Be**...man
– an Grippe ... $\mathbf{P_G(M)}$
– nicht an Gripp... $\mathbf{P_{\overline{G}}(M)}$

Angabe der Wahrschei... Frau zu sein unter der **Bedingung**, da...
– an Grippe erkrankt is... ...$\overline{M}$)
– nicht an Grippe erkran... ...)

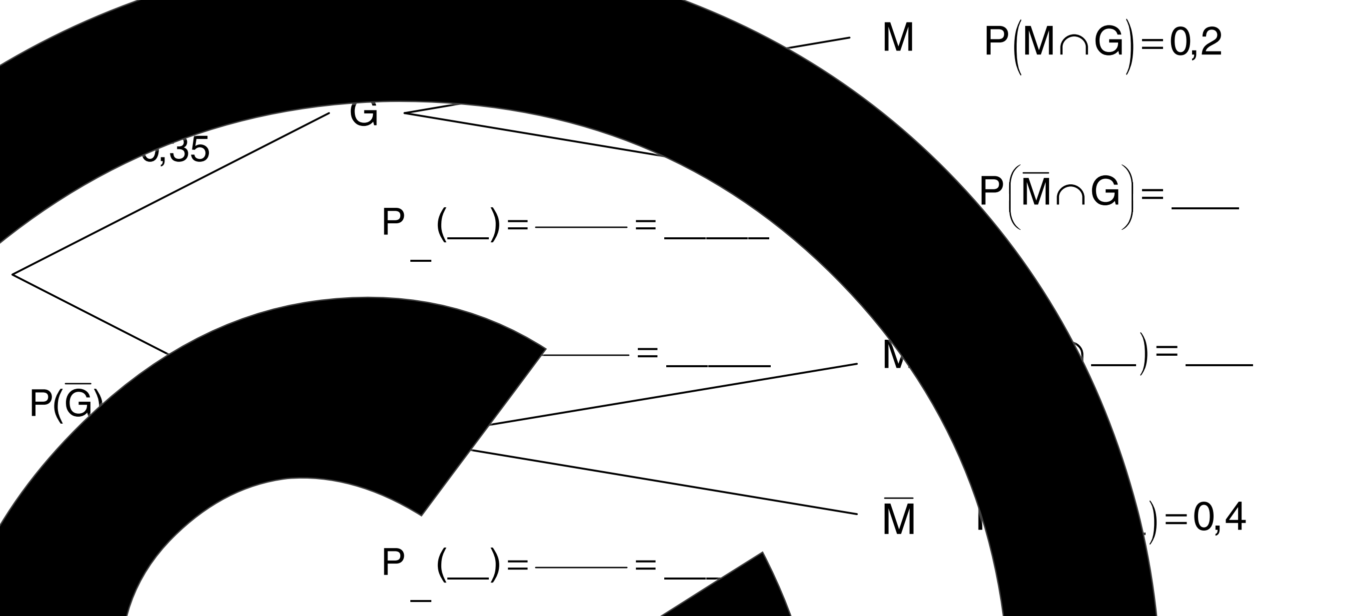
*A... Anstatt der indizierten Schreibweise $\mathbf{P_M(\overline{G})}$ ... $(\overline{G})$ verwendet m... auch $\mathbf{P(\overline{G}|M)}$ bzw. $\mathbf{P(\overline{G}|\overline{M})}$

Da die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe beider Baumdiagramme ... von der **Bedingung** abhängen, welches Ereignis in der ersten Stufe eingetreten ist, spricht man von **bedingten Wahrscheinlichkeiten.**

Ergänzen Sie mithilfe der Vierfeldertafel aus Aufgabe 5.1 in beiden Baumdiagrammen die Beschriftung der Pfade, und ermitteln Sie, wie im Beispiel $\mathbf{P_M(G)}$ mithilfe der Pfadmultiplikationsregel die Wahrscheinlichkeiten für alle Verzweigungen an den Ästen.

Baumdiagramm für die Bedingung M und $\overline{M}$ in der ersten Stufe:

Baumdiagramm für die Bedingung G und $\overline{G}$ in der ersten Stufe:



Aufgabe 5.4

Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der 1. Stufe in beiden Baumdia[illegible] stimmen mit den entsprechenden Werten der äußeren Felde[illegible] Vierfeldertafel überein. [illegible] ❍ nein ❍

b) Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse am Ende der [illegible] den inneren Werten der Vierfeldertafel und sind dah[illegible] beide[illegible] umdiag[illegible]mmen identisch. [illegible] nein ❍

c) Die vier Wahrscheinlichkeiten an den Verzw[illegible]ngen d[illegible]ste in der 2. St[illegible] in einem Baumdiagramm entsprechen [illegible] der Vierfeldertafel. ja[illegible] ❍

d) Die vier Wahrscheinlichkeiten der [illegible] um kann man [illegible] Vierfeld[illegible] nicht direkt entnehmen. [illegible] Werte errech[illegible] man durch en[illegible]sprechende Quotientenbildung a[illegible] Vierfeldertafel. ja ❍ nein ❍

e) Der Ausdruck $P_G(M)$ gi[illegible] Wahrschei[illegible] der zwei[illegible] Stufe eines Baumdiagra[illegible] erste Stufe sic[illegible] Merkma[illegible] oder Frau bezieht. ja ❍ nein ❍

f) De[illegible] $P_G(M)$ [illegible] die bedingte [illegible] der zweiten Stufe eines Bau[illegible] dessen erste [illegible] Merkmal an Grippe erkrankt zu se[illegible] ja ❍ nein ❍

g) [illegible] $P_{\overline{M}}(G)$ bedeu[illegible] dass man die Wahrscheinlichkeit Grippe zu haben unters[illegible], unter der B[illegible] eine Fr[illegible] zu sein. ja ❍ nein ❍

h) Der Ausdruck $P_{\overline{M}}(G)$ bedeutet, da[illegible] man die Wahrscheinlichkeit eine Frau zu sein untersucht, unter der Bedingung Grippe zu haben. ja ❍ nein ❍

i) Der Ausdruck $P_G(M)$ [illegible] Wahrscheinlichkeit Grippe zu haben untersucht [illegible] ja ❍ nein ❍

j) D[illegible] in Mann zu [illegible] Bedingung Gripp[illegible] ja ❍ nein ❍

k) [illegible] Stufe im Baum enthält die Bedingung, von der [illegible] Wahrscheinlichkeit der zweiten Stufe im Baum abhängt. ja ❍ nein ❍

l) Die bedingte Wahrscheinlichkeit in der zweiten Stufe wird berechn[illegible] die Wahrscheinlichkeit für das Merkmal in der ersten Stufe durch die [illegible] Wahrscheinlichkeit [illegible] ja ❍ nein ❍

m) Die beding[illegible] zweiten Stufe wird berechnet, inde[illegible] die Wah[illegible] durch die Wahrscheinlichkeit für das Merk[illegible] nein ❍

Aufgabe 5.5

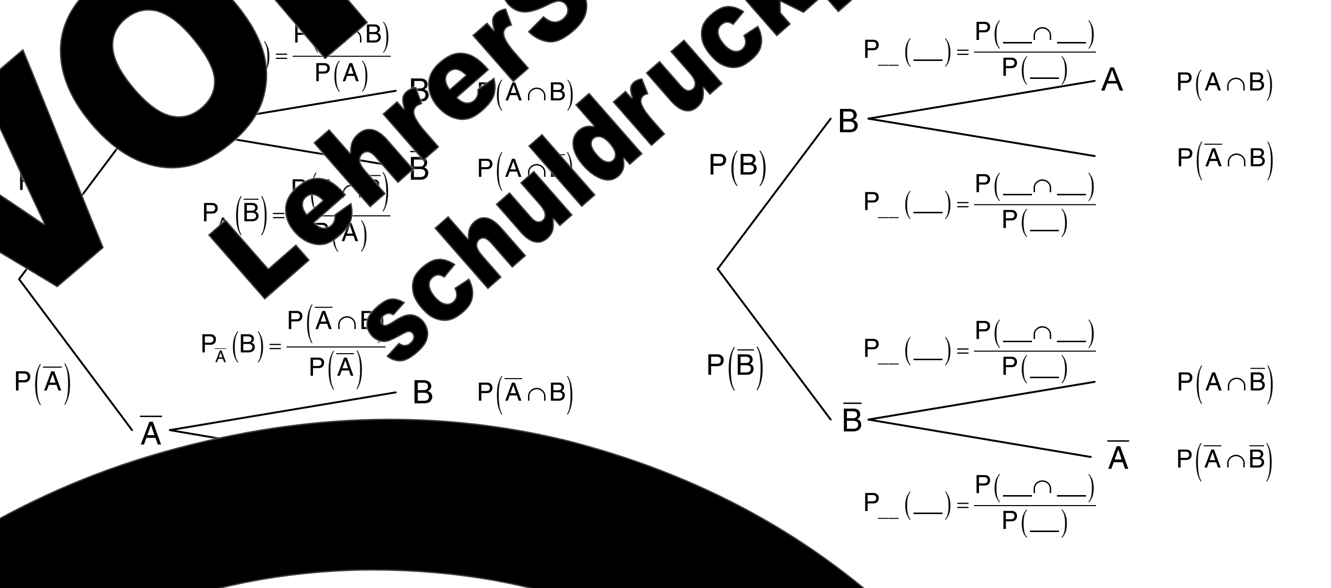
Verallgemeinerung des Zusammenhangs zwischen der Vierfeld[illegible]tafel un[illegible] bei[illegible] zugehörigen Baumdiagrammen

	B	[illegible]	
A	$P(A \cap B)$	$P(A$[illegible]	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	[illegible]$\cap B)$	$P(\overline{A})$
	[illegible]	[illegible]$)$	1

In der Vierfeldertafel kann man die beding[illegible] Wahrs[illegible]nlichkeiten, welche in der z[illegible] Stufe in dem Baumdiagramm erscheinen, ni[illegible]kt abl[illegible]

Für die Berechnung dieser be[illegible]cheinlichkeiten der zweiten Stuf[illegible] beiden Baumdiagrammen bildet man jew[illegible] Quotient[illegible] aus der Wa[illegible]lichkeit [illegible] Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit d[illegible] örigen [illegible] als in d[illegible] Stufe des Zufallsexperimentes. Ergänzen Sie fehlende Ang[illegible]

Er[illegible]fe im [illegible]m: Merkmal [illegible] **[illegible]rste Stufe im Baum: Merkmal B**



[illegible]utern Sie, wie Sie bedingte Wahrscheinlichkeiten di[illegible]ldertafel, und damit ohne ein Baumdiagramm, ermitteln können.

Aufgabe 5.6

Standardformulierungen bei Aufgabenstellungen zu bedingten Wahr[illegible]einlich[illegible]

Die Interpretation der Aufgabenstellungen bei bedingten Wahrscheinlichk[illegible] oft Schwierigkeiten. Daher sollen hier anhand des Beispiels Grippe[illegible]ankung [illegible]shilfen für die Entschlüsselung von Standardformulierungen gegeben werden. [illegible]zen [illegible]lende Angaben bzw. verdeutlichen Sie sich die Beispiele und bearbeiten Sie die [illegible]eweili[illegible]ufga[illegible]tellungen.

1. Fragestellungen, die sich auf die Gesamthei[illegible]erkm[illegible]beziehen

Bei Fragestellungen zu Wahrscheinlichkeite[illegible]elche sich auf [illegible] Gesamtheit [illegible]on Männern und Frauen beziehen, besteht zwischen den beid[illegible] Baumdi[illegible]ammen kein Unterschied. Typ[illegible]e Fragestellungen sind hier:

- Mit welcher Wahrscheinlichke[illegible] Grippe (Mann [illegible] Grippe): $P(\ldots \cap G) = 0{,}2$
- Mit welcher Wahrsc[illegible]it hat [illegible]u Grip[illegible]au und Grippe): P(________) = ______
- Mit welcher Wahrs[illegible]ein Mann ge[illegible](Mann und [illegible]d): P(________) = ______
- Mit welc[illegible]che[illegible]keit ist eine F[illegible]esund (Frau [illegible]und): P(________) = ______

2. Fra[illegible]tell[illegible]n, di[illegible]ch auf die [illegible]gte Wahr[illegible]lichkeit der 2. Stufe im Baum beziehen

Beisp[illegible]

Bei [illegible]enden Fr[illegible]ste[illegible]ngen (St[illegible]rdformulierungen in Aufgaben) wird bei gegebener Wahrsc[illegible]einlichkeit des [illegible]ignisses [illegible] gegebener Wahrscheinlichkeit der ersten Stufe im Baum nach bedingten Wahrscheinlichkei[illegible]er zweiten Stufe im Baum gefragt. Der Wert für die bedingte Wahrscheinlichkeit kann dann ent[illegible]der mithilfe der Wahrscheinlichkeiten in einer Vierfeldertafel oder mithilfe eines passenden Baumdiagramms berechnet werden.

Textalternative[illegible]

- Mit [illegible]
- [illegible]hrscheinlichkeit ist man als [illegible]Grippe erkrankt?
- [illegible]e groß ist die Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken, wenn man ein Mann ist?
- Wie groß ist, unter der Bedingung ein Mann zu sein, die Wahrsc[illegible] erkranken?

Lösun[illegible]

$= \frac{0{,}2}{0{,}45}$

$= 0{,}44$

Textalternativen zur Aufgabenstellung:

- [illegible]her Wahrscheinlichkeit trifft man unter [illegible]e Erkrankten auf einen Mann?
- [illegible]scheinlichkeit ist ein an [illegible] Mann?
- Wie gro[illegible]einlichkeit ein Mann zu sein, we[illegible]pe erkrankt ist?
- Wie groß ist, u[illegible]ung Grippe zu haben, die Wahr[illegible]ein Mann zu sein?

Lösungsansatz: $P_G($[illegible]

= [illegible]

= [illegible]

Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, und formulieren Sie zus[illegible]h zur [illegible]ebenen Fragestellung eine zweite Fragestellung, welche das Wort „wenn" e[illegible]ält.

$P_M(\overline{G}) = \frac{P(M \cap \overline{G})}{P(M)} =$ ________ = ____

- Mit welcher Wahrscheinlichkeitt trifft man unter den Männern auf einen nicht erkrankten.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ________

____

____

$P_{\overline{G}}(M) = \frac{P(M \cap \ldots}{P(\overline{G})}$ [illegible] = ____

- [illegible]Mit w[illegible] Wa[illegible]cheinlichkeit trifft man unter [illegible]est[illegible]n auf einen [illegible]n.
- [illegible]roß ist die Wa[illegible]einlichkeit ________

____

____

$P_{\overline{M}}(G) = \frac{P(\overline{M} \cap G)}{\ldots}$ = [illegible]

- M[illegible]elcher W[illegible]scheinlichkeit trifft man unter de[illegible]uen au[illegible]e erkrankte[illegible]
- [illegible]ie g[illegible] Wahrsch[illegible]keit ________

____

____

$P_G(\overline{M}) = \frac{P(\ldots G)}{P(G)} =$ ________ = ____

- [illegible] welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den an Grippe Erkrankten auf eine Frau.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ________

____

____

Formulieren Sie eine zweite Fragstellung, und ermitteln Sie mit dem passenden mathematischen Ansatz die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

- [illegible]
- [illegible]e groß ist die Wahrscheinlichkeit ________

____

____

Ansat[illegible]

- [illegible]elcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter [illegible]nden Personen auf eine Frau?
- [illegible]ahrscheinlichkeit ________

____

____

Ansatz und Re[illegible]

Aufgabe 5.7

Anhand des Beispiels in dieser Aufgabe soll eine weitere Hilfe für die Ents…sselung … Aufgabentexten bei bedingten Wahrscheinlichkeiten gegeben werden.

Zahlenbeispiel:

In Deutschland sind etwa 0,5% der Bevölkerung an einem …elten …me… Krebs erkrankt. Man weiß, dass ein spezieller Bluttest 90% der Gesunden und … richtig di…nostiziert.

a) Wie viel Prozent der Tests fallen positiv aus?

b) Bei einer Routinekontrolle zeigt der Test ein … Erge… an. Berechnen … die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Person bei …em positiven …ergebnis n… erkrankt ist.

c) Bei einer Routinekontrolle zeigt der Test ei…gatives …ebnis an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man trotzd… an … Kreb… erkrankt is…

Lösungschritte

Schritt 1:

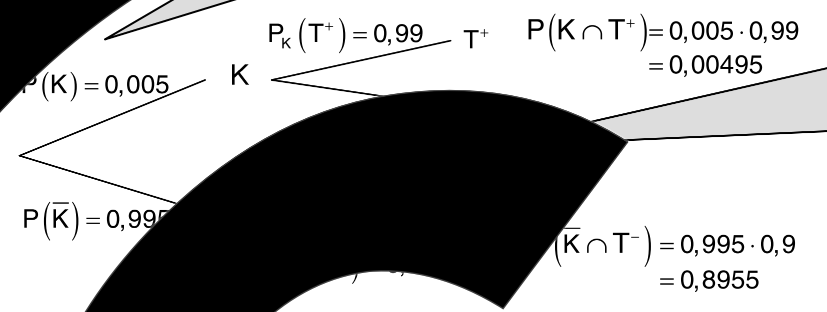
Festlegen der Merkma… p… der Abkürzungen:

- Person … Krebs:
- Pe… hat keinen … : $\overline{K}$
- …st ist positiv: T^{+}
- …est ist nega…: T^{-}

…hritt 2…

Bau… …m durch Zuordn… der Zahle… …ben zu der ersten bew. zweiten Stufe des Baumdia…ms erstelle…

Hier muss analysiert …rden, welche Zahlenangaben sich auf die erste Stufe eines Baumdiagramms beziehen.
Da sic… …r Bevölkerung … des …



D… …en zum Bluttest bez… die Bedingung, ob ei… Krebs oder nicht a… …kt ist, und sind dam… …en Wahrschei… …er zweiten Stufe im Bau…

Schritt 3:

Erstellen einer Vierfeldertafel durch Übertragen der Werte aus dem …mdiagra… Vervollständigung der Felder mithilfe der Additionsregel.

	T^{+}	T^{-}	
K	0,00495	0,000…	…05
$\overline{K}$	0,0995	…8955	0,…
	0,10445	0,89555	1

Schritt 4:

Analyse der Aufgabenst…ung … …rech… der gesuch… …ahrsche…ch…ten mit der Vierfeldertafel und g… …ormeln für d… bedingten W…scheinlichk… Dazu kann man die Aufgabenstellung … …wer… Satz … …lieren.

zu a) Ges…ht ist … …ahrs… …lich $P(T^{+})$

…$T^{+}) =$ …445 … …,45%

Das Ergebnis kann sofort aus der Vierfeldertafel abgelesen werden.

zu b) … welch… …ahrscheinl… …ist eine P… …nicht erkrankt, w… …est ein positi…s Ergebnis a…

$P_{T^{+}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap …)}{P(T^{+})} = \frac{0,0995}{0,1044…}$ …3 $\approx 95,3\%$

Die Werte für die Berechnung können der Vierfeldertafel entnommen werden.

Bei einem positiven T… …man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% nicht erk…kt.

zu c) Mit welcher Wahrsc… ist eine Person erkrankt, wenn der Test ei…

Die Werte für die Berechnung können der Vierfeldertafel entnommen werden.

Ein negativer Test kann als sicherer Hinweis, … auch nicht erkrankt ist, angesehen werden, da m… negativen Testergebnis nur mit einer Wahrscheinlich… 0,006% trotzdem erkrankt ist.

Ergänz…

An… …erfeldertafel kann man auch ein Baum… …twickeln, dessen … Merkmal T^{+} und T^{-} hat, da sich die Aufgabenstellung auf ei… …ezieht, in dessen … nicht mehr die Merkmale K und $\overline{K}$, sondern die Merkmale T^{+} u… …en.

Aufgabe 5.8

Bei 4,5 Millionen Wohneinheiten in Deutschland werden jährlich 200 000 Wohnungs... de ge... det. 600 Brände mit tödlichen Folgen für Menschen führen zu Überlegungen ... Rauchm... en Wohnungen Pflicht werden sollten. Jedoch funktionieren Rauchmelder in ... nicht zu 100% fehlerfrei. Ein handelsüblicher Rauchmelder bei einem Schnäppchenange... lös... ndfall mit einer WK von 99,8% einen Alarm aus. Es kann jedoch auch nicht aus... schlosse... en, dass der Rauchmelder einen Fehlalarm aussendet, wenn es nicht brennt. S... Fehl... m wird einmal jährlich also mit einer Wahrscheinlichkeit von 1:365 erwartet.

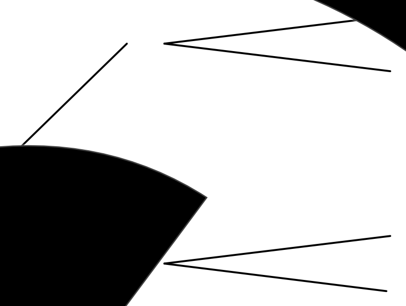
a) Begründen Sie, warum sich die gegebenen Werte auf ein ... mdiag... m beziehe... i dem die Merkmale Brand B und nicht Brand $\overline{B}$ der ers... fe zuge... et werden. Erstel... Sie dieses Baumdiagramm, und ermitteln Sie mit desse... ilfe eine zuge... ge Vierfel... tel. Verwenden Sie für das Merkmal Alarm A und kein Alarm $\overline{A}$.

____

____

			1

b) F... w. kein Alarm $\overline{A}$ der ersten Stufe ... utern Sie die Zusammen... iden Baumdiagrammen und der ... n.



____

____

____

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Brandmelder im Laufe ei... hres e... Alarm aussendet.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es b... Ausl... des A... ms wirklich brennt. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung dazu zu... es „Wenn-S... es“.

____

____

P__(___) = $\frac{P(\_\_\_)}{P(\_\_\_)}$ ______________ %

e) Berechn... Sie die ... rsche... lichkeit ... unbemerk... Wohnungsbrand, weil der Brandmelder kein... mel... t. Formulier... Sie diese Aufga... stellung dazu auch hier zunächst mithilfe ein... „Wenn-... es“ u... beurteilen Sie anschließen... die Sicherheit des Brandmelders.

____

____

P__(___) = $\frac{P(\_\_\_)}{P(\_\_\_)}$ = ________ = ___________ = _______ %

Beurteilung der Sicherheit...

____

____

E... ngen: ____

____

____

Aufgabe 5.9

Ergänzende Betrachtung zu Mehrfeldertafeln

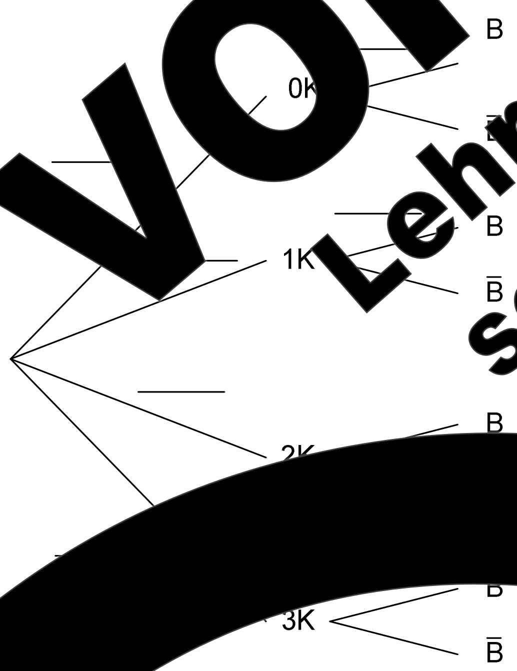
In einer Studie zur Berufstätigkeit von Frauen werden in Zufallsland folge... Za... erhoben: Von den 34% kinderlosen Frauen sind 95% berufstätig. Während von den ...% der ... ...em Kind noch 30% einer Berufstätigkeit nachgehen sind, geben von den 25% d... ...auen ...wei Kindern 80% ihre Berufstätigkeit auf. Unter den Frauen mit drei oder mehr Kin...ern üb... no... 0% Ihren Beruf aus.

a) Zeigen Sie, dass in Zufallsland 53,1% der Frauen nich...

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, unter den beruf... Fra... eine Frau ... ei oder mehr Kindern anzutreffen, nur bei 1% liegt.

Lösungshinweise:

Bei Baumdiagrammen mit mehr als z... ...ten bz... ...zwei Stu... ...nn man ana... zu Baumdiagrammen mit zwei Ästen u... zwei... ...n sog... Mehrfeldertafe... erstellen. T...gen Sie im Baumdiagramm an den markierten S... ...er Aufgabe ge... ...nen Zahlen... ein und füllen Sie mithilfe dieser Zahlenwerte ...r Additionsre... die Mehrfe... ...fel aus. Be... ...en Sie dann die gesuchten Wahrscheinlich... Aufga... ...rch Ab... aus der Mehr...dertafel und in Aufgabe b) durch Rechnung mit de... ...er V...eldertafel entsprech... ...Formel.



	B	$\overline{B}$	
0K			
1K			
2K			
3K			
			1

zu a)

zu b)

Aufgabe 5.10

Ergänzende Betrachtungen zum Begriff der totalen Wahrschei... ...keit

a) Verdeutlichen Sie sich anhand der beiden Baumdiagramme aus ... ...gab... ...folgende Zusammenhänge und den Begriff der **totalen Wahrsch... ...lichkei...**

Die **erste Stufe** im linken Baum in Aufgabe 5.5 bezeichnet **Merkmal A**	...ie ... ...**fe** ...echten Baum in Aufgabe 5.... ...zeichnet **M...mal B**
Aus dem Baumdiagramm kann man n... ...ie Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe ...) und P($\overline{A}$) direkt ablesen.	Aus ... Baumdiagra... kann man nur die ...hrscheinlichke... ...er ersten ...fe P(B) ...d P($\overline{B}$) ...ablesen.
P(B) und P($\overline{B}$) können nu... ...der entsprechenden Erei... ...sse ...rechnet ...rden.	P(A) u... P($\overline{A}$) können ...urch Addition der ent...echenden E...gn...se berechnet werden.
$P(B) = P(A \cap ... P(\overline{A} ...)$ oder $P(B) ... (B) ... \overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$	$...) = P(A \cap ...) ... P(A \cap \overline{B})$ oder $P(A) ... (B) ... P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$
Ma... ...ezeichn... ...e hier berech...e ...Wa... ...einlic... ...t P(B) als **tota... ...ahrs... ...ichkeit P(B).**	Ma... bezeichnet die hier berechnete ...ahrscheinlichkeit P(A) als **totale Wahrscheinlichkeit P(A).**

b) E...änzen Sie de... ...genden Sa..., ...d geben Sie mithilfe der beiden Baumdiagramme aus Aufgabe 5.5 die totalen Wahrs... ...lichkeiten P($\overline{B}$) und P($\overline{A}$) entsprechend der Definition im Kasten an.

Man berechnet die totale Wahrscheinlichkeit P($\overline{B}$) bzw. P($\overline{A}$), indem man im entsprechenden Baum

aus Aufga... ...ller Pfade, die zum Ereignis ___ bzw. ___ führen,

Wenn die 1. Stufe im Baum das Merkmal A bezeichnet, gilt:	We... ...Baum das Merkmal B bezeic...
P($\overline{B}$) =____________	P($\overline{A}$) =____________
____________	P($\overline{A}$) =____________

Zusammenfassung zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten

Die Aufgab[illegible] bez[illegible] auf ein Baum[illegible] mit dem Merkmal A in [illegible]fe.

Häufig sind bei Aufgabenstellungen zu bedingten Wahrsc[illegible] zum Merkmal A also P(A) für die erste Stufe des Baumes und Wahrscheinlichkei[illegible] Ereig[illegible]e oder bed[illegible] Wahrscheinlichkeiten der zweite Stufe im Baum [illegible]ben, [illegible] man die Vierfel[illegible]usfüllen kann. Gefragt wird dann in der Regel nach eine[illegible]dingten Wa[illegible]inlichkeit, [illegible] die Wahrscheinlichkeit des Merkmals B, also P(B), [illegible] erste[illegible]tufe des Baum[illegible]ramms ve[illegible]det wird, also die Wahrscheinlichkeit für A unter d[illegible] eingetret[illegible] berechnet [illegible] soll. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann da[illegible] der b[illegible]nten For[illegible]rechnet we[illegible].

[illegible] Frag[illegible] bezieht sich [illegible]uf ein Baum[illegible]amm mit de[illegible] Ereig[illegible] in der erste[illegible]fe.

Berech[illegible] der [illegible]ngten Wa[illegible]nlichkeit [illegible]we[illegible]B in der ersten St[illegible] Baumes ein[illegible]t.	$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Gleichwertig dazu ist die Formulier[illegible] von Bayes, bei der jeweils die totalen Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden.

R[illegible] Bayes	$= \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}$ $P_B(A) = \frac{[illegible](B)}{P([illegible]) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$

Ergänz[illegible]

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert [illegible]lernen

Kapit[illegible]

Definition der [illegible]nlichkeitsverte[illegible]

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich… …rteilung

…pothesentests

Gesa… …elbstorganisiert erlernen (Beste… …278)
S…

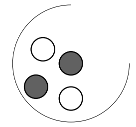
…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 6: Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagramm… …n Sie … …elernt, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse immer den Wert … …rgi… …mit ist Ihnen bereits ein wichtiges Merkmal einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beka… …nt. Es … …lgt … …hand eines einfachen Beispiels, eine Formalisierung und Erweiterung von Begrif… …eiten.

Aufgabe 6.1

Definition der Zufallsvariablen und Darst… …von … …rschei… …lichkeit… …ngen



Aus einer Urne … …wei ro… …und zwei w… …Kugeln w… …alle Kugeln ohne … …ege… …

Aufgabenstellung: Bere… …Sie … …eils die Wah… …lichkeit… …man die beiden roten …geln nach d… 2. Ziehen, n… dem 3. Zi… …oder erst nach dem letzten …hen e… …hat.

Neue Be… …die Aufgab… …tellu…: …ur Vereinfach… …Formalis… …der Schreibweise wird nun eine …allsvariabl… X … …gegeben. … …ufallsvariable X gibt hier die Anzahl der Ziehungen a… die man ben… …damit das Ereignis e, zwei rote Kugeln zu ziehen, e… …ritt.

P(… …) = P(2. … …ugel im 2. Zug) = P(X = 2)
…(…rr) = P(2. …r… Kugel im 3. Zug) = P(X = 3)
…(wwrr) = P(… …ote Kugel im 4. Zug) = P(X = __)

Alterna…:

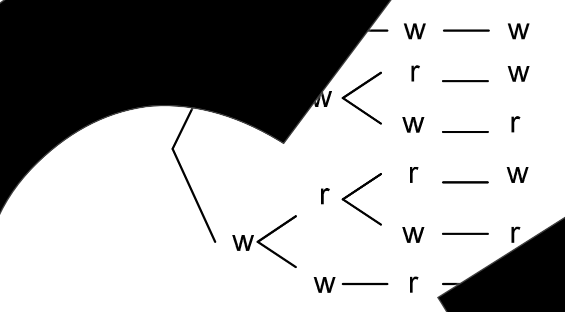
P(e) … (2. rote Kugel im k. Zug) = P(X = k) für k = 2, 3, 4

…de Wahrscheinlichkeit in der Form
…
…tsprechend der Aufgaben-
st… …Werte.

…earbeiten Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie fehlende … …zen.

a) Ermitteln Sie die Wah… …einlichkeiten an den Ästen des Baum… …nd verdeutlichen Sie sich danach … …enden Seite.

Baum…



Darstellung des Zufallsversuchs mithilfe einer tabellarischen Wahrschein[lich]keitsv[ert]eilung				
Angabe der Ereignisse e_i als Klartext	2 rote Kugeln nach **k = 2** Ziehungen	2 rote Kugeln nach **k = 3** Ziehungen	2 r[ote Kuge]ln nach **k =** [illegible]	
Festlegen der Werte für die Zufallsvariable hier: $\mathbf{x_i = k}$	2	[illegible]	[illegible]	
Berechnen der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignis $\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	[illegible]	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\ }+ \ldots = \frac{3}{6}$	Summe aller $P(X = x_i)$ … $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=1$

Die Summe aller $P(X = x_i)$ ist immer 1.

Geben Sie anhand der T[abelle] die folgenden [W]erte an.

P(X = 2) = ____ P(X = 3) = ____ P(X = 4) = ____

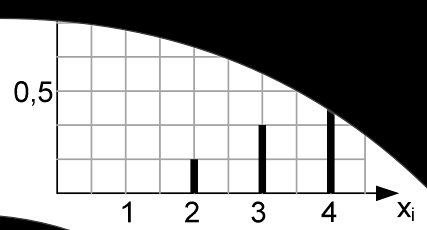
b) Bei der B[ear]beitung [von] Aufgaben ist es nicht immer notwendig, die Wahrscheinlichkeitsverteilung in aller Ausf[ühr]lichkeit anzugeben. Oft ist eine Darstellung in Kurzform ausreichend. Füllen Sie nach[folgende] Tabelle aus.

Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung in Kurzform:

x_i	2	3	4
$\mathbf{P(X = x_i)}$			

c) Häufig werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch mithilfe von Balkendiagrammen dargestellt. Verdeutlichen Sie sich das abgebildete Balkendiagramm, und vervollständigen Sie den nachfolgenden Text.

[Balkend]iagramm



Auf der ____________ [werde]n die Zahlenwerte eingetragen, [die die] Zufallsvariable

$X = x_i$ a[nnimmt. Auf der] __________ Achse werden die Wahrsc[heinlichkeit]en

P([...]) [ein]getragen.

Er[gänzende Bemerk]ungen: ____________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert [ler]nen

Kapit[el 6]

Erwartungswert

02-032-278

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 7: Erwartungswert

Aufgabe 7.1

Definition des Erwartungswerts

Zur Information:

Erwartungswerte sind jedem Schüler unter dem Begr[illegible]ittel[illegible]s bekannt. [illegible]n man gefragt wird, welche Zeit man am Morgen durchschnittlic[illegible]n W[illegible]r Arbe[illegible] benötig[illegible]n[illegible]n, wie in der Tabelle unten, aus mehreren Zeitmessung[illegible]den Mittelw[illegible]stimmen. [illegible] Berechnung entspricht prinzipiell der Ermittlung des Erwartungsw[illegible]s einer Z[illegible]allsv[illegible]ablen be[illegible]ein[illegible]m Zufallsversuch.

Berechnung des Mittelwerts a[illegible]ekan[illegible]

Gemessene Zeit in Mi[illegible]n	25	[illegible]0	35	4[illegible]	45
Absolute Häufig[illegible] des [illegible]swert[illegible]	[illegible]	9	[illegible]	4	2

Vervollst[illegible]ie d[illegible]chnung:

$$\frac{[illegible]\cdot [illegible] \cdot 3[illegible] \cdot 35 + [illegible] \cdot 45}{30} = \_\_\_\_\_\_ \text{ Minuten}$$

[illegible]ung des [illegible]ittelw[illegible]ts unte[illegible]wendung der Begrifflichkeit der Wahrscheinlichkeits[illegible]chung

Verwendet man die Begrifflichk[illegible] der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so entspricht jede gemessene Zeit dem Wert x_i, den eine Zufallsvariable X annehmen kann. Die relative Häufigkeit, mit der eine Zeitmessung auftritt, wird als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Zufallsvariable interpretiert. Da bei 30 Mes[illegible]tritt, schreibt man: $P(X = 40) = \frac{4}{30}$. Den Mittelwert aus al[illegible]rechung als **Erwartungswert E(X).**

[illegible] oben kann unter dem Ge[illegible]einlichkeitsrechnung dann wie folgt [illegible] werden:

Werte der Zufallsvariablen x_i	25	3[illegible]	[illegible]	40	45
Wahrscheinlichkeit P(X = x) für das Auftreten von [illegible]	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	[illegible]	[illegible]	$\frac{2}{30}$

$$E[illegible](X) = [illegible]\frac{[illegible]}{30} + 30 \cdot \frac{9}{30} + 35 \cdot \frac{10}{30} + 40 \cdot \frac{4}{30} + 45 \cdot \frac{2}{30}$$

$$E(X) = \frac{1}{30}(125 + 270 + 350 + 160 + 9[illegible]) = \_\_\_\_\_\_ \text{ Minu[illegible]}$$

Ergänzen Sie:

Der Erwartungswert E(X) einer Zufallsvariable X wird berechnet, indem m[illegible] alle We[illegible] we[illegible] die Zufallsvariable X annimmt, jeweils mit den zugehörigen Wahrscheinlichke[illegible]

_____________________ und die einzelnen Produkte anschlie[illegible] _____________________.

Allgemein lässt sich der Erwartungswert einer Zufallsvaria[illegible] ...inieren:

Ist X eine Zufallsvariable, welche die W[illegible] $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt, [illegible]o heißt die Summe
$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2)$ [illegible] $P(X = x_n) =$ [illegible] $x_i \cdot P(X = x_i)$
Erwartungswert der Zufallsv[illegible] [illegible]er Erwartungswert [illegible]) wird auch [illegible] dem griechischen Buchstaben μ ([illegible]) [illegible]zeichnet.

Aufgabe 7.2

Die Wahrsc[illegible]lichke[illegible]erte[illegible]ng unter [illegible]m Gesichtspunkt des Erwartungswerts

Die Au[illegible] [illegible]ufgabe 6[illegible] wie folgt [illegible]eitert.

[illegible]ird n[illegible] zusätzlich zu den in A[illegible]gabe 6.1 erm[illegible]ten Wahrscheinlichkeiten berechnet, wie viele Zi[illegible]n bei häufigem [illegible]erholen des Zufallsversuchs durchschnittlich oder im Mittel benötigt, um zw[illegible]ugeln zu [illegible]halten. Ergänze[illegible] fehlende Angaben.

Der Erwartungswert beschreibt das Ergebnis, das bei häufiger Durchführung eines Zufallsversuchs [illegible]erwarten ist.

[illegible]verteilung aus Aufg. 6.1

[illegible]	[illegible]	3	4
$P(X = x_i)$	[illegible]	[illegible]	$\frac{3}{6}$

[illegible]erechnung des Erwartungswerts anhand der Definition oben:

$E(x) = x_1 \cdot P(X = x_1) +$ [illegible] $x_3 \cdot P(X = x_3)$

$E(x) =$ __·— + __·— + __·— [illegible] 3

Ergeb[illegible]

Man benötigt bei sehr häufiger D[illegible] des Spiels durchschnittlich _______ Züge, al[illegible] 3 Züge, um zwei ro[illegible]eln zu erhalten.

Aufgabe 7.3

Wahrscheinlichkeitsverteilung unter dem Gesichtspunkt eine[illegible]ären [illegible]ls Erwartungswert.

Eine entscheidende Frage bei Glückspielen ist nicht nur, [illegible]n gew[illegible]er verliert, sondern auch wie viel man gewinnen oder verlieren kann und ob ein Spiel als [illegible]zus[illegible]n ist. Betreiber von Spielcasinos müssten Konkurs anmelden, wenn di[illegible]ebo[illegible]lück[illegible]piele keinen ausreichenden Gewinn abwerfen, um laufende Kosten abzudecken. [illegible]ich[illegible] sich die f[illegible]de Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn bei ein[illegible]iel u[illegible]ertragen Sie die [illegible]sweise auf das anschließende Beispiel.

Die Aufgabenstellung aus Aufgabe 7.2 wi[illegible]n so v[illegible]rt, dass die [illegible]hnung e[illegible]ewinns bzw. Verlusts im Mittelpunkt der Betr[illegible]g ste[illegible] Spielei[illegible]n 1,00 € li[illegible]folgender Gewinnplan vor:

[illegible]gnis	Ausz[illegible]
[illegible]te Kug[illegible] der 2[illegible]ung	[illegible]00 €
[illegible]te Kugel[illegible]nach der [illegible]ung	[illegible],00 €
[illegible]eln nach d[illegible] Ziehung	0 €

Für die[illegible]ewinn- [illegible] Verlustberechnu[illegible] darf man jetz[illegible] nur den ausgezahlten Gewinn laut [illegible]win[illegible] betra[illegible]n, sondern m[illegible] von der Bila[illegible] Ein- und Auszahlung ausgehen, d.h. von d[illegible]wa[illegible] oder der A[illegible]ter des S[illegible] nach dem Spiel in der Tasche hat. Man muss sich in [illegible] Reg[illegible]cheiden, [illegible] Berechnu[illegible] aus Sicht des Spielers oder des Ausrichters erfolgen.

[illegible] Tabelle s[illegible]lt die Gewinn- [illegible] Verlustrechnung aus Sicht des Spielers dar:

Erei[illegible]	Auszahlung	Gewinn- /Verlustrechnung
2 rote Kugeln nach der 2. Ziehung	3,00 €	2,00 €
2 rote Kugeln nach der 3. Ziehung	1,00 €	0 €
2 rote [illegible]	0 €	–1,00 €

[illegible]us Sicht des Spieleausrichters.

Ereignis	[illegible]	[illegible]winn- /Verlustrechnung
2 rote Kugeln nach der 2. Ziehung	3,[illegible]	
2 rote Kugeln nach der 3. Ziehung	1,00 €	
2 ro[illegible]hung	0 €	

Wie S[illegible]dern Sie nur die Vorzeichen der Za[illegible] der Gewinn-/Ver[illegible] das Ergebnis keine Rolle, aus welche[illegible]ein Spiel b[illegible]genden Be[illegible]hnungen und die entsprechende Wahrsche[illegible]erteilung werden [illegible] Spielers durchgeführt.

In der Wahrscheinlichkeitsverteilung ändert sich im Vergleich zu Aufgabe 7.2 bei [illegible] monitären Gewinns die Bedeutung der Zufallsvariablen $X = x_i$. Die Zufallsvariable X [illegible] nun n[illegible] mehr die Anzahl der Ziehungen an, sondern ordnet den einzelnen x_i den Gewi[illegible] Verl[illegible] Spiel zu. Für die Beschreibung des eingetretenen Ereignisses beim Ziehen ka[illegible] zus[illegible] die Variable e_i verwenden. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ere[illegible] w. für den Gewinn/Verlust x_i bleibt hinsichtlich der Aufgabe 7.2 unveränder[illegible]

[illegible]ile f[illegible]ie Formulierung der Erei[illegible]e e_i sorgt f[illegible]ehr Transparenz hin[illegible]htlich der [illegible]ufgabenste[illegible]t zu [illegible]mpfehlen[illegible] nicht notwendig.

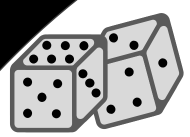
Darstellung des Zufallsv[illegible]bellarische Wa[illegible]scheinlichk[illegible]verteilung			
Auflistung der Ereig[illegible]	e_1: 2 [illegible]ugeln nach 2 Ziehungen	[illegible] rote Kugeln [illegible] 3 Ziehungen	e_3: 2 rote Kugeln nach 4 Ziehungen
Jedem Er[illegible] wi[illegible] zahlen[illegible] des Gewin[illegible] x_i zuge[illegible]et.	2,[illegible] €	[illegible] €	–1,00 €
[illegible]	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Der mittle[illegible]ewinn bei vi[illegible] durchgefü[illegible] Spielen, also der Erwartungswert, wird nun entsprechend zur Definition berechnet.

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) = 2{,}00\ € \cdot \frac{1}{6} + 0\ € \cdot \frac{2}{6} + (-1{,}00\ €) \cdot \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}\ € = -0{,}17\ €$$

Das bedeutet, d[illegible]r Durchführung des Spiels 17 Cent pro Spiel verliert.

[illegible]aufgabe zur Berechnung des Erwartungswerts bei [illegible]iel



Folgendes Glücksspiel wird Ihnen vorgeschlagen:

Es wer[illegible] geworfen. Sie erhalten die von [illegible]n angezeigte A[illegible] diese geradzahlig ist, und S[illegible] angezeigte [illegible] eine ungerade Zahl ergibt.

Entsch[illegible]ontan, d.h. ohne die folgenden Rechnungen zu b[illegible] Sie sich auf dieses Spiel einlassen würden: [illegible] nein❍

Übersicht der Augensummen beim Werfen von zwei Würfeln

Ereignis e_i: mögliche Augensumme	Würfelkombinatio[illegible] für di[illegible] möglichen Auge[illegible]n: (erster Würfel;zw[illegible])	[illegible]ahl der Ereignisse
2	(1;1)	
3	(1;[illegible](2;1)	
4	(1;3[illegible]3;1)	
5	[illegible];4)(2[illegible]2)(4;1)	
6	(1;5)[illegible];4)[illegible]3)(3;2)(3[illegible]	
[illegible]	(1;6[illegible];5)(3;4)(4;[illegible];2)(6;1)	
8	[illegible](3;5)(4;4)[illegible]3)(6;2)	
[illegible]	(3;6)(4;5)(5;[illegible](6;3)	
10	(4;6[illegible];5)(6;4)	
[illegible]	[illegible];6)(6;5)	
[illegible]	[illegible];6)	

T[illegible]elle[illegible] Wahr[illegible]einlichkeits[illegible]eilung und [illegible]echnung des Erwartungswerts

[illegible]eignis [illegible] (A[illegible]nsumme)											
[illegible]ariable x_i Ein-/Auszahlung											
$P(X = x_i)$											

Erwa[illegible] ____________________

____

[illegible]ebnis: Der Erwartungswert nimmt den Wert Null an[illegible]ür Sie und den Mitspieler weder ein Gewinn noch ein ______________. Man erken[illegible]iel fair ist, und weiß nun siche[illegible]uf einlassen kann.

[illegible]e spontane Entscheidung getroff[illegible] nein❍

[illegible]e Übungsaufgaben: ____________________

____

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert le…en

Kapite…

Varianz und Standardabw…g

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

[illegible]othesentests

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 8: Varianz und Standardabweichung

Wie Sie bereits wissen, entspricht die Berechnung des Erwartungs[illegible]E(X) de[illegible]g eines Mittelwerts für eine Zufallsvariable X. Bei vielen Prozessen in der A[illegible] wie beispielsweise bei Messungen in der Physik oder bei der Herstellung von Baut[illegible]len, rei[illegible]es [illegible]s nicht aus, diesen Mittel- bzw. Erwartungswert zu kennen. Vielmehr benötigt [illegible] eine A[illegible], ob und wie viel die gemessenen Werte oder Bauteile von diesem Mittelwert abw[illegible]n. B[illegible]ertigungsprozessen in der Praxis werden diese Abweichungen auch als **Fertig[illegible]n** be[illegible]chnet. Die Abweichungen vom Erwartungswert werden mithilfe der sog. **Varian[illegible]dardabwei[illegible]g**, gewonnen. Verdeutlichen Sie sich anhand von Aufgabe [illegible] 8.2 [illegible] man diese Größe[illegible]ehnet. Übertragen Sie Ihre Erkenntnisse dann auf die folgen[illegible]bungsaufga[illegible]

Aufgabe 8.1

Varianz und Standardabwei[illegible]ng bei Fer[illegible]leranz[illegible]

Ein Hersteller von kreisförmige[illegible]en vermutet [illegible]und von Bes[illegible]erden seiner Kunden, dass seine S[illegible]schine nicht [illegible]hr exakt ge[illegible]arbeitet u[illegible] eine neue ersetzt werden mu[illegible]m [illegible]erzu[illegible]dass sei[illegible]mutung hinsi[illegible]tlich der Fertigungstoleran[illegible]lässt er aus der Produ[illegible] 100 Sche[illegible] vermessen. Die Scheiben sollen ein[illegible] von 50 c[illegible]ben.
Übersch[illegible]durc[illegible]nittliche Abwe[illegible]iesen W[illegible] als 1 cm, muss er sich für eine ne[illegible]nt[illegible]den und d[illegible] Investi[illegible]sten in Kauf nehmen.

50cm

An[illegible]: Die [illegible]lenwerte sind [illegible]wählt, dass [illegible]echnungen möglichst einfach we[illegible], entsprech[illegible]nit alle[illegible] realistischen Gegebenheiten.

Ze[illegible] Sie durch Rechnung[illegible] sich als E[illegible]ungswert für den Durchmesser der Scheiben der [illegible] von 50 cm ergi[illegible] Zufallsvaria[illegible] nimmt hier die Messwerte für den Durchmesser der 100 [illegible] an.

Zufallsvariable **X = x_i**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Messwerte für die x_i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50	51	52	53	
[illegible] (X=x_i)	$\frac{[illegible]}{100}$	$\frac{[illegible]}{100}$	$\frac{[illegible]}{100}$	[illegible]	$\frac{23}{[illegible]}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\sum = 1$

Erwartungswert:

E(x) $= P(X = x_1)\cdot x_1 + P(X[illegible])\cdot x_2 + P(X = x_3)\cdot x_3 + P(X = x_4)\cdot x_4 + P([illegible]X = x_6)\cdot x_6 + P(X = x_7)\cdot x_7$

$= [illegible]$ ____+ ______+ ______+ ______+ ___

B[illegible]arum die [illegible]nung des Erwartungswerts nicht ausrei[illegible] Entscheidung für [illegible]e Neuinvestition zu treffen.

Ergänzen Sie für die folgenden Berechnungen die fehlende Angaben.

Für den Erwartungswert wird hier μ verwendet.

Um das Rechnen mit n… Vorze… zu vermeiden und um g…ere …ich-ungen stärker …ewich… …die einfachen Abw…ungen …riert.

Einfache Abweichung der x_i vom Erwartungswert	$x_1 - \mu$	$x_2 - \mu$	x_3…	x_4…	$x_5 - \mu$	… μ	$x_7 - \mu$
	47 – 50	48 – ___	49 ___	5… ___	51 – ___	…2 – ___	53 – ___
$x_i - \mu$	–3	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	
Quadrierte Abweichung der x_i vom Erwartungswert **$(x_i - \mu)^2$**	$(x_1 - \mu$…	… $- \mu)^2$	… $\mu)^2$	…	$(x_5 - \mu)^2$	$(x_6 - \mu)^2$	$(x_7 - \mu)^2$
			___	___		___	___

Varianz V(X…

V(x) … P(X … $(x$… $+ P(X = x_2)$ … $+ P(X = x_3) \cdot (x_3 - \mu)^2 + P(X = x_4) \cdot (x_4 - \mu)^2 + P(X = x_5) \cdot (x_5 - \mu)^2$

… $P(X = x_6) \cdot (x_6 - \mu)^2 + P(X = x_7) \cdot (x_7 - \mu)^2$

V(x) = … $\cdot 9 + \frac{10}{100} \cdot 4$ … ___ + … ___ + —— · ___ + —— · ___ + —— · ___

V(x) = 1,62

Standardabwei…

σ = …

Durch das Ziehen der Wurzel aus dem berechneten Wert für die Varianz wird die …**rdabweichung σ** (Sprich: sigma) …mit wird das Quadrieren der …hungen relativiert.

…heidung des Herstellers: Der Hersteller entscheidet sich auf… …robe _________ den Kauf einer neuen Maschine, da ____________________

____

____

Allgemeine Definition der Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sum_{i}^{n} P(\ldots) \cdot (x_i - E(x))^2}$$

Aufgabe 8.2

Varianz und Standardabweichung bei der Auswertung von Me…

Wie Sie aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht sicherli…h wisse… mus… bei jeder Messung beachten, dass Messfehler auftreten. Bei der vollständige… …wertu… …Messung müssen diese Messfehler angegeben werden. Im Allgemeinen wird das als …erre…ng bezeichnet. Ergänzen Sie die für die folgende Messung fehlenden Angaben.

Zur Bestimmung der Beschleunigung a bei … …eich… …g beschleunigten …e…g wird die folgende Messreihe aufgenommen:

Zeit t in [s]	Geschw. v in $\left[\frac{m}{s}\right]$	Beschleunigung a = …	Einfach… …bweichung … von a vom E…ngs- bzw. …telwert a_i – …	Quadrie… …weichung der We… von a vom Erwartungs- bzw. Mittelwert $(a_i - \bar{a})^2$
1	0,9	0,9	0,9 – … 0,21	0,0441
2	1,0	[illegible]	________	________
3	2,4	0,8	________	________
4	2,5	0,…3	________	________
[illegible]	3,1	0,62	________	________
[illegible]	4,2	0,7	________	________
Mittelwert für a: $E(a) = \bar{a}$		0,69		

…Technik … …gekennzeichnet. Hier a (spr…

Varianz: $V(a) = \frac{1}{6} \cdot ($ 0,0441 + ________ + ________ + ________ … + ________$)$

… dieser Messung für die Standardabweichung σ = $\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_}$

Übungen

Ü8.1: Varianz und Standardabweichung bei Fertigungstoleranzen

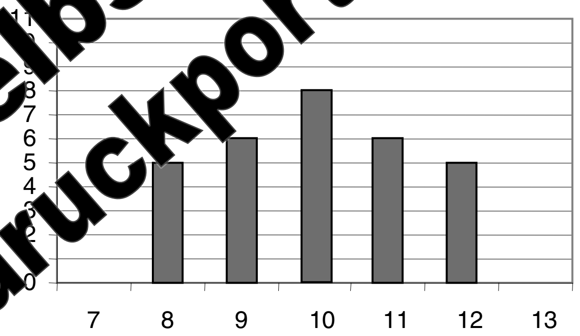
Zwei Maschinen A und B schneiden Stahlstifte auf die Länge von 1... wobei Abweichungen bei der Stiftlänge auftreten. Bei 30 Stiften werden jeweils die gemes... in einer Häufigkeitsverteilung dargestellt. Entscheiden Sie intuitiv, ...che der ... besser arbeitet bzw. die kleinere Fertigungstoleranz hat, und prüfen Sie du... Be...ung der Standardabweichung, ob Ihre Entscheidung richtig ...

❍ Maschine A arbeitet besser
❍ Maschine B arbeitet besser

Bei den Stabdiagrammen sind auf der ho...talen A...e die Information... über die Länge der Stifte aufgetragen und auf der ve... A... dere... absolute H...keiten. Entn... Sie die Informationen zu Messwerten ... Wahrsche... den ... Diagrammen, ... füllen Sie die Tabelle entsprechend zur ... aus:

Masc...

Maschine B



Re...g für Mas...ine A:

	Maschine A						
Messwerte x_i	$x_1 = 7$	$x_2 = 8$	$x_3 = 9$	$x_4 =$ ___	$x_5 =$ ___	$x_6 =$ ___	$x_7 =$ ___
relative Häufigkeit: $H(x_i)$ bzw. Wah...							

...wert: E(X) = ____

____ = 10

Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert x_i – ...							
Quadrie... Abwei... $(x_i$ ...							

...)) = ____

____

...dabweichung: σ = ____________

Rechnung für Maschine B:

	Masch...				
Messwerte x_i	$x_1 =$ ______	$x_2 =$ ______	$x_3 =$ ______	______	$x_5 =$ ______
relative Häufigkeit: $H(x_i)$ bzw. Wahrscheinlichkeit: $P(X=x_i)$					

Erwartungswert: E(X) = ____

____

Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert x_i – E...					
Quadrierte Abweichung: $(x_i – E(...))^2$					

V...anz: V... = ____

____ = ____________

Standardabweichung: ... = ____________ = 1,31

Ergebnis:

Anhand des Erwartungswerts kann man nicht entscheiden, welche der Maschinen eine kleinere

Toleranz hat, da diese Werte bei beiden Maschinen ______________________________.

Ma... ...ranz als Maschine ___, da die Standard-

...bweichung bei Maschine ___ ist.

...tuitive Entscheidung war: ❍ richtig...

Ü8.2 Recherchieren Sie in geeigneten Quellen, welche Bedeutu... ...dabweichung bei Glücksspielen ...

____

____

____

...nde Übungen: ____

____

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert lernen

Kapit

Binomialverteilun

02-032-278

Gesa lbstorganisiert erlernen (Beste 278)

 SelbstVerlag
 tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
 lehrerselbstverlag.de
 www.f-druck.de

Kapitel 9: Binomialverteilung

Die Binomialverteilung stellt eine wesentliche Basis bei der statisti uswert Daten dar und nimmt damit hinsichtlich vieler Anwendungsprobleme in der Wirtsch M und anderen Gebieten einen besonderen Stellenwert in der Wahrscheinlichkeitsre ng ei ha olgenden Aufgabe soll verdeutlicht werden, was man unter einer Binomialver vers

Aufgabe 9.1

Herleitung der Formel von Bernoulli

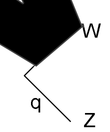
Eine verbeulte Münze zeigt beim Werfen en mi r unbekann Wahrscheinlichkeit p und Zahl dami bekann Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Münz ird als gewo

p(Wappen) = p(W) =
p(Zahl) = p(Z) p

Die Zufallsvariable e oft Wappen ge en ist.

Ermittel fe d egebenen B iagramme d w ligen Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ in allgem r For Pro te von p u q eachten S bei, wie oft der jeweilige Pfad auftritt, und ergänz Sie die drücke für die hr scheinlichke owie weitere fehlende Angaben in der hli d ang benen Tab

a) 1 l werfen

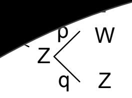


P(0 W ppen) = P(X = 0) = q

P(1-mal Wappen) = P(X = 1) = p

b) 2-m

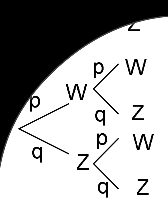
 = q^2



P(1-mal Wappen)

P(2-mal Wappen) = P(X =

c) 3-mal werfen



 l Wappen) = P(X = 0) = ________

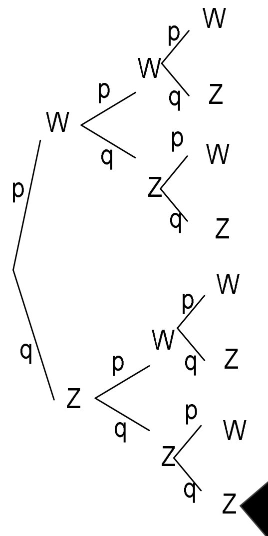
 (1-mal Wappen) = P(X = 1) = ________

P(2-mal Wappen) = P(X = 2) = ________

P(3-mal Wappe = ________

d) 4-mal werfen

Ergänzen Sie die vierte Stufe im Baumdiagramm, und bestimmen Sie … ahrsch… n.



P(0-mal Wappen) = P(X = 0) = ____

P(1-mal Wappen) = P(X = ____

P(2-mal Wapp… = P(X = 2) = ____

P(3… Wappen) = …) = ____

…-mal Wapp… = P(X = 4) = ____

Wahrscheinlich… verte… für die Zufallsvariable X. Erg… die fehlende Angaben.

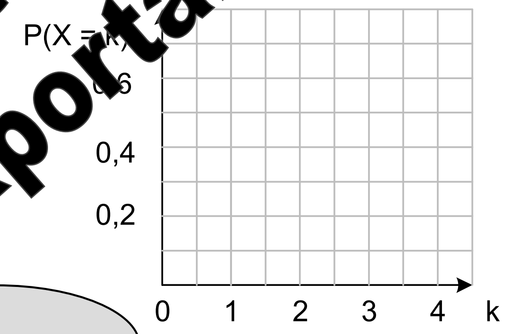
Ereignisse		0 x Wappen	1 x Wappen	2 x Wappen	3 x Wappen	4 x Wappen
Werte … k der Zufallsvariablen		0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit für die Zufallsvariable P(X = k) bei n Würfen		P(X = 0)	P(X = 1)	P(X = 2)	P(X = 3)	P(X = 4)
Anzahl n der Würfe	n=1	q	p			
	n=2			p^2		
	…				p^3	
	n=4	q^4	____		____	p^4
…tzen von …nomialkoeffizienten und Vervollständigen der Potenzen von p und q		$\binom{4}{\ }p^0q^4$	$\binom{4}{1}p^1q^3$	$\binom{\ }{2}p^2q^2$		$\binom{\ }{\ }p^{\square}q^0$
Umformen … Exponen…			$\binom{4}{1}p^1q^{4-1}$	$\binom{4}{2}p^2q^{4-2}$	$\binom{4}{3}p$…	$\binom{4}{\ }p^4q^{4-\square}$
Vera… für n … k…		$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\binom{\ }{\ }p^{\square}(1-p)^{\square}$			Form… …noulli	

e) Ermitteln Sie für den Münzwurf die Zahlenwerte für die Wahrscheinlichke… teilung … vier Dezimalstellen genau, wenn die Wahrscheinlichkeit für Wappen bei der ver… M… p = 0,3 beträgt.

Ereignisse e_i als Klartext	0 x Wappen	1 x Wappen	2 x …en	…Wappen	4 x Wappen
k	0	1		3	4
P(X = k)	$\binom{4}{0}0{,}3^0\cdot 0{,}7^4$ = ____	$\binom{4}{1}0{,}3^1$…	$\binom{4}{2}$… $0{,}7^2$	$\binom{\ }{\ }0{,}$… $\cdot 0{,}7$… =	$\binom{\ }{\ }0{,}3^{-}\cdot$ ____ ____

Zeigen Sie, dass die Summ… Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse … den Wert 1 ergibt, und stellen Sie die berechn… W… von … als Säulendiagramm …r.

Summ… X = … ____



Die Wahrschein…ichkeiten P(X = k) werden mit der Formel von Bernoulli berechnet. Da diese Formel aus dem Pasca…chen Dreieck und … aus der Berechnung von Binomen … Form $(p + q)^n$ hervorgeht, bezeichnet man die hier vorliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung als

Binomialverteilung.

… von Bernoulli wurde anhand des Münz… …so einem Zufallsversuch, bei dem … die beiden Ausgänge Wappen und Zahl gibt und … …rscheinlichkeiten p und q = 1 – p für Wappen und Zahl bei jedem Werfen der Mün… Stufe des Zufallsversuchs gleich bleiben. Diese beiden Eigenschaften sind Grundvoraus… Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Formel von Bernoulli. Damit gil…

Eine Zufalls… <u>binomialverteilt</u> , wenn

- **da… …m Ereignis E und dem zugehörig… …reignis $\bar{E}$ nur zwei … …stellt werden kann, dass die Wahrscheinlichkeit p für das … und die …scheinlichkeit q = 1 – p für das Gegenereig… $\bar{E}$ in jeder Stuf… …sexperimentes gleich bleibt.**

Aufgabe 9.2

Anwendungsbeispiele für binomialverteilte Zufallsgrößen

Problemstellungen, die man auf einen Zufallsversuch mit gleichbleibenden Wahr... lichkeiten in jeder Stufe und zwei Ausgängen zurückführen kann, können mithilfe der Binomial... also mit der Formel von Bernoulli gelöst werden. Dies soll nun anhand der nach... enden ... ei Beispiele exemplarisch gezeigt werden. Arbeiten Sie die Beispiele ..., er... Sie ... bei fehlende Angaben und formulieren Sie entsprechende Begründungen.

Beispiel 1

Bei der automatisierten Produktion von Biergläs... für die ...stronomie haben 10% der Gläser Fehler, sind daher nicht verkäuflich, werden bei ... Ko... e au... tiert und ... eingeschm... zen.

a) Um die Fehlerrate bei der Produ... werden der laufenden Produktion 10 Gläser entnommen und auf Fehler geprü... echn... Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Stichprobe genau drei G... it einem Fehl... befinden.

...laufenden Produktion entnehmen heißt, dass die Wahrscheinlichkeit von 10% für das Auftreten eines Fehlers bei jeder Ent... e gleich ist, ... ständig neue Gläser mit der gleichen Fehlerrate hinzukommen.

Zuo... n d... ungsgrößen ... p, k und P(X...) der Formel von Bernoulli.

...handelt sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable, da es nur die beiden Ausgänge „Glas mit Fe... und „Glas ohne Fehler $\bar{F}$“ gibt und die Wahrscheinlichkeit für F bzw. $\bar{F}$ bei jedem Ziehen gleich bleibt.

Anzahl der entnommenen Gläser: n = ___

Anzahl der Gläser mit dem Merkmal Fehler: k = ___

Wahrscheinli...

...halt in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit v... ...ei Gläser mit einem ...hler.

b) In einer Kiste mit 10... ...ich 100 nicht geprüfte Gläser, ...ser mit Fehler. Wie groß ist di... ...an hier bei der Entnahme vo... genau ein fehlerbehaf...

...gen... ...in Zufallsversuch, der den Bedingungen ... ...ialver- ...allsvariablen entspricht, da man ohne Zurücklegen zieht und ... die ...einlichkeit in den verschiedenen Stufen des Zufallsversuchs ä... ...an die ...probe jedoch aus einer umfangreichen Menge ...n 100 Gläsern ent... ...ern hier Wahrscheinlichkeiten von Stufe zu St... ...enig, und man k... ...mel ... Bernoulli für die Berechnung einer Näh... ...g anwenden.

i) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit näherungsweise mithi... ...er Form... ...on Bernoulli.

Anzahl der entnommenen Gläser: n =___

Anzahl der Gläser mit Fehler: k =___

Wahrscheinlichkeit für das Merkmal Fehler: p =___

P(X = ___) = ______________________ = 38,7...%

ii) Zeigen Sie, dass sich mithilfe von ko... ...inatoris... ...n Verfahren ... genaue We... ...8%, das heißt nur eine Abweichung von ... % zu... ...he... ...sweise e... ...en Wert, er...

n = __ → n_F = __ , $n_{\bar{F}}$

k = ... → ... , $k_{\bar{F}}$ = __

Achtung
Die Bedeu... ...ngen von n ... k unterscheiden sich in der Kombinatorik ...n der bei der Binomialverteilung.

P(X...

...einem Ka... mit 20 ungep... ...Gläsern befinden sich 10% Gläser mit Fehler. Berechnen Sie auch hier die W... ...rscheinlich..., dass sich unter 10 entnommenen Gläsern eines mit einem Fehler befindet, als Näh... ...ert mit der Formel von Bernoulli und mit dem kombinatorischen Verfahren. Zeigen Sie du... Rechnung, dass die beiden Werte nun fast 14% voneinander abweichen und die Verwendung der Formel von Bernoulli hier nicht mehr geeignet ist.

d) Der laufenden Produktion wird eine Stichprobe von 50 Gläsern entnomm... Zeigen ... durch Rechnung, dass sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 61,6% in dieser Stichpr... höchs...s fünf Gläser mit Fehler befinden.

Anzahl der entnommenen Gläser: n =

Anzahl der Gläser mit Fehler: k =

Wahrscheinlichkeit für Fehler: p =

H...chstens ...heißt, ... in der Stichprobe ..., 3, 4 oder 5 Gläser mit Fehler enthalten sein können.

$P(X \le 5)$ = P(X = 0) + P(X = __) + P(X = ... (X = __ ... P(X = __) + P(X = __)

Kapitel 9

= ____________________

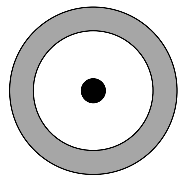
____

= ____________________

In der Stichprobe ... mit einer Wahrscheinlichkeit von 61,6% höchsten 5 Gläser mit einem Fehler.

Beispiel 2

Ein ge...r S...r trifft ... der abgeb...ten Zielscheibe beim Dart mit einer Wahrsc...lichk... 0% den schwarzen Punkt, mit einer Wahrscheinlichkeit von ... den weißen und einer Wahrscheinlichkeit von 5... den grauen Ring.



a) Beg... Sie, warum die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei der folgenden Aufgabenstellung nicht mit der Formel von Bernoulli berechnet werden kann.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der geübte Spieler bei 10 Würfen 7-mal den schwarzen Punkt, zweimal den weißen und einmal den grauen Ring trifft.

Begründung: ____________________

____

..., warum die gesuchte Wahrscheinlic... Aufgabenstellung mit der Formel von Bernoulli berechnet werden kann, und zeige... Wert von 20,1% ergibt.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit we... bei 10 Würfen genau 7-mal das schwarze und dreimal nicht das schwarze Feld tr...

Begründung: ____________________

____

Rech...

p= ________

P(________) =

Beispiel 3

Im Rahmen eines Bewerbungsverfahrens muss ein Multiplechoice-T... hinsich... Kenntnisse in Algebra ausgefüllt werden. Der Test gilt nur dann als bestanden, w... ...stens ... Aufgabe falsch beantwortet wird. Ein Bewerber hat keine Kenntnisse und kreuzt die ...twort... ...ein zufällig an.

Kreuzen Sie die richtigen Antworten selbst an, und begrün... Sie da..., dass man die Wahrscheinlichkeit, den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, n... beim Test A und nicht beim Test B mithilfe der Formel von Bernoulli berechnen kann, ... sich ...erfür beim Test A eine Wahrscheinlichkeit von etwa 10% ergibt.

Test A: Aufgabe A1 bis A4

A1: $-\frac{2^2}{3} = \begin{cases} -\frac{4}{9} & ❍ \\ -\frac{4}{3} & ❍ \\ \frac{4}{3} & ❍ \end{cases}$

A2: ... $-\frac{...}{25}$ ... $\frac{9}{...}$ ❍

A3: ... $^2)^3 = \begin{cases} a^5 & ❍ \\ a^6 & ❍ \\ a^8 & ❍ \end{cases}$

A4: $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \begin{cases} \frac{4}{a+b} & ❍ \\ 2\frac{a+b}{...} & ❍ \\ ... \end{cases}$

...t B: Aufgabe B1 bis B4

B1: $\sqrt{a^3} = \begin{cases} a^{\frac{3}{2}} & ❍ \\ a\sqrt{a} & ❍ \\ ... & ❍ \end{cases}$

B2: $(x^2-1)^2 = \begin{cases} x^4+1 & ❍ \\ (x+1)^2(x-1)^2 & ❍ \\ x^4-2x^2+1 & ❍ \end{cases}$

B3: $\frac{a}{\frac{1}{a}} = \begin{cases} 1 & ❍ \\ \frac{1}{a^2} & ❍ \\ a^2 & ❍ \end{cases}$

B4: $\frac{a}{\frac{3}{2}} = \begin{cases} \frac{3a}{2} & ❍ \\ \frac{2a}{3} & ❍ \\ \frac{3}{2}a & ❍ \end{cases}$

...ündung: ____________________

____

____

Rechnung

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de
©

Zusammenfassung und Ergänzungen zur Schreibweise

Sie haben in den Beispielen von Aufgabe 9.2 gelernt, unter welchen Bedi… die … Bernoulli für Berechungen von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden … wann … von einer binomialverteilten Zufallsvariablen ausgegangen werden kann. Es wurde … vielseitige Problemstellungen aus der Praxis mithilfe der Formel von Berno… gelöst w… konnten, dass jedoch Aufgabenstellungen, die in der Form $P(X < k)$ oder $P(X \le k)$ vorlieg… einen … angreichen Rechenaufwand nach sich ziehen, da die Formel mehrfa… für ver… ene … rte berechnet werden muss. Da man diesen Rechenaufwand erheblich verringer… … in der nächs… Aufgabe lernen, spielt die Anwendung der Binomialverteilung … F… eine g… e Rolle. Be… Verwendung der Formel von Bernoulli im Rahmen der Berech… on bino… verteilten Zu… ablen wird häufig die Schreibweise $B_{n;p}(k)$ wie folgt angewandt:

Für eine … omi… teilte … allsvar… able … lt:

$$P … = B_{n;\,p}(k) = … p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} … (1-p)^{n-k}$$

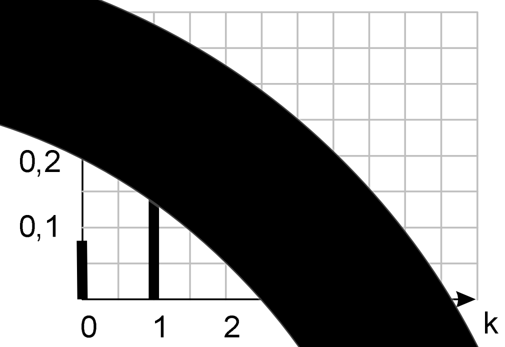
Für n = 10, … und p … 8 sc… eibt man: $P(X = 7) = B_{10;0,…}(7) = \binom{10}{7} 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}2013$

… gabe …

Umga… er Binom… lverteilung

a) Berechnen Sie die binomialverteil… … ahrscheinlichkeiten $P(X = k) = B_{5;\,0,4}(k)$ mithilfe der Formel von Bernoulli, und tragen Sie Ihre Erge… isse an den vorgesehenen Stellen ein. Vervollständigen Sie anschließend das Säulendiagramm.

k	
0	
1	
2	$B_{5;0,4}(2) =$
3	$B_{5;0,4}(3) =$
4	$B_{5;0,4}(4) =$
5	$B_{5;0,…}$



Die W… … averteil… … gen in Tafelwerken und oft auch Schulbü… … ert vor und kön… … aschenrechner oder Computer ermittelt werden. Vergleichen … die B… … ung ermittelten Werte mit einer entsprechenden Tabelle aus ei… … rk oder mit … chenrechner erzeugten Liste. Lesen Sie dazu … in der Bedienung … des … ners nach, wie die Werte einer Binomialv… … als Liste oder Ei… … rzeugt … nen.

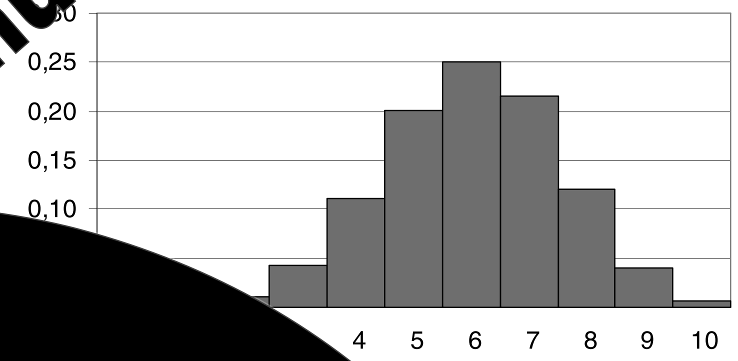
b) Im Säulendiagramm ist eine $B_{5;\,0,7}(k)$-Verteilung abgebildet. Lesen Sie d… … rte für … Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ aus dem Diagramm näherungsweise ab, un… … en S… e Werte in der Tabelle ein. Berechnen Sie die Werte anschließend mit der … von B… … vier Nachkommastellen genau.

k	P(X = k)	
	Werte abgelesen	Werte berechnet
0		
1		
2		
3		
4		
5		

c) Erm… n von W… scheinlichkeit… der Form $P(X < k)$, $P(X > k)$, $P(X \le k)$ und $P(X \ge k)$.

… der … d im Säulen… agramm sind … Zahlenwerte einer $B_{10;\,0,6}(k)$-Verteilung gegeben.

k	P(X = …
0	0,000…
1	…16
2	0,0106
3	0,0425
4	0,1115
5	0,2007
6	
…	…
…	0,0060



…) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X < 5) = P(X$ … … en Sie im Stabdiagramm, welche Balken hier aufsummiert werden.

$P(X < 5) = P(X$ … $(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X$ …)

… ________ + ________ + ________ = ________

… dieser … scheinlichkeiten kann ebenfalls mithilfe v… … in Tafelwerken … Taschenrechner erfolgen. Man verwendet hier die **Binomia… … nktion $F_{n;\,p}(k)$.** … sieren Sie den gesuchten Wert in einer derartigen Tabelle, bzw. … ie den Wert … ilfe Ihres Taschenrechners.

… $X < 5) = P(X \le 4) = F_{10;0,6}(4) =$ ________

ii) Ermitteln Sie anhand der Tabelle oder mithilfe des Taschenrechners für eine ...(k)-V... lung die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

$P(X < 20) = P(x \leq 19) = F_{50;\,0,5}(19) =$ ____________

$P(X < 30) =$ ____________

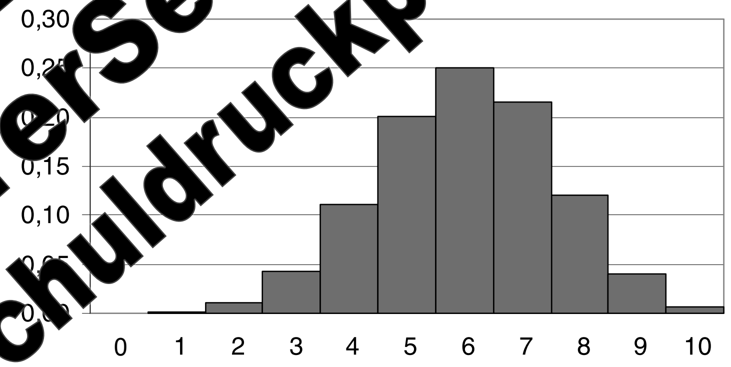
$P(X \leq 25) =$ ____________

$P(X \leq 11) =$ ____________

$P(X < 40) =$ ____________

iii) Markieren Sie in der folgende... teilung und im Säulen... agramm die Werte bzw. Balken, die man aufsummiere... diese Verteilung die Wahrsch... keit $P(X \geq 5)$ zu ermitteln, und zeigen S... Verwend... der gedruck... Tabellen, d... entsprechende Summenbildung a... d... folgende..., dass sich der Wert 0,8377 ergibt.

k	P(X = ...
0	...001
1	0,...
2	0,01...
3	0,04...
	...
	0,2007
	0,2508
	0,21...
8	0,1209
9	0,0403
10	0,0060



$P(X \geq 5) =$ ____________

... und auch nicht direkt mit dem ... erhalten. Man muss hier mit ... lichkeit arbeiten. Da die ... der Werte aller Balken bei einer Verteilung ... pricht die Summe des ... s 10. Balkens der Gegenwahrscheinlichkeit der Sum... n 4 Balken. Für die Rechnung bedeutet das:

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_{10;\,0,6}(4) = 1 - 0,1663 = 0,8337$

iv) Bestimmen ... ung die folgenden Werte:

P(X ... ____________

P... ____________

= ____________

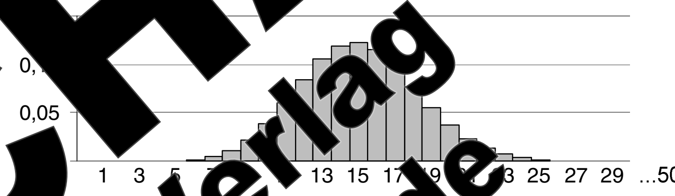
= ____________

Übungen

Ü9.1 Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten mit der Binomialsumme... $F_{50;\,0,3}$(... kieren Sie die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten im dargestellten Auss... itt d... ulendiagramms der $B_{50;0,3}(k)$-Verteilung, und bestätigen Sie jeweils die a... gegebene... lichkeiten mithilfe des Taschenrechners und oder einer entsprechenden Ta...

a) $P(X \leq 13) = F_{50;0,3}(\_\_\_)$

= 0,3270

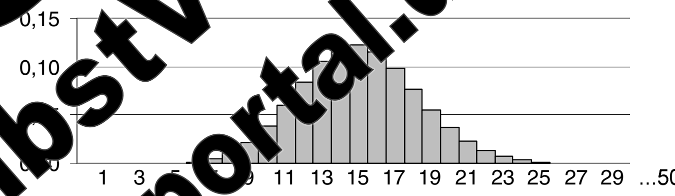


b) $P(X > 17) = 1 - (\_\_\_$

= ... $F_{\_\_;\_\_}(\_\_\_)$

= 1 ...

= ...78



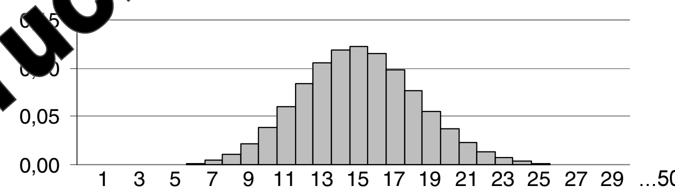
$P(X \geq 2$...

= ____________

= ____________

= ____________

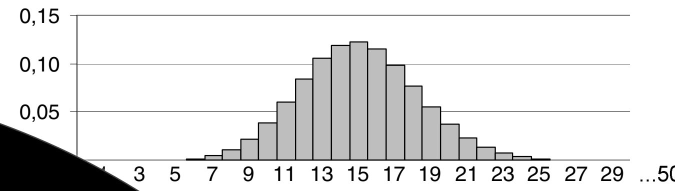
= ...0478



d) $P(X \leq 9) + P(X \geq 20)$

$= P(X \leq 9) + 1 - P(X \leq 19)$

= F...

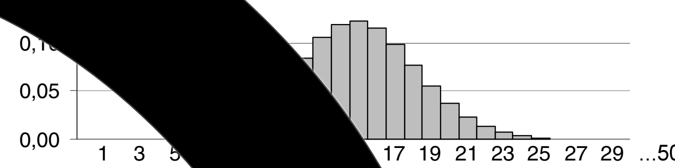


...(11 < X < 18)

$= P(X \leq 17) - P(X \leq 11)$

$= F_{\_\_;\_\_}(\_\_\_) - F_{\_\_;\_\_}(\_\_\_)$

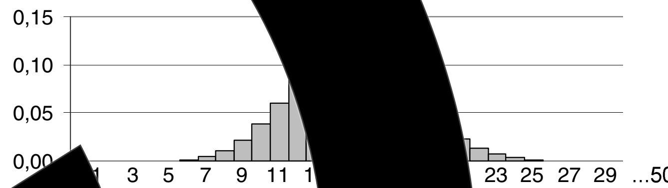
= ...



...) – F(_______)

$= F_{\_\_;\_\_}(\_\_\_) - F_{\_\_;\_\_}(\_\_\_)$

= ________ – ________ = 0,9804



Aufgabe 9.4

Ermitteln von k bei der Binomialsummenfunktion

Anhand des folgenden Beispiels soll verdeutlicht werden, dass es auch A… …gen gibt, bei denen k ermittelt werden muss. Verdeutlichen Sie sich dazu das… …ende …

Bei der Produktion von T-Shirts einer hochpreisigen Mark… …nd la… …ukti… …eiter bei p = 30% eines umfangreichen Auftrags wegen eines Defekts an einer Nä… …Fehler an … Nähten aufgetreten. Es werden zur Überprüfung der Angab… …Pro… …onsleit… …s Stichpr… … 50 T-Shirts in jeder Größe untersucht. Der Wert k zählt die T… …mit ein… …ehler.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchste… …0, 15, 2… …-Shirts mit den …hlern an de… …ht in einer Stichprobe?

$P(X \le 10) = F_{50;0,3}(10) = 7{,}9\%$
$P(X \le 15) = F_{50;0,3}(15) = 57…$
$P(X \le 20) = F_{50;0,3}(20) = …$

… aus Aufgabe 9.… …te Art der …stellung kann … der F-Tab… ode… …em Taschen… …ner gelöst w…

In den Stichproben … …iner Wahrscheinl… …eit von 7,9% … zu 10, mit einer Wahrscheinlich… von … bis … und mit ein… Wahrscheinl… …t von 95% bis zu 20 T-Shirts mit Fehler … wen… 30% der T-S… … Fehler au…

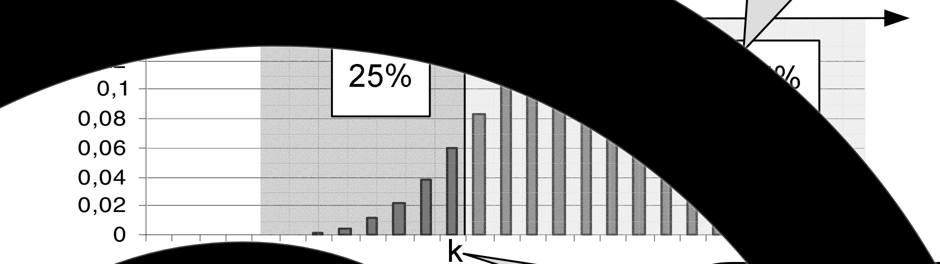
b) In den St… …roben s… …n sich mit einer …hrscheinlich… …n höchstens 25 % bis zu k T-Shirts mit ein… …fe… Naht … …den. Welche… …te kann k … …ehmen, wenn die Angaben des Pro… …ons… …chtlich der …hlerrate stim…

Bei dieser Fragestellung ist k gesucht. Es werden neue Überlegungen notwendig.

Verdeutlichen Sie sich die Zusamm… …ge anhand der folgenden Darstellungen:

Höchstens 25% der Werte für k sollen im linken Bereich der Verteilung…

75% der Werte für k liegen dann im rechten Bereich der Verteilung.



Der W… die Ver… zwei Ber…

Aus einer Tab… …s zu welchem W… …k) ≤ 0,25 erfüllt ist… …füllt, denn aus der T…

I… …probe befinden sich mit einer Wahrscheinlichk… von 22,29% bis z… …ts mit …r, wenn die Angabe des Produktionsleiters…

Aufgabe 9.5

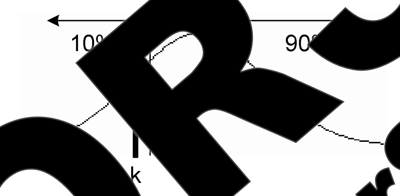
Allgemeine Formulierung der Aufgabenstellung zur Bestimmu… …k

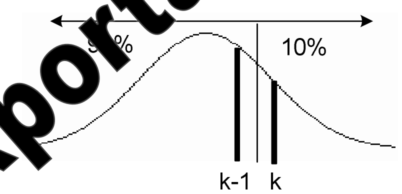
In der Aufgabenstellung sind n, p und P(X = k) gegeben. Ge…ucht is… W… …k. Zur Veranschaulichung der Rechnung wird in den folgenden A… …ungen … eines Säulendiagramms ersatzweise eine einhüllende Kurve für das Säulendia…gramm… …den … Rechnung relevanten Balken verwendet.

Die grundlegende Aufgabenstellung wird jew… …rch … …lgenden Abbildu… …deutlicht und anhand der Verteilung $B_{100;0,5}(k)$ beispielh… …rechnet.

Bis zu welchem Wert von k gilt, … Wahrscheinlichkeit $P(X \le k)$ h… …stens …% is…

Ab welch… …rt von k gil… …ss die Wahrs… …lichkeit $P(X \ge k)$ höchstens 10% ist?





$P(X \le …) \le 0{,}1$
$… \le 0{,}1$
$k = 43$ ← au… der Tabelle…

$P(X \ge k) \le 0{,}1$
$1 - P(X \le k-1) \le 0{,}1$
$-P(X \le k-1) \le -0{,}9$
$P(X \le k-1) \ge 0{,}9$
$F_{100;0,5}(k-1) \ge 0{,}9$
$k - 1 = 56$ ← aus der Tabelle*
$k = 57$

*Hinweis zum Ablesen aus eine… …ntsprechenden Tabelle:

1. Tabelle F_{100} auswählen.
2. In der Spalte f… …e von oben nach unten durchgehen, bis man auf den ersten Wert t…
3. … …her Wert für k zuzuordnen ist.

…gen

…9.2 Bestimmen Sie für die angegebenen Wahrscheinlich… …der Binomialsummenfunktion $F_{n;p}(k)$ die Werte für k. Die Ergebnisse sind zur … …eben. Raum für Rechnungen auf der folgenden Seite.

	Ve…	…g	Ergebnis
a)	…	…5 / …05	k = 1 / k = 9
	…(k) …3	P(X… ≤ 0,85 / P(X ≥ k) ≥ 0,85	k = 20 / k = 13
	$B_{100;0,97}(k)$	P(X ≤ k) ≤ 0,33 / P(X ≥ k) ≤ 0,33	k = 95 / k = 99
	$B_{100;0,6}(k)$	P(X ≤ k) ≥ 0,2 / P(X ≥ k) ≥ 0,95	k… / k…

	Verte…	…enstellung	Ergebnis
b)	$B_{100;\frac{1}{6}}(k)$	… ≤ 0,025 / … ≤ 0,025	k = 9 / k = 25
d)	$B_{100;0,8}(k)$	…0,1 / …,1	k = 74 / k = 86
f)	$B_{100;\frac{5}{6}}(k)$	…1 / P…1	k = 78 / k = 88

Er[illegible]bungen: ______________________________

Aufgabe 9.6

Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialver[illegible]

Zeigen Sie mit den in Kapitel 8 verwendeten Verfahren, dass sich f[illegible]en [illegible]ungswert und die Standardabweichung bei den folgenden binomialverteilten [illegible]fallsgrö[illegible] die angegebenen Werte berechnen lassen.

a) Die Zufallsvariable X ist $B_{5;\,0,4}(k)$ verteilt. Berechne[illegible]en Er[illegible]ungswert [illegible]ergänzen Sie fehlende Angaben in der folgenden Tab[illegible]echn[illegible]e anschießend [illegible]arianz V(x) sowie die Standardabweichung σ.

μ = __ · 0,0778 + __ · 0,2592 + [illegible]3456 [illegible] 0,23[illegible] __ · 0,0[illegible]6 [illegible] 0,0102 = [illegible] ≈ 2

k	Wahrscheinlichke[illegible] P(X = k)	Ein[illegible]weichung [illegible]Erwa[illegible]ngswert	Qu[illegible]ierte Abwe[illegible]ung
0	0,[illegible]	0[illegible]	
1	[illegible]	1 – 2 =	
2	0,34[illegible]		
[illegible]	[illegible]304		
4	[illegible],0768		
[illegible]	0,010[illegible]		

V(x) = __ · 0,0778 + __ · 0,25[illegible] + __ · 0,3456 + __ · 0,2304 + __ · 0,076 + __ · 0,0102 = _______ ≈ 1,197

σ = __________ ≈ 1,1

b) Die [illegible] Sie wie in a).

[illegible] __________ ≈ 2,4

k	Wahrscheinlichkeit P(X = k)	Einfache Abweichung vom Erwartungswert	[illegible]
0	0,0080	0 – 2,4 =	
1	0,0[illegible]	[illegible] – ____ =	
2	[illegible]	[illegible] ____ =	
[illegible]	[illegible]	[illegible] – ____ =	

[illegible]3

[illegible] __________ ≈ 0,69

c) Ermitteln Sie für die in Aufgabenteil a) und b) gegebenen Größen die folgende[illegible]dukte, vergleichen Sie die Ergebnisse jeweils mit den berechneten Werten für μ und σ. [illegible]nzen anschließend den Merksatz.

zu a) $n \cdot p =$ ____ und $\sqrt{n \cdot p \cdot q} =$ ____ zu b) $n \cdot p =$ ____ [illegible] ____

Für eine binomialverteilte Zufallsgrö[illegible]
Berechnung des Erwartung[illegible] = ____
Berechnung der Standard[illegible]eichung [illegible] = ________

Aufgabe 9.7

Eigenschaften der Bi[illegible]lung

In den Abbildungen 9.1 bi[illegible] sind j[illegible]s in ge[illegible] Ausschnitt[illegible] der k-Achse die Säulendiagra[illegible] [illegible]mialverteilun[illegible]gebildet. Be[illegible] Sie hinsichtlich des Erscheinung[illegible] des d[illegible] die nachfolg[illegible]den Aufg[illegible]stellungen.

a) Unt[illegible] Sie, we[illegible] Auswirkung[illegible] Werte v[illegible] und p auf das Erscheinungsbild der Verte[illegible] der Symmet[illegible]eigenschaft[illegible] Lage und Höhe des höchsten Balkens und der B[illegible] der Verteilung habe[illegible]

- ______________ wird, desto symmetrischer ist das Erscheinungsbild der Verteilung, wenn man den höch[illegible] Balken als Symmetrieachse verwendet.
- Je größer n wird, desto ______________ wird die Höhe des höchsten Balkens.
- Je größer n wird, desto ______________ wird die Breite der Verteilung.
- Wenn p größer [illegible] der k-Achse nach __________.

b) [illegible] Standardabweichung [illegible] $\sqrt{npq}$ sowie jeweils die 2-fache u[illegible]weichung 2σ und 3σ. Tragen [illegible]erte an den vorgesehenen Stellen ein.

[illegible]äutern Sie, welche Beziehung zwischen dem Wert von μ und [illegible] Balken der Verteilung besteht.

____

____

d) Fo[illegible] einen Zusammenhang zwischen den Symmetrieeigenschaften [illegible] S[illegible]ms und dem Wert von σ.

____

____

$B_{10;\,0,1}(k)$

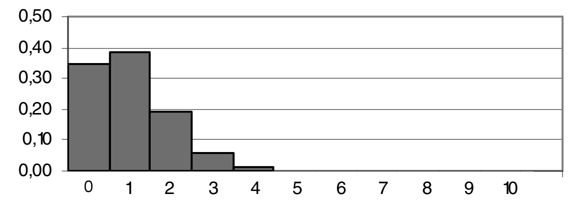


Abb. 9.1

1σ = ____
2σ = ____
[illegible] = ____

$B_{10;\,0,7}(k)$

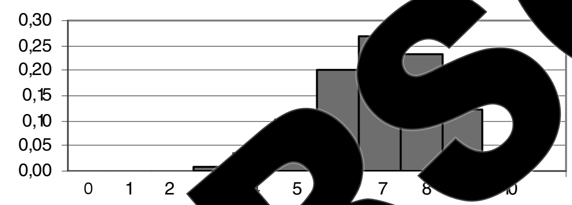


Abb. 9.2

[illegible] = ____
1σ = ____
2σ = ____
3σ = ____

$B_{[illegible]0,9}(k)$

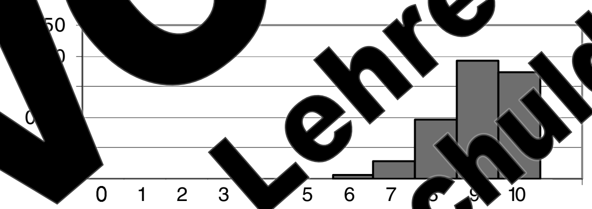


Abb. 9.3

μ = ____
1σ = ____
2σ = ____
3σ = ____

$B_{20;\,0,1}(k)$

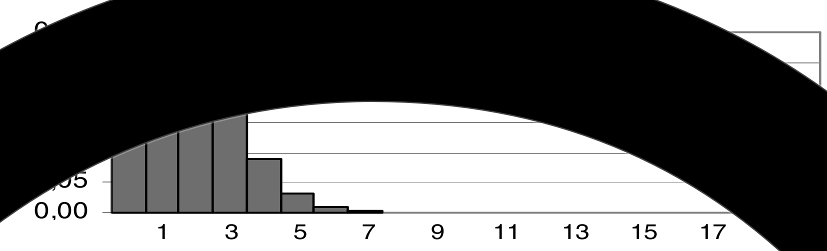
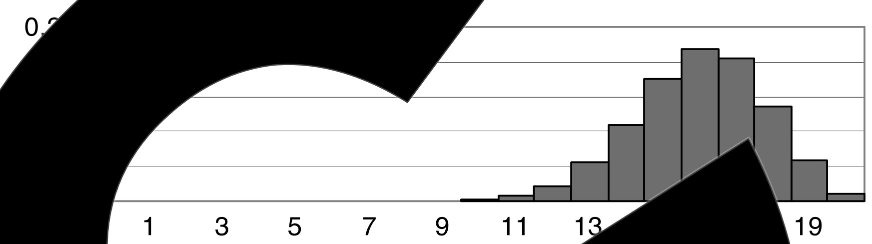


Abb. 9.4

μ = ____
1σ = ____
2σ = ____
3σ = ____

$B_{20;\,0,8}(k)$



[illegible]bb. 9.5

[illegible] = ____
[illegible] = ____
[illegible] = ____
[illegible] = ____

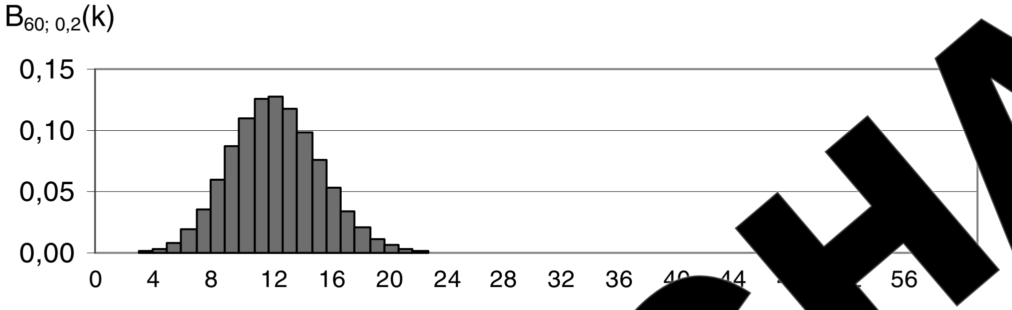


Abb. 9.6

μ = ______

1σ = ______

2σ = ______

3σ = ______

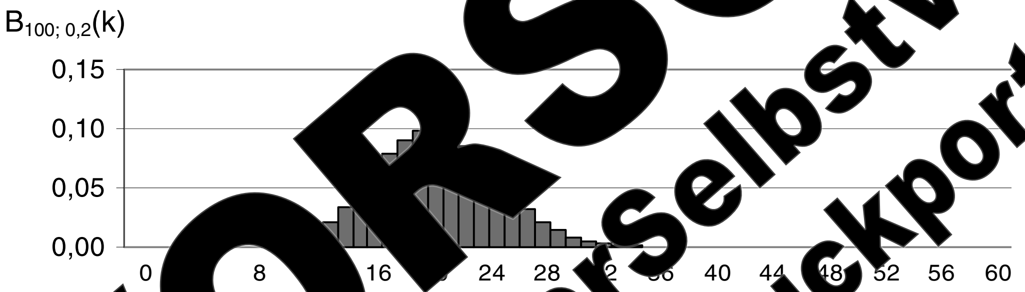


Abb. 9.7

μ = ______

1σ = ______

2σ = ______

3σ = ______

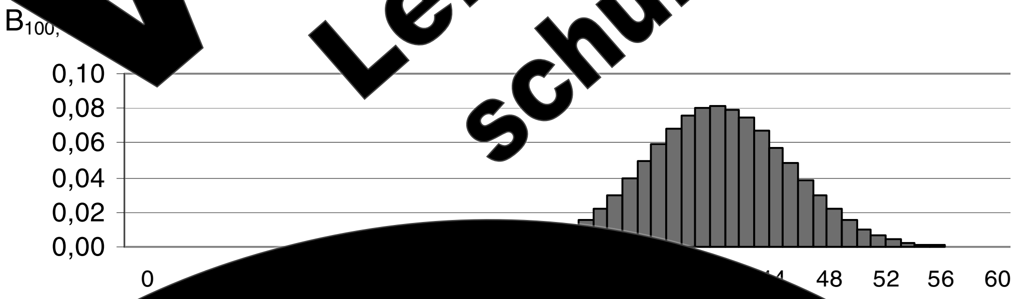


Abb. 9.8

μ = ______

1σ = ______

2σ = ______

3σ = ______

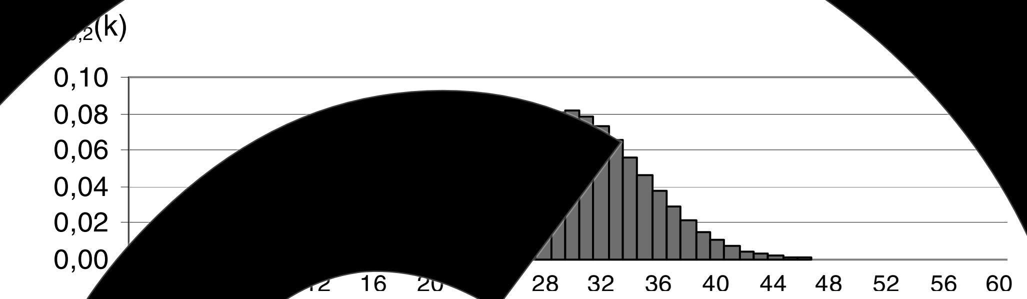


Abb. 9.9

= ______

Aufgabe 9.8

Die σ-Umgebungen bei der Binomialverteilung

Im Rahmen von Aufgabe 9.2 wurden im Beispiel 1 die Wahr...scheinlic...ite...net, in einer Stichprobe vom Umfang n eine bestimmte Anzahl k an feh...ften G... zu erhalten. Würde man in der Praxis viele dieser Stichproben entnehmen, könnte man ...ellen ...ss die Anzahl k der Gläser mit Fehler in jeder der Stichprobe meistens nicht genau ... E...swe... μ für das Auftreten eines Fehlers entspricht, jedoch häufig in der Nähe des Erw...swert...gt. Frageste...ngen zu Wahrscheinlichkeiten hinsichtlich der Abwei... des W...s von k vom Erw...ngswert in einer Stichprobe werden bei einer Binomialvert...ng oft mit den ...enannten σ-...ngebungen untersucht. Daher soll in der folgenden Aufgabe der B...iff der σ-...ngebungen ge...rt werden.

a) Graphische Darstellung d... σ-...ungen

In der Abbildung is... $B_{20;0,6}$(k)-Vert...ng abgebild... ...nterhalb de... Säulen sind drei Bereiche markiert, die al... ..., 2σ ...nd 3σ-...gebung ...in... ...omialverteil...g bezeichnet werden. Da bei einer Binomialv...ung ...ufallsvariable nur ...nzzahlige We... annimmt, geht man bei der Ermittlung dieser ...che ...olgt vor:

Bei der Ermittlung der **σ-Umgebungen** wird ...abhängig von der Dezimalstelle zum nächsten Balken in Richtung des Erwartungswertes gerundet.

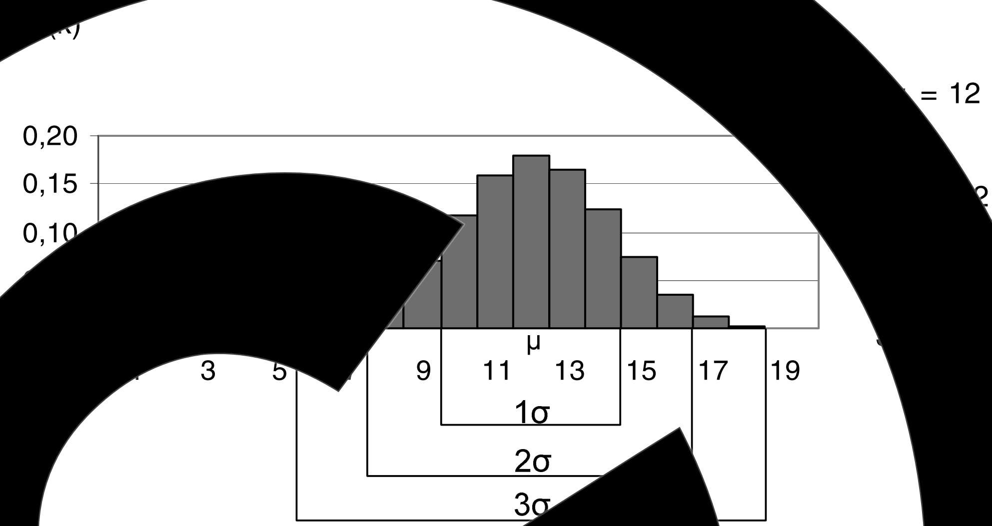
F... die **1σ-Umgebung** gilt:
...ke Grenze: ... – 2,2 = 9,8 Damit liegt der Balken Nr. 10 in der **1σ-Umgebung**
...echte Grenze: 12 + 2,2 = 14,2 Damit liegt der Balken Nr. 14 in der **1σ-Umgebung**

Für die **2σ-Umgebung** gilt:
Linke Grenze: 12 – 4,4 = 7,6 Damit liegt der Balken Nr. 8 in der **2σ-Umgebung**
Rechte Grenze: 12 + 4,4 = 16,4 Damit liegt der Balken Nr. 16 in der **2σ-Umgebung**

Für di...
...Balken Nr. 6 in der **3σ-Umgebung**
...en Nr. 18 in der **3σ-Umgebung**

...(k) ... = 12

...2



i) Markieren Sie in den Abbildungen 9.2, 9.5, 9.6, 9.8 und 9.9 entsprechend ... Beispi... ...ben jeweils die 1σ-, 2σ- und 3σ-Umgebung.

ii) Vergleichen Sie, welchen Bereich die 3σ-Umgebung bei allen in A...ab... ...gten Markierungen in den jeweiligen Verteilungen abdeckt u... ...gänze...

Bei allen Verteilung liegen unabhängig von n und ... fast al... ...rte v... k innerhalb der __σ-Umgebung.

iii) Wie Sie sicher erkannt haben, liegen bei ... unter i) ...kierten Verteilung... fast alle Werte von k innerhalb der 3σ-Umgebung. Sch...en mit einer p...ntualen An...be ab, welchen Bereich bei diesen Verteilungen jeweil... 1σ-, 2... ...nd 3σ-Umgebung abdeckt.

Der Wert für k liegt bei etwa ____ % ...tich...ben im 1σ-Bereich.

Der Wert für k liegt bei etwa ___ ...er Stichprobe... 2σ-Bereich.

Der Wert für k li... ...bei ...a ____ der Stich...en im 3σ-Bereich.

b) Berechne... ...er σ-...gebu...n für eine $B_{100;\,0,3}(k)$-Verteilung mit $\mu = 30$

Ver...tlic... Sie sic... ...e Berechnun... anhand des ...piels für die 1σ-Umgebung und gehen Sie für d... ...σ- u... ...gebungen a...log dazu vor.

...ein... $B_{100;\,0,3}(k)$-Verteilu... ...gi... $\mu = 30$

1σ-Umgebung: $1\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot ...} = 4{,}58$

Grenzen des 1σ-Bereichs berechnen:

$\mu - 1\sigma \leq$ ...

30...

... $\leq x \leq$ 34

Da es für k bei der Binomialverteilung nur ganzzahlige Werte gibt, müssen die berechneten Werte gerundet werden. Um innerhalb der ...igen σ-Umgebung zu bleiben, wird der linke ...ängig von der Nachkommastelle ...t und der rechte Wert immer ... ...n rundet in Richtung des Er...

...erechnen der Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert für k bei der B... ...g innerhalb der 1σ-Umgebung liegt:

P(26 ≤ x ≤ 34) ...

...674 = 67,4%

2σ-Umgebung: 2σ = 9,2

Grenzen des 2σ-Bereichs berechnen:

μ – __σ ≤ x ≤ μ + __σ

30 – _____ ≤ x ≤ 30 + ______

_________ ≤ x ≤ ________

____ ≤ x ≤ _____

Zu... ...g... ...rt h... ...den!

Berechnen der Wahrscheinlichkeit, das... ...Wert ...k bei der Bi...ialverteilung in...halb der 2σ-Umgebung liegt:

P(____ ≤ x ≤ ____) = P(x ≤ ... ≤ ____)

= F...0,3(... ...$_{100,\,0,3}$(...

... – ... = ...9...%

...Umge...g: 3σ = 13...

...ren des 3σ-Bere... berechn...:

__ – __σ ≤ x ≤ __ + ...

___ – ____ ≤ x ≤ __ + _____

_________ ≤ x ≤

Zum Erwartungs-wert hin runden!

...der Wahrscheinlichkeit, dass ei... ...omialverteilung innerhalb der ...mgebung liegt:

P(____ ≤ x ≤ ____) = P(x ≤ ____) – P(x ≤ ____)

...) – $F_{100,\,0,3}$(_____)

_______ = ________ ≈ 99,6%

Literaturwerte zu den σ-Umgebungen

Sie haben in Aufgabe 9.7 festgestellt, dass die Symmetrieeigenschaft der [illegible]ulendiag[illegible]me[illegible]n und damit auch von σ abhängig ist. Je größer der Wert von n bzw. σ wird, de[illegible]metrisc[illegible]d die Verteilung bezüglich des höchsten Balkens. Die berechneten Wahrschein[illegible]keit[illegible] die σ-Umgebungen werden ebenfalls umso genauer, je größer der Wert von [illegible]st.

Wenn der Wert von σ größer als drei ist, also **$\sigma > 3$** gilt, is[illegible]gen[illegible] **Laplace-[illegible]ingung** erfüllt, und es können mit guter Näherung die fol[illegible] We[illegible]rwendet werden.

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X ist [illegible] der Sta[illegible]rdabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} > 3$ [illegible] die Laplace-Bedingung erfüllt, und es gelte[illegible] die fo[illegible]en Re[illegible]n.

1σ-Regel: [illegible] $\le \mu + 1\sigma) = 6$[illegible]

2σ-R[illegible]: $P(\mu - 2\sigma \le$ [illegible] $\le \mu + 2\sigma) =$ [illegible]5%

[illegible]Reg[illegible]: $P(\mu$ [illegible] $X \le \mu$ [illegible]$) = 99{,}7\%$

Raum für No[illegible]:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert [illegible]le[illegible]en

Kapite[illegible]

Zweiseitiger Signifika[illegible]

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich... ...rteilung

...pothesentests

Gesa... ...elbstorganisiert erlernen (Beste... ...278)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 10: Zweiseitiger Signifikanztest

Aufgabe 10.1

Grundidee des Testens

Grundsätzlich entspricht das Testen von Hypothesen der Ers... ...g ei... Wahlprognose. Da man nicht alle Wahlberechtigten nach ihrer Stimmabgabe bef... ...k... ...hrä... man sich bei den Umfragen auf eine mehr oder weniger zufällig ausgewählte Gru... ...Per... ...n und schl... von deren Wahlverhalten auf den Ausgang einer Wahl... ...undl... ...de Vorgehensw... ...bei der Auswertung von solchen Erhebungen und auch Fehlern, d... ...gegebenenfa... ...bei auftrete... ...sind Gegenstand der hier zu bearbeitenden Thematik.

Als einführendes Beispiel soll n... ...folge... ...stellung b... ...eitet werde...

Aufgabenstellung:

Ein Geflügelzüch... ...estel... ...ei einem ...uttermitte... ...nten eine M...ng aus S-Körnern und L-Körnern. Für eine ... ...müssen 33% ...Körner in d... ...chung vorhanden sein. Die Einhaltung ... ...r Vo... ...n will ... aufgru... ...einer zufällig ...nto... ...enen Stichprobe überprüfen.

1. Ent... ...me de... ...ichprobe

a) ...ese... ...fallsv... ...ch soll nu... ...sch durch ...e Entnahme einer Stichprobe von jedem Schüler/...er S... ...aus einem ...älter mit S-Kör... und L-Körnern simuliert werden. Zählen Sie alle ...ommenen Körner, tra... Sie die We... ...r **Ihre gezogene Stichprobe** in den folgenden Feldern e... ...nd berechnen S... ...en Erwartu... ...ert. (Sollten Sie den Zufallsversuch nicht durchgeführt ..., verwen... Sie folgende W...: Umfang der Stichprobe: n = 210, Anzahl S-Körner: 85)

Prozentualer Anteil de... ...Körner laut Hersteller: $p = 33\% = 0{,}33$

Stichprobenumfang n Ihrer Stichprobe: $n =$ __________

...be: $k =$ __________

...n Sie den Erwartungswert μ für die ... ...us Ihrer Stichprobe (auf eine ...ze Zahl gerundet) für den Sollwert von 33% S-... ...hung.

Erwartungswert für die Anzahl der S-Körner $\mu =$ ______________________

c) Vergleiche... ...der S-Körner mit der Anzahl ... ...im Versuch gezog... ...ch Ihre Mitschüler nach deren ... Was stellen Sie fest?

____

____

...nzahl der gezogenen S-Körner in einer Sti... ...timmt in der Reg... ...au mit dem ...tungswert für die Anzahl von S-Körne... ..., man zieht meh... ...ger Körner als ...rwartungswert angibt. Wenn man G... ...re, müsste man ...eiden, ab welcher Abweichung der Stichprobe vom Erwartungswert μ die Lieferung rekla[…] wird, […]man davon ausgehen kann, dass die Vorgabe von p = 33% nicht eingehalten wurde u[…]s Zuchtergebnis gefährdet wird. Entscheiden Sie nun intuitiv, ob Sie auf[…] Ihrer S[…] die Lieferung beanstanden würden.

Als Geflügelzüchter würde ich die Stichprobe beanstanden b[…]eklami[…] Ja ☐ oder Nein ☐

2. Anwenden der Binomialverteilung für die Beurteilun[…]ch[…]e

Eine Hilfe für die Beurteilung Ihrer Stichprobe u[…] Entschei[…] ob man hi[…] im […]ile des Geflügelzüchters die Lieferung reklamieren wü[…] oder nicht, liefer[…] die Anwe[…]dung von Eigenschaften der Binomialverteilung auf Ihre Stichprobe. Die […]ipielle […]gehensweise wird nun zu[…] anhand der Abbildung unten erläutert.

a) Stellen Sie die Werte Ihrer Stichp[…] Form $B_{n,p}(k)$ dar: B________(k)

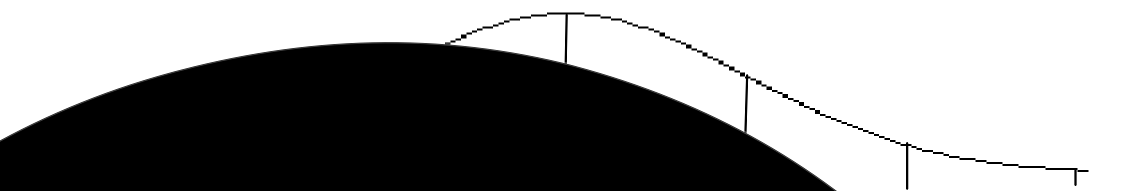
b) Berechnen Sie für Ihre […]e Stichprobe die einfache, zweifache und dreifache Standardabweichun[…]

Einfa[…] Stan[…]abweichung 1σ = ________

Z[…]fache Standardabweichung 2σ = ________

D[…]che Standardabweichung 3σ = ________

c) […] f[…]nden Abbildung sind die Hüllenkurve für eine idealisierte Binomialverteilung und nur die Ba[…] […]etragen, welche die 1σ-, 2σ-[…] 3σ-Umgebung begrenzen. Berechnen Sie für Ihre Stichpro[…] aus den obe[…] ermittelten W[…] die **ganzzahligen** Werte für diese Grenzen, und tragen Sie die Zahlenwerte in der Abbildung […]ten ein.



μ−2σ μ−1σ μ=____ μ+2σ μ+3σ

=______ =______ =______ =______ =______

d) Markieren Sie, farblich ab[…] mit einem weiteren senkrechten […] […]cher Stelle der Verteilung der W[…] […]t, und ergänzen Sie den folg[…]

Die Anzah[…] […]einer Stichprobe liegt

❍ inn[…] […]nit sehr nahe am Erwartungswert.

❍ […]s 1σ-Bereichs.

❍ […] des 2σ-Bereichs.

❍ […]b des 3σ-Bereichs.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mischung mit 33% S-Körnern eine[…]chprobe [z]ufällig in diesen Bereich fällt, ist gleich / kleiner / größer als ______%.

e) Entscheiden Sie nun erneut, ob Sie die Lieferung rekla[…]en wü[…] […]gründen dies.

Beanstanden der Lieferung: Ja ☐ oder Nein ☐

Begründung: ____

____

____

Zusammenfas[…]ng u[…] Ver[…]heinerungen

Ob Sie die Lieferung […]eser[…]spiel aufgru[…] Ihrer Stichpro[…] annehmen oder beanstanden würden, hängt als[…]ab, i[…]chen Bereich der Binomialverte[…] der Wert für die Anzahl der S-Körner fällt. Je[…]er d[…]zahl S-Körner in der Stichprobe am Erwartungswert liegt, desto eher wird man davon […]gehen, […]s die Forderung für eine 33%-Mi[…]ng erfüllt ist. Je weiter die Anzahl der S-[…]er […] Stich[…]be vom Erw[…]swert entf[…]egt, desto eher wird man von einem falschen M[…]ung […] ausgehen und die Lieferu[…] beanstanden. Betrachtet man bei diesem Versuch eine Vie[…]l von […]proben, s[…]d deutlich, […] fast alle Schüler und Schülerinnen Stichproben […]ntn[…]men haben, die in[…]alb der zu der Stichprobe gehörenden 3σ-Umgebung liegen. Durch Zufall […]edoch auch Stichproben vo[…] sein, die eine große Abweichung vom Erwartungswert au[…]en und außerhalb dieser 3σ-Umgebung liegen. Aufgrund der Stichprobe würde man dann davon ausgehen, dass die geforderte 33%-Mischung nicht eingehalten wurde, obwohl in der Mischung wirklich 33% S-Körner vorhanden sind. Würde man in diesem Fall eine Lieferung beanstanden, so begeht man einen Irrtum und handelt sich ggf. Ärger mit dem Lieferanten ein, wenn dieser nachweisen kann, dass seine Lieferung in Ordnung ist. Die Wahrscheinlichkeit, genau diesen Fehler zu machen, bezeichnet man als **Irrtumsrisiko**.

[…]stimmung des Irrtumsrisikos in Abhängigkeit vom[…]

Als Grundlage für die Betrachtungen des Irrtumsrisikos soll wei[…]sversuch aus Aufgabe 10.1 dienen. […] werden nun einheitlich die folgen[…] die entnommene Stichprobe zug[…]

Wahrsc[…] = 0,33

Anz[…] n = 231

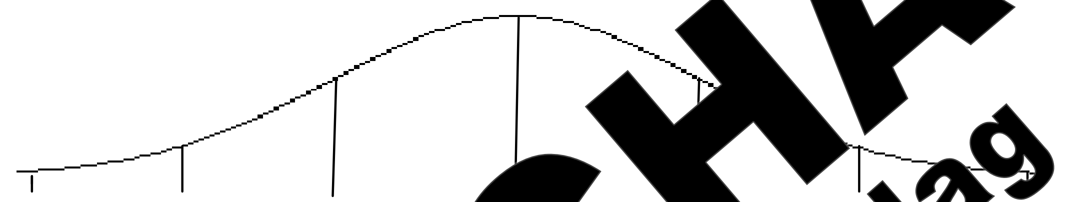
[…] für S-Körner: μ = np = 231 · 0,33 ≈ 76

[…]tandardabweichung: 1σ ≈ 7,14

[…]e Standardabweichung 2σ ≈ 14,28

[…]e Standardabweichung 3σ ≈ 21,4[…]

a) Tragen Sie die Grenzen für die jeweiligen σ-Umgebungen als **ganzzahlige** We… der fo… den Graphik ein. Achten Sie darauf, dass man bei der Bestimmung der σ-Umgebung… mer … Erwartungswert hin rundet. (Vgl. Kapitel 9 Aufg. 9.8)



$\mu-3\sigma$ $\mu-2\sigma$ $\mu-1\sigma$ ___ $\mu+$… …2σ $\mu+3\sigma$

=______ =______ =… … =…

b) Es werden von 8 verschi…n Personen z…ig Stichpro… entnommen. Für die Anzahl der S-Körner ergeben sich …e…folge… …erte.

Person 1	Person 2	…erso…	Person 4	…erson 5	…son 6	Person 7	Person 8
59	7…	…	…5	93	98	54	89

Mar…n S… …e für die er…ltene Anzahl …n S-Körnern bei den 6 Stichproben in der Abbild…g oben …hilfe von w…e…n senkrech…n …lken und ergänzen Sie:

Die St…oben der Pe…nen __________ liegen mit ________________ S-Körnern innerhalb der 1σ-Umgebung.

Die Stichproben der Personen __________ liegen mit ________________ S-Körnern innerhalb der 2σ-Umgebung.

Die Stichprobe… …it ________________ S-Körnern innerhalb der 3σ-Um…

…onen __________ ________________ S-Körnern außerhalb …ung.

…asierend auf dem Testergebnis muss nun jede Person mithilf… …n Stichprobe entscheiden, ob man davon ausgehen kann, dass die Lieferung in … …d angenommen werden sollte, oder ob m… …sgehen muss, dass das Mischu… …icht in Ordnung ist, weil die Stich… …tungswert abweicht. Eine En… …rd hier mithilfe der σ-Umgeb… …sogenannte **Annahme-** und **Ab… …reiche** für eine Stichprob… …σ-Umgebungen als Grundlage für … …idung, so ergebe… …ür die Ermittlung dieser Annahme- u… …sbereiche.

c) Betrachtung der 3σ-Umgebung

Bei einer Binomialverteilung liegen mehr als 99% aller zufällig… …nen …proben im **3σ-Bereich**, d.h. in weniger als 1% der Fälle liegen Stichprobenerg…iss… …rhalb dieses Bereiches. Es ist üblich, diese große Abweichung vom …wartung… …**chsignifikante Abweichung** zu bezeichnen.	
Werte innerhalb des 3σ-Bereichs geben den **Annahmebereich** für die Stichprobe an. ______________ ≤ X ≤ …	…e …rhalb des 3…ereichs geben den **…lehnungsbereich** f… …Stichprobe an. …Grenzwerte … …denen der Ablehnungsbe…eich beginnt, sind: g_{links} = ______ g_{rechts} = ________
Die Stichproben mit den W… ______ lie… hier im **Annahmebereich** …e Lieferung …d hier angen…nen. Die Stichprob… …it …ten ______ liege… im **Ablehnungs…reich** der **3σ-Umgebung** und man wird sich h… …ntscheide… …Lieferung z…lamieren. Be… Da…rtumsrisiko für eine unberechti…te Ablehnung …. Reklamation gibt die Wahrscheinlichkeit an, das… …e Stic…obe zufällig a…erhalb der 3…ebung liegt, und hat hier den sehr kleinen Wert von … …n. man hat …n sehr kleines Risiko, sich wegen einer unberechtigten Reklamation mit …m Lieferanten Ärger …zuhandeln, g… …er bei der Annahme der Lieferung ein relativ großes …ko ein, dass die …ung nicht st… …und sich die Tiere nicht gut entwickeln.	

d) Betrachtung der 2σ-Umgebun…

Bei einer Binomialverteilung liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe in den **2σ-Bereich** fällt, bei 95%, d.h. 5% aller Stichproben liegen durch Zufall nicht in diesem Bereich. Es ist üblich, diese recht… …ungswert als **signifikante Abweichung** zu bezeichnen.	
______________ ≤ X ≤ ____________	…rte außerhalb des 2σ-Bereichs geben den …ungsbereich für die Stichprobe an. …bei denen der Ablehnungsbereich … $g_{li…}$ g_{rechts}= ________
Die Stichp… ______________ liegen im… …reich, und die Liefer… D… ____________________ liegen i… …gsbereich, und die …nommen. …ung: …rtumsrisiko für eine unberechtigte Ablehnung …. Reklamation gi… …scheinlichkeit an, … eine Stichprobe zufällig außerhalb der 2σ… …ng liegt, und hat … Wert von __%. D.h., man hat ein relativ kleines R… …gen einer unbere… …eklamation mit … Lieferanten Ärger einzuhandeln.	

e) Betrachtung des 1σ-Bereichs

Bei einer Binomialverteilung liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine S[illegible] in d[illegible]bereich fällt, bei 68%, dh. 32% aller Stichproben liegen durch Zufall nicht in d[illegible]	
Werte innerhalb des 1σ-Bereichs geben den **Annahmebereich** für die Stichprobe an. ________________≤ X ≤ ____________	Werte a[illegible]halb d[illegible]σ-Bereichs geben den **Ablehnu[illegible]eich** [illegible]r die Stichprobe an. Gr[illegible]ert g_{links} [illegible]d g_{rechts} be[illegible]en der Able[illegible]gsbereich b[illegible] g_{links} = ________ g_{rechts} = ________
Die Stichproben mit den Werten [illegible] lieg[illegible] **Annahme[illegible]eich** der 1σ-Umgebung, und die Lieferung wird hier wohl angen[illegible] Wert nahe am Erwartungswert [illegible] Die Stichproben mit d[illegible] ____________________ liegen [illegible] **Ablehnungsbereich** der 1σ-Umgebung und [illegible] Lieferung wird nicht angeno[illegible] wenn ver[illegible] wird, dass die Stichprobe in der 1σ-Umgebung [illegible] Da hier b[illegible] 8 S[illegible]proben die Lieferung abgelehnt [illegible], erkennt man bereits, dass das Irrtumsr[illegible] für ei[illegible]berechtigte Ablehnung bzw. Reklamation relativ hoch liegt und hier den Wert ___% [illegible]immt. [illegible] man sich in unserem Beispiel mit hoher Wahrscheinlichkeit wegen einer un[illegible] Reklamation Ärger mit dem Lieferanten einhandelt, wird man die 1σ-Umgebung nicht als [illegible]undlage [illegible]. Daher [illegible] 1σ-Bereich bei der Beurteilung von Tests auch [illegible] der [illegible]axis keine Rolle.	

f) Erklären Sie die Bedeutung der Begriffe „signifikante Abweichung" und „hochsignifikante Abweichung" in eigenen Worten, ordnen Sie diesen Begriffen das Signifikanzniveau von 1% bzw. 5% zu und erläutern Sie, welches Signifikanzniveau Sie für eine Entscheidung wählen würden, wenn eine Fehlentscheidung hohe Unkosten bzw. Unannehmlichkeiten für Sie bedeuten würde.

____

____

____

____

____

____

____

An[illegible] [illegible] Anlehnung an das 5%-ige Irrtumsrisiko bei der 2σ-Umgebung arb[illegible] bei vielen [illegible] Tests mit diesem Wert für die Irrtumswa[illegible]keit bzw. als Sig[illegible]au.

Aufgabe 10.3

Berechnung von k, wenn das Irrtumsrisiko nicht den Wahrsch[illegible]keiten [illegible]gebungen entspricht

Bei dem Körnerversuch aus Aufgabe 10.1 ($p = \frac{1}{3}$) wird fest[illegible]legt, da[illegible] Stichprobe von 100 Körnern entnimmt und dass das Irrtumsrisiko höchstens 10[illegible]ragen [illegible]. Es sollen der linke Ablehnungsbereich $k \le g_l$ und der rechte Ablehnungs[illegible] g_r für [illegible]sen Test ermittelt werden. Zur Veranschaulichung des Annahme- und Ablehnu[illegible] hier, anstelle einer Binomialverteilung mit einzelnen Säulen, verei[illegible] Hüllkurve, in de[illegible] für die Aufgabe relevanten Balken eingetragen werden, ve[illegible].

a) Erläutern Sie, warum der rechte und li[illegible] Ablehnungsbereich jeweils eine Wahrscheinlichkeit von 5% haben.

____

____

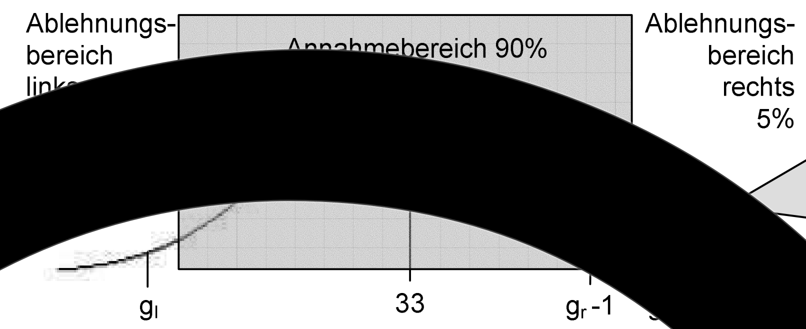
Erläutern Sie, [illegible] nicht mit den σ-Umgebungen arbeiten kann.

____

____

[illegible]deutlich[illegible] Sie sich die Visualisierung [illegible] Annahme- und Ablehnungsbereich sowie die Rechnung i[illegible]eispiel, und ermitt[illegible] anschließend analog dazu den rechten und linken Ablehnungsbereich, [illegible] das Irrtumsrisiko auf höchstens [illegible]% festgelegt wird. Ergänzen Sie dabei fehlende Angaben in [illegible]isualisierung.

Beispiel:



Vereinbarung für folgende Aufgaben:
Die Grenzen g_l und g_r für den Annahmebereich werden zur Vereinheitlichung der Betrachtung so gewählt werden, dass sie links und rechts außerhalb des Annahmebereichs liegen.

Rechnung:

linke Grenze g_l [illegible]echte Grenze g_r

$P(x \le g_l) \le$ [illegible] $-1) \le 0,5$

$F_{100;\frac{1}{3}}$ [illegible] $-1) \le 0,5$

[illegible] $(g_r - 1) \le 0,5$

$F_{100;\frac{1}{3}}(g_r - 1) \ge 0,95$

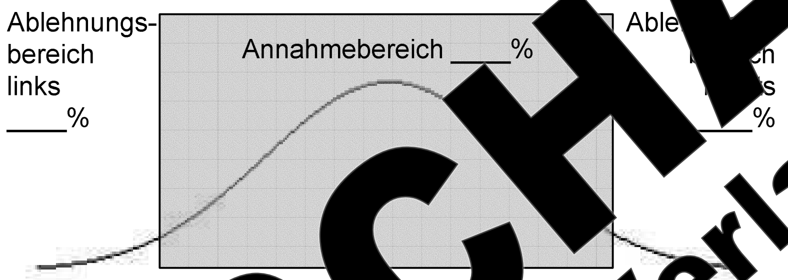
$g_r - 1 =$ ______

$g_r =$ ______

We[illegible]er als _____ oder mehr als _____ [illegible]er in der Stichprobe befinden, [illegible] Lieferung reklamieren[illegible]

[illegible]en Annahmebereich gilt: A= {26, 27[illegible]

Lösungsweg für ein Irrtumsrisiko von 16%



Rechnung:

(K   is: A = {37, …, 40}

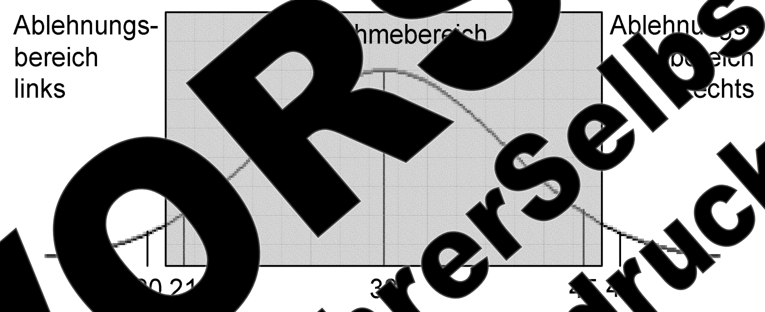
Aufgabe 10.4

Irrtumsrisiko bei vorgegebenem Wert für k berechnen

Bei dem Körnerversuch aus Aufgabe 10.1 ($p = \frac{1}{3}$) wird fest legt, da ma rnerlieferung reklamiert, wenn sich in einer Stichprobe von 100 Körnern w er als der mehr als 45 S-Körner befinden. Es soll das Irrtumsrisiko, mit dem dieser T t arbei mitte erden. Zur Veranschaulichung des Annahme- und Ablehnungs wieder, anst e einer Binomialverteilung, mit einzelnen Säulen vereinfache Hülle rve, in der e für die Aufgabe relevanten Balken eingetragen werden, ve .

a) Verdeutlichen Sie sich den Lösungswe nhand folgenden Beis els.

Visualisieren der Annahme nd A ngsbereiche:



Rechnung:

$\alpha = P(x \le 20) + P(x \ge 46)$

$\alpha = P(x \le 20) + 1 - P(x \le 45)$

$\alpha = F_{100;\frac{1}{3}}(20) + 1 - F_{100;\frac{1}{3}}(45)$

$\alpha =$ ________ $+ 1 -$ ________ $=$ ________

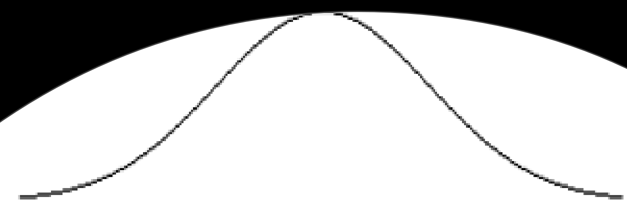
$\alpha = 0{,}81\%$

Annahmebereich A = {______________}

rt: Der Te t arb t mit eine msrisiko von _____%

b) Bestimmen Sie das Irrtums o, wenn die Lieferung für weniger als 20 und mehr als 46 S-Körner in der Stichprobe abgelehnt wird. (Kontrollergebnis: $\alpha = 1{,}48\%$)

Visualisieren der A ungsbereiche: Rechnung:



che: A = { __________________________ }

Der Test arbeitet mit einem Irrtumsrisiko v %

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Übungen 10.1

Ü10.1 Die Freie Wählergemeinschaft FWG in Zufallsstadt hatte bei der ... Kom... 20% der Stimmen erhalten. Um herauszufinden, ob sich der Stimmen... ...ändert ..., wird rechtzeitig vor der kommenden Kommunalwahl eine Umfrage un... ...ern durchgeführt. Da die Umfrage durch Zufall ein Ergebnis ...rn ka... ...man falsche Rückschlüsse auf den momentanen Stimmenanteil ziehe... ...nte, ... bei der Auswertung das Irrtumsrisiko berücksichtigt.

a) Bei der Umfrage werden 400 Personen ...fragt, ... das Irrtumsrisiko soll w... als 5% betragen. Bestimmen Sie den Annah... ...d Able... ...sbereich b... ... Test, veranschaulichen Sie die Bereiche ...and einer Gra... und beu... Sie, ob man bei dieser Umfrage von einem unverän... ...en Stim...anteil ausge... kann, wenn ... Personen angeben, die FWG wählen ...llen.

b) Der Parteivorstand legt ... Personen befra... werden sollen ... dass man nur dann, wenn weniger als ... me... als 30 Perso... ...geben d... nicht zu wählen, von einem verä... Stimm... ausgehen ... veranschauli... Sie die Aufgabenst... an... ...d ei... ...phik und b... ...nen Sie, mit welchem Irrtumsrisiko der Test arbeite...

c) De... ...vorsta... ...gt das Irrtumsr... bei einer Um... unter 100 Personen auf einen W... von ... fest... ...anschaulichen Sie die Aufgabenstellung anhand einer Graphik und e...tteln Si... ...n Annahmebereich für diese Stic...be, wenn der Stimmenanteil nach wie v... ...i 20% ...t.

...nde Übungen: ______

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert …

Kapite…

Signifikanztest –
…er beim Testen

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich... erteilung

...pothesentests

Gesa... selbstorganisiert erlernen (Beste... 278)
S...

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 11: Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen

Nachdem Sie sich in Kapitel 10 anhand von zweiseitigen Tests sch... e Erke... zu den grundlegenden Zusammenhängen beim Testen von Hypothesen ei... eit... hen, erfolgen in diesem Kapitel anhand von sogenannten **einseitigen** Tests weiterg... hende ... ach... , vor allem hinsichtlich der Fehler, die bei der Beurteilung einer Stichprobe auftre... innen.

Aufgabe 11.1

Aufgabenstellung

Ein Forschungslabor hat zur Behandlung ... er selten... jed... n meist t... lich verlaufenden Krankheit eine verbesserte Therapie entwickelt. Wä... d die a... Therapie in ... al 20% der Fälle eine Heilung ermöglichte, wird aufgrund erste... rsuch... utet, das... eue Therapie ... n eine Heilung bei mehr als 20% der Erkrank... erzi... Man g... avon aus, ... nun mindestens 40% der Erkrankten geheilt werden können. Es ste... eine kleine Gru... e von 20 Patie... en zur Verfügung, an denen die Wirksamkeit ... neue... Therap... etestet wer... kann. Der G... äftsführer der Forschungseinricht... st, das... die Fors... gebnisse ... zeitig als Innovation auf einer Ärztetagung verö... ... che... nd das ... ent an ei... Pharmakonze... verkaufen will, wenn **mindestens 8** Personen in dies... ilt werden. B... en Sie, ob ... tscheidungsregel des Geschäftsfü... rs sin... ist.

1. Sch... Formu... en von Hypo... n und Zuor... n der Werte aus der Aufgabenstellung

Es werd... Kontext d... ufgabenstellung zwei sich gegenseitig auss... ende Hypot... en formuliert.

- D... **Nullhypoth... H_0** bezieht sich **meist** auf einen **gesicherten Wert**. Hier ... t man an, dass die neue Therapie genauso hilft wie die alte Th... apie und in 20% der Fälle heilt.
- Die **Alt... ativhypothese H_1** bezieht sich hier auf die ungesicherte Annahme, dass die neue Therapie besser wirkt. Man nimmt hier 40% an.

	Nullhypothese ...	Alternativhypothese H_1
... ypo- ... esen und zuordnen der Zahlenwerte	Die neue Therapie wirkt wie die alte Therapie.	... herapie ist besser.
	$n = 20$ $p_0 = 0{,}2$ $\mu_0 = 4$	$n =$ ... $0{,}4$ $\mu_1 \geq 8$

... sungswegs ... Hypot... der kleineren ... cheinlichkeit p in der linken Spalte ... abelle zu notieren. Da in dieser ... gabe p_0 kleiner als p_1 ist, wird demnach ... hier in der linken Spalte notiert. ... Begründung wird in Schritt 2 deutlich.)

Anmerku... Die Vertei... pothese mit der größeren W... hkeit p liegt, wie in Schrit... chtlich wird, weiter rechts ... Aufgaben- stellung ist p_1 ... p_0, also liegt H_1 rechts von ... in der rechten Spalte notiert.

2. Schritt: Festlegen und Visualisieren des Annahme- und Ablehnungsbere[illegible]

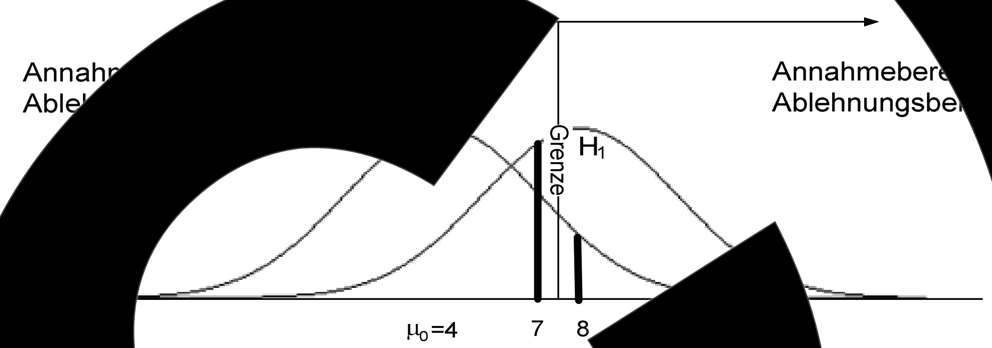
Für die folgenden Betrachtungen wird hinsichtlich der Visualisierung für d[illegible]hrsche[illegible] der Alternativhypothese H_1 der in der Aufgabenstellung angegebene Wert p_1[illegible]vende[illegible] Färben Sie in der Abbildung alle Balken, welche zur Verteilung von H_0 ge[illegible] Balken, welche zur Verteilung von H_1 gehören mit zwei verschiedenen Farben e[illegible]wecks[illegible] Übersichtlichkeit werden die Balken jeweils mit einem Zwischenab[illegible]d dar[illegible]ellt.

Markieren der Ablehnungs-bereiche für die beiden Hypothesen

Abb.11.1

Begründen Sie, warum der Bereich $k \le$[illegible] als Ablehnungsbereich für H_1 und der Bereich $k \ge 8$ als Ablehnungsbereich für H_0 bezeichn[illegible]ird.

[illegible]ndig ist, detaillierte Balkendiagramme wie in Ab[illegible]n, visualisiert man die [illegible]ngen, entsprechend zu den Überlegungen beim zweiseit[illegible]d der Hüllenkurven von [illegible]dealisierten Binomialverteilungen. Hier werden, wie in Abb. 1[illegible]ur die beiden Balken [illegible] der Entscheidungsgrenze eingetragen.



[illegible].11.2

3. Schritt: Betrachtung von Fehlentscheidungen

Für welche der beiden Hypothesen man sich in der Praxis nun ent[illegible], häng[illegible]gebnis der Stichprobe ab. Wie Sie im Körnerversuch in den Aufgaben 10.1 un[illegible]ren haben, kann eine Stichprobe durchaus ein Ergebnis liefern, das zu einer falsc[illegible]n Ents[illegible]. Wir haben hier gesehen, dass es Stichproben gab, die den Schluss zuge[illegible] habe[illegible] sich in dem Glas keine 33% S-Körner befinden, obwohl das Mischungsverhältnis ta[illegible]lich b[illegible]3% liegt. Dies führt beim Körnerversuch zu der Fehlentscheidung, die Liefer[illegible]unbe[illegible]erw[illegible]e zu reklamieren. Verdeutlichen Sie sich anhand der folgenden Tabelle die[illegible]gung[illegible] mögliche[illegible]hlentscheidungen hinsichtlich der hier beschriebenen Testsitua[illegible]irks[illegible]eit eine[illegible] Medika[illegible].

	In dieser Sp[illegible]ht m[illegible] davon aus[illegible]ass di[illegible] Nullhypot[illegible]kheit zutri[illegible]	[illegible]dieser Spal[illegible]ht man davon aus[illegible]dass die Hypoth[illegible] in Wirklichkeit zutr[illegible]
Fo[illegible]lier[illegible] de[illegible]hler [illegible]se-	**Fo[illegible]hlers:** [illegible]ohl [illegible]eue Therapie [illegible]ht besser als di[illegible]e ist, w[illegible]aufgrund de[illegible]probe i[illegible]lich [illegible]genomme[illegible] die neue T[illegible]apie besser ist.	**F[illegible]ieren des Fehlers:** Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie **nicht** besser ist.
	Kon[illegible]quenz der F[illegible]entscheidung: Blamage durch[illegible]eröffentlichung eines nicht zutreffende[illegible]Forschungsergebnisses. (Wird in Wissenschaft und Forschung als schlimmer Fehler angesehen.)	**Konsequenz der Fehlentscheidung:** Die Erkrankten erhalten kein besseres Medikament, bzw. es wird ggf. unnötigerweise Geld für weitere Forschung ausgegeben.

Wi[illegible]iner Stichprobe zwei unterschiedliche [illegible]n Hypothesentest daher zwischen dem [illegible] oder **Fehler 1. A[illegible]** [illegible]**Fehler 2. Art**.

[illegible]ordnung zu den beiden Hypothesen ist festgeleg[illegible]Regel wie folgt vorgenommen:.

α-Fehler:
- Man ordnet der **Nullhypothese H_0** den α-Fehle[illegible]
- Der α-Fehler ist im Allgemeinen der Fehler, welch[illegible]ution, die den Test durchf[illegible]Auftrag gibt, die gravierenderen [illegible]en Folgen hat.
- [illegible]rendere Fehler ist, sollte di[illegible]öglichst klein und nicht [illegible]ein.

β-Fe[illegible] [illegible]**nativhypothese H_1** den β-Fehler zu.
- [illegible] Allgemeinen der Fehler, der als weniger [illegible]angesehen wird.
- Der β-Fehler sollte in der Regel nicht kleiner als der α-Fehler[illegible]die Konsequenzen dieses Fehlers ebenfalls nicht unerheblich, s[illegible] so gestaltet werden, dass auch dieser Fehler möglich[illegible]lein wird.

Beide Fehler können nun, um der Aufgabenstellung eine übersichtliche Struktur zu…hen, in …bindung mit den Werten für die Entscheidungsgrenze ebenfalls tabellarisch dargestellt werd…

In dieser Spalte der Tabelle geht man davon aus, dass die Nullhypothese H_0 zutrifft und das neue Medikament nicht besser ist. Befinden sich in der Stichprobe weniger als 8 geheilte Patienten, spricht das für die Gültigkeit … Nullhypothese H_0 und man … entscheidet sich zu Recht f… Erhält man jedoch d… Zuf… Stichprobe mit vi… geheilten Personen, ents… zu Unrecht gegen d… Hypo…se und be… mit den α-Fehl…

In dieser S… elle geht man d… aus, … die Nullhypothese H_1 zut… d… eue Medikament … Be…nden sich … der …chpro… mindestens … so viele …heilte Patienten … das für die …keit der Hy…se H_1 und man entscheidet s… zu Recht für … Erhält man jedoch durch … eine Stichpro…be mit wenigen ge…ilten Person…, begeht man den β-Fehler, da man sich zu Unrecht gegen die …ternativhypothese entscheidet.

Ausgang des Zufallsversuchs

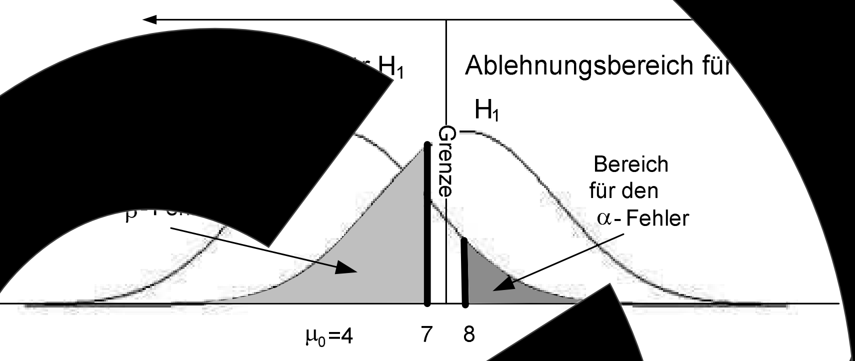
$k \leq 7$	richtige Entscheidung	**β-Fehler**
$k \geq 8$	**α-Fehler**	richtige Entscheidung

4. Sch… …ualisieren und berechnen … α- und β-Fehlers

Der α-Fehler gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wert von k in der Stichprobe in den Ablehnungsbereich von H_0 fällt. Bei dieser Aufgabe betrifft das alle Balken der Verteilung von H_0, welche rechts von der Entscheidungsgrenze liegen (vgl. Abb. 11.1).

Der β-Fehler gibt die Wa… der Wert von k in der Stichprobe in den Ablehnungsbe… das alle Balken der Verteilung von H_1, welche links von …

… berechnen, ist es hilfr… zu visualisieren. Man kann dazu …1.1 bzw. 11.2 zugrundelegen, und d… …hler entsprechend der …arkieren.



Aus Abb.11.3 kann man nun die Ansätze für die Berechnung der beiden Fe… …ntnehm… Berechnen Sie die beiden Fehler, indem Sie die entsprechenden Felder in der Tabelle un… …gänz… Für die Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese H_1 wird der Wert p_1 = … …wendet. …gabenstellung)

Berechnung der Fehler	**Berechnung des α-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__**	**Berech… …Fehlers unter …rwen… …er Verteilung von H__**	
	$\alpha = P(X \geq \_\_\_)$ $\alpha = 1 - P(X \leq \_\_\_)$ $\alpha = 1 - F_{20;0,2}(\_\_)$ Verteilun… H__ $\alpha =$ ____ $\alpha =$ ____ α … 2%	…(X ≤ ___) β = …(___) Ve…ilung von H__ β = … 2%	

5. Schritt: Formuli… …er Antwort

Aufgru… der En…eidu…egel des Geschäftsführers … ein sehr kleiner α-Fehler von 3,2% auf. Damit … die Wah…einlichkeit, sich durch die Veröffentlichung eines falschen Forschungsergebnisses …rs…kreisen … blamieren, … Allerdings ist der β-Fehler mit fast 42% sehr groß.

Auf…e 11.2

B… …en Sie, wa…um man bei glei… Stichprobenumfang den β-Fehler von Aufgabe 11.1 nur verkleinern kann, we… man einen größeren α-Fehler zulässt.

____

____

____

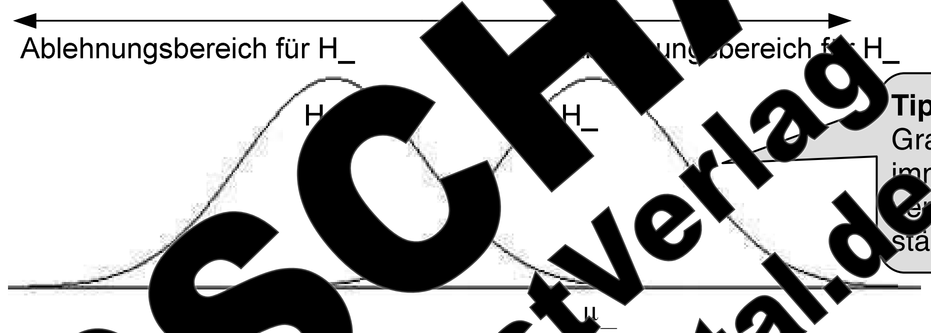
…er folgenden Seite ist eine Tabelle abgebildet, die … Aufgabe 11.1 dargestellten …iltabellen zusammensetzt. Um die Vorgehensweise bei … Test zusammenzufassen und zu vertiefen, soll diese Tabelle aufgrundlage der Aufgabe… für einen Stichprobenumfang von **50 Personen** ausgefüllt werden. Der G… …egt hier fest, dass man von einer verbessert… …usgehen will, wenn mindestens … …geheilt werden. Orientieren Si… der modifizierten Aufgabens… vorgegebenen Lösungss… …d führen Sie die Schritte 1 bis 4 … durch.

Schr… …othesen, ermitteln Sie jeweils die We…

S… …nen Sie … beiden Verteilungen mit H_0 und H_1 und zeic… …e Grenze sowie …grenzende Balken für die Entscheidungsregel an geeigneten … …er Abbildung ein.

Formulieren Sie die Fehler, notieren Sie die zugehörigen Werteb… …k und ordnen Sie den α-Fehler und β-Fehler zu.

Markieren Sie die Fehlerbereiche in d… …g und berechne… …Fehler. Verwenden Sie für H_1 wieder p_1 = …

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	____________hypothese H_ n = ___ p__ ______ μ__ _______	____________[illegible]hypothes[illegible]__ n = [illegible] μ__ ______
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler		
Formul[illegible]en der Fe[illegible] und Kon[illegible]	**Formulieren [illegible]lers:** Obwohl ______________ ______________ [illegible]d aufg[illegible] der [illegible]chprobe i[illegible] [illegible]enomm[illegible] ______________ ______________ **Konsequenz d[illegible]ehlentschei[illegible]:** ______________ ______________ ______________ Fehler ist gravieren[illegible] / [illegible]er gravierend.	**[illegible]ormulieren de[illegible] F[illegible]hlers:** [illegible]bwohl ______________ ______________ w[illegible] aufgrund der Stichprobe irrtümlich [illegible]genommen, ______________ ______________ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** ______________ ______________ ______________ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k __ __	[illegible]	___-Fehler
k[illegible]	___-Fehler	[illegible]richtige Entscheidung
	[illegible]erechnung des __-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__	**[illegible]s __-Fehlers unter V[illegible]erteilung von H__**

Aufgabe 11.3

Die Testsituation von Aufgabe 11.1 wird nun wie folgt verändert.

- Das Medikament wird nun an 50 Personen getestet.
- Die Wirksamkeit des bestehenden Medikamentes bei 2[illegible]er Pa[illegible] gilt als sicher.
- Die Wirksamkeit des neuen Medikamentes ist besser als [illegible]
- Der Geschäftsführer möchte, dass das Risiko, si[illegible]urch [illegible]öffe[illegible]chung eines falschen Forschungsergebnisses hinsichtlich einer verbess[illegible]rksa[illegible]it des Medi[illegible]entes zu blamieren, weniger als 1% beträgt.

Damit wird nun der α-Fehler vorgegeben, [illegible]es muss d[illegible]enze für die Ent[illegible]eidungsregel ermittelt werden.

a) Verdeutlichen Sie sich anhand der Tab[illegible] auf de[illegible]genden Seite, w[illegible]s im Lösung[illegible]erfahren gleich bleibt und was sich verändert[illegible]ren [illegible] die einzel[illegible]ösungsschritte.

1. Schritt: Formulieren de[illegible] und Notieren [illegible]er gegebenen Werte

____

____

____

[illegible] Schritt: Vis[illegible]sieren der [illegible]lemstellung

____

____

____

3. Schritt: Betrachtung von Fehlentscheidungen

____

[illegible]eren und Bere[illegible]

____

____

____

____

____

____

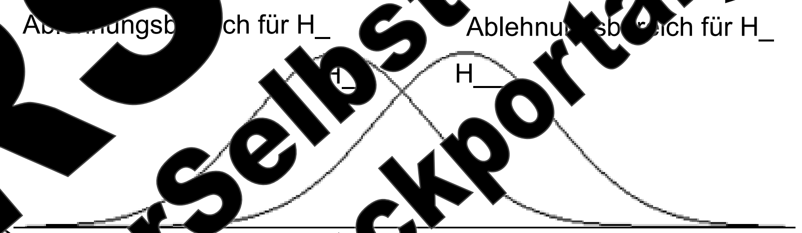
____

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	**Nullhypothese H_0** Die neue Therapie ist nicht besser als die alte Therapie.	**Alternativhy[...]ese H** Die neue Th[...]ist bes[...]alte Therapie.
	n = 50 $p_0 = 0{,}2$ $\mu_0 = 10$	n = [...] $\mu_1 > 10$
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler		
Formulieren der Fehler und Konsequenz[...]	**Formulieren des Fehl[...]** Obwohl di[...]ue T[...]apie [...]esser a[...] die alte ist, wir[...]fgrund[...] Stichprobe irrtümlich [...]en, [...] die neue Therapie [...]sser is[...]	**Form[...]ren des Fe[...]s:** Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufg[...]d der Stichprobe irrtümlich ange[...]n, dass die neue Therapie **nicht** besser ist.
	[...] der Fehlentscheidung: Blamage durch die Veröffentlichung [...] nicht zutreffende[...] Forschungsergebnisses. Fehler ist gravierend / ~~weniger gravierend.~~	**Konsequenz der Fehlentscheidung:** Die Erkrankten erhalten kein besseres Medikament bzw. es wird ggf. unnötigerweise Geld für weitere Forschung ausgegeben. Fehler ~~ist gravierend~~ / weniger gravierend.
$k \le g_r - 1$	richtige Entscheidung	**β-Fehler**
$k \ge g_r$	[...]	richtige Entscheidung
[...]ung [...]ehler	$[...](X \ge g_r) \le \alpha$ $1 - P(X \le g_r - 1) \le 0{,}01$ $P(X \le g_r - 1) \ge 0{,}99$ $F_{50;\,0,2}(g_r - 1) \ge 0{,}99$ $g[...]$	**Berechnung des __-Fehlers unter [...]ndung der Verteilung von H__ , [...] 0,4 gilt** β [...]ilung von H_ $\beta = 0{,}2[...]$ $\beta \approx 24\%$

Antwo[...] der Stichprobe mindestens 18 geheilte Personen befinden, [...] mit einem [...]ko von weniger als 1% behaupten, dass die neue Therapie bes[...]e alte. Der [...]. Art beträgt dann 24%.

Übung 11.2

Verwenden Sie für diese Übung die Aufgabenstellung von Aufgab[...] Verwe[...]abei für die Stichprobe nun **100 Patienten** und zeigen Sie, indem Sie die folge[...] ausfüllen, dass der β-Fehler bei diesem veränderten Stichprobenumfang einen W[...]rt von [...] a[...] Da sich wegen der unveränderten Aufgabenstellung bei der Formulierung de[...]er und [...] Konsequenzen keine Veränderungen ergeben, ist dieser Schritt hier nicht erforder[...]nd e[...]eint in dieser Tabelle nicht noch einmal.

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	**Nullhypothese [...]** Die neue Therapie ist nicht [...]ser als di[...] alte Therapie.	**Alter[...]hypothese H_1** [...]e neue T[...]apie ist besser als die alte Therapi[...]
	n = ___ p[...] μ_0 ___	n[...] p_1 ___ μ_1 ___
Markieren Ablehnungsbereiche un[...] Fehler	 T[...] Vo[...]m Ber[...]nen der [...] Graphik [...]ervollst[...]igen.	
k___	richtige Entscheidung	__-Fehler
k __ ___	[...]-Fehler	richtige Entscheidung
Berechnung der Fehler	**Berechnung von g_r unter Verwendung des α-Fehlers und der Verteilung H_0**	**Berechnung des __-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__, wenn $p_1 = 0{,}4$ gilt**

Aufgabe 11.5

Bei Einnahme des verbesserten Medikaments (vgl. Aufgabenstellung 11 … 11.3) w… erwartet mehr Erkrankte geheilt. Allerdings treten nun bei 30% der Patienten lebe… he Nebenwirkungen auf. Durch eine Beimischung eines weiteren Wirkstoffes soll erreicht werde… das … noch bei 10% der Patienten Nebenwirkungen auftreten. Für einen Test des modifi… n Med… ehen 50 Personen zur Verfügung. Man entscheidet, dass man von einer V… erun… r Nebenwirkung ausgehen will, wenn in dieser Stichprobe weniger als 12 P… sonen … heft… Nebenwirkungen haben.

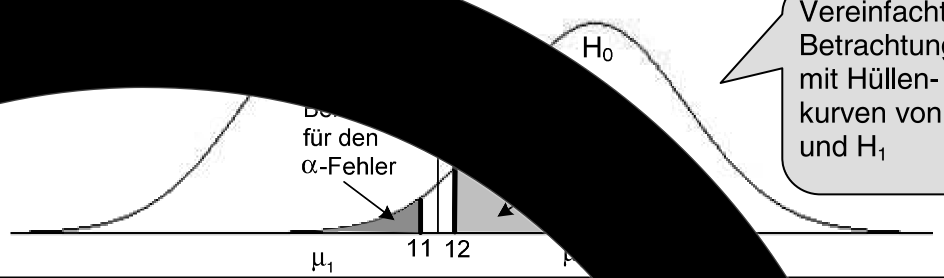
a) Ergänzen Sie die Tabelle unten, erläutern Sie … Fehl… bei diesem Test a… eten können, und zeigen Sie, dass der α-Fehler einen Wert vo… twa 14% hat … der β-Fehler … % beträgt, wenn man für H_1 die Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,1$ verwe…

b) Begründen Sie, warum dieser Test n… ugl… t.

zu a)

…ür … lternativhypothese H_1 ist es günst… die linke Spalte zu wählen, da die …scheinlich…eit für H_1 kleiner a… die Wahrscheinlichkeit von H_0 ist und somit die Verteilung von H_1 links von der Verteilung der … ullhypothese H_0 …

	…lternativhypothese H_1	Nullhypothese H_0
Formul…n … …these… und Zahlenwe…	Die neue Therapie hat weniger Nebenwirkungen … die alte.	Die neue Therapie hat die gleichen Nebenwirkungen wie die alte.
	n = 50 $p_1 < 0,3$ $\mu_1 < 15$	n = 50 p_0 = ____ μ_0 = ____
Visualisieren und Markieren der Ableh… b… …en	Annahmebereich für H_ Ablehnungsbereich für H_	Annahmebereich für H_ Ablehnungsbereich für H_



… Spalte trifft H_1 zu.

In … e trifft H_0 zu.

Bezu… auf …

Bezug auf H_0

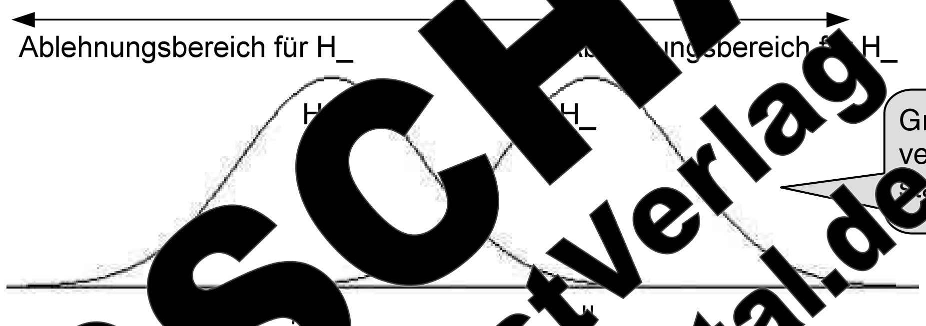
…rmulieren des Fehlers:	Formulieren des F…
Obwohl ________	…ohl ________
________	________,

Formulieren der Fehler und Konsequenzen	wird irrtümlich angenommen, dass ______ ______ ______	wird ir… lich an… mm… dass ______ ______ ______
	Konsequenz der Fehlentscheidung … ______ ______ ______ ______ ______ F… ist … vierend / weniger gra… nd.	**Ko… uenz der … entscheidung:** ______ ______ ______ ______ ______ Fehl… t gravierend / weniger gravierend.
k__ __	richtige Ents…	**__-Fehler**
k__ __	**__-Fehler**	richtige Entscheidung
B… chn… de… Fehler	**B… chnung de… β-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__ und der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,1$** $\beta = P(x \geq$ ___ $)$ $\beta = 1 - P(x \leq$ ___ $\beta = 1 - F_{20;\,0,1}($ ___ $)$ Verteilung von H__	**Berechnung des α-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H__ und der Wahrscheinlichkeit $p_0 = 0,3$** $\alpha = P(x \leq$ ___ $)$ $\alpha = F_{50;0,3}($ __ $)$ Verteilung von H__ α = ______________ α = ______ %

…rt zu b): ________________________________
____
____

Aufga…

D… fgabe 11… α-Fehler größer als der β-Fehler ist und … it als nicht … stuft werden kann, soll eine Entscheidungsregel gefunden we… lcher der … ner als 5% wird. Ermitteln Sie eine geeignete Entscheidungsreg… en Sie sich … Aufgabe 11.3 bzw. Übung 11.2.
…rgebnis: In der Stichprobe dürfen sich hö… Personen mit Ne… gen befinden; …nn β = 5,8%)

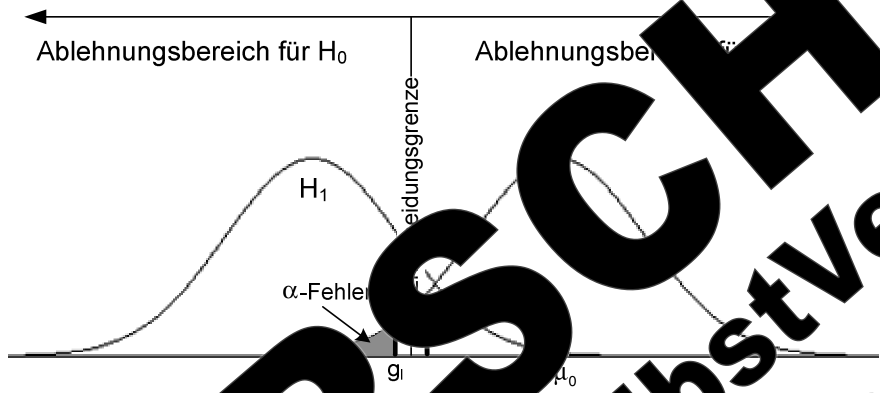
Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	________________hypothese H_	________________hypothese H_
	n = ___ p__ _____ μ__ ______	n = ___ p__ _____ μ__ ______
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler		Graphik vervollständigen!
Formulieren der Fehler und Konsequenzen	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl ______________________, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich ______ angenommen, ______________ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** ______ ______ ______ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl ______________________, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich ______ angenommen, ______________ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** ______ ______ ______ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k__ __		___-Fehler
	___-Fehler	richtige Entscheidung
	Berechnungen zum __-Fehler	**Berechnungen zum __-Fehler**

Aufgabe 11.7

Links- und rechtsseitiger Test

Verdeutlichen Sie sich die beiden folgen Abbildungen und ergänzen Sie die Lücken im Text.

Linksseitiger Test

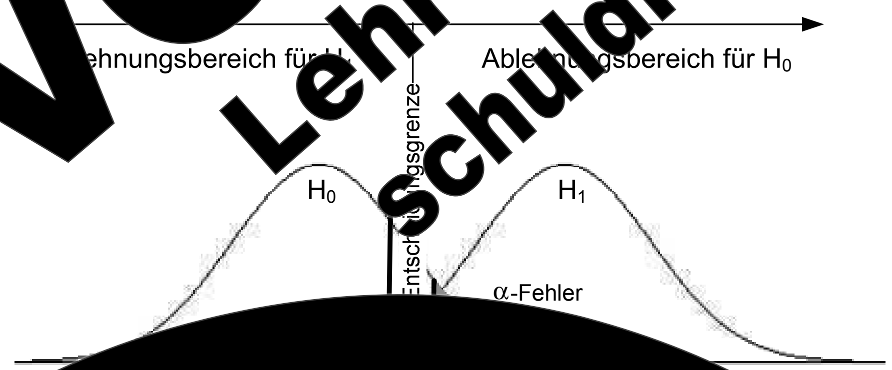


Die Verteilung von H_1 liegt **links** von der Verteilung H_0.

Die Entscheidungsgrenze zwischen dem Annahme- und dem Ablehnungsbereich von H_0 und damit auch der **kritische Wert** g_l sowie der α-Fehler liegen ebenfalls auf der ____________ Seite der Verteilung von H_0. Man bezeichnet den Test daher als ____________________ Test.

Berechnen des α-F... $(g_l - 1)$ mit p_0

Rechtsseitiger Test



Die Verteilung von H_1 liegt **rechts** von der Verteilung H_0.

Die Entscheidungsgrenze zwischen dem Annahme- und dem Ablehnungsbereich von H_0 und damit auch der kritische Wert g_r sowie der α-Fehler liegen ebenfalls auf der ____________ Seite der Verteilung von H_0. Man bezeichnet den Test daher als ____________________ Test.

... Fehlers: $\alpha = P(X > g_r) = ...$

Übersicht der Testarten in den bisher behandelten Aufgaben und Übungen

Testart	Berechnen von	Aufgabe/Übung
linksseitig		Aufgabe 11.1, Übu...
linksseitig	... und β	Aufgabe 11.3, Übung...
rechts...		Aufgabe 11.4
rech...	...l und β	Aufgabe 11.5

... Vorlage für die Tabelle zur Bearbeitung einseitiger Tests in ergä... Übungen befindet sich auf der Folgeseite.

...nde Übungen: ______________________________

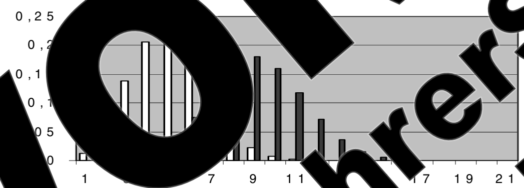
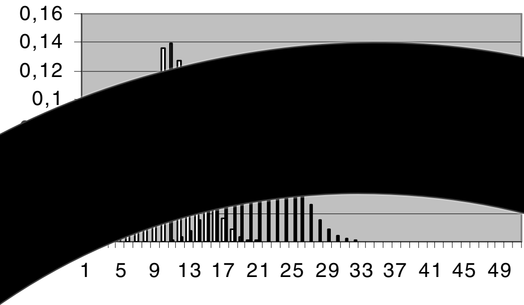
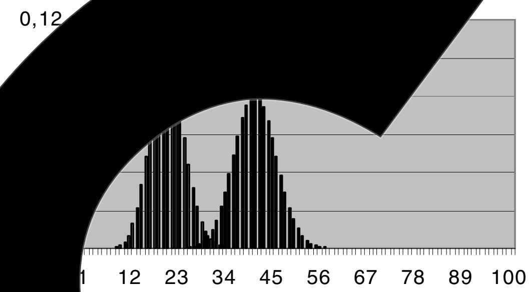
Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	________________hypothese H_	________________hypothese H_
	n = ___ p_ _______ μ_ _______	n = ___ p_ _______ μ_ _______
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H_ 	Ablehnungsbereich für H_
Formulieren der Fehler und Konsequenzen	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl ________________, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, ________________ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** ________________ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl ________________, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, ________________ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** ________________ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k __		
	Berechnung zum ___ Fehler	**Berechnung zum ___ Fehler**

Aufgabe 11.8

Ergänzende Betrachtungen zur Abhängigkeit der Fehler vom Stichprobenumfang

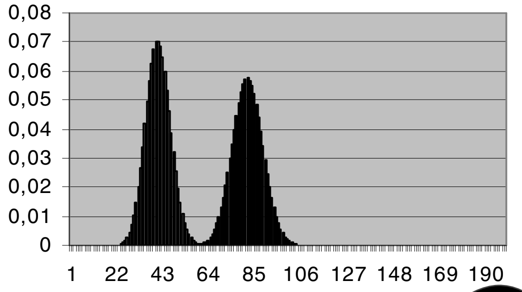
Wenn man die Werte für die beiden Fehler aus Aufgabe 11.2 sowie … vergleicht, erkennt man, dass bei einem gleich bleibenden α-Fehler der β-Fehler bei … umfangreicheren Stichprobe kleiner wird. Dieser Zusammenhang soll anhand der folgenden Beispiele … näher untersucht werden. Dazu werden die im Folgenden abgebildeten Verteilungen herangezogen. (… besseren Übersichtlichkeit erhalten die Balken Zwischenabstände.) Der kritische Wert für die Entscheidungsregel wird jeweils so gewählt, dass der α-Fehler etwa bei 3% liegt.

a) Markieren Sie jeweils näherungsweise die Grenze zwischen den Ablehnungs- und Annahmebereichen. Ergänzen Sie die fehlenden Berechnungen:

Verteilungen H_0: p = 2… H_1: p = 4…	Größe des α-Fehlers	Größe des β-Fehlers
$B_{20;0,2}(k)$ und $B_{…}(k)$ **kritische Zahl** … 	Wert für α aus Aufgabe 11.1 α = 3,…%	Wert für β aus Aufgabe 11.1 β = 41,6%
$B_{…;0,2}(k)$ und $B_{…;0,4}(k)$ **kritische Zahl k = 16** 	α = P(x ≥ ____) α = 1 − P(x ≤ ____) α = 1 − F____;____(___) α = ________________	β = P(x ≤ ___) β = F____;____(___) β = ______________ β = 9,6%
$B_{100;0,2}(k)$ und $B_{100,0,4}(k)$ **kritische** … 	α = P(x ≥ ____) α = 1 − P(x ≤ ____) α = 1 − F____;____(___) α = ________________ α = ________________	β = P(x ≤ ___) β = F____;____(___) … %

$B_{200;\,0,2}$(k) und $B_{200;\,0,4}$(k)

kritische Zahl k = 51



α = P(x ≥ _____)
α = 1 – P(x ≤ _____)
α = 1 – F____;____(___)

α = ____________

α = ____________

β = (______)
β = F________ (____)

0,000

β = 0%

35%

b) Formulieren Sie ein Ergebnis, ind … folgenden Satz ergänzen:

Wenn der gravierendere … r klein bleiben soll, kann man β-Fehler ebenfalls verkleinern, indem

man den Umfang n d … ____________

c) Erläutern S … des … cheinungsbild … beiden Verteilungen, warum der β-Fehler bei wachsend … Stichp … enumfang abnimmt.

____

____

____

____

Informationen zum Umfang … in der Praxis des Testens

1. Prioritä… … gehalten werden. Hier werden in … er 1% angestrebt.

… Kosten eines Tests, die beispielswe… … dige Testverfahren oder hohen Personalaufwand bestimmt werden k… … Praxis im Allgemeinen niedrig gehalten werden. Daher wird man den U… … probe nur so groß wählen, dass bei einem möglichst kleinen α-Fehler … vertretbares Maß annimmt. Die Größe der Stichprobe wird daher vom … fehler bestimmt.

Die G… … beispielsweise bei Tests in … nn auch durch e… … banden nach oben begrenzt se… … technische … schränkt werden.

Folge… … der Fehler 2. Art als unwichtig zu bewerten, wird man n klein … st der Fehler 2. Art ebenfalls gravierend, wird man versuchen, n … len.

Aufgabe 11.9

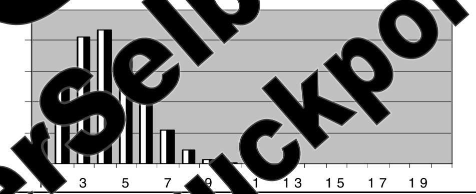
Ergänzende Betrachtungen zur Abhängigkeit des β-Fehlers v… … Wahrs… … keit p_1 der Alternativhypothese H_1

Für die folgenden Betrachtungen wird für den Umfang der … probe … ert n = 20 und als Annahmebereich für H_0 der Bereich A = {0, …, 7} gewählt. D… … llen … enbeispielen unten für H_0 eine Wahrscheinlichkeit von p_0 = 20% verwendet wird, … de… … m… α = **3,21%** jeweils gleich (vgl. Aufgabe 11.1).

Für die Hypothese H_1 wird die Wahrschein… … keit p begin… … bei 20% je… … m 10% vergrößert. Markieren Sie in allen Abbildungen die E… … heidungs… … enz… und bestä… … Sie die für den jeweiligen β-Fehler angegebenen Werte durch Rech… … (Zur … seren Über… … keit erh… … die Balken Zwischenabstände.)

Verteilungen für n = 2… **Ab… ung der Verteilungen** **Größe des β-Fehlers**

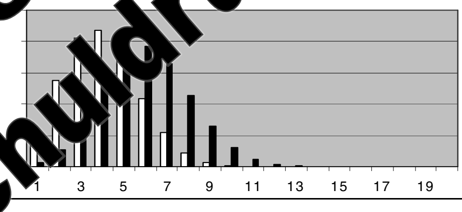
H_0: p_0 = 20% ⇒ $B_{20;\,0,…}$
H_1: p_1 = 20% ⇒



β = P(x ≤ ___)
β = $F_{20;}$ ____ (___)

β = ________ = 96,7%

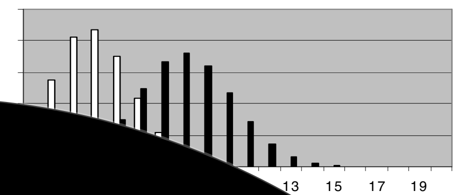
$H_…$ … = … ⇒ $B_{20;\,0,2}$(k)
H_1 … = 30 … ⇒ $B_{20;}$ …



β = P(x ≤ ___)
β = $F_{20;}$ ____ (___)

β = ________ = 77,23%

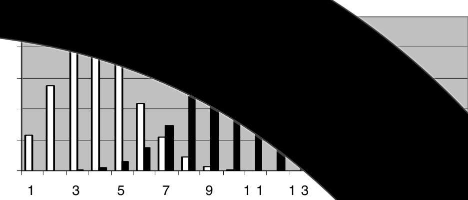
H_0: p_0 = 20% ⇒ $B_{20;\,0,2}$(k)
H_1: p_1 = 40% ⇒ $B_{20;}$ ___(k)



β = P(x ≤ ___)
β = F_{20} ____ (___)

β = ________ = 41,59%

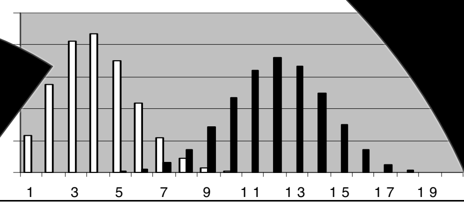
⇒ $B_{20;}$ ___(k)



β = P(x ≤ ___)
β = $F_{20;}$ ____ (___)

β = ________ = 13,16%

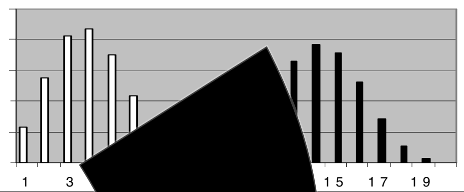
H_0: p = 20% ⇒
H_1: p = 60%



P(x ≤ ___)
____ (___)

____ = 2,1%

⇒ $B_{20;\,0,2}$(k)
% ⇒ $B_{20;}$ ___(k)



)
(___)

____ = 0,13%

Ergänzen Sie anhand der Untersuchung die folgenden Sätze.

Je ____________ die Werte für die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 der N… hypothese … Alternativhypothese H_1 voneinander abweichen, desto weniger überlappe… … beiden Verteilungen. Das bedeutet, dass bei vorgegebenem konstantem α-Fehler de… …hler ________________________.

Als Folge für die Stichprobengröße ergibt sich demnach:

- Bei einer ______________ Differenz der W… …inlich… …n p_0 und p_1 erhä… …an auch bei kleinem Stichprobenumfang einen kleinen β-…hler.
- Bei einer kleinen Differenz der W… …scheinlich… …nd p_1 k… …man bei vorgege… …em α-Fehler den β-Fehler nur klein … …an einen ____________________ Stichprobenumfang wä…

Aufgabe 11.10

Erweiternd… …d vert… …nde … …trachtung… …m Begriff … …ationscharakteristik

Wie Si… … Au… … 11… …d 11.9 sich… …erkannt … …en, hängt die Größe des β-Fehlers von der Differen… …r W… …lichkeiten … …er Nullhy… …e und p_1 der Alternativhypothese sowie vom …probe… …mfang n ab. Diesen Zusammenhang … man in einem Diagramm, in dem man auf der ho… … …chse die Werte … die Wahrsch… …keiten p_1 und auf den vertikalen Achse den Wert für den je… …stehende… β-Fehler abträg… …stellen. Ein derartiges Diagramm wird als **Operation…charakteristik** …der kurz **O…-Funktion** bezeichnet, und es gilt **β = OC(p_1)**

a) **OC-Funktion für einen rechtssei… …en Test**

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse von Aufgabe 11.9, ergänzt durch einige weitere Werte für p_1, angegeben. Trage… … …are als Punkte im dazugehörigen Diagramm ein und verbinden Sie…

p_1	β-Fehler
[illegible]	[illegible]
[illegible]	1,0
…,2	0,97
0,3	0,77
0,4	0,42
0,5	0[illegible]
0,6	[illegible]
0,…	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	…,0
[illegible]	…0,0

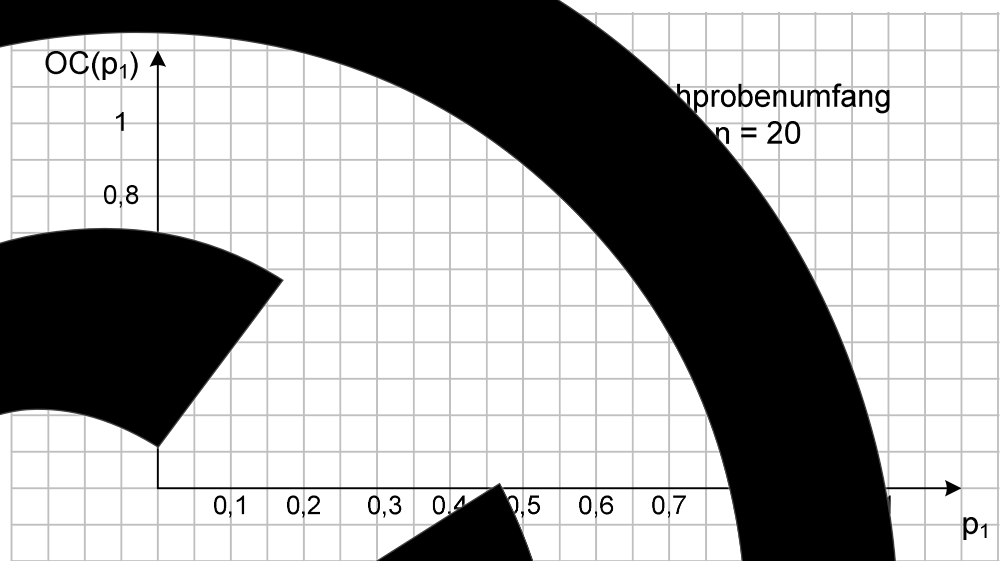


Abb. 11.10.1

Die folgende Tabelle enthält für einen Stichprobenumfang von n = 100 di… …rtepaa… …nes rechtsseitigen Tests. Fertigen Sie ebenfalls den Graphen der OC-Funktion …

p_1	β-Fehler
0,0	1,0
0,1	1,0
0,2	0,98
0,3	0,38
0,4	0,01
0,5	0,00
0,6	0,00
0,7	0.00
0,8	0,00
0,9	0,0[illegible]
1,0	[illegible]0,00

Abb. 11.10.2

Erlä… …n Sie, w… …he Gemeinsa… …eiten und Unt… …hiede die Graphen in Abb. 11.9.1 und 11.9.2 …be… …dem … …den Lückente… …ervollstä… …gen.

W… …n bei einem rech… …itigen Test die Wahrscheinlichkeit p_1 wesentlich kleiner als p_0 ist, nimmt der …ler den We… …an. In diese… …all liegt die Verteilung von H_ vollständig im Annahmebereich von H_. Wenn bei einem r… …seitigen Test die Wahrscheinlichkeit p_1 und p_0 etwa ______________ sind, liegt der Wert für den β-Fehler nahe bei 1. In diesem Fall liegt der größte Teil der Verteilung … …h von H_. Wenn bei einem rechtsseitigen Test die W… …immt der β-Fehler ab. Je größer der … …n Wahrsch… ________ wird der β-Fehler. Bei … Unterschieden nimmt der β-Fehler schlie… …_ an, da sich die beiden Verteilungen nicht mehr überlappen und die Verteilung … den Ablehnungsbereich von H_ fällt.

Je größer … …ist der Bereich, in dem sich … …en auch bei nahe beiei… …p_1 und p_0 überlappen (vgl. Aufgab… …er nimmt der β-… …en von p_1 sehr schnell ____. In der Op… …akteristik erkennt …aran, dass die Kurve in der Umgebung von p_0 bei __________ …n n wesentlich …verläuft als bei kleinen Werten von n. Man s… …ch, dass bei gro… …chärfe des Tests …mt.

b) Operationscharakteristik bei einem linksseitigen Test

Begründen Sie, warum die OC-Funktion in Abb. 11.10.3 einen linksse... Test (v... .7) beschreibt, indem Sie den Text vervollständigen:

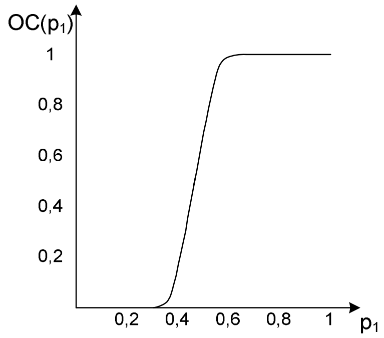


Abb. 11.10.3

Die Verteilung von H_1 liegt b... ...em li... ...est __________ von der Verteilung vo... We... Wah...einlichkeit p_1 viel __________ al... Wa...einlichk...it von H... ist, ... es keine Überlappun... er Verteilunge... und H_1. Die Verteilung von H_1 liegt da... ständ... m __________ bereic... von H_0. Damit ... Fehler bei einem linksseitigen Test ... __________ Werte von p_1 den ...rt Null an. Der ...-Fehler __________, ...n sich der Wert von p_1 dem Wert ... p_0 annähert, und nimmt den Wert ____, wenn gilt: ...

c) Ope... ...stik bei ein... zweiseitig... ...st

...rün... Sie, warum die ...-Funktion in Abb. 11.10.4 einen zweiseitigen Test beschreibt, indem S... ...t vervollständig...:

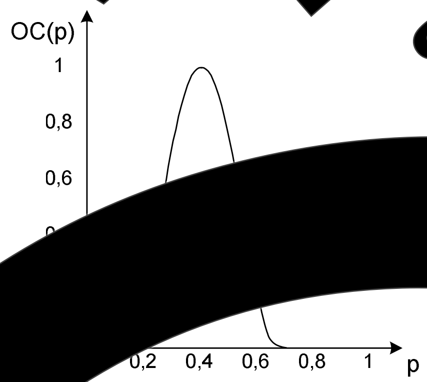


Abb. 11.10.4

Da eine Hypothese bei einem zweiseitigen Test nach links und nach rechts getestet wird (vgl. Aufg. 10.3 und 10.4), tritt der Fehler auf __________ Seiten der Hypothese auf. Liegt der ... der Wahrscheinlichkeit, welcher der ... ...mt der Funktionswert der Operationscharakt... __________ Wert an. Der Funktionswert vo... __________, wenn p und die Wahrscheinlichkeit der ... ...rk von einander ...chen.

Übung 11.3

Zusammenfassende Übungsaufgabe zu einseitigen Tests

Testsituation:

In der Automatisierungstechnik werden zur Visualisierung vo... ...läufe... ...eräte mit LED-beleuchteten Displays eingesetzt. Diese Geräte sind oft extreme... ...ding... ...wie ...spielsweise großen Temperaturschwankungen, ausgesetzt und haben da... ...ein... ...renzte Leb...dauer. Halten die Displays dieser Beanspruchung nicht stand ... ...len ...tig aus, so wird ... das gesamte Produkt unbrauchbar und muss ersetzt werden, we... ...hohe Ko... für die Erfü... ...on Garantieleistungen entstehen können. Daher wird die vom H...eller ange...ebe... Lebensd...er von einer Firma, die diese Displays einsetzen möchte, geprüft. Man ...endet ...u Thermosch...e, in de... ...isplays untergebracht werden können u... ...rt ... ...r in Zwe... ...nzyklen vo... ...°C auf 70°C und zurück, wobei ein Zyklus als S...lation für ein... ...ebstag a... ...sehen wird. Sollte sich bei dem Test herausstellen, dass die Leben... ...plays den Anfo...erungen im E... ...t nicht entsprechen, bedeutet dies eine Zeit... ...ögeru... für die ...oduktion, d... Verbesserungen b... Hersteller eingefordert werden müssen und ... Testr... ...forderl... ...ird. Dies kann z... Folge haben, dass die Konkurrenz Wett... ...rbsv... ...eile ha...

a) Begründ... Sie an... ...einer ...echnung ... ...in ein Test, in ... geprüft werden soll, ob die Herst... ...tion ... Lebensdaue... Displays zut... über einen Zeitraum von mindestens 5 Mo... ...n lau... ...uss, ...n für die ...ndgeräte eine L...nsdauer von 5 Jahren angesetzt werden soll.

___

___

...ersteller d... Displays gibt a... ...mindestens 95% seiner Ware unter extremen T...peraturschwa...ngen eine ...ensdauer von fünf Jahren hat. Da die Geschäftsleitung aus Erfahrungen mit anderen Hers...rn von vergleichbaren Displays weiß, dass nur 80 % der Displays die geforderte Lebensdauer ...n 5 Jahren haben, wird folgender Test vorgeschlagen: Die Geschäftsleitung legt fest, dass der Test mit der Nullhypothese: „80% der Displays haben eine Lebensdauer von 5 Jahren“ bzw. der Alternativhypothese: „95% der Displays haben eine Lebensdauer vo... ... Signifikanzniveau von 1% durchgeführt werden soll. Formuli... ...diesem Test auftreten können und welche K... ...die zugehörige Entscheidungsregel und den ... {47, …, 50}, β = 24%). Verwenden Sie ... der Aufgabe die ... Seite.)

...gründen Sie anhand der Konsequenzen für die ..., dass das Signifikanzniveau von 1% nur bedingt angemessen ist, und erläutern Sie, ...m Test der β-Fehler nur verkleinert werden kann, wenn ein größerer α-Fehler vorg...

___

___

___

___

...nen Sie beide Fehler, wenn folgende Entschei...ngsregel festgeleg... ... geht davon ...ass die Angaben des Herstellers zur Leben... der Displays zutr... ...öchstens 45 ...ys bei dem Test ausfallen.
...n für Rechnung übernächste Seite; ... ...1,85%, β = 10,4...

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	________________hypothese H_	________________hypothe[illegible] H_
	n = ___ p_ _______ μ_ _______	n = ___ p_ _______ μ_ _______
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler		
Formulieren der Fehler und Konsequenzen	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl ______________________ , ______________________ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, ______________________ ______________________ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** ______________________ ______________________ ______________________ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	**Formulieren des Fehlers:** Obwohl ______________________ , ______________________ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, ______________________ ______________________ **Konsequenz der Fehlentscheidung:** ______________________ ______________________ ______________________ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k __ [illegible]		
[illegible]		
[illegible]	**Berechnung zum ___ Fehler**	**Berechnung zum ___ Fehler**

Raum zu Berechnungen zur Übung 11.3 d)

Übung 11.4

Nicht immer ist bei Signifikanztests die Wahrscheinlichkeit der Alternativh[illegible]ese H_1 [illegible]n diesem Fall wird aufgrundlage des gegebenen Signifikanzniveaus oft nu[illegible]hmebe[illegible]n für die Nullhypothese ermittelt und auch kein Fehler 2. Art berechnet. Die folgend[illegible] Prob[illegible]llung soll nun beispielhaft für diese Testvariante bearbeitet werden.

Aus mehrjährigen Beobachtungen weiß man, dass 70% d[illegible] Bevöl[illegible] eine[illegible]allungszentrums die Stadt A für einen Einkaufsbummel wählen und dazu mit de[illegible] a[illegible]se in der I[illegible]stadt anfahren. Um die Feinstaubbelastung zu senken, s[illegible] kost[illegible]e Park[illegible]ide-Ang[illegible] Stadtrand eingerichtet und die Parkgebühren in der Innens[illegible]stisch [illegible] werden. [illegible] Einzelhandel aufgrund der Maßnahme eine Abwanderung von K[illegible]ern in andere [illegible]te und d[illegible]en Umsatzrückgang befürchtet, soll zunächst auf einem S[illegible]ikanzni[illegible] von 3% eine entsprechende [illegible]frage unter 100 Passanten durchgeführt wer[illegible]

a) Begründen Sie, warum es sinnvo[illegible] Test für die [illegible]pothese H_0 den Wert $p_0 = 0{,}7$ und für die Hypothese H_1 eine Wa[illegible] $p_1 < 0{,}7$ anz[illegible]en.

____

____

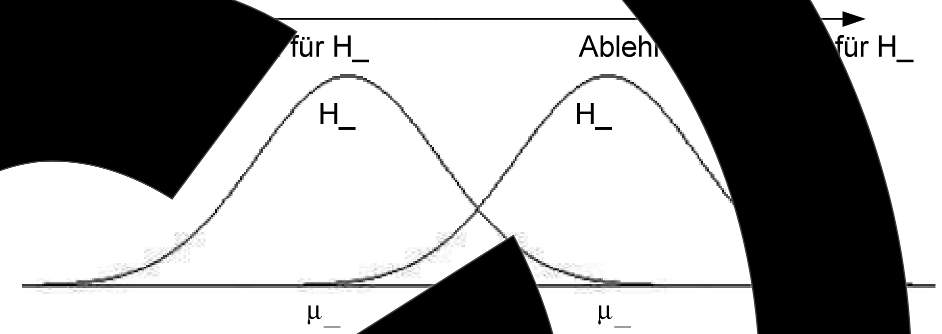
____

____

b) F[illegible] Sie beide Hyp[illegible]sen und [illegible]den Sie, warum es sinnvoll ist, die Hüllenkurve für die Verte[illegible] der Hypoth[illegible] H_1 zu skizzier[illegible] obwohl der Wert von p_1 nicht gegeben wird. Ergänzen Sie die Entscheidungsgrenze und fehlen[illegible] Werte in der Tabelle sowie in der Abbildung und markieren Sie den Bereich für den α-Fehler.

____

____

	[illegible]lternativhypothese H_1	[illegible]ullhypothese H_0
[illegible]and [illegible]rdnung [illegible]er Zahlenwerte	n = 100 $p_1 < 0{,}7$ $\mu_1 <$ _____	n = ____ $\mu\_ =$ _____
Markieren Ableh-nung[illegible] rei[illegible] F[illegible]		

c) Ermitteln Sie den Annahmebereich für die Nullhypothese und formulieren [illegible] eine ge[illegible]ete Antwort.

d) Diskutieren Sie [illegible]lic[illegible]ler und deren Kon[illegible]quenzen.

α-Feh[illegible] ______________________________

____

____

____

____

β-Fehler: ______________________________

____

____

____

____

Er[illegible] ______________________________

____

____

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert ...len...en

Kapite...

Vertrauensinterva...

02-032-278

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

[illegible]pothesentests

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 12: Erweiternde Betrachtungen zur Ermittlung eines Vert[illegible]nsinte[illegible]lls

Aufgabe 12.1

Bei Wahlprognosen stützt sich die Vorhersage für das Absc[illegible]eiden [illegible]Pa[illegible]m Wahltag auf repräsentative Umfragen. Hierbei wird aufgrundlage diese[illegible]frage [illegible]ein Intervall ermittelt, in dem mit einer vorgegebenen Sicherheit der zu erwartende prozen[illegible] We[illegible] eine Partei liegt. Dieses Intervall wird als **Vertrauensintervall** oder **Konfide[illegible]ter[illegible]** [illegible]ich[illegible].

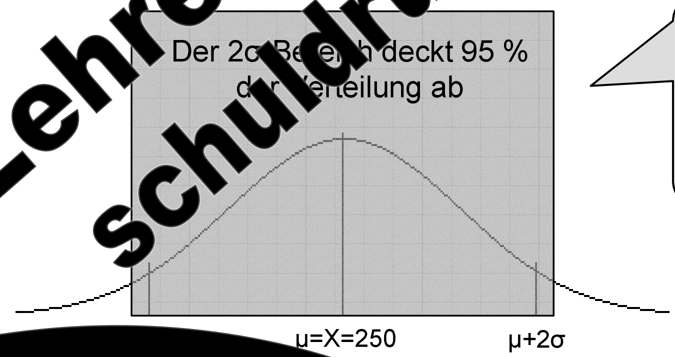
Zahlenbeispiel:

Bei einer repräsentativen Umfrage unter [illegible]0 Person[illegible]ge[illegible]n 250 an[illegible]ass sie die Partei A wählen wollen. Es soll auf einem Signifikanzniveau[illegible]n 5%, [illegible] über die V[illegible]eilung der [illegible]gebung, ein Vertrauensintervall für den zu e[illegible]den [illegible]eil p erm[illegible]erden.

Für die Berechnung des Vertr[illegible] werden zwei W[illegible]ge vorgestellt.

1. Abschätzen des [illegible]nsint[illegible] über di[illegible]mgebung

Für die Ermittlu[illegible]len Stimme[illegible]ils bzw. de[illegible]scheinlichkeit p, mit der die Partei gewählt [illegible]steh[illegible]er nu[illegible]e Umfr[illegible]isse zur [illegible]gung. Man geht für die zugehörige Verte[illegible]au[illegible]s der Umfra[illegible]rt X = 250 in[illegible]e Realität widerspiegelt, und ver[illegible]det die[illegible]We[illegible]s Erwartu[illegible]swert der Verte[illegible]. Daraus ergibt sich die folgende Abbildung:



Zur Erinnerung:
Wenn die 2σ-Umgebung verwendet wird, teilt sich der Fehler zu je 2,5% auf den linken und rechten Rand auf.

Abb.12.1

[illegible]wählen zu wollen, erhält man aus diesen [illegible]il bzw. die Wahrscheinlichkeit p, mit der [illegible]wählt wird, $p = \frac{250}{1000} = 25\%$. D[illegible] um diesen Wert herum schwanken. [illegible]e Abweichungen abzuschätzen, d.h. angebe[illegible]lchem Bereich der Wert von p liegen kann, werden die folgenden Betrachtungen dur[illegible]rn Sie die einzelnen Rechenschritte und Umformungen.

(1) $\mu = X = 250$
$p = $[illegible]

$\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma$

(3) $222{,}6 \le X \le 277{,}4$

(4) $\frac{222{,}6}{n} \le \frac{X}{n} \le \frac{277{,}4}{n}$

(5) $\frac{222{,}6}{1000} \le \frac{X}{n} \le \frac{277{,}4}{1000}$

(6) $22{,}26\% \le p \le 27{,}74\%$

Ergebnis:
Man kann ... also ... schät... dass der Stim...enanteil de... Partei zum Zeitpunkt der Umfrage zwisch... % und 2... liegt.

2. B... des Vertrauen...tervalls für p

Die Herleitung einer Formel zur Berechnung des Konfidenzintervalls und die Lösung der entstehenden Gleichung erscheint auf den ersten Blick im Vergleich zum oben beschriebenen Weg aufwendig. Bei Verwendung einer entsprechenden Rechnertechnologie (z.B CAS-System) kann man mithilfe der hergeleiteten Formel das Konfidenzintervall für p lediglich durch Eingabe der beiden Werte von n und X comput... schnell und einfach berechnen lassen.

a) Herl...

...) das ... ...ert für die Anzahl der Stimmen ..., stimmt mit den Überlegungen ... bschätzung überein. ...gs wird hier eine Gleichung für die Berechnu... Erläutern Sie die ...henschritte und Umformungen.

(1) $\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma$

(2) $X \ge \mu$ ...

... 2σ und $X - \mu \le 2\sigma$

(4) $-(X-\mu) \le 2\sigma$ und $X - \mu \le 2\sigma$

(5) $|X-\mu| \le 2\sigma$

(6) $|X-np| \le 2\sqrt{np(1-p)}$

(7) $\left|\frac{X}{n} - ...\right| \le 2 ... \frac{}{n}$

(8) ... $\le 2\sqrt{\frac{...p)}{n}}$

(9) ...e nur ... beiden Randwerte von p ...nd, kann zur Vereinfachung de... Rechnung ein... Gleichheitsze...en verwendet werden:
$\left(\frac{X}{n} - p\right)^2 = \frac{4}{n} p(1 ...)$

b) Berechnung von p für die gegebenen Umfragewerte

Zeigen Si... ...n Gleichung nach p bzw. mithilfe Ihres Taschenrechners, da... ... für p ergibt.

...) ... $\frac{}{1000} p(1-p)$ ... p_2

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert …le…en

Kapite…

Grundlegende Betracht…
…ormalverteilung

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich[illegible]rteilung

[illegible]othesentests

Gesa[illegible]elbstorganisiert erlernen (Beste[illegible]278)
S[illegible]

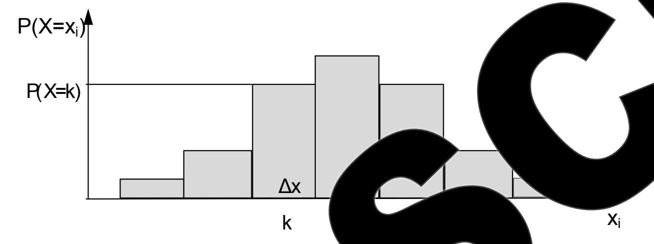
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 13: Grundlegende Betrachtungen zur Normalverteilung

Aufgabe 13.1 Grundlegende Idee

Die Entwicklung der Normalverteilung wird notwendig, da di[illegible] Binom[illegible]ert[illegible]cht für alle n und alle p tabelliert vorliegt und für große n nur aufwendig zu bere[illegible] ist.

Für den Übergang von der Binomialverteilung zur N[illegible]alve[illegible] ist [illegible]gende Idee grundlegend:



Idee:
[illegible]e Fläche de[illegible]k-ten Balkens entspricht [illegible]er Wa[illegible]s[illegible]einlichkeit f[illegible] [illegible]uftreten des Merkm[illegible]k.

Die Fläche A des [illegible]eine[illegible]ten B[illegible] kann a[illegible]dem Produkt $A = P(X = k) \cdot \Delta x$ berechnet werden. Begründen Sie, w[illegible] di[illegible]me der Fläche all[illegible] k [illegible]alken den W[illegible] 1 ergibt.

D[illegible] gilt: [illegible] $= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot \Delta x = 1$

[illegible] bereits aus der [illegible]tegralrechnu[illegible]ssen, kann man die Fläche unter einer Kurve durch Ober- bz[illegible]tersummen [illegible]n[illegible]hern, wobei [illegible]der der k Balken für große Werte von n immer schmaler wird und sich die Höhe der Balken einer Kurve f(x) annähert. Wendet man dieses Verfahren für die Berechnung der Flächen aller k Balken ein[illegible]inomialverteilung an, so geht die Aufgabe für ein ausreichend großes n dazu über, in einem Intervall [a;b] die Fläche einer zur Binomialverteilung passenden Hüllenkurve f(x) zu ermitteln. Da diese Fläche aus der Summe aller Balken hervorgeht, hat sie den Wert 1.

Fläche unter der Kurve: $A_a(b) = \int_a^b f(x)dx = 1$

Da die[illegible]ur eine beliebige Binomialverteilung [illegible] die Grenzen a und b v[illegible]ung ab. Erläutern Sie diesbezüglich, w[illegible]rkung n und p auf di[illegible] b sowie [illegible]öhe des höchsten Balkens einer Binomial[illegible]aben.

Wie Sie sicherlich erkannt haben, verschiebt der Wert von p die Funktion f(x) nac[illegible]s und [illegible]s und n beeinflusst die Höhe bzw. Breite der Verteilung und damit den Abstand von a [illegible]b. Die[illegible] Problem haben auch die Mathematiker De Moivre (1667–1754), Laplace [illegible]–1827) [illegible] Gauss (1777–1855) erkannt. Überlegungen dieser drei Mathematiker wa[illegible]lage [illegible], eine Funktion f(x) zu entwickeln, die unabhängig von den Werten p und n ist u[illegible]om[illegible]standardisierte bzw. normierte Verteilung darstellt, mit der Wahrscheinlichkeiten [illegible]beliebi[illegible] n und p berechnet werden können. Diese Verteilung wird heute als **Norma[illegible]teilu[illegible]** bezeichnet.

In den nun folgenden Aufgaben wird das Verfahren der No[illegible]tet und so[illegible]rläutert, warum man aus dem Wert der Zufallsvariablen X = [illegible]m E[illegible]ngswe[illegible] μ und d[illegible] Standardabweichung σ eine neue Variable z er[illegible]t, mit der m[illegible]dann ähnlic[illegible] der Binomialverteilung die Tabelle für Normalvertei[illegible] nutzen [illegible]. [illegible] hier jedo[illegible]ige Kenntnisse bezüglich der Transformation von Koordinatens[illegible]men be[illegible]igt werden. [illegible] mit Aufga[illegible].2 zunächst ein Einschub, der die notwe[illegible]Sch[illegible]klärt bzw. [illegible]erholt.

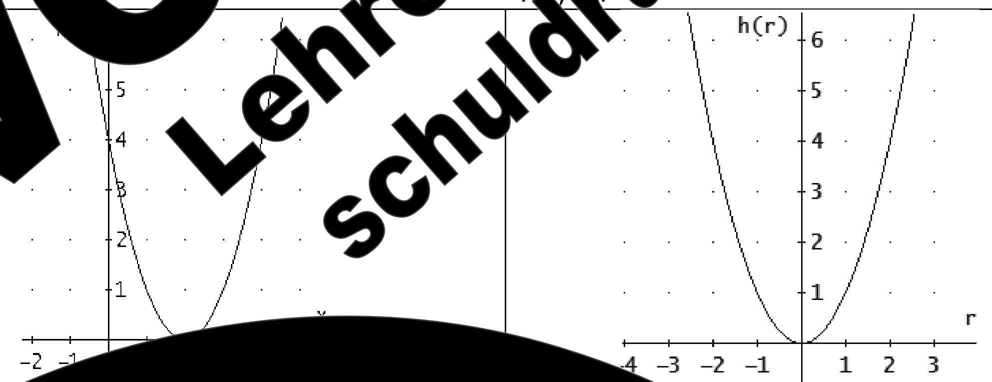
Aufgabe 13.2 Transformatio[illegible]ystemen für das Verschie[illegible] Funktionen

Am Beispiel einer Para[illegible]ird e[illegible]utert, [illegible] welche Tra[illegible]mation ein[illegible]nktion verschoben wird.

Achtung: Im tra[illegible]system wi[illegible] horizontale [illegible]se mit r bezeichnet.

Koordinaten[illegible]em wa[illegible]cht: [illegible]chse | Koordinate[illegible]em waagrecht: r-Achse

f(x) = ([illegible])² | h(r) = r²



[illegible]

f(0) = 4 | f(0) = h(–2) [illegible] (0 – 2)² = 4

f(1) = | f(1) = h(–1) = ____________

f(2) = | f(2) = h(0) = h(2[illegible] ____________

f(3) = | f(3) = h(___) = h(____________

f[illegible] | f(4) = h(___) = h(_____ [illegible]

$f(x_0) = h(r_0)$ = h(_____) [illegible])²

Sie e[illegible] die Funktionswerte von h(r) und f(x) identisch sind, wenn ma[illegible]t von h(r) [illegible]bung von f(x) um 2 in Richtung positiver x-Ach[illegible] berücksichtigt. D[illegible] h(r) lief[illegible]elle $r_0 = x_0 - 2$ den gleichen Funktionswert [illegible] Funktion f(x) an [illegible]

A[illegible] = f(x – 2)

Aufgabe 13.3 Normierung der Binomialverteilung

a) Verschieben der Binomialverteilung in den Ursprung eines [illegible]dinaten[illegible]

Das Balkendiagramm wird durch eine Verschiebung, entsprech[illegible]dem [illegible] Beispiel, so verschoben, dass der höchste Balken, also der Erwart[illegible]wert, a[illegible](x)-Achse liegt. In der Abbildung werden nur der höchste Balken und die Hüllen[illegible] darg[illegible]t.

Zei[illegible]en Sie [illegible]ner beliebigen Stelle X = k im linke[illegible]iagramm und an der entsprechenden Stelle [illegible] n[illegible]en Diag[illegible]mm einen senkrechten Balken [illegible]nd begründen Sie, warum sich auf den [illegible]riz[illegible]n A[illegible] aus der [illegible]-Koordinate X[illegible] im linken Diagramm, die y-Koordinate Y = k – μ im [illegible]hten[illegible]m ergi[illegible]

____

____

____

Begründen Sie, warum für die Wahrscheinlichkeiten P(X) und P(Y) gilt: P(X = k) = P(Y = k – μ)

____

____

____

b) Normierung der Breite

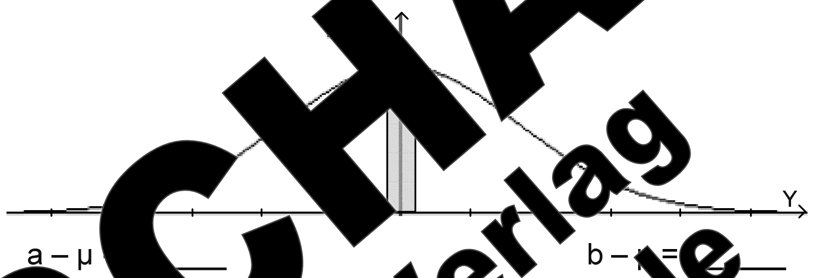
Wie Sie h[illegible]alverteilung für jedes n eine[illegible] und andere Höhe.

Be[illegible]enden Binomialverteilungen den Er[illegible], die S[illegible]ahrscheinlichkeit für das Eintreten des[illegible]wertes, also

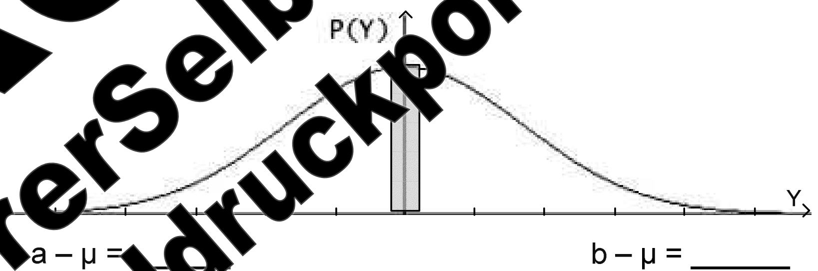
[illegible]e aus der F-Tabelle jeweils die ersten Werte k = a und k = b ab, [illegible] $F_{n;\,p}(a) > 0$ und [illegible] ≤ 1. Ermitteln Sie die um μ verschobenen W[illegible] a – μ und b – μ u[illegible]ie alle Werte an [illegible]orgesehenen Stellen ein.

Berechnen Sie auch die Breite d der Verteilung über die Bildung der Differenz [redacted] – a und [redacted]gen Sie die Werte an den vorgesehenen Stellen ein. Ergänzen Sie den nach[redacted]

Bsp. 1 n = 100
p = 0,3
μ = ____
P(X = μ) =_______
σ = _______
a = ___
b = ___
Breite d =____



Bsp.2 n = 100
p = 0,5
μ = [redacted]
[redacted]
b = ___
[redacted]eite d =____



Anhand der beiden Wert[redacted] a und b so[redacted] für die Breite erkennt man, dass hier beispielsweise die

Randwerte a – μ unterschiedlich sin[redacted] und die $B_{100;0,5}$ (k)-Verteilung ____________ als die

$B_{100;0,3}$ (k)- Verteilung ist.

Damit erg[redacted]fgabe 13.1 schon erwähnt, bei der Fläch[redacted] Grenzen. Um dieses Problem zu [redacted]ie Breite der Hüllenkurve für alle [redacted]gleich ist und somit a – μ un[redacted]rt annehmen.

[redacted]rwendet man die Ihnen bereits bekannten Zusamm[redacted]reiche an. Bei einer [redacted]omialverteilung mit σ > 3 (Laplacebedingung vgl. Aufgabe 9[redacted]cheinlichkeit, dass ein Wert für k in einen der Sigma-Bereiche fällt, für den 1σ-Bereich 68[redacted]ereich 95,4% und für den 3σ-Bereich 99,7%. Interpretiert man diese Wahrscheinlichkeit[redacted], dann decken bei diesen Binomialver[redacted]ungen jeweils die gleiche Bre[redacted]erteilung ab. Diese Eigensc[redacted]Breite zu normieren.

Bereche[redacted]en den Quotient h aus d und σ und v[redacted]ie die beide[redacted]

fü[redacted]ilt $h_{0,3} = \frac{d}{\sigma} = \text{——} \approx$ _____ und für $B_{100;\,0,5}$(k) gilt $h_{0,5} = \frac{d}{\sigma} =$ [redacted]

[redacted]

Das Ergebnis zeigt, dass sich bei einer Division durch σ für beide Hüllenk[redacted] etwa [redacted]leiche Wert ergibt, also nach Anwendung des Stauchungsfaktors $\frac{1}{\sigma}$ beid[redacted]rteilung[redacted]llenkurven die gleiche Breite annehmen.

Man bezeichnet die waagerechte Achse der mit dem Fa[redacted] gest[redacted]Hüllenkurve nun mit z und die senkrechte Achse mit P(Z). Ergänzen Sie [redacted] Skali[redacted]der [redacted]hse in der Abbildung mit den entsprechenden Zahlenwerten.

Vergleich des P(Z[redacted]gra[redacted]mit dem P[redacted]Diagramm u[redacted]er Ausgangsverteilung im P(X)-Di[redacted]

– In[redacted]X)-Diag[redacted]m wird für die Be[redacted]chnung von P[redacted]x_i) für x_i ein beliebiger Wert k festgelegt, so[redacted] gilt: X[redacted]

– [redacted]P(Y)[redacted]gramm wi[redacted]Wert für [redacted]links um μ verschoben und nun mit y bezeichnet. Für [redacted]Berechnung von[redacted]bekanntem [redacted]: y = ______

– [redacted]P(Z)-Diagra[redacted]m werden die u[redacted]rünglich im P(X)-Diagramm festgelegten Werte von k mit z bezeichnet. Die Werte von [redacted] sind bezüglich der ursprünglichen Lage von k um μ nach links verschoben, und die Abst[redacted] werden aufgrund der Division durch σ gestaucht. Die Position der der Werte von z können daher aus dem ursprünglich vorgegeben Wert k wie folgt berechnet werden: $\mathbf{z = \frac{k - \mu}{}}$[redacted]

[redacted]**nkurve**

[redacted] der Verteilung mit dem Faktor $\frac{}{\sigma}$[redacted]uch jeder Balken in der [redacted]sprünglichen P(X)-Verteilung genau um diesen Fak[redacted]i die Höhe der Verteilung bzw. der Balken gleich geblieben ist. Erläutern Sie, welch[redacted] für die Summe der Fläche aller Balken bzw. die Fläche unter der Hüllenkurve hinsichtli[redacted]gen für die Fläche,

nämlich: $A_{ges} = \sum^{n} P(Y$[redacted]$= 1$ bzw. $A_a(b) = \int_a^b f(x)dx =$ [redacted]gabe 13.1) hat.

____

____

____

c) Normierung der Höhe der Verteilung

Durch das Stauchen der Verteilung ist die ursprüngliche Balkenbreite … geworden … gleicher Höhe der Balken wird die Gesamtfläche aller Balken daher kleiner. Um … änderung auszugleichen, muss die Höhe der Balken um den gleichen Faktor verg… ert … Begründen Sie anhand der Abbildung unten, dass für die neue Höhe P(Z) de… ken gilt … $= P(X)\cdot\sigma$.

h=P(X) $A_1 = d\cdot h = \Delta x\cdot P(X)$ d=Δx

h=P(Z) = P… $A_2 = d\cdot h = \frac{\Delta x}{\sigma}\cdot P(Z) = \frac{\Delta x}{\sigma}\cdot P(X)\cdot\sigma$ $d = \frac{\Delta x}{\sigma}$

____

____

Die Höhe d… urve … durch die Hö… es höchsten B… ns der Binomialverteilung bestimmt. … gründe… e, w… n die Höhe des höchsten B… ens in den beiden Beispielverteilungen aus $B_{100;0,…}$ und B… (k) jeweils d… h den Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(X=\mu)$ berechnet wird.

____

____

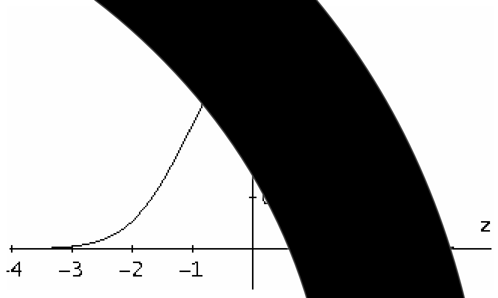
Berechnen Sie nun für beide Vert… ungen das Produkt aus $P(X=\mu)$ und σ. Vergleichen Sie die beiden Werte und interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Normierung der Binomialverteilung.

Für $B_{100;0,3}$ (k) gilt: P(X… ______________ = ______________

Für B… ______________ = ______________

____

Für größere Werte von n zeigt sich, dass die Höhe des größten Balkens d… also die Höhe der Hüllenkurve … rt 0,4 annimmt. U… en Breite ergibt sic… ebenan abgebil… **ard-norm… malverteilung** be…



Z… ssung:

… n entspricht die Summe aller Balken… e.

d) Die Glockenkurve von Gauß und ihre Näherungsformel als Funktion… ichung … Hüllenkurve

Gauß hat für die Hüllenkurve, die der Form einer Glocke ähnelt … forderten Bedingungen enthält, die folgende Funktionsgleichung entwickelt und … t φ(z) b… ich…

Glockenkurve von Gau… (z) = … $e^{-0,5…}$

Da φ(z) aus einer Verdichtung (Stauchu… Binom… teilung ent… ist, wird φ(z) auch als **Dichtefunktion** bezeichnet.

Begründen Sie, warum für die B… chnu… der ge… nten Fläche unter dieser Ex… ntialfunktion bzw. Glockenkurve der folg… Ansatz v… wird:

$$A_{ges} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\,dz = 1$$

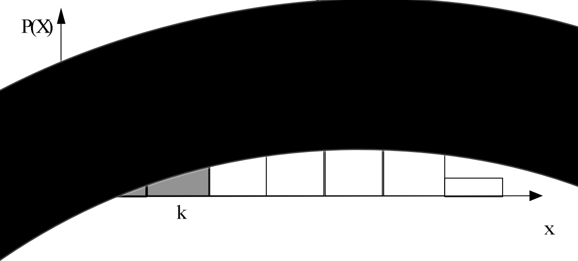
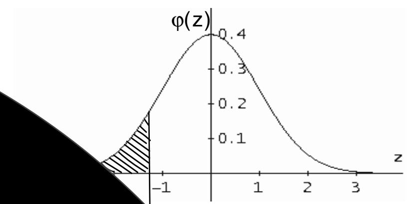
____

____

____

Au… be 13.4 Die Glocken… rve von Gau… die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

… genden Abbildung wird hin… der Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X\le k)$ entsprechend zu Au… e 13.1 ein Balkendiagramm mit der normierten Hüllenkurve der Normalverteilung verglichen.

Balkendiagramm	Normalverteilung
	
Berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(X\le k)$ mit Hilfe der F-Tabelle, gilt: P(X …	Die Wahrs… X ≤ k) entspricht nun der Fläche zwisch… unter der Funktion φ(z) also dem Integr… $P(X\le k)\approx\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(…$ … $e^{-0,5z^2}dz$ Φ(z) wird als **Gaußsch… funktion** bezeichnet und gibt den … wert für die ges… te Wahrscheinlich…) an. Damit … erung hinreicher… , muss die **… Bedingung σ >** … ein.

Da die Funktion $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5z^2}$ keine Stammfunktion besitzt, kann man $\varphi(z)$ nic... egriere... ie Werte für $\Phi(z)$ liegen daher in der **Tabelle zur Gaußschen Summenfun...ion** tabe... vor.

Damit gilt für die Berechnung von Wahrs...nlichk...
$P(X \leq k) = F_{n;p}(k)$ $\approx \Phi(z)$

Für sehr große Werte von n (Richtwert n > 1000) ... die B... der Binomialv...eilung extrem schmal und die Glockenkurve deckt die Fläche ... Balken weit... nd exakt a... In diesem Fall ist die Variable z durch die Standardisierung der Bino... verteilu... bestimmt, und d... Berechnung ...folgt über den bereits hergeleiteten Zusammenhang:

$$z = \frac{k - \mu}{\sigma}$$

Die Laplace-Bedingu...
$\sigma > 3$
muss erfü...ein.

Für Binomialverteilungen ... Be... von ...00 ist die Annäherung der Gl...ckenkurve an die Balken der Binomialverteilung n... ex... ...diese Ungenauigkeit auszugleich..., verwendet man in der Regel die Ausgleichszahl 0,5. Da... it ...

$$z = \frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}$$

...ispiel ...

Eine ... ...ße sei $B_{...;0,3}(k)$ ...rteilt.
Für die Be...hnung der W...scheinlichkeit $P(X \leq 140)$ bzw. $P(X > 140)$ ergibt sich:

$P(X \leq 140) \quad = F_{500;\,0,3}(140)$

Genauer Wert mit dem Taschenrechner oder der F-Tabelle ermittelt.

$P(X > 140) \quad = ...$

Steht keine passende F-Tabelle oder kein Taschenrechner zur Verfügung, wird die WK ...äherungsweise über die ...alverteilung bestimmt.

...chnen der Variablen z für k = 140 mit der Formel für z:

$$z = \frac{k - \mu + 0,5}{\sigma} = \frac{k - np + 0,5}{\sqrt{...}} = \frac{140 - 500 \cdot 0,3 + 0,5}{\sqrt{... 0,3 \cdot 0,7}} = -0,93$$

(2) Bestimm... ... Ablesen aus der Tabell... ...ktion:

$P(X ... ,93) = 0,1761 = ...,61\%$

... $\approx 1 - \Phi(-0,93) = 1 - 0,1761 = 0,8239 = 82,39\%$

An de... vom genau ermittelt... ...nnt man, dass die ... ...ilung nur eine **Nähr...** für die gesuchte W... ...hkeit liefert.

Beispiel 2

Die Fernsehshow Mutandenstadel hat in der Zielgruppe Ü70 eine E...altquo... ... Nach dem Austausch des Moderators befürchtet man, dass die Beliebtheit de... ...gesu...n ist und als Folge die Einschaltquote zukünftig sinken wird, was einer Verringerung de... ...erb... ...hmen für den Sender bedeutet. Daher führt man eine Befragung unter 500 Pers... der Z... ...ser durch. Man will von einer gesunkenen Beliebtheit ausgehen, wenn weniger als 335 P... ...en b... ...eser Umfrage angeben, dass ihnen die Sendung noch gefällt. Mit welcher Irrtums...rsch... ...eit a... ...itet der Test?

Lösung:

Begründen Sie, warum es sich um einen ...sseitigen Test ...delt.

____

____

____

Erläutern Sie die ... ...Rechenschritte (1) bis (6).

(1) α ... 4)

(2) ... $F_{500;\,0,7}(9...$

(3) $\alpha \approx \Phi(...$

(4) ... $\frac{334 - 35... + 0,...}{10,25...} = -1,51$

(5) $\alpha \approx \Phi(-1,51)$

(6) $\alpha \approx 0,0655 = 6,55\%$

(1)____________________

(3)____________________

(4)____________________

(6)____________________

Antwort... ...rtumsrisiko von 6,6%.

...Übungen:____________________

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik
selbstorganisiert …

Kapit…

Anwendung der Normalv…

02-032-278

Einführung in die Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlich… …rteilung

…othesentests

Gesa… …elbstorganisiert erlernen (Beste… …278)

S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

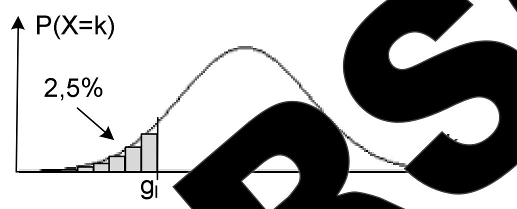
Kapitel 14: Anwendung der Normalverteilung

Aufgabe 14.1

Bestimmen der Hilfsgröße z bei gesuchtem kritischen W… …rt

a) Bestimmen eines linksseitigen kritischen Wert… …s k = g… … vor… …ebenem α-Fehler

Darstellung anhand der Binomialverteilung



Gegebe… …e:

n = 30…

p …

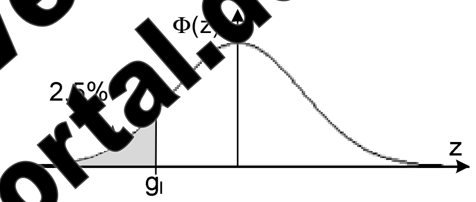
μ = 50

σ = 6,4… …3

… …9

α ≤ 2,5%

…arst… …lung anhand der …ormalverteilung



Rec… …ng:

1. Bes… …n z

$P(X \le g_l) \le 0{,}025$

$B_{300;\frac{1}{6}}(g_l) \le 0{,}025$

$\Phi(z) \le 0{,}025$

$z \le -1{,}96$

2. Bestim… …rmel für z

$g_l - \mu + 0{,}5 \le$ …

$g_l \le -1{,}96$ …

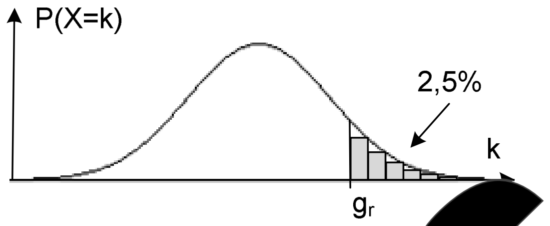
$g_l \le -1{,}96 \cdot 6{,}4$…

$g_l \le 36{,}84$

3. R… …ahligen Wert, der $P(X \le g_l)$ also … erfüllt,

b) Bestimmen eines rechtsseitigen kritischen Wertes $k = g_r$ bei vorgegebene... Fehler

Darstellung anhand der Binomialverteilung



Gegebene Werte:

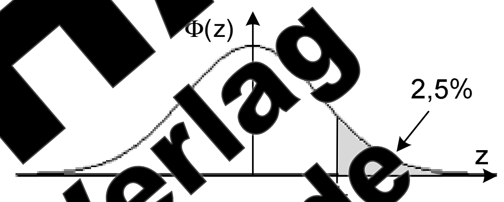
$n = 300$

$p = \frac{1}{6}$

$= 6,45 >$

$\alpha \leq 2,5\%$

D... anhand der ...verteilung



Rechnung

1. Bestimmen ... z

$P(X \geq g_r) \leq 0,025$

$1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,025$

$\ldots 0,975$

$\Phi(z) \geq 0,975$

$z \geq 1,96$

2. Bestimmen von g_r durch Einsetzen in die Formel für z

$z = \frac{g_r - 1 - \mu + 0,5}{\sigma} \rightarrow \frac{g_r - 1 - \mu + 0,5}{\ldots} \geq -1,96$

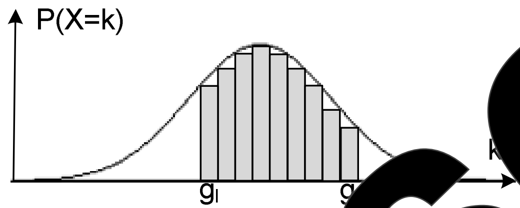
$g_r \ldots$

$g_r \geq 63,15$

3. Runden auf den nächsten ganzzahligen Wert, der $P(X \geq g_r)$ als ... erfüllt, liefert $g_l = 64$.

c) Allgemeine Betrachtungen zum Umgang mit der Normalverteilung u... Berechnung der kritischen Werte g_l und g_r bei einer $B_{n;\,p}(k)$-Verteilung

Darstellung anhand der Binomialverteilung



Gegebene Werte:

n = bekannt

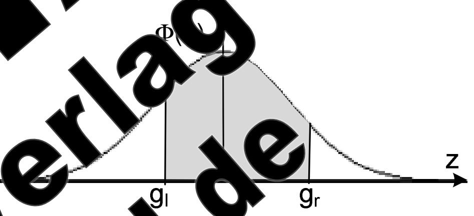
p = be...

... bekannt

σ = bekannt

$g_l \leq k$ ...

...stellung anhand der Normalverteilung



1. Berechnung ... Wahrscheinl... $P(g_l \leq \ldots)$

$P(g_l \leq X \leq g_r) = P(X \leq \ldots) - P(X \leq g_l - 1)$

$= F_{n;\,p}(g_r) - F_{n;\,p}(g_l - 1)$

$\approx \Phi(z_r) - \Phi(z_l)$

2. Berechnen von z_l und ...

$z_l = \frac{g_l - 1 - \mu + 0,5}{\sigma}$

$z_l = \frac{g_l - 1 - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}$

$z_l = \frac{g_l - np - 0,5}{\ldots}$

Bei Ausdrücken der Form $P(X \geq k)$ ergibt sich ein negativer Ausgleichssummand.

$z_r = \frac{g_r - \mu + 0,5}{\sigma}$

$z_r = \frac{g_r - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}$

$z_r = \frac{g_r - np + 0,5}{\sqrt{npq}}$

... z_l und z_r die Werte von $\Phi(z_r)$ ...

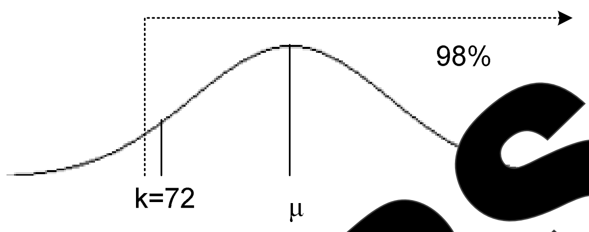
Er... ____________________

Aufgabe 14.2

Bestimmen des Stichprobenumfangs bei bekanntem p

Von einem hochwirksamen Schlafmittel ist durch Testreihen bekannt, da… …on 6 Personen keine Nebenwirkungen erzeugt. Für die Zulassung des Arzneimit…s soll … …nprobe überprüft werden, ob diese Angabe zutrifft. Welchen Umfang muss die St… …be ha… …wenn man mit einer Sicherheit von mindestens 98% mehr als 71 nebenwirkungsfreie … …en … …lten will.

Aufgabenstellung anhand einer Skizze:



n = ?
p = …
…2
P(X ≥ … ≥ …,98

a) Die Normalverteilung … …endet werden, we… …ie Laplace-Be…gung erfüllt ist. Da die Wahrscheinlichkeit p v… …kann man … …ber die Grö… …er Stichprobe den Wert von σ beeinfluss… …Sie … Rechnung … …der folgen… …rlegung, dass der minimale Stichprob…mfang … die …endbarkeit de… Laplace-Be…gung 65 Personen beträgt.

Aus Laplace-Bedingung

…Verw…den der …verteilung …gilt: σ = … ⇒ $\sigma^2 \geq$ … ⇒ $n\frac{5}{6}\frac{1}{6} \geq 9$ ⇒ n = _____ (minimale Stichprobe)

b) Verdeutlichen Sie sich die Herle… der Ungleichung (1). Formen Sie die Ungleichung (1) so um, dass sich die Ungleichung (2) ergibt, mit der sich dann n berechnen lässt. Lösen Sie die Ungleichung (2) nach n auf und bestätigen Sie damit die auf der folgenden Seite angegebenen Lösungen.

P(X …

$\ldots_{\frac{5}{6}}(71) \leq 0{,}02$

$\Phi(z) \leq 0{,}02$

$z \leq -2{,}06$ Einsetzen der Werte in Hilfs…

(1) $\dfrac{71 - n\frac{5}{6} + 0{,}5}{\sqrt{n\frac{5}{6}\frac{1}{6}}} \leq -2{,}06$

(2) $429 - 5n + 4{,}606\sqrt{n} \leq 0$ Hinweis: Substitution $\sqrt{n} = m$

Lösen Sie die Ungleichung (2) unter Verwendung des Hinwei… …uf und bestätigen Sie damit die angegebene Lösung.

⇒ m… …ode… … ≤ –8,808

Da… …ergibt s… für die gesucht… …zahl n

n ≥ … …81 also n = …5 Personen.

A…erkung:

Um n zu erhalten, müssen … Werte von m quadriert werden. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, sollte für Gleichungen, bei denen die Lösungen durch Quadrieren der Lösungsvariablen gefunden wurden, eine Probe durch Einsetzen der Ergebnisse in die Ausgangsgleich… …vorgenommen werden.

…der Probe erkennt man, dass nur n_1 = 95 die … …löst. Damit ist ab einem Mindeststichprobenumfang von n = 95 Personen, gew… …an mit 98% Sicherheit mindestens 72 Personen ohne Nebenwirkungen erhält. B… …robenumfang ist auch die Laplace-Bedingung erfüllt.

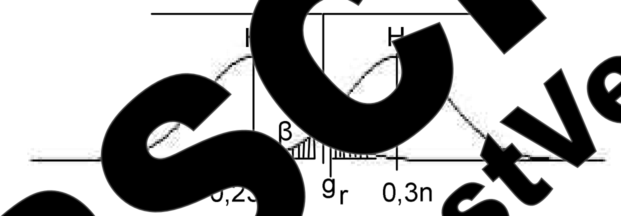
…e Übungen: ____________________

Aufgabe 14.3

Stichprobenumfang bei einem rechtsseitigen Test ermitteln, wenn α- [illegible]d β-Fe[illegible] [illegible]leic[illegible]itig fest vorgegeben sind

Eine Partei vermutet vor der Wahl, dass ihre Quote von 23% auf 30% ges[illegible]en [illegible] unnötige Wahlkampfkosten zu vermeiden, soll diese Vermutung mit einer [illegible]frage g[illegible] we[illegible]en. Es soll berechnet werden, wie viele Personen befragt werden müssen, w[illegible] der Fe[illegible] 1. Art und der Fehler 2. Art gleichzeitig unter 5% liegen sollen.

Verdeutlichen Sie sich den Ansatz und lösen Sie v[illegible]ichba[illegible]ufgaben anhand d[illegible]se[illegible] [illegible]fahrens.



Be[illegible] Fehler [illegible]en unter [illegible]% [illegible]gen, also g[illegible]

$$P(X \geq [\text{illegible}]) \leq \alpha \qquad [\text{illegible}](X < g_r) \leq \beta$$

$$[\text{illegible}]\,P(X [\text{illegible}] -1) [\text{illegible}]5 \qquad P(X \leq g_r - 1) \leq 0{,}05$$

$$P(X \leq [\text{illegible}]1) \geq 0{,}95 \qquad F_{n;0,3}(g_r - 1) \leq 0{,}05$$

$$[\text{illegible}]1) \geq 0{,}95 \qquad \Phi(z) \leq 0{,}05$$

$$\Phi(z) \geq [\text{illegible}] \qquad z \leq -1{,}65$$

$$z \geq [\text{illegible}]65 \qquad \frac{g_r - 1 - 0{,}3n + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} \leq -1{,}65$$

$$\frac{[\text{illegible}]1 - 0{,}23n[\text{illegible}]0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}77}} \geq 1{,}65 \qquad g_r - 0{,}3n - 0{,}5 \leq -0{,}7561\sqrt{n}$$

$$g_r - 0{,}23n - 0{,}5 \geq 0{,}69[\text{illegible}]n$$

Der Ansatz liefert zwei Gleichungen mit den Variablen g_r und n. Zeigen Sie, dass man durch Elimination von g_r und anschlie[illegible] [illegible]en angegebene Ungleichung erhält. Begründen Sie, warum man [illegible]

$$\text{II} \quad g_r - 0{,}3n - 0{,}5 \; [\text{illegible}]$$

$$\text{I} \quad g_r - 0{,}23n - 0{,}5 \geq 0{,}694[\text{illegible}]$$

$$\text{II} \quad -g_r + 0{,}3n + 0{,}5 \geq 0{,}7561\sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} \geq 20{,}72$$

$$n \geq 429{,}4 \quad \Rightarrow \quad n = 43[\text{illegible}]$$

Ant[illegible]uss mindestens 430 Leute befragen, um mit de[illegible] geforderten Sich[illegible] ausgehen [illegible]nnen, dass sich die Quote verbessert hat.

E[illegible]bungen:____________________

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

2014-15