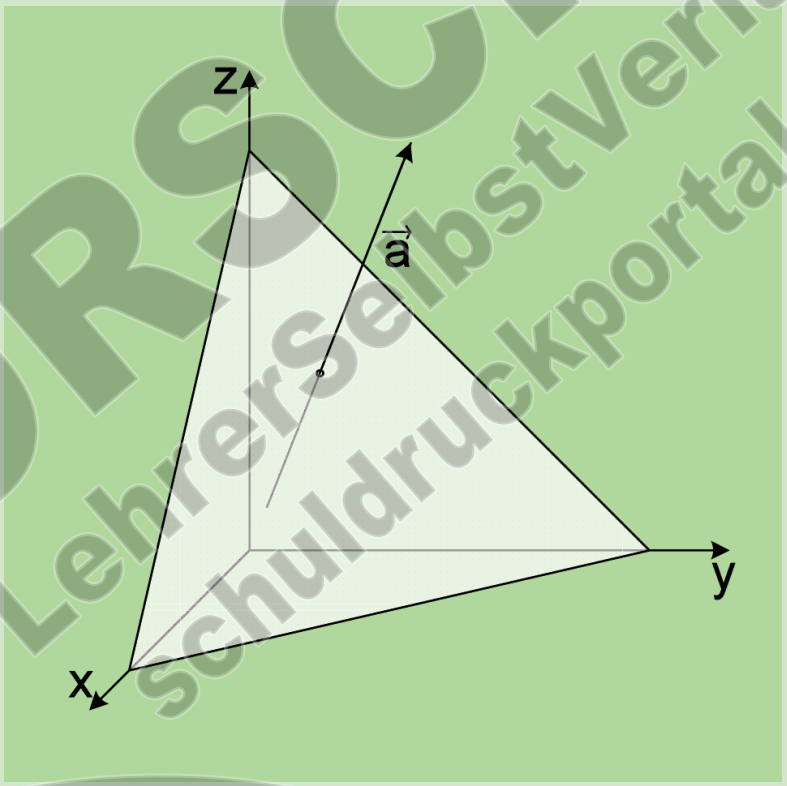
Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

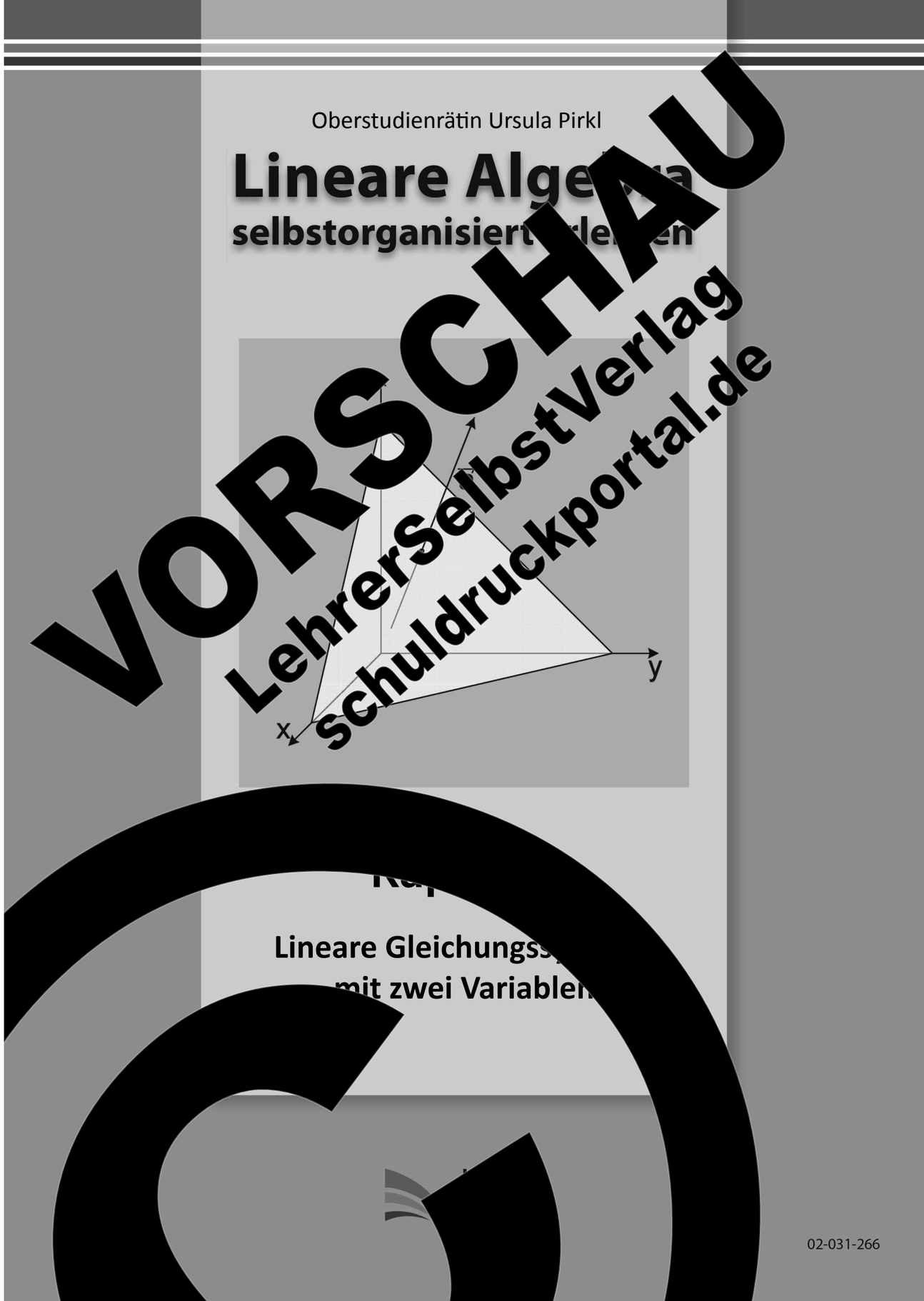
02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea[illegible]ratio[illegible] 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]igkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eb[illegible]un[illegible]

Ka[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
[illegible]3 – Be[illegible]dere Ebenen 81
[illegible] [illegible]ebeziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]el 15 – Abstände 99
[illegible]l 16 – Sc[illegible]ittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
K[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]enungen 145
[illegible]el 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula [illegible]

Lineare [illegible]gebra

selbst[illegible]ganisiert [illegible]lernen

[illegible]e Mathematik

[illegible]estellnummer 02-031-266

LEHRER [illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Stand: 21.07.2014

Alle Rechte vorb[illegible]eserved.
Nachdruck [illegible]altlich der Rechte,
die sich [illegible] nicht gestattet.

[illegible]
[illegible]eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2013
[illegible]erselbstverlag.de

[illegible]www.f-druck.de

Vorwort 5

Vorbetrachtungen 7

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1
Lineare Gleichungssysteme mit zwei Vari[illegible] 9

Kapitel 2
Lineare Gleichungssysteme mi[illegible]ei Variablen 17

Einführung in die [illegible]orre[illegible]ung

Kapitel 3
Koordinatensysten[illegible] 23

Kapitel 4
Grundl[illegible]nde[illegible] des [illegible]n 25

Kapitel [illegible]
[illegible]hnen [illegible]ektor[illegible] 33

Ka[illegible]
Lösen [illegible] Vek[illegible]orgleichungen bei Linearkom[illegible]nationen 43

Kapite[illegible]
[illegible]bhängigkeit und Unabhän[illegible]gkeit 47

Geraden in [illegible]er Ebene u[illegible]m Raum

Kapitel [illegible]
Parameterdarstellung von Geraden 49

Kapitel 9
Lagebeziehung von Geraden 55

Kapitel 10
Ska[illegible] 59

[illegible] 65

Ebenen im Raum

Kapitel 12
Darstellung von Ebenen 69

Kapitel 13
Besonde[illegible] 81

[illegible]en 85

[illegible] 99

[illegible]pitel 16
Schnittwinkel 105

Kapitel 17
Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18
Grundlegendes zu Matrizen ..... [illegible]

Kapitel 19
Projektion 125

Kapitel 20
Spiegelung 137

Kapitel 21
Zentrische Streckung aus dem Urspru[illegible] ..... [illegible]43

Kapitel 22
Drehungen ..... [illegible]

Kapitel 23
Verkettung von linearen [illegible]bild[illegible] 149

Kapitel 24
Überblick linear[illegible]lungen $A\vec{x} =$ [illegible] 153

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Vorwort

Die Konzeption des vorliegenden Arbeitsbuches beruht auf meinen langjährigen Unterrichtserfahrungen in der Oberstufe von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Im Mittelpunkt der Zielsetzung steht hier, den Schülerinnen und Schülern einen übersichtlichen Weg durch die Vielfalt der Methoden und Lösungswege in der linearen Algebra aufzuzeigen. Demzufolge haben die einzelnen Kapitel eine zusammenhängende, aufeinander auf[illegible]de Struktur, wobei für die jeweilige Prob[illegible]stellung meist nur ein Lösungsweg zum Ansatz [illegible]mmt. Ergänzt durch Übungsaufgaben [illegible]hulb[illegible]rn oder anderen Quellen, erhalte[illegible] die Schülerin[illegible] und Schüler einen umfassende[illegible]er die im Inhaltsverzeichnis a[illegible]teten Theme[illegible]ie im Wesentlichen den A[illegible]ngen d[illegible]ischen Landesabiturs im [illegible]d- [illegible] Leistungskurs entsprechen.

Die Form[illegible] A[illegible]eng[illegible]ung stellt eine A[illegible]leitung fü[illegible]lbstorg[illegible]erte Lernformen [illegible]r. In der P[illegible] b[illegible] sich [illegible]teams, in de[illegible] die Schüler[illegible]rin[illegible] un[illegible]n Dialog die Inhalte überg[illegible]gen [illegible]elbständig erarbeiten. [illegible]ung kommen[illegible] [illegible]teams in den Le[illegible]uppen, in de[illegible] diese Le[illegible]praktizier[illegible] wird und zum Sta[illegible]d geworden ist, auch unterein[illegible]der und ta[illegible]schen Erkenntnisse sowie Einsichten zur The[illegible]tik aus. Während leistungsstärkere Teams die Aufgabenstellungen und zusätzliche Übungen in der Regel ohne weitere Hilfe bewältigen und [illegible] bietet diese Unte[illegible] den [illegible]

[illegible]ung ihrer Kompetenzen zu [illegible]e Aufgabenstellungen erfordern zudem, [illegible]g dargestellte Sachverhalte oder Zusammenhänge zu beschreiben sowie Ansätze zu begründen. Dadurch werden neben rein themenspezifischen auch sprachliche Kom[illegible]ichtlich der Verwendung der [illegible]. Lehrerzentrierte[illegible]l nur noch zu Be[illegible] Wiederholung und [illegible]esprechung von H[illegible]tt. Damit wird [illegible]en Erkenntnissen [illegible]ie und den daraus resultierenden Formen [illegible]selbstorganisierte Lernformen einzuset[illegible]mfänglich Rechnung getragen.

Oberstudienrätin Ursul[illegible]

Kommentare vo[illegible]hülern[illegible]n und Schülern

„Ich finde [illegible]ss [illegible], wenn man mal kra[illegible]k ist, zu[illegible]us[illegible]eitsbuch nachvollziehe[illegible]nn, w[illegible] Unterricht gemacht wurde. Dan[illegible]t ma[illegible]e Chance, anschließend ohne [illegible]er [illegible]tarbeite[illegible]zu können.“

[illegible] finde es gut, k[illegible]los[illegible] Blätter zu haben. M[illegible]erliert keine [illegible]ten und hat am Schluss alles übersichtl[illegible]h und komple[illegible].

Zielgruppe

[illegible]e Unterla[illegible]sind primär für den Unterricht im Grund- u[illegible]stungskurs in der gymnasialen Oberstufe [illegible]kelt worden, können aber auch an allen Ei[illegible]tungen, in denen die allgemeine Hochschulr[illegible]erworben werden kann, eingesetzt werden.

Ebenfalls ist das Konzept für Fachoberschulabsolventen geeignet, die an Hochschulen bzw. Fachhochschulen einen Studiengang wählen, der Mathematik beinhaltet. Angehende Studentinnen und Studenten, die keine oder nur sehr geringe Kenntnisse im Bereich der Linearen Algebra haben, können sich selbständig oder im Rahmen von Vorbereitungskursen in die für das Studium notwendige Thematik einarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik [illegible]r Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vor[illegible]eignet, da die Unterlagen die Bedürfnisse [illegible]e „Zugangsproblem in Mathematik“

Metho[illegible]daktische Anmerku[illegible]

Die Unterlagen [illegible]ausgerichtet, dass die Schülerinnen und [illegible]gehend eigenständig und individuell in [illegible]aber auch zu Hause die einzelnen Them[illegible]n sowie bei Fehlzeiten nacharbeiten kö[illegible]Hausaufgaben kann d[illegible] zeitliche Rahmen [illegible]esteuert werden, [illegible]alle vom Lehrpla[illegible]iebenen Themen [illegible]fe des zur Verf[illegible]enden Halbjahres [illegible]itet werden kö[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Da alle Kapitel aufeinander aufbauen, ist eine lückenlose Bearbeitung der einzelnen Aufgaben notwendig. Auf eine vollständig umfassende Theorie der linearen Gleichungssysteme wird zugunsten einer exemplarischen und anschaulichen Darstellung der Thematik verzichtet. Die hier angeführten Beispiele orientieren sich überwiegend an Bedürfnissen, die sich aus den Aufgabenstellungen der folgenden Kapitel ergeben.

Die Gestaltung der Unterlagen ermöglicht es, das Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse v ständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben w den, sodass keine unübersichtlichen lo hätte sammlungen entstehen und alle rmationen ohne Suchaktionen schnell nachges en werden können. Die Lösungen zu Aufgabe d Übungen des Arbeitsbuchs werde i eine stellung automatisch als P ei mitg a die Unterlagen ergänzen lbuch eingesetzt werden, sind a Stellen, de pielsweise weitere Vertie durc ngsaufgaben gewünscht sind Platzha n ein gt worden, dass Verweise de Lehrer auf z tzliche Übungsaufga bersic ch notiert w e können.

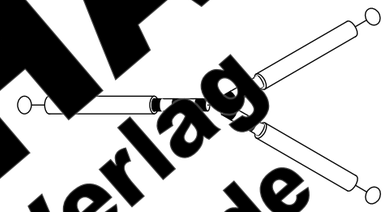
Anregung d Verbess gswünsche zu diesem Arb buch werden rne entgeg enommen und nen de Verlag per Mail e der Adresse ce@leh bstverlag.d zug endet werden.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

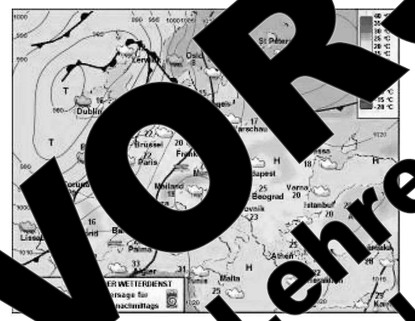
Vorbetrachtungen

Der Bezug zur Realität ist im Fach Mathematik häufig die Voraussetzung für d zepta Neues zu lernen. Daher sollen an dieser Stelle, bevor der Einstieg in das Then are A em sehr abstrakt und anwendungsfremd erscheinenden Gebiet der linearen ssyst erfolgt, zunächst einige Beispiele für praktische Anwendungen erläutert werden.

Vektoren in der Physik



Der der aus dem Physikunterricht bekannte Begriff d Vektors spielt eine zentrale Rolle in der linear Algebr e Sie sicherlich wissen, besitzen alle Größen e Richtung haben, einen vektoriellen Charak Dies bedeute beispielsweise bei Kräften, die in unterschi che Richtungen wirken, dass man die Kräfte einfa addieren darf.



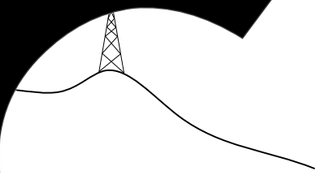
Wett karte und lineare Algebra

Die rstellung von Wetterkarten mit der Berechnung von Windstärke, Wi chtung und der Bewegung der Tief- und Hochdruck biete basiert auf der Anwendung Vektorrechnung.

Computerspiele programmieren

Bei der Prog d der dreidi einem z

g bzw. der linearen Algebra au n Eindruck passenden Stellen des Bildschi iert.



Flugsicherung

Die Berechnung von und Abständen b Flugbewegungen nfalls zusätzlich r der Einbeziehu richtung, wird ilfe der linearen . der rechnung ermö

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1: Lineare Gleichungssysteme 2. Ordnung

Allgemeines

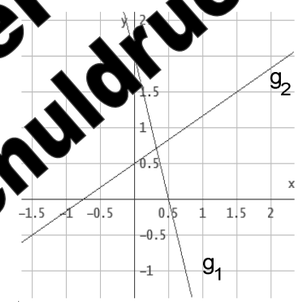
Der Umgang mit linearen Gleichungssystemen (LGS) gehört zu den [illegible] den Arbeitstechniken der linearen Algebra. Neben vielseitiger Verwendung bei Anwe[illegible]ungsp[illegible]em[illegible]en Sie lineare Gleichungssysteme bereits aus Schnittpunktberechnungen [illegible] Gerad[illegible]er auch aus Rekonstruktionsaufgaben von ganzrationalen Funktionen. In [illegible]m K[illegible]el werden lineare Gleichungssysteme zunächst anhand von Schnittp[illegible]rob[illegible]i G[illegible]aden in der Ebene behandelt, um die Bedeutung von Lösungen möglichst anschau[illegible]uste[illegible]m weiteren [illegible]rlauf des Kurses werden Sie feststellen, dass die Lösungen [illegible]aren [illegible]hungssystemen [illegible]ch auch andere, auf den jeweiligen Kontext der Aufgabenstellung [illegible]gehe, Bede[illegible]en haben [illegible].

Aufgabe 1.1

Bekanntes aus neuem Blick[illegible]ttpunktproble[illegible] bei Geraden [illegible] der Ebene

Verdeutlichen Sie si[illegible]d der f[illegible]n Beisp[illegible]schreibwe[illegible]en im Umgang mit linearen Gleichungssyste[illegible]inde[illegible]Sie die [illegible]hnungen für die drei darge[illegible]ten Fallbeispiele nachvollziehen und anschließend [illegible]sung verv[illegible]ligen.

a) Beis[illegible] Ge[illegible]n schneide[illegible]



[illegible]ttpunktproblem in der Schreibweise der linearen Algebra

[illegible]gebildeten Geraden werden der Analysis [illegible] Funktionsschreibweise bzw. mit y links von Gleichheitszeichen dargestellt.

Gerade g_1: $y = -4x + 2$

Gerade [illegible]

[illegible]ebra können Gleichungen für Ge[illegible]e wie folgt vorliegen, wobei je nach [illegible]nd y als x_2 bezeichnet werden k[illegible]ebildeten Geraden gilt dann:

Gerade g_1: $4x_1$ [illegible] der $4x + y = 2$

Gerade g_2: $4x_1 - 6x$[illegible]er $4x - 6y = -3$

Umformen der Gerade II [illegible]

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x - 6y = -$[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

In der Analysis werden Schnittpunkte in der Regel durch Gleichsetzen berechnet:

$$g_1 = g_2$$
$$-4x + 2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$
$$\frac{14}{3}x = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{9}{28} \approx 0{,}32$$

Einsetzen von x in eine der beiden Gleichung[illegible]

liefert $y = \frac{5}{7} \approx 0{,}71$

In der linearen Algebra löst m[illegible] die G[illegible]ungssysteme meist mit Hilfe des [illegible]onsve[illegible]ens oder Einsetzungsverfahrens. F[illegible]ses B[illegible]piel bietet sich das Additi[illegible]rfahre[illegible] man die zweite von der e[illegible]hung [illegible]ahiert:

I $4x + y$ [illegible]
II $4x - 6y =$ [illegible] – II

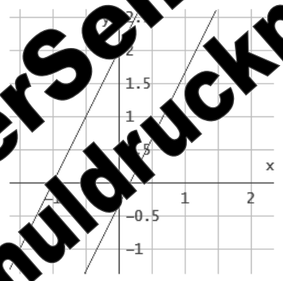
[illegible] $y = \frac{5}{7} = 0{,}71$

[illegible]etze[illegible] y in e[illegible]e der bei[illegible]chungen [illegible]iefert wie [illegible] Gleichsetz[illegible]ahren der Analysis

[illegible] $= x$ [illegible] $\frac{9}{28} \approx 0{,}32$

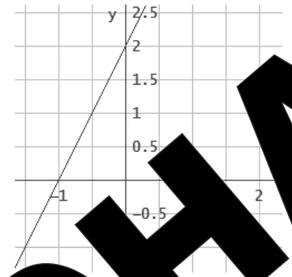
Der Begriff [illegible] Additi[illegible]sverfahren wird auch [illegible]endet, wenn [illegible] die Gleichungen [illegible]ahiert.

b) Beispiel 2: Zwei G[illegible]n s[illegible] paralle[illegible]



Schreibweise in der Analysis	Schreibweise in der linearen Algebra
Die Abbildung[illegible] $\frac{1}{3}$	Die beiden abgebildeten Geraden können auch [illegible]folgt dargestellt werden. [illegible] $= 2$
Schnittpunkt durch Gleichsetzen berechnen: $2x + 2 = 2x + \frac{1}{3}$ aus: $2 =$ [illegible]	Mit Hi[illegible]erfahrens erhält man hier anal[illegible]zungsverfahren einen Widerspruch [illegible] I $-2x + y = 2 \quad \vert \cdot 3$ II $6x - 3y = 1$ I $-6x + 3y = 6$ II $6x - 3y = 1 \quad \vert$ I + II $0 = 7$
Wen[illegible]ruch er[illegible].	Wenn das Additionsverfa[illegible]em Widerspruch führt kann m[illegible]ext der Aufga[illegible]nstellung auf para[illegible]en s[illegible]

c) Beispiel 3: Zwei Geraden sind identisch



Schreibweise in d[illegible] Analy[illegible]	Schreibweise in der li[illegible]en Algebra
Bei zwei identischen G[illegible]den [illegible] in der Analysis auch identisch[illegible]ungen vor: g_1: $y = 2$[illegible] g_2: $y = 2x +$ [illegible] [illegible]erk[illegible] sofo[illegible]ss man durch [illegible]ichsetz[illegible]ie Lösung $2 = 2$ [illegible]der $0 = 0$, also [illegible]allgem[illegible]gültige Lösun[illegible]hält. D.h. bei V[illegible]n[illegible]r Lösung in dieser Form k[illegible] man [illegible] schließe[illegible]ass die beid[illegible]n Geraden identisch [illegible]. Damit ist d[illegible]s LGS für [illegible]endlich viele W[illegible] von x und y [illegible]bar, da [illegible]der Punkt [illegible]f d[illegible]r Geraden L[illegible]sung für das LGS ist.	Be[illegible]wei[illegible]entischen G[illegible]raden können sich die Gleic[illegible]ungen in de[illegible]ren Algebra durch ein [illegible]aches unter[illegible]heiden: g_1: $-2x$ [illegible] y [illegible] 2 g_2: [illegible] $2y = -4$ [illegible]it [illegible]lfe des Additionsverfahrens erhält man, [illegible] links nebenan, den allgemeingültigen Ausdruck $0 = 0$ und die gleiche Interpretation für das Ergebnis.

Zusammenfa[illegible] [illegible] Gleichungssystemen mit 2 Gleichungen und 2 Vari[illegible]

[illegible]nn es

[illegible] _____ Lösung für jede der beide[illegible]

[illegible] _____ Lösung geben, da bei der Rechnung ein W[illegible]ht, und

3. _____ viele Lösungen geben.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 1.2

Allgemeine Betrachtungen zu linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen und mehr als zwei Gleichungen

Die Lösungsansätze vieler Aufgaben in der linearen Algebra führen auf lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen aber mehr als zwei Gleichungen. Man bezeichnet solche Gleichungssysteme auch als **überbestimmte** lineare Gleichungssysteme. Veranschaulichen Sie sich an folgender folgenden Beispiele, wie die Lösung schrittweise berechnet wird und was dabei zu beachten ist. Übertragen Sie Ihre Überlegungen jeweils auf die Aufgabenstellungen in folgenden Übungsaufgaben:

Beispiel 1: Überbestimmtes LGS mit eindeutiger Lösung

Schritt 1:
Die gegebenen Gleichungen mit den römischen Ziffern und kennzeichnen und notieren, dass gleiche Unbekannte untereinander stehen.

Schritt 2:
Zur Lösung des LGS mit zwei Variablen benötigt man zwei Gleichungen. Daher lässt man für die Ermittlung von x und y eine der Gleichungen zunächst völlig außer Acht. Man wählt im günstigsten Fall eine Gleichung mit Koeffizienten aus, die keinen umfangreichen Rechenaufwand erwarten lässt. Hier wird die Gleichung I zunächst weggelassen.

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & 2x - 4y &= 4 & \\ \text{II} & x - 2y &= 1 & \\ \text{III} & x + y &= -3 & \text{II + III} \\ \hline & 2x &= -2 & \\ & x &= -1 & \end{array}$$

Schritt 3:
Rechts neben den Gleichungen angeben, welche Gleichungen addiert oder subtrahiert werden.

Schritt 4:
Additionsverfahren mit den zwei ausgewählten Gleichungen.

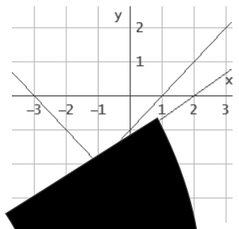
Schritt 5:
Die [illegible] y = –3
[illegible] –2
[illegible] Addition [illegible] endet wurde, berechnet werden. Man könnte auch Gleichung II nehmen.

x und y in I einsetzen: [illegible] = 4
[illegible] 4

Lösung: (–1/–2)

Schritt 6:
Beide [illegible] die [illegible] Gl[illegible] setzt werden. [illegible] ung erfüllt, gibt [illegible] ung für das LGS.

Geometrische Deutung [illegible]
Lösung:



[illegible] en schneiden [illegible] kt S(–1/–2).

Beispiel 2: Überbestimmte lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

Oftmals hängen die notwendigen Schritte bei der Lösung von Gleichungssystemen davon ab, welche Gleichungen für das Additionsverfahren verwendet werden und welche Gleichungen zunächst weglässt. Dies soll durch die Lösungswege 1 und 2 für die folgenden linearen Gleichungssysteme verdeutlicht werden. Die einzelnen Lösungsschritte erfolgen analog zu Beispiel 1.

Lösungsweg 1:

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & -2x + 4y &= 6 & \text{I zunächst weglassen} \\ \text{II} & x - 2y &= 3 & \\ \text{III} & 3x + 2y &= 1 & \text{II + III} \\ \hline \text{IV} & 4x &= 4 & \\ & x &= 1 & \end{array}$$

x in II einsetzen: [illegible] – 2y = 2
[illegible]

x und y in I einsetzen: [illegible] 4(–1) = 6
–2 – 4 = [illegible]
[illegible] 6 ⇒ Widerspruch

Lösung: **keine**

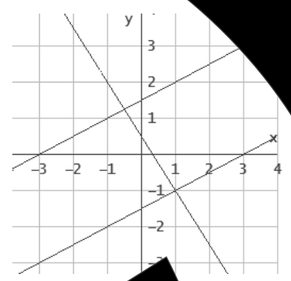
Bei einem überbestimmten LGS müssen die mit zwei Gleichungen ermittelten Lösungen immer in der nicht verwendeten Gleichung getestet werden.(Vgl. Schritt 5 bei Beispiel 1) Bei einem Widerspruch ist das gesamte LGS nicht lösbar.

Lösungsweg 2:

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & -2x + 4y &= 6 & \text{I + 2II} \\ \text{II} & x - 2y &= 3 & \\ \text{III} & 3x + 2y &= 1 & \text{[illegible] zunächst weglassen} \\ \text{IV} & [illegible] & [illegible] & \end{array}$$

[illegible] nach Wahl der Gleichungen kann der Widerspruch auch sofort auftreten.

Geometrische [illegible]
Lösung:



[illegible] t keinen gemeinsamen Schnittpunkt, da [illegible] raden parallel

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schulduckportal.de

Beispiel 3: Überbestimmte LGS mit unendlich vielen Lösungen

I	$-2x+4y=-6$	3II – III oder I + 2II oder 3I + 2III
II	$x-2y=3$	
III	$3x-6y=9$	
IV	$0=0$	

Je[illegible] Addition[illegible] Su[illegible] führt zum Erg[illegible] alle drei Gleic[illegible] identisch sind.

Da alle drei Gleichungen identisch sind, steht [illegible] dem [illegible]blem, nur eine G[illegible]hung für die Bestimmung von x und y zu haben. Wie Sie [illegible]erlich bereits [illegible]en, benötig[illegible] für die Bestimmung von zwei Variablen auch zwei G[illegible]hungen. [illegible]ie folgenden Ü[illegible]rlegungen zeigen, wie man vorgehen kann, um dieses Proble[illegible] zu l[illegible]

Ermittlung einer allgemeingültige[illegible]

y frei wählen: [illegible] = r

y in II einsetzen [illegible] $x = 3 + 2r$

Lösung: (3 + 2r / r)

Info:
Da es unendlich viele Lösungen geben kann, wählt man als Lösung für y eine beliebige Zahl in Form eines **Parameters** $r \in \mathbb{R}$

Info:
Ma[illegible]net diese Lösung auch als parametrisierte Lösung, [illegible] sie vom Parameter r abhängt. Parametrisierte Lösungen hängen von der Wahl des Paramters ab und können damit unterschiedlich sein.
Wählt man, wie in de[illegible]
x = r , ergib[illegible]

Alternative Lösung:

x frei wählen: $x = r$

x in II einsetzen:

$$r - 2y = 3$$
$$-2y = 3 - r$$
$$y = \tfrac{1}{2}r - \tfrac{3}{2}$$

[illegible]: $(r / \tfrac{1}{2}r - \tfrac{3}{2})$

Geometrische Bedeutung der parametrisierten Lösung:

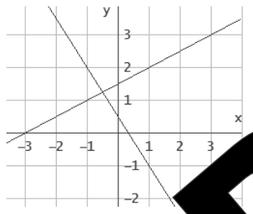
Fasst man jed[illegible]GS als Geradengleichung au[illegible]es sich um die gleichen G[illegible]en identisch sind. Formt man jede[illegible]ngen in die aus der[illegible]um erhält man für alle drei Gleichung[illegible]. Ein Verg[illegible]rametrisie[illegible]ösung bei alternativer Lösung mit der Wa[illegible]zeigt, dass sich[illegible]ng bei y der gleiche Ausdruck wie für die Gerade ergibt. Dara[illegible]htlich, dass ei[illegible]sierte Lösung eine Gerade beschreiben kann.

Beispiel 4

Im folgenden Beispiel entsteht durch Addition von Zeile I und II ein Ausdruc[illegible] Form [illegible]. Begründen Sie anhand der Abbildung und durch Vervollständigung des Textes, warum es [illegible]trotz[illegible] eine eindeutige Lösung gibt, die als Schnittpunkt von drei Geraden inte[illegible] werd[illegible]

I	$-2x+4y=6$	I + 2II
II	$x-2y=-3$	
III	$3x+2y=1$	III zunächst weglassen
IV	$0=0$	

Bei ei[illegible] überb[illegible] LGS bedeut[illegible]e 0 = [illegible]eile nicht, dass unen[illegible]iele [illegible]ungen gibt, da [illegible]assen Gleich[illegible]gen n[illegible]rücksi[illegible]igt werden [illegible]en.



Gleichung I u[illegible]leichu[illegible] repräsentieren [illegible]e _____ Gerade.
Die [illegible] Gera[illegible] so _____ un[illegible]gen über-
ei[illegible]iden Geraden [illegible]ben daher genau einen _____
_____ der Gerad[illegible]ie durch Gl[illegible]g III repräsentiert wird.
[illegible]eser [illegible]punkt i[illegible] _____ des LGS.

I	-2[illegible]$4y=6$	I zunächst weglassen
II	[illegible]$y=-3$	
III	$3x$[illegible]$=1$	II + III

$x = -\frac{1}{2}$

[illegible]etzen in II lie[illegible] $y = \frac{5}{4}$. Damit ist (–0,5 / 1,25) die Lösung des LGS.

Wenn bei einem überbestimmten LGS eine 0= 0 Zeile entsteht, muss man das Lösungsverfahren mit anderen Gleichungen neu beginnen.

Übungen:

Prüfen Sie, ob die[illegible]ungssysteme eine eindeutige oder eine parametrisierte Lösung h[illegible]e Lösung und ordnen Sie die Lösungen den Abb[illegible]n Beispielen dargestellt, auf eine

[illegible] $y=-2$
[illegible]$x-y=-1$
$x+2y=9$

(Lösung: (1/4))

b) $x+2y=8$
$-x+3y=6$
$2x+y=4$

(Lösung: keine)

[illegible]
$7x$[illegible]

(Lösung: [illegible]

d) $4x+2y=8$
$2x=4-y$
$3y=12-6x$

(Lösung: (r / 4-2r))

Abbildun[illegible]2

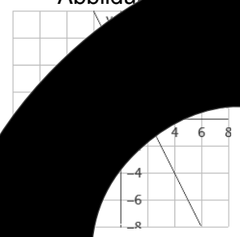
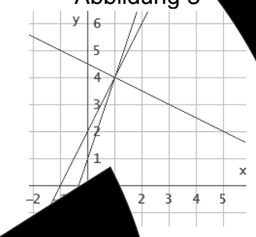
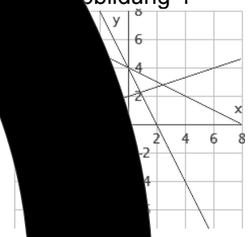


Abbildung 3



[illegible]bbildung 4



[illegible] Rechnungen auf der folgenden Se[illegible]

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Erg ungen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a
selbstorganisiert rlernen

Ka

Lineare Gleichungss
mit drei Variablen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineat[illegible]ratio[illegible] 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kap[illegible]tel [illegible]ebeziehun[illegible]rei Ebenen 85
[illegible]tel 15 – Abstände 99
[illegible]el 16 – Schnittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]enungen 145
[illegible]tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Erweitert man die Betrachtungen der Ebene auf den dreidimensionalen Raum [illegible] kommt [illegible] den Richtungen x und y eines Koordinatensystems in der Ebene die drit[illegible]ichtung [illegible] d[illegible]um hinzu. Damit entstehen bei Aufgabenstellungen der linearen Algebra Glei[illegible]stem[illegible]rei Variablen enthalten können. Im Folgenden werden die für lineare Gleichungss[illegible]em[illegible]wei Variablen erfolgten Untersuchungen auf die Betrachtung von linearen Gleichu[illegible]system[illegible]riablen erweitert.

Um die Lösungsverfahren, wie bei den Geraden der [illegible]bene, [illegible]hst [illegible]haulich zu deuten, sollen die bei der Lösung eines LGS erhaltenen Ergebnisse g[illegible]t[illegible]werden. [illegible]ichungen der Form ax + by + cz = d oder ax + by = c oder ax + b[illegible] = c ko[illegible]als Eb[illegible]n im Raum [illegible]efasst werden. Damit kann man hier, entsprechend zu Ge[illegible] der [illegible] das Löse[illegible] Gleichungs-systemen als Schnittpunktprobleme von [illegible]en im Raum [illegible]chten.

Aufgabe 2.1

Wie in der Ebene können auc[illegible] der Lösung ei[illegible] LGS die Mö[illegible]keiten keine Lösung, genau eine Lösung un[illegible] parametrisie[illegible] Lösung auf[illegible]n. Man mus[illegible]dings die Interpretation der Lösung auf die [illegible] Ebene[illegible]um übe[illegible]

① Keine Lösung [illegible]eut[illegible]ass die betrachteten [illegible]en keinen [illegible]einsamen Punkt haben.

② Eine eindeutige [illegible]t, dass sic[illegible]e betrachteten [illegible]benen genau in einem Punkt schn[illegible]

③ Ein[illegible]arame[illegible]erte [illegible]ng bedeutet, [illegible]ss es unen[illegible]ichviele Lösungen gibt, die als gemeinsame [illegible] Sc[illegible]tgerade[illegible]r betrachteten [illegible]benen aufgefas[illegible]werden können.

[illegible]n [illegible]ur Ver[illegible]chaulichun[illegible]drei Lösun[illegible]ichkeiten von linearen Gleichungssystemen im R[illegible] de[illegible]gen die L[illegible]sungsziffern ① [illegible] und ③ zu.

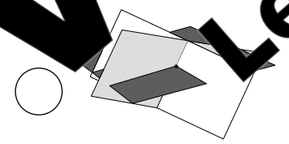


Abb. 2.1.1

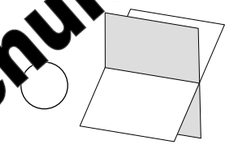


Abb. 2.1.2

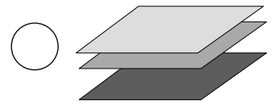


Abb. 2.1.3

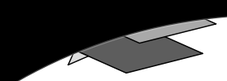


Abb. 2.1.4

Abb. 2.1.5

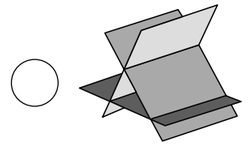


Abb. 2.1.6

Aufgabe 2.[illegible]

Gleich[illegible]ungen, drei Variablen und genau[illegible]ng

Be[illegible]nearer Gleichungssysteme höherer Ord[illegible]man systematisch [illegible] Möglichkeit hie[illegible]u stellt das Additionsverfahren nach Gauß [illegible]annte **Gauß-**[illegible]ar.

[illegible]chen Sie sich anhand des folgenden Beispi[illegible]ier verwendete [illegible]de Abwandlung [illegible]ahrens, und lösen Sie anschließend an[illegible] Übungsaufgabe[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= -3 \\ x - y - z &= 4 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren lösen:

Schritt 1:
Die Gleichungen fortlaufend durchnummerieren

Schritt 2:
Gleichung I mit den Gleichungen II und III so addieren oder verrahmen, dass die Variable x entfällt.

Schritt 3:
Mit den Gleichungen IV und V wie bei einem LGS mit zwei Variablen weiterrechnen und damit eine der beiden verbleibenden Variablen eliminieren.

Schritt 4:
Das Ergebnis, je nach Rechenaufwand, in die Gleichung IV oder V einsetzen und die fehlende Variable berechnen.

Schritt 5:
Beide Ergebnisse in die erste Gleichung einsetzen und die Variable x berechnen.

Es existiert eine eindeutige Lösung. Die Lagebeziehung der Ebenen entspricht damit der Abb. 2.1.1

I	$2x + y + 3z = -3$	I + II
II	$x - y - z = 4$	2·III
III	$3x - 2y + 2z = 5$	
IV	$3y + 5z = -11$	IV
V	$7y + 5z = -19$	V
VI	$-4y = -2$	

y in IV einsetzen

$3 \cdot (-2) + 5z = -11$
$-6 + 5z = -11$
$5z = -5$
$z = -1$

y und z einsetzen

$2x - 2 + 3 \cdot (-1) = 3$
$2x - 2 - 3 = 3$
$2x = 2$
$x = 1$

Lösung: (1/–2/–1)

Übungen:

Ü2.1 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

Zur Kontrolle
(4/3/2)

b)

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 19 \\ 2x + 3y + z &= 4 \\ x - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
(3/–1/1)

Lineare Gleichungssysteme ohne Additionsverfahren lösen

Kommen in einem LGS in jeder Zeile nicht alle Variablen vor, so kann man die Lösung oft auch ohne Additionsverfahren ermitteln.

Gegeben ist das folgende LGS

Zeile 2 liefert schon das Ergebnis für y.

I $3x - 5y$
II

y einsetzen in III:

$2x + 2 = 0$
$2x = -2$
$x = -1$

y und x einsetzen in I:

$3 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 - 2z = -1$
$-3 - 10 - 2z = -1$
$-2z = 12$
$z = -6$

Lösung: (–1 / 2 / –6)

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Ü2.2 Lösen Sie das folgende LGS ohne Anwendung des Additionsverfahrens

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 3 \\ 4x &= 6 \\ 2x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
$\left(\frac{3}{2} / -\frac{1}{3} / 0\right)$

Aufgabe 2.3

Gleichungssysteme mit drei Gleichungen, drei Variablen und keiner Lösung

Wie bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen kann es bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen zu Widersprüchen kommen. Das LGS ist dann nicht lösbar.

Zeigen Sie durch Ergänzen der folgenden Rechnung, dass ein Widerspruch entsteht und das LGS nicht lösbar ist.

I	$x + 2y - z = 1$	
II	$x + y$	
III		en
	$y - z = 1$	IV – III
	___ = ___	⇒ Widerspruch, ke

Es existiert keine Lösu
Lagebeziehung der Eben
damit der Abb. 2.1.3 oder
2.1.6 entsprechen.

Aufgabe 2.4

Gleichungssysteme mit drei Variablen und unendlich vielen Lösungen

Abbildung 2.1.5 zeigt drei Ebenen, die als gemeinsame Punkte ein
gerade
n. Das bedeutet, dass es unendlich viele Punkte gibt, die gleichzeitig zu allen drei Eb
n g
n. Interpretiert man jede der drei Gleichungen eines linearen Gleichungssystem als
enengl
r gibt es unendlich viele Werte, die dieses LGS lösen, nämlich alle Punkte, die
der Sc
geraden liegen. Entsprechend zur Aufgabe 1.2 Beispiel 3 erhält man eine parametrisierte L

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden
nschr
ergänzen.

I	$x + 2y + 2z = 1$	
II	$2x + z = 3$	I – II
III	$3x + 2y + 3z = 4$	– III
IV	___ =	
V	___ = ___	IV – V
	0 =	

Die Gleichung IV und
ntisch sind,
als
für die Bestimmung der Variablen y und z nur eine Gleichung bleibt, gibt es unendlich viele Lösungen, und man kann wie bei den linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen beispielsweise z frei wählen. Wenn man z = 4r wählt, entstehen
wenig Brüche.

z fr
ählen.
z = 4
in
setze
4
2
= –1
4y = –1 –
y =

z und y in I einsetzen: $x + 2(-\frac{1}{4} - 3r) + 2 \cdot 4r = -1$

= ___
___ – ___r

mögliche Lösung: $\left(-\frac{1}{2} - 2r / -\frac{1}{4} - 3r / 4r\right)$

werden
en,
aus dieser Lösung eine
engleichung erzeugt.

Beachten Sie, d
metrisierte
Lösung von der W
meters r bzw.
vom Vielfachen vo
nd sich hier
unterschiedliche Lös
en können.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 2.5

Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Während bei den späteren Aufgabenstellungen überbestimmte lineare G[illegible]ssyste[illegible] drei Variablen praktisch keine Bedeutung haben, werden jedoch häufiger **unte[illegible]est[illegible]** lineare Gleichungssysteme auftreten. Das sind lineare Gleichungssyste[illegible] bei de[illegible] Gleichungen als Variablen vorhanden sind. Da das Beispiel von Aufgabe 2.4. stre[illegible]nomm[illegible]u dieser Sorte von linearen Gleichungssystemen zählt, ist das Lösungsverfah[illegible]n verd[illegible]ar.

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden Rech[illegible]tte er[illegible]en.

Beispiel:

I x + 2y + z = 3
II 2x + y + z = 3 | 2I

___+ ___ = ___

z = 5

Wenn nur noch eine Gleichung für zwei Variablen vorhanden ist, kann eine Variable (hier ist es günstig r für y zu wählen) frei gewählt werden.

mit [illegible] y = r

ergibt sich [illegible] z: [illegible] – 3r

eins[illegible]en [illegible] __+ ___

x = ___

Lö[illegible] (r[illegible] 2 / r[illegible] – 3r)

Begründen Sie, warum die geometrische Deutung dieser Aufgabe der Abbildung Abb.2.1.2 entspricht, und erläutern Sie, wie man die Lösung anschaulich interpretieren kann.

Ergä[illegible]gen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]a

selbstorganisiert [illegible]rle[illegible]en

Ka[illegible]

Koordinatensyst[illegible]

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineal ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehun ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
K 137
..... 143
... ehungen 145
... **tel 23** – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...
... rbehalten. A ... ghts reserved.
... k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 3: Koordinatensysteme

1. Koordinaten in der Ebene

Die Darstellung von Punkten in der Ebene ist Ihnen hinlänglich bekannt. Alle Punkte liegen in der Papierebene, und man kann bei gegebenen Koordinaten einen Punkt p(x/y) im Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten eines markierten Punktes, hier A(2/3), direkt ablesen.

Die x-Achse kann auch mit x_1-Achse u ... e y-Achse auch mit x_2-Achse bezeichnet ... rden.

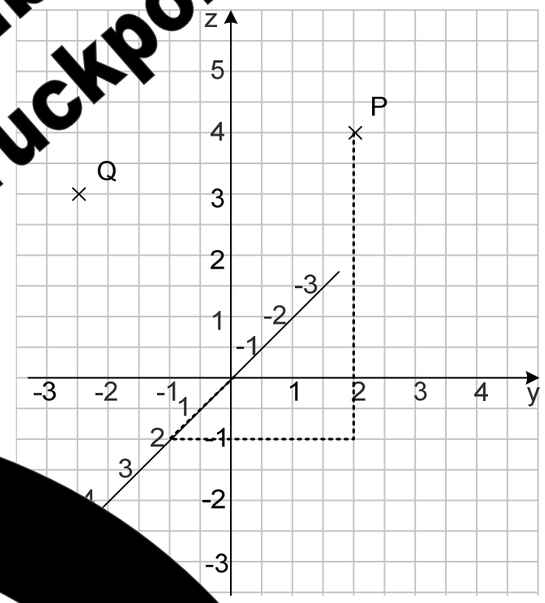
2. Koordinaten im Ra ...

Für die Darste ... von ... kten im Raum trifft man in der Rege ... ereinbarun ...

Die ... sen ... e y- ... x_2-Koordinate und die z- b ... x_3-Koo ... ate liegen in der P ... pierebene.

... e x ... se wird als Diagonale ... eichn ... zeigt se ... aus der P ... erebene nach vor ... raus, wobei ... de der Skala ... kürzt gezeichnet werden. ... Form der ... arstellung wird a ... als Kavalierperspektiv ... bezeichne ...

Hier: Abstand y- und z-Achse zwei Kästchen
Abstand x-Achse ein Kästchen diagonal



Die Punkte ... Pa ...

... as Eintragen bzw. Ablesen von Punkt P(2/3/5) erfolgt mit Hilfe der gestrichelten Hilfslinie: vom Ursprung ausgehend 2 Einheiten nach vorne entlang der x-Achse, 3 Einheiten nach rechts parallel ... eiten nach oben para ...

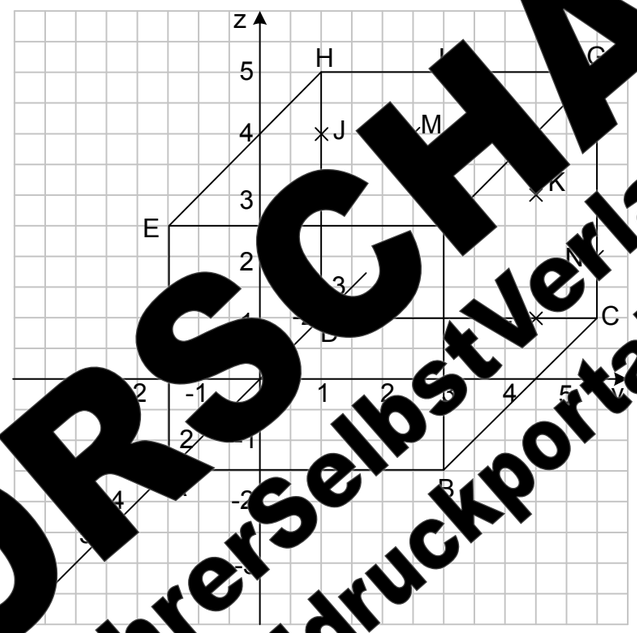
Fü ... eutige Aussage ... keine Hilfslinien ... d.

... n Wahl der Skalierung können räumliche ... te verzerrt erscheinen. Beispielsweise ka ... ürfel wie ein Quader aussehen.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Übungen

Ü3.1 Koordinaten ablesen und eintragen.



a) [illegible]men Sie [illegible]e Eckpunkte de[illegible]aders.

A (___/___/___) B ([illegible]/___) C (___/___/___) D (___/___/___)

E (___/___/___) F (___/___/___) G (___/___/___) H (___/___/___)

b) Bestimmen Si[illegible] Koordinaten der eingezeichneten Punkte.

[illegible]/___) L (___/___/___)

[illegible]) N (___/___/___)

[illegible] Tragen Sie die folgenden Punkte ein. Verwenden Sie, w[illegible] Hilfslinien:

P(1/0/0) Q(4/-1/3) R(3/4,5/–2) S(–1/1/3)

[illegible]e Übungen: _____

_____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineal ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

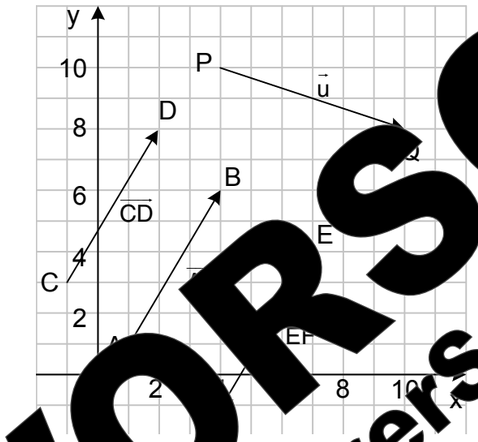
... rbehalten. A ... ghts reserved.
... k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 4: Grundlegendes zu Vektoren

Vektoren in der Ebene

Aufgabe 4.1
In der folgenden Abbildung sind Vektoren in der Ebene dargestellt. ... ber ... sich die Zusammenhänge, indem Sie die gegebenen Informationen ... charb ... ... nlende Angaben ergänzen.



... s ... e Punkte:

A(1/ ... 3/4/6), C(–1/2), D(2/8), E(7/4), F(4/–1)

... /___), Q(___/___)

Vektoren werden durch einen Pfeil über ... n Buchstaben, der immer ... on links nach rechts zeigt, ... gekennzeichnet. Wie bei Strecken verwendet man entweder die großen Buchstaben von Anfangs- und Endpunkt oder einen kleinen Buchstaben.

Ke ... eichnen von Vektoren:
... l von A nach B wird als Vektor $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.

Der Pfeil von C nach ... wird als V ... ktor ____ bezeichnet.

Der Pfeil von E nach F wird als V ... ktor ____ bezeichnet.

Der Pfeil von P nach Q wird als Vektor ____ bezeichnet.

Sp ...

... Verschiebung eines ... telle im Koordinatensystem an. Diese ... ebung wird mit Hilfe der Spaltenschreibweise ...

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vers ...

Verschiebung um
–3 in x-Richtung
–5 in y-Richtung

... g um
... htung
... ung

E ...

... ren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ bewirken die gleiche Verschiebung. Sie gehö ... r gleichen ... **klasse**.

... ektoren $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ und der Vektor $\overrightarrow{EF}$ si ... lang, aber entg ... et. Man ... chnet solche Vektoren als **Gegenvek** ...

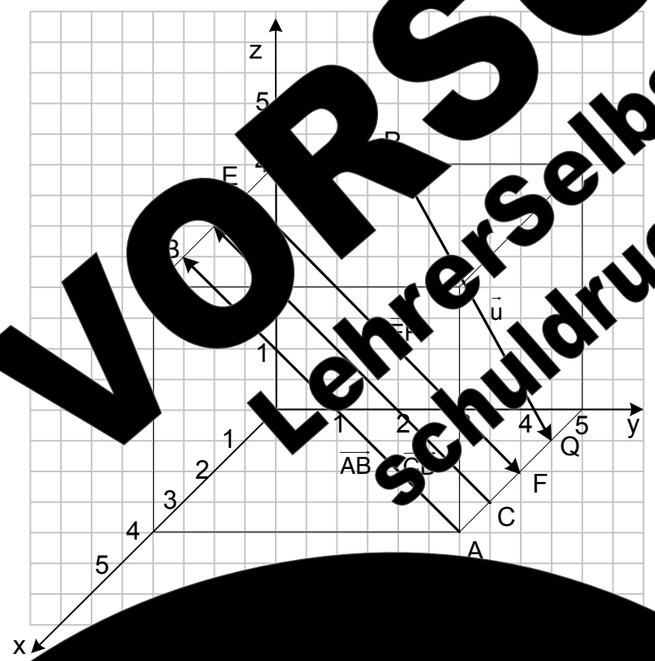
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Vektoren im Raum

Aufgabe 4.2

Die Betrachtungen zur Vektordarstellung in der Ebene können direkt auf [illegible] übe[illegible] werden. Man muss lediglich beachten, dass die Vektoren im Raum drei Komponen[illegible] ha[illegible]d in der Spaltenschreibweise in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

In der folgenden Abbildung sind Vektoren im Ra[illegible]gestell[illegible]ittelnSie di[illegible]n, deren Anfangs- und Endpunkte C, D, E, F, P sowie Q [illegible]d bestimmen [illegible] die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ sowie $\overrightarrow{PQ}$ in Spaltendarstellung.



A(4/5/0)

B(3/0/4)

C(___/___/___)

D(___/___/___)

E(___/___/___)

F(___/___/___)

P(___/___/___)

Q(___/___/___)

$\begin{pmatrix} \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix}$

Ergänzen Si[illegible]

Die Vek[illegible] EF sind _____vektoren, da sie gleich [illegible] entge[illegible] sind.

Berechnen von Vektoren aus den Koordinaten der Endpunkte

Aufgabe 4.3

Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 4.1 wurde durch Abzählen der [illegible] im K[illegible]ensystem ermittelt. Sie haben bei Aufgabe 4.2 vielleicht schon festge[illegible]llt, das[illegible]e [illegible]ten auch direkt aus dem Anfangs- und Endpunkt des Vektors ermittelt werden [illegible]en.

Koordinate der Pfeilspitze: B(4/6) ——— [illegible]rdinate d[illegible]ilendes: A(1/1)

Koo[illegible]n des [illegible]rs

$= \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6- \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \\ 5 \end{pmatrix}$

Ko[illegible]naten de[illegible] [illegible]naten [illegible]es Pfeilendes

Überprüfen Si[illegible]es [illegible]ren für den Vekto[illegible] aus Aufgab[illegible]

Grundlegende Defi[illegible]onen und Zusammenhänge

– Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind jeweils **Repräsentanten** der gleichen Klasse von Vektoren $\vec{v}$, die eine Verschiebung eines Punktes um [illegible]tung bzw. v_3 in z-Richt[illegible]

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

[illegible] und $\vec{v}$ sind gleich lang.

[illegible]nnt daher den Vektor $\vec{v}$ **Gegenvektor** d[illegible]

[illegible]chreibweise für Ebene entsprechend)

$-\vec{u} = -\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$

– Ein Vektor, der einen Punkt A auf sich selbst abbildet (also keine Verschieb[illegible] **Nullvektor** genannt.

[illegible] $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

– [illegible] $\overrightarrow{AB}$ werden aus den [illegible]r Punkte A([illegible]$_2$/a_3) und B (b_1/b_2/b_3) durch [illegible]ndung der einzelnen Komponenten a_1, a_2 und a_3 und [illegible]nd b_3 berechnet:
[illegible]e Ebene gilt Entsprechendes.)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \\ b \end{pmatrix}$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Übungen

Ü4.1 Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ in Spaltendarstellung.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix}$

b) Zeichnen Sie einen weiteren beliebigen Repräsentanten der Klasse des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ein.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Gegenvektors von $\overrightarrow{AB}$ in Spaltendarstellung und zeichnen Sie einen beliebigen Repräsentanten des Gegenvektors von $\overrightarrow{AB}$ ein.

Gegenvektor: $\begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix}$

d) Zeichnen Sie ausgehend vom Punkt P(4/0/0) einen beliebigen Repräsentanten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und geben Sie die Koordinaten des Gegenvektors an. Gegenvektor: ____ = $\begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix}$

Ü4.2 Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ aus den Koordinaten der Punkte $A(a_1/a_2)$ und $B(b_1/b_2)$ der Ebene bzw. $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$ des Raumes für folgende Punkte:

a)	b)	e)	f)	g)	h)
A(2/1)		/7)	A(2/7/4)	A(3/1/-2)	A(0/-3/1)
B			B(3/-2/0)	B(-1/4/-1)	B(-2/-1/3)

Ergebnisse der Übungen:_____

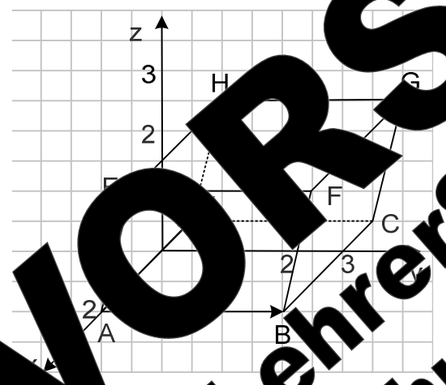
Ortsvektoren

Aufgabe 4.4

Gegeben ist der unten dargestellte verzerrte Quader. Man bezeichnet einen Körper als **Spat**. Gegeben sind die Punkte A(2/0/0), B(2/3/0), C(-1/3/0) und E (2/0,5/2). Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung unter Anwendung der folgenden Definition:

Definition Ortsvektor:

Ein Vektor $\vec{a}$, der im Ursprung O des Koordinatensystems beginnt und dessen Pfeilspitze am Punkt A endet, wird als Ortsvektor bezeichnet. Der Ortsvektor erhält den zum Namen des Punktes zugehörigen kleinen Buchstaben: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$



a) Geben Sie die Ortsvektoren zu allen Eckpunkten an.

b) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Welche weiteren Vektoren gehören zur gleichen Vektorklasse wie $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$

c) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{HF}$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Der Betrag von Vektoren

Aufgabe 4.5

Gegeben ist das folgende Koordinatensystem mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ u

$\vec{a} = \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix}$

a) Die Punkte O, R, A und B liegen auf den Ecken des eingezeichneten Quaders. Tragen Sie die Koordinaten der Punkte in der Abbildung sowie die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein. Bestimmen Sie dann die Längen der folgenden Strecken:

$\overline{OP}$ = ____ LE $\overline{OQ}$ = ____ LE $\overline{OR}$ = ____ LE

b) Erläutern Sie, wie die Länge der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{OB}$ berechnet wurden.

$\overline{OA} = \sqrt{36+64} = 10$		$\overline{OB} = \sqrt{100+25} = 11{,}2$

Definition

Der Abstand von A und B im Koordinatensystem wird als Länge der Strecke $\overline{AB}$ bezeichnet. Übertragen auf die Vektorrechnung gilt Entsprechendes: Der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ entspricht der Länge des Vektors und wird als Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet. Man schreibt z. B.:

$|\overrightarrow{OA}| = 10\,\text{LE}$ oder ei $|\overrightarrow{AB}| = 5$

c) Erläutern Sie den folgenden Ansatz für die Berechnung der Strecke $\overline{OB}$ bzw. des Betrages des Vektors $\overrightarrow{OB}$. Formulieren Sie dabei auch, welcher Zusammenhang mit den Koordinaten des Ortsvektors $\vec{b}$ besteht. $\overline{OB} = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{6^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{100+25} = 11{,}2$

d) Erläutern Sie unter Verwendung der mathematischen Fachausdrücke *Summe*, *Komponenten* des *Vektor*, *Wurzel* in eigenen Worten wie der Betrag eines Vektors berechnet wird.

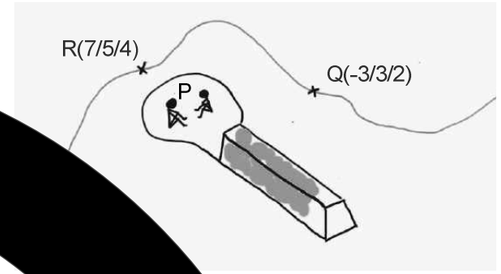
Berechnen des Betrags eines Vektors

Betrag eines Vektors in der Ebene: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Betrag eines Vektors im Raum: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Übungen

Ü4.3 In einem Bergwerk sind nach dem Einsturz eines Schachtes Bergleute an der Stelle P(5/8/3) verschüttet. Sauerstoff zu



Weisen Sie durch Rech die Stelle R für die Bohrung am günstig ist.

nde Übungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Die Definition des Einheitsvektors

Aufgabe 4.6

Zeigen Sie mit Hilfe der folgenden Definition, dass die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible]6 \\ [illegible]8 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren sind.

Definition Einheitsvektor:

Ein Vektor der Länge 1 bzw. mit dem Betrag [illegible] wird als [illegible]heitsvektor bezeichnet. Dafür gilt:

in der Ebene: $|\vec{a}| = 1$ **also** $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$

im Raum $|\vec{a}| = 1$ **also** $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

Ergä[illegible]gen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]a
selbstorganisiert [illegible]rlernen

[illegible]

Rechnen mit Vek[illegible]

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea[illegible]ratio[illegible] 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen[illegible] 81
[illegible]pitel [illegible] – [illegible]beziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]tel 15 – Abstände 99
[illegible]l 16 – Schnittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
K[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]enungen 145
[illegible]tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

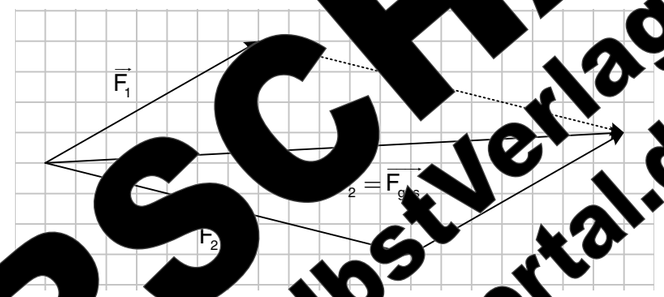
Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]031-266)
S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 5: Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Aufgabe 5.1

Aus dem Physikunterricht ist Ihnen bereits die Addition und [illegible]ubtrakt[illegible] zw[illegible]te mit Hilfe von Kräfteparallelogrammen bekannt. Die Addition und Subtra[illegible] von V[illegible] beruht auf dem gleichen Prinzip.

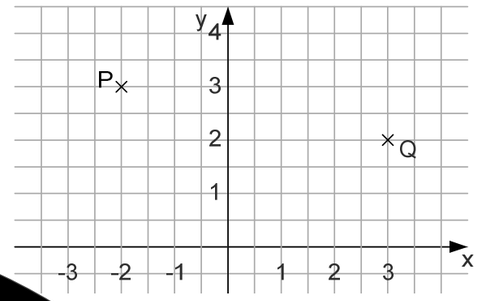


1. Addition von Ve[illegible]

a) Z[illegible]nnen[illegible] Ad[illegible]n in der Ebene

Z[illegible]nen Sie[illegible] Vektoren $\vec{a}$ [illegible] und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ausg[illegible] von Punk[illegible] des [illegible]oordinatensystems ein.



[illegible]chnen Sie [illegible]nach den Vekt[illegible] $\vec{a}$ ausgehend von der Spitze des Vektors [illegible] und den Vektor $\vec{b}$ ausgehend von der Spitze des Vektors $\vec{a}$ ein zweites Mal ein. Diese beiden Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ treffen mit ihren Spitzen den Punkt Q. Verbin[illegible]

[illegible] $\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$

b) Rechnerische Addition in der Ebene

Rechnerisch kann man zwei Vektoren addieren, indem ma[illegible]ten der Vektoren komponent[illegible]führen Sie dies anhand der Wei[illegible]eispiel oben durch und vergle[illegible]nen Wert.

[illegible] $\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$

[illegible]gleich: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

2. Subtraktion von Vektoren $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$

a) Zeichnerische Subtraktion

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und

$\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Zeichnen Sie den Vektor $\vec{a}$

ausgehend von Punkt P in das Koordinatensystem ein.

Zeichnen Sie danach den Gegenvektor von

also $-\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ ausgehend von der Spitze des

Vektors $\vec{a}$ ein. Die Spitze des Gegenvektors

von $\vec{b}$ liegt im Punkt Q. Verbinden Sie P und Q

durch den Vektor $\overrightarrow{PQ}=\vec{d}$ und lesen Sie die

Koordinaten von $\vec{d}$ aus der Zeichnung ab.

$\vec{d}=\begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

b) Rechnerische Subtraktion in der Ebene

Die Subtraktion entspricht der Addition des Gegenvektors. Berechnen Sie $\vec{d}$ und vergleichen Sie mit dem zeichnerisch ermittelten Wert.

$\vec{d}=\vec{a}+(-\vec{b})=\begin{pmatrix}______\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}______\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

Vergleich: _____

Die in der Ebene und im Raum gültigen Subtraktion von Vektoren können direkt auf Basis der Merksätze.

Addition von Vektoren:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die Koordinaten jeweils addiert:

Ebene: $=\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}______\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}___+______+___\end{pmatrix}$

Raum: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}_________\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}___+______+______+___\end{pmatrix}$

Subtraktion von Vektoren:

Der Vektor $\vec{d}$ wird vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem man zu $\vec{a}$ den _____ von

Aufgabe 5.2

Addiert man zu einem Vektor seinen Gegenvektor, so erhält man in der Ebene und im Raum den Nullvektor. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben:

$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$ Nullvektor in der Ebene

$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}_________\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}_________\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}___+______+______+___\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}_________\end{pmatrix}$ Nullvektor im Raum

Aufgabe 5.3

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz. Prüfen Sie anhand der Informationen in Ihrem Buch oder anderen geeigneten Quellen, ob diese Gesetze auch für das Rechnen mit Vektoren Gültigkeit haben, und notieren Sie diese Gesetze.

Kommutativgesetz: _____

Assoziativgesetz: _____

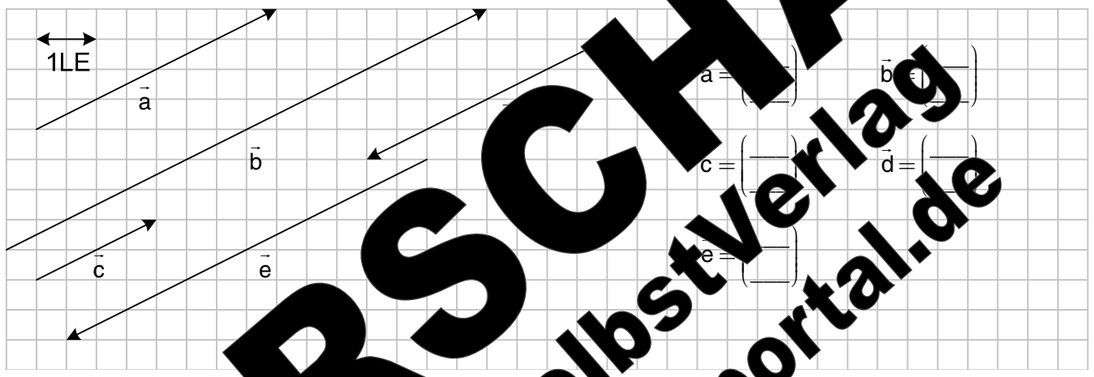
Ergänzende Übungsaufgaben: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen

Aufgabe 5.4

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren durch Ab[illegible] der Z[illegible]ung und tragen Sie die Werte ein.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$

$\vec{e} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$

a) Nennen Sie [illegible]eins[illegible]eit zwischen [illegible]em Ve[illegible]tor $\vec{a}$ und [illegible]n [illegible]ktoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$.

b) Geb[illegible] Sie [illegible]e zwischen [illegible]dem Vektor $\vec{a}$ [illegible] den Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$ an.

c) Stellen [illegible]e die Vektore[illegible] bis $\vec{e}$ wie[illegible]m [illegible]elspiel für Vektor $\vec{b}$ durch das Vielfache des Vektors $\vec{a}$ dar.

$\vec{b} = 2\vec{a} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = ____ = __\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$

$\vec{d} = _$ [illegible] $= __\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$

[illegible]en Sie im Merksatz die Angaben für den Raum.

Vektoren werden vervi[illegible] [illegible] reellen Zahl r multipliziert, in[illegible]
Komponente mit d[illegible]

Für die [illegible] $\begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ra_2 \end{pmatrix}$ Für den Raum gilt: $r\vec{a} = __\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.6

Erarbeiten Sie sich mit Hilfe Ihres Schulbuchs oder anderen geeigneten Qu[illegible] weite[illegible]echenregeln hinsichtlich der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, und [illegible]en Sie [illegible] hier.

Übunge[illegible]

ÜE1 [illegible]eiben S[illegible]die Vektoren [illegible]odukt aus e[illegible]er reellen Zahl und einem Vektor mit möglichst k[illegible]n gan[illegible]ligen Koor[illegible]el:

[illegible]) $\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 500 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} [illegible]6 \\ -84 \\ 144 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} [illegible],5 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

[illegible]nde Übungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Berechnen des Einheitsvektors zu einem gegebenen Vektor

Aufgabe 5.7

Verdeutlichen Sie sich die folgenden Informationen und berechnen Sie a[illegible]ßend [illegible] $\vec{b_0}$.

Informationen:

- In der Abbildung nebenan sind Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie die zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{a_0}$ und $\vec{b_0}$ eingezeichnet.

- Den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$ bezeichne[illegible]an mit $\vec{a_0}$.
- Der Vektor $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ und ihr Ein[illegible] $\vec{a_0}$ bzw. $\vec{b_0}$ zeigen in die [illegible]Richtung.
- Der Einheitsvektor $\vec{a_0}$ [illegible] 1, also gilt: $\left|\vec{a_0}\right| = 1$
- Ma[illegible] den E[illegible]eitsvektor zu[illegible]ktor $\vec{a}$ in[illegible]an den Vektor $\vec{a}$ durch seinen Betrag divid[illegible]

$$\vec{a_0} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{100}}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\vec{b_0}$ analog:

$\vec{b_0} =$ _____

Übung:

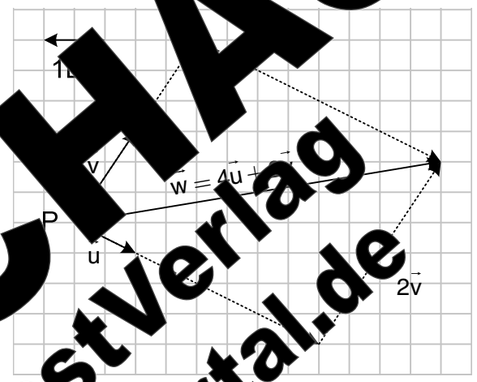
[illegible] Einheitsvektoren zu $\vec{u} = \begin{pmatrix}4\end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Addition vervielfachter Vektoren

Aufgabe 5.8

Beispiel

In der Abbildung neben wird der Vektor $\vec{w}$ durch eine Kombination aus den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erzeugt, indem man das Vierfache des Vektors $\vec{u}$ zum Zweifachen des Vektors $\vec{v}$ addiert. Durch Abzählen der Kästchen erhält man folgende



Koordinaten für $\vec{w}$: $\vec{w} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

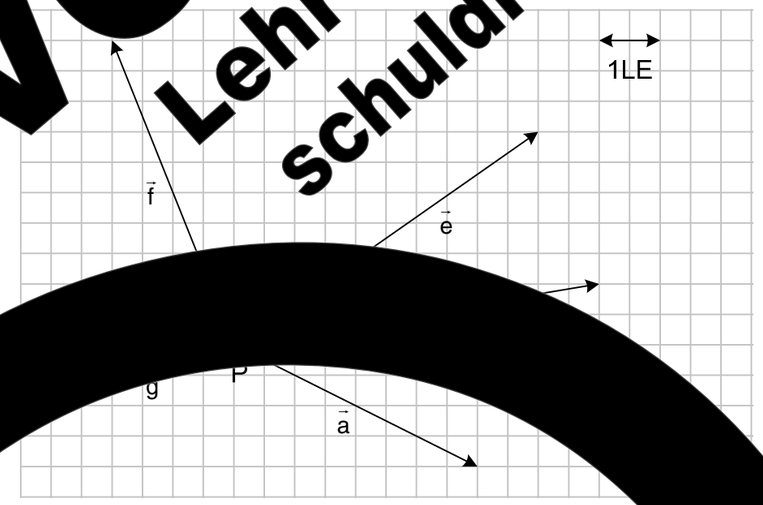
Rechnerisch lässt sich der Vektor $\vec{w}$ wie [illegible] ermitteln:

$$\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v} = 4\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1{,}5\end{pmatrix} \; (\; + 3 \; \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabenst[illegible]ung

Gegeb[illegible] [illegible]bge[illegible]en Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$

1. Ge[illegible] Sie die [illegible]rdinaten der [illegible]bgebildeten Vek[illegible]n durch Ablesen aus der Abbildung an



$\vec{a} = \begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

$\vec{e} = \begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

$\vec{f} = \begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

$\vec{g} = \begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$

2. Zeich[illegible] wie im Beispiel durch Vektorad[illegible] [illegible]bildung ein.

3. [illegible] von Vektor $\vec{c}$ durch Rechnung

[illegible] $\begin{pmatrix}______\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}______\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}_____________\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}______\end{pmatrix}$ und prüfen Sie durch Ab[illegible] [illegible]ästchen, ob das [illegible]nis mit der Zeichnung übereinstimmt.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

4. In Aufgabe 2 und 3 wurde der Vektor $\vec{c}$ mit Hilfe der gegeben Beziehung $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ zu[illegible]t eingezeichnet und dann berechnet. Nun sollen Sie umgekehrt vorgehen. Ermi[illegible] Sie, wie[illegible] die bereits gezeichneten Vektoren $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ aus einer Kombination der Vektoren [illegible]d $\vec{b}$ [illegible]. Vielfachen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lassen. Zeichnen Sie dazu wie im [illegible]ben [illegible]chende Hilfslinien ein und überprüfen Sie die Ergebnisse mit den unter 1. bere[illegible]rm[illegible] Koordinaten.

$\vec{d} =$ _____

$\vec{e} =$ _____

$\vec{f} =$ _____

$\vec{g} =$ _____

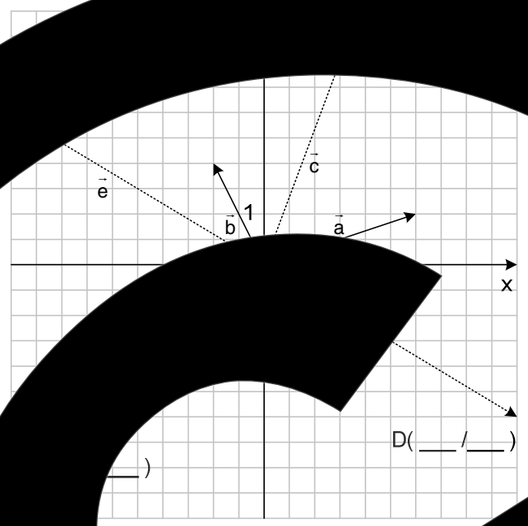
Fachbegriff fü[illegible]sun[illegible]us vervielfa[illegible]ktoren:

Definit[illegible] Lin[illegible]kombin[illegible]n:
Eine Su[illegible]e ra[illegible] + ... für [illegible] reellen Zahl[illegible], t, … und die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...nennt [illegible]eine **[illegible]earkombination** de[illegible]ektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

Übungen

Ü5.3 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Stellen Sie alle anderen eingezeichneten Ortsvektoren, wie im Beispiel für $\vec{c}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, inde[illegible] D, E und F eintragen.

[illegible] $= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 1{,}5\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\4\end{pmatrix}$

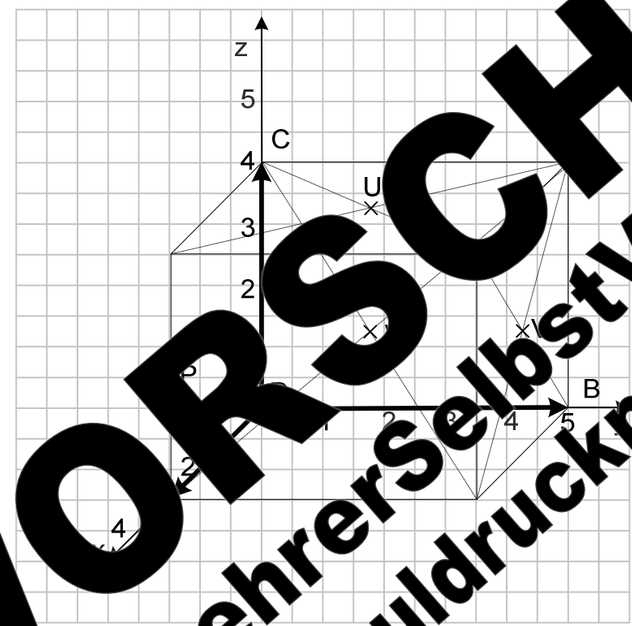


$\vec{d} =$ _____

$\vec{e} =$ _____

$\vec{f} =$ _____

Ü5.4 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu den Punkten A, B und C. Ermitte[illegible] durch Abzählen zunächst die Koordinaten aller eingetragenen Punkte. Stelle[illegible] ansch[illegible]end die Ortsvektoren zu den Punkten U, V und W, wie im Beispiel für [illegible]dargeste[illegible] Li[illegible]kombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Überprüfen Sie das Ergebnis j[illegible] [illegible]nd d[illegible]gelesenen Koordinaten.



___/___/___) $\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}_________\end{pmatrix}$

B(___/___/___) $\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}_________\end{pmatrix}$

C(___/___/___) $\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}_________\end{pmatrix}$

P(3/0/2)

U(___/___/___)

V(___/___/___)

W(___/___/___)

[illegible]eispiel für $\vec{p}$:

$$\vec{p} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot\vec{c} = 1\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$$

_____

$\vec{v} =$ _____

$\vec{[illegible]}$ _____

[illegible]e Übungen: _____

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinat…nen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, … sie du… genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, da… **r = 3** … eichu… erfüllt.

b) $\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}15\\-25\\5\end{pmatrix}$ Man erkennt sofo… ss **s =** … die Gleichu… …llt.

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$ … erk… sofo… ass es **kein** Zah… gibt, w… …e Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\…\end{pmatrix} = …\begin{pmatrix}1\\…\end{pmatrix}$ … kan… einen Vekt… der Ebene mit … m Vektor des Raumes verknüpfen.

…uf… …n 6.1

…nen S… Lösunge… …e folgenden …ektorgleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

$\begin{pmatrix}…6\\…\\…8\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-12\\-34\\-16\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\…\end{pmatrix} = …$ c) $\begin{pmatrix}13\\17\\-23\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}117\\-153\\207\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen von … …ung

Bei… …rhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die …

… für Vektorgleichungen mit …

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}9\\12\\…\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern … o auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als … Gleichungssystem (LGS) entsteht.

… = 12r $\Rightarrow r = \frac{4}{3}$

8 = 6r $\Rightarrow r = \frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie… …erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich… …efern.

Das ist für $r = \frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist $r = \frac{4}{3}$ … des LGS.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 6
Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombination

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]igkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible]12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible]3 – Be[illegible]dere Ebenen 81
[illegible] – [illegible]beziehung [illegible]ei Ebenen 85
[illegible]el 15 – Abstände 99
[illegible]l 16 – Schnittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]enungen 145
[illegible]el 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinationen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, [illegible] sie durch genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, da[illegible] **r = 3** [illegible] Gleichung erfüllt.

b) $\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}15\\-25\\5\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass **s =** [illegible] die Gleichung erfüllt.

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass es **keine** Zahl r gibt, welche die Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix} = [illegible]\begin{pmatrix}1\\[illegible]\end{pmatrix}$ [illegible] kann keinen Vektor der Ebene mit einem Vektor des Raumes verknüpfen.

Aufgabe 6.1

[illegible] Lösungen [illegible] folgenden Vektorgleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

[illegible] $\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\8\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-12\\-34\\-16\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix}$ [illegible] c) $\begin{pmatrix}13\\17\\-23\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}117\\-153\\207\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen von [illegible]ung

Bei [illegible] Verhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die [illegible]

[illegible] für Vektorgleichungen mit [illegible]

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}9\\12\\[illegible]\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern [illegible] auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als [illegible] Gleichungssystem (LGS) entsteht.

[illegible] $= 12r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

$8 = 6r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie[illegible] [illegible]erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich[illegible] [illegible]efern.
Das ist für $r = \frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist $r = \frac{4}{3}$ [illegible] des LGS.

Beispiel 2:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}9\\12\\15\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern der Vektoren [illegible]uf, das [illegible] Gleichungen ergeben, also ein linea[illegible]ungs[illegible]n (LGS) entsteht.

I: $12 = 9r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

II: $16 = 12r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

III: $8 = 15r \quad \Rightarrow r = \frac{8}{15}$

Aus I und II f[illegible] $r = \frac{4}{3}$ [illegible] Gleichung III er[illegible] sich für $r = \frac{8}{15}$ also ein W[illegible]spruch. Dam[illegible] die Vektorg[illegible]ung nicht lösbar.

b) Beispiele für Vektorgleichung[illegible] [illegible] 2 [illegible] Variablen

Beispiel 1:

$r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\[illegible]\\0\end{pmatrix}$

Auflösen de[illegible]kt[illegible]gleichung in drei einzelne Gleichungen

I [illegible]r + s [illegible] weglassen

II [illegible] + s = 1

[illegible] 2s = 0 II-I

IV −s = 1

s = −1 einsetzen in II ⇒ r = 2

Da es sich um ein überbestimmtes LGS handelt, müssen die Lösungen in der für die Rechnung bisher nicht verwendeten Gleichung I überprüft werden. Da sich kein Widerspruch ergibt, sind s = –1 und r = 2 Lösungen des LGS.

Einsetzen von r und [illegible]

[illegible] $+ s\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$

Auflösen d[illegible]g in drei einzelne Gleichungen

I 2r + s [illegible]

II r + [illegible]

III [illegible]

[illegible] = −1 einsetzen in II ⇒ r = 2

[illegible]tzen in I: 3 = 4

Auch hier ergibt sich [illegible] II und III das Ergebnis r = 2 und s = [illegible]
Einsetzen in I ergibt hier [illegible] also einen **Widerspruch**. Damit ist d[illegible]chung nicht lösbar.

Kei[illegible]g

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

3. Lösen Sie die folgenden Vektorgleichungen:

a) $\begin{pmatrix}6\\21\\-9\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}15\\49\\-21\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}6\\21\\-9\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}14\\49\\-21\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}18\\[illegible]\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + [illegible]$

f) $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

h) $[illegible] = r\begin{pmatrix}1\\4\\[illegible]\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}2\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Lösungen in unsortierter Reihe[illegible]

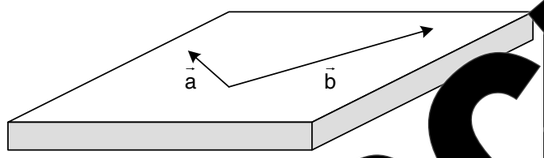
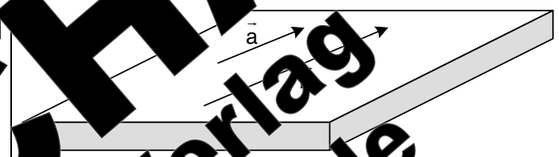
keine Lösun[illegible]
keine Lösun[illegible]
r = 15 und s = [illegible]

[illegible]ne Lösung
r = 3 und s = [illegible]
r = 3/7 [illegible]

keine Lösung
r = 0,5 und s = 0,5
r = –3 und s = 1

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Eb	
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	Geg n sind V $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$
	
Der Ansatz $r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ bedeut dass der Vektor $\vec{b}$ als e elf es de rs $\vec{a}$ dargestellt werd ührt zum folgenden LGS:	Der A $r\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=$ eutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{b}$ als ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt w en kann und führt zum folgenden LGS:
LGS: 0= r = ⇒ Widersp	LGS: 2r = 4 4r = 8
_____ welc s das LGS f t.	Das LGS ist für r = _____ erfüllt.
Vektor $\vec{b}$ kann _____ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Vektor $\vec{b}$ ist ein _____ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.
rden kann, sind die Vekt $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **linear unabhängig.**	nn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt n kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **r abhängig.**
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung au hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben	
	$r\cdot\vec{a}=$ sung für r
e: Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear _____.	

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a
selbstorganisiert rlernen

Ka

Lineare Abhängigk
Unabhängigkeit

02-031-266

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehun ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

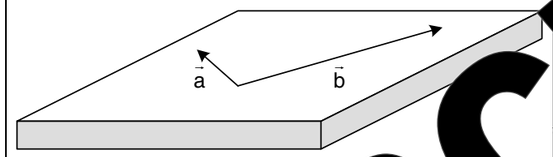
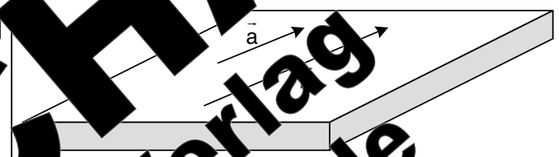
Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

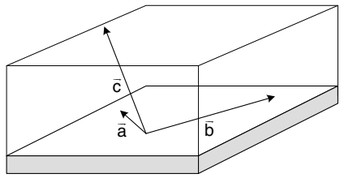
Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Eb ...	
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 	Geg ... n sind ... $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ 
Der Ansatz $r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bedeut ... dass der Vektor $\vec{b}$ als ... ielf ... es de ... rs $\vec{a}$ dargestellt werd ... führt zum folgenden LGS: LGS: 0= ... r = ... ⇒ Widersp ... _____ ... welc ... s das LGS ... ft.	Der A ... $r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ... eutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{b}$ als ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt w ... en kann und führt zum folgenden LGS: LGS: 2r = 4 4r = 8 Das LGS ist für r = _____ erfüllt.
Vektor $\vec{b}$ kann _____ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Vektor $\vec{b}$ ist ein _____ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.
... rden kann, sind die Vekt ... $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **linear unabhängig.**	... nn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein ... ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt ... n kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **... r abhängig.**
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung au ... hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben ...	
	$r \cdot \vec{a} =$ ... sung für r
... e: Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear _____.	

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im Raum

Gegeben sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$



Der Ansatz $r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ bedeutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS:

$r + s = -1$
$s = -1$
$0 = 1$ Widerspruch

Es gibt _____ und s _____ welche das LGS erfüllen.

Der Vektor $\vec{c}$ kann _____ aus einer Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden.

Gegeben sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

Der Ansatz $r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ bedeutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS:

$r + s = 3$
$s = 2$
$0 = 0$

Das LGS ist für s = _____ und r = _____ erfüllt.

Der Vektor $\vec{c}$ kann als _____ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden, da alle drei Vektoren in einer Ebene liegen. Man sagt auch, die Vektoren sind **komplanar**.

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum nicht durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann, da er in der Ebene wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt, sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **linear abhängig.**

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann, da er in der Ebene wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt, sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **linear abhängig.**

Mathematischer Ansatz für die Untersuchung von Unabhängigkeit und Abhängigkeit im Raum

$\mathbf{r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}}$ **hat keine Lösung**	$\mathbf{r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}}$ **hat eine Lösung für r und s**

Ergänzen Sie:
Vektoren sind linear _____, wenn sie komplanar sind.
Drei Vektoren im Raum sind linear _____, wenn sie in einer Ebene liegen.

Ergänzungen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Parameterdarstellung von Geraden

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineat ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und i Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

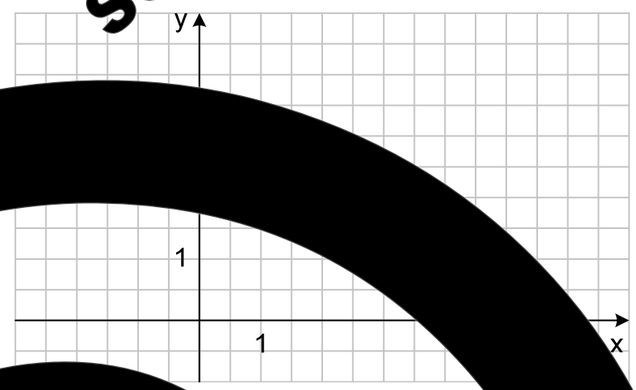
... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 8: Parameterdarstellung von Geraden

Aufgabe 8.1

Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sei ein Ortsvektor. Bestimmen Sie für d ... Tabelle ... benen Werte von r jeweils die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{p}$ und die ... rdinat ... ektor $\vec{p}$ jeweils zugehörigen Endpunkte P(x/y). Zeichnen Sie jeden Ortsvekt ... und d ... Punkt P(x/y) in ein Koordinatensystem ein.

Parameter $r \in IR$	Ortsvekto ... unkt P	Ko ... ate ... es Punktes P(x/y)
r = –1	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + __ \begin{pmatrix} 2 \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = 0	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ __ \end{pmatrix} + __ \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = 0.5	$__ + __ \begin{pmatrix} __ \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = ...	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + __ \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
... .5	$\vec{p} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} + __ \begin{pmatrix} 2 \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ __ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)



Bes ... n Ort aller Endpunkte P:

... n Sie diesen geometrischen Ort grafisch im ... atensystem dar, ... die Punkte ... oll verbinden.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Information: Parameterdarstellung der Gerade

Parameterdarstellung einer Geraden: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$

Der Param[illegible]r dien[illegible]ngeänderung und bei nega[illegible] Vor[illegible]nen auch zur Um[illegible]ng [illegible]tur[illegible]vektors $\vec{u}$. Setzt man [illegible] Zah[illegible] gelangt m[illegible]u [illegible]em P[illegible]X auf der Gerade[illegible]

Stützvektor $\vec{p}$

Der Stützvektor $\vec{p}$ ist ein Ortsvektor zu einem beliebigen, aber bekannten Punkt auf der Geraden. Der Stützvektor l[illegible] damit die Position de[illegible] Geraden im Koordinatensystem fe[illegible]

Richtungsvektor $\vec{u}$

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ legt die Richtung (Steigung) der Geraden im Koordinatensystem fest. Man zeichnet $\vec{u}$ in der Regel ausgehend von P ein.

Man kann $\vec{u}$ berechnen, wenn zwei Punkte A und B auf der Geraden bekannt sind.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Der Vekto[illegible] ist ein Ortsvektor zu einem belieb[illegible] Punkt X auf der Geraden.

Parameterdarstellu[illegible]nten der Vektoren

Gerad[illegible]erade im Raum

[illegible] $= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

[illegible]er oder [illegible]

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix}$

Anm[illegible] [illegible]n der Analysis verwendete Form y = mx + b findet in der linear[illegible] [illegible]plicherweise keine Anwendung, da diese Form [illegible]er Geradendarste[illegible] Geraden [illegible]n der Ebene und nicht für Geraden im Rau[illegible] ist.

Aufgabe 8.2

Standardaufgaben bei Geraden

Arbeiten Sie die unten aufgeführten Beispiele zu den Standardaufg[illegible] Gerad[illegible]rch und lösen Sie anschließend mit Hilfe dieser Beispiele Aufgaben aus dem Schu[illegible]ch.

1. Erstellen der Parameterdarstellung der Gerad[illegible] [illegible] bekannte P[illegible]kte P(1/0/2) und Q(1/2/3)

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ [illegible] entspricht dem V[illegible] von P nach Q[illegible]

[illegible] $= \vec{p} + r\vec{u}$ mit [illegible] als Stützvektor [illegible] $= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Richtungsvektor

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

[illegible] als Richtungsvektor wählen.

[illegible] $+ r\vec{u}$ mit $\vec{q}$ als Stützvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ [illegible]htungsvektor

$\vec{u} = \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

D[illegible]ene, jedoch gleichwertige Lösungen:

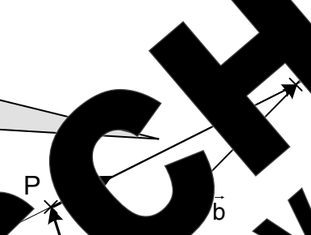
[illegible] $+ r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

2. Die Koordinaten eines Punkte B auf der Geraden berechnen, indem man für den Parameter r einen vorgegebenen Wert einsetzt

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ Für r = 4 folgt: $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0\\0+8\\2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\6\end{pmatrix}$ B(1/8/6)

Der Vektor $\overrightarrow{PB}$ ist viermal so lang wie der Vektor $\vec{u}$, wenn man für r den Wert 4 einsetzt.



3. Punktprobe: Überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden g liegt

a) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt A(1/4/4)

Schritt 1:

$\vec{a} = \vec{p} + r\vec{u}$

$\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Für $\vec{x}$ wird der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A eingesetzt.

Schritt 2:

Löse die Vektorgleichung [illegible] und prüft ob [illegible] widerspruchsfrei gelöst [illegible]

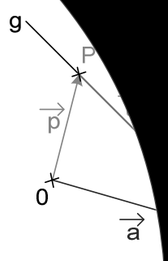
$4 = 0 + 2r \quad \Rightarrow r = 2$

$4 = 2 + r \quad \Rightarrow r = 2$

Ergebnis: Kein Widerspruch, also liegt der Punkt A auf der Gerade g.

Zeichnerische Interpretation des Ergebnisses:

Wenn der Punkt A durch Vervielfachen des Richtungsvektors $\vec{u}$ erreicht wurde, ist der Vektor $\vec{p}$ nach A [illegible] so lang wie der Richtungsvektor $\vec{u}$.



b) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt B(1/2/2)

Schritt 1:

$\vec{b} = \vec{p} + r\vec{u}$

$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Schritt 2:

$1 = 1$

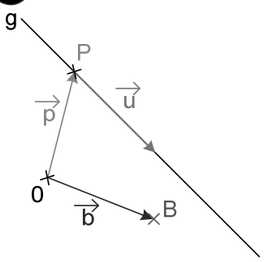
$2 = 0 + 2r \quad \Rightarrow r = 1$

$2 = 2 + r$

Ergebnis: Widerspruch, also liegt der Punkt B nicht auf der Geraden g.

Zeichnerische Interpretation des Ergebnisses:

Der Punkt B kann durch Vervielfachen des Richtungsvektors $\vec{u}$ nie erreicht werden.



Übungen

Ü8.1 Begründen Sie, [illegible] beliebig viele Gleichungen in Parameterdarstellung haben kann, [illegible] unterschiedlich und die Richtungsvektoren kollinear sind.

Weitere Übungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a
selbstorganisiert rlernen

Kap

Lagebeziehung von

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea[illegible]ratio[illegible] 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eb[illegible]un[illegible]

Kap[illegible]12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible]3 – Be[illegible]dere Ebenen 81
[illegible]pitel [illegible]ebeziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]tel 15 – Abstände 99
[illegible]l 16 – Schnittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]enungen 145
[illegible]tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

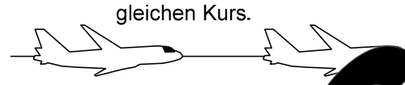
Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]031-266)
S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]R, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 9: Lagebeziehung von Geraden

Aufgabe 9.1

Sie wissen aus Untersuchungen in der Ebene bereits, dass sich zw[illegible]n schn[illegible]en können und dass sie parallel oder identisch sein können. Im Raum kommt eine w[illegible]ere [illegible]ziehung hinzu, die man als **windschief** bezeichnet. Die Lagebeziehungen vo[illegible]raden [illegible]ssen sich anschaulich an Flugrouten von Flugzeugen, die sich hier zur Vereinfach[illegible]erad[illegible]bewegen, veranschaulichen. Ergänzen Sie dazu in den folgenden Texten fehlend[illegible]form[illegible]:

Die Flugzeuge fliegen auf dem gleichen Kurs.



Die Flug[illegible]euge flieg[illegible]ichem Kurs [illegible]erschiedl[illegible]ne.

Die Geraden g und [illegible] _____.

Die Ric[illegible]ren[illegible] und h sind [illegible]

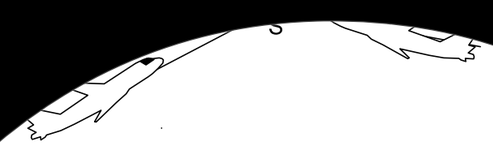
li[illegible]ar _____.

Die G[illegible]n g und h sind _____.

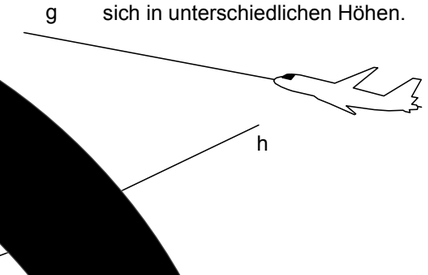
[illegible]ichtungsvektoren von g und h sind

linear _____.

Die Flu[illegible]



Die Flugrouten überschneiden sich in unterschiedlichen Höhen.



Die Ge[illegible] _____

_____.

[illegible]gsvektoren von g und h sind

_____.

Die Geraden [illegible] _____

_____

Die Richtungsvek[illegible] und h sind

[illegible]near _____.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Um rechnerisch zu bestimmen, welche Lagebeziehung bei zwei Geraden vorliegt, gibt es mehrere Wege. Hier soll der Weg beschritten werden, der den geringsten Rechenaufwand [illegible] sich bringt und damit am wenigsten anfällig für Rechenfehler ist.

Schema für die Untersuchung der Lagebeziehung von Geraden

Aufgabe 9.2

Beispiel für Berechnungen zur Lagebeziehung von Geraden

Ergänze bei den folgenden Untersuchungen zur der Lagebeziehung von Geraden fehlende Angaben bzw. Rechnungen.

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

1. Untersuchung der Richtungsvektoren: _____

$\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} - = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow$ $-2r = 2 \Rightarrow r = -1$; $r = -1 \Rightarrow r = -1$; $-3r = 1 \Rightarrow r = -1$

Hier muss man nicht unbedingt ausführlich [illegible], da die lineare [illegible]keit schon [illegible]es Hinsehen

Die Richtungsvektoren _____.

2. Punktprobe: [illegible] h einsetzen

$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow$ $5 + -2r = 1$; $3 + r = 5$; $2 + -3r = -4$ $\Rightarrow$ $r = __$; $r = __$; $r = __$

[illegible]: Kein Widerspruch $\Rightarrow$ g ist _____ h.

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$

1. Wie bei a) erkennt man auch ohne Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Zur Erinnerung: Sowie ein Widerspruch auftaucht, wird nicht weitergerechnet.

2. Punktprobe

$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ $5 + -2r = __$; $3 + r = __$; $2 + -3r = __$ $\Rightarrow$ $-2r = __$; $= 0$ $\Rightarrow$ Widerspruch

3. Ergebnis: Widerspruch _____ k. (kurz: ntk)

c) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und n: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

Durch genaues Hinsehen erkennt man ohne Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear _____ sind.

2. Gleichsetzen g = n ergibt: $\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

LGS: [illegible] $7 + 3s$; [illegible] $2s$; [illegible] $\Rightarrow -3r = 3 \Rightarrow r = ____$

r in II $\Rightarrow$ $__ = 2$ [illegible]

r und s in I $\Rightarrow$ $7 = 7$

Kein Widerspruch $\Rightarrow$ die Geraden _____

3. Schnittpunkt: [illegible] r s in n einsetzen.

[illegible]nittpunkt: S(___ /___ /___)

$\begin{pmatrix}0\\ \\5\end{pmatrix}$

Man, dass so [illegible]naufwand w[illegible]ntsteht; hier [illegible]ie Gerade n ein[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $m: \begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix}$

1. Untersuchung der Richtungsvektoren auf _____

$r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 0{,}5$

$r = 2$

$\Rightarrow$ Wider[illegible]

Widerspruch
[illegible]nt man auch durch
[illegible]aues Hi[illegible]ehen.

2. Gleichsetzen g = n ergibt: $\begin{pmatrix}5\\[illegible]\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix}$

LGS lösen:

I	5	[illegible]	=	1	[illegible]
II	[illegible]	+ r	=	0	[illegible]s
		3r	=	[illegible]	3s
	–2r	+ s	=	4	–
II	r	– 2s	=	–3	
III	3r	+ 3s	=	0	3II–III
IV		__s	=		
		s	=	[illegible]	

s in II $\Rightarrow$ r – 2 = –3 $\Rightarrow$ r = –1

r und s in I $\Rightarrow$ _____ = ___

= ___ Widerspruch

Di[illegible] ___ .

[illegible]büchern gibt es eine große Anzahl von Aufgabe[illegible] von Lagebeziehungen
[illegible]den. Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe der Beispiele [illegible]

Ergänz[illegible]

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru[illegible]larpro[illegible]

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z[illegible]er v[illegible] eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass[illegible] die A[illegible] [illegible]Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch[illegible]nter [illegible]Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond[illegible]ll de[illegible]iell[illegible]harakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücks[illegible]ge[illegible], dass [illegible]größen F un[illegible]s Vektoren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö[illegible]en. Man schrei[illegible]e Formel dann wie folgt:

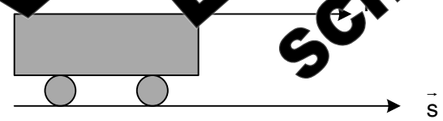
[illegible]rbeit: [illegible] = $\vec{F} \cdot \vec{s}$

Das Produkt der beiden Vek[illegible]en in diesem [illegible]dungsfa[illegible]bt keinen Vektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A[illegible] Richtung hat. A[illegible] dieser Eigens[illegible] bei der Multiplikation zweier Vektoren leite[illegible]n de[illegible]ausdru[illegible] **Skalarprod[illegible]** ab.

2. Eigenschaften [illegible]ukts veran[illegible]licht am B[illegible]der Kraft

Die f[illegible]bil[illegible]n zeigen jew[illegible]einen Wagen, [illegible]sich waagerecht nach rechts in Richtung des [illegible]eges s [illegible]egt u[illegible] mit der K[illegible] F gezogen w[illegible]. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte [illegible]ew[illegible]ng ist i[illegible]n drei Fällen [illegible]dings unters[illegible]lich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

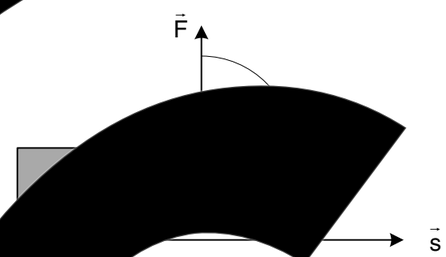
[illegible]1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$



$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

[illegible] $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, wenn $\vec{F} \parallel \vec{s}$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



Mit eine[illegible]echt nach oben zeigt, kann man den W[illegible]e Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh[illegible]hochheben. Damit ist die Kraft für die gew[illegible]ung nicht wirksam und es wird in physikal[illegible]eine Arbeit verrichtet.

Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} =$ ___ [illegible] $\perp \vec{s}$

Dieses Anwendungsbeis[illegible]ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft[illegible]produkts:

Das Skalarprodukt zweier or[illegible]oren ist immer [illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 10
Skalarprodukt

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme
Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung
Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ratio 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau
Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un
Kap ... 12 – L ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen
Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... ... enungen 145
... **tel 23** – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru[illegible]larpro[illegible]

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z[illegible]er v[illegible]n eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass[illegible] die A[illegible] [illegible]Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch[illegible]unter [illegible]Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond[illegible]ll de[illegible]iell[illegible]harakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücks[illegible]ge[illegible], dass [illegible]rößen F un[illegible]s Vektoren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö[illegible]en. Man schrei[illegible]e Formel da[illegible] wie folgt:

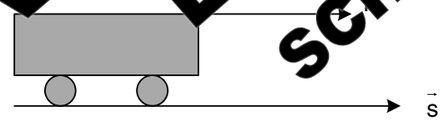
[illegible]rbeit: [illegible] $= \vec{F} \cdot \vec{s}$

Das Produkt der beiden Vek[illegible]en in d[illegible]em [illegible]dungsfa[illegible]bt keinen Vektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A[illegible] Richtung hat. A[illegible] dieser Eigens[illegible] bei der Multiplikation zweier Vektoren leite[illegible]n de[illegible]ausdru[illegible]**Skalarprod[illegible]**ab.

2. Eigenschaften [illegible]ukts verana[illegible]licht am B[illegible]der Kraft

Die f[illegible]bil[illegible]n zeigen jew[illegible]einen Wagen, [illegible]sich waagerecht nach rechts in Richtung des [illegible]eges s [illegible]egt u[illegible] mit der K[illegible] $\vec{F}$ gezogen w[illegible]. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte Bew[illegible]ng ist i[illegible]n drei Fällen [illegible]rdings unters[illegible]lich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

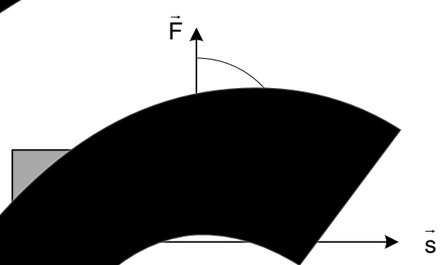
[illegible]1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$



$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

[illegible] $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, wenn $\vec{F} \parallel \vec{s}$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



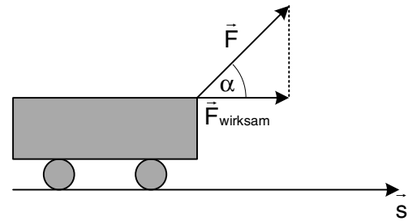
Mit eine[illegible]echt nach oben zeigt, kann man den W[illegible]e Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh[illegible]hochheben. Damit ist die Kraft für die gew[illegible]ung nicht wirksam und es wird in physikall[illegible]eine Arbeit verrichtet.

Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} =$ ___ [illegible] $\perp \vec{s}$

Dieses Anwendungsbeis[illegible]ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft[illegible]rodukts:

Das Skalarprodukt zweier or[illegible]oren ist immer [illegible]

Allgemeiner Fall:
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen beliebigen Winkel ein



Nur der Teil der Kraft, der in die [illegible]ng de[illegible]eges $\vec{s}$ zeigt, also $\vec{F}_{wirksam}$ is[illegible] Bewe[illegible] damit für die verrichtete Arbe[illegible]m und es gilt somit entsprechend z[illegible]m Fall [illegible] $= \vec{s}$

Der wirk[illegible]me Te[illegible] Kra[illegible]rksam hängt vom [illegible] [illegible]n dem Weg [illegible]und der Kraft $\vec{F}$.

Winkelbezi[illegible]hu[illegible]ur α:

$\cos$ [illegible]irksam $\Rightarrow$ [illegible] $\vec{F}_{wirksam} =$ ___

Für die [illegible]nung der A[illegible]eit gilt daher allgemein:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha$$

Aufgabe [illegible]

Erlä[illegible]n S[illegible]ormel $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos$ [illegible]ur Berechnung der Arbeit hergeleitet werden [illegible]ann.

___

___

___

Aufgabe 10.[illegible]

Z[illegible] Fälle 1 und 2 in der Formel für den [illegible]en sind:

[illegible] $\Rightarrow W =$ ___

$\alpha = 90° \Rightarrow W =$ ___

3. Die Definition[illegible]

Ersetzt[illegible]bige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, gilt für das S[illegible]

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$

VORSCHAU LehrerselbstVerlag Schuldruckportal.de

4. Die Koordinatenform des Skalarprodukts

Aufgabe 10.3

In der Ebene sind die Ortsvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [illegible] m Lineal in das Koordinatensystem ne[illegible]an ein.

b) Messen Sie den von den V[illegible] $\vec{a}$ [illegible] eingeschlossenen Winke[illegible] gen[illegible] mit dem Geodreieck:

α = _____

c) Berech[illegible] der [illegible]ag (Länge) de[illegible]

$|\vec{a}| =$ _____

$|\vec{b}| =$ _____

B[illegible]nnen Sie das S[illegible]produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe der berechneten Längen und des [illegible]senen W[illegible]kels:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha =$ _____

e) Berechnen Si[illegible] Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die folgende Summe:

_____

[illegible]ie das Ergebnis mit dem un[illegible]rprodukt.

[illegible] Ergebnisse sind _____

f) Begründen Sie auf Basis des Ergebnisses in e), warum das S[illegible]ch wie folgt berechnet werden kann:

_____

5. Überblick zur Definition des Skalarprodukts

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren mit Hilfe des eingeschloss[illegible] Win[illegible]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren in Koordi[illegible]form

Ebene: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ **Raum:** [illegible] $= \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [illegible] \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_[illegible] + [illegible]_2 + a_3 \cdot b_3$

Aufgabe 10.4

a) Lesen Sie in einer geeigneten [illegible]uelle [illegible] Bew[illegible] die G[illegible]ltig[illegible] der Regel[illegible] im K[illegible]sten oben nach.

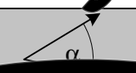
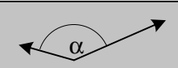
b) Informieren Sie sich m[illegible]e einer geeig[illegible]en Quelle ü[illegible] die Rechen[illegible]se[illegible] für das Skalarprodukt.

6. Folgerungen [illegible]dem [illegible]arpro[illegible]kt

a) Mit Hil[illegible]es Ska[illegible]odu[illegible] kann man [illegible]eprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal sind.

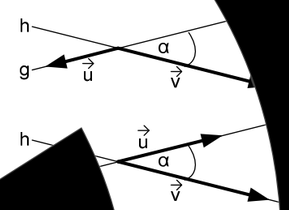
W[illegible] [illegible] ist, dann [illegible]lt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ [illegible] $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

b) [illegible]an die Formel z[illegible]efinition [illegible]arprodukts nach cos α um, so kann man den ein[illegible]chlossenen W[illegible]el zwische[illegible] Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen. Die berechneten Werte für die Winkel liegen im Intervall [0°; 180°]

Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:		**[illegible]der**  **$\alpha > 90°$**	$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$

[illegible]chnittwinkel von Geraden:

[illegible]chnittwinkel von Geraden berechnet man mit [illegible]ektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der [illegible]den Geraden. Beim Schnitt von zwei Geraden g und h [illegible]inkel, von denen einer größer als 90° und einer kleiner als 90° ist. Den kleineren W[illegible] **[illegible]chnittwinkel von Geraden** bezeichnet wird, erhält man, wenn man im Zähler der [illegible]alarprodukts verwendet. Ohne Bet[illegible]erhält man den von den Vektoren [illegible]enen Winkel, und der kann dann [illegible]



[illegible]liefert in beiden Fällen α

[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 10.5

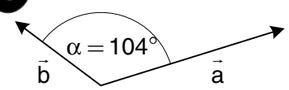
Die folgenden Beispiele zeigen grundlegende Anwendungen und den Umgang mit den Anwendungen des Skalarprodukts. Ergänzen Sie fehlende Anmerkungen und Rechenschritte.

1. Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}$

   Man setzt beide Vektoren in die Formel für die Berechnung des Winkels ein.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}}{\sqrt{__ + __ + __}\cdot\sqrt{__ + __ + __}}$$

$$= \frac{__}{\sqrt{__}} = -0{,}24$$



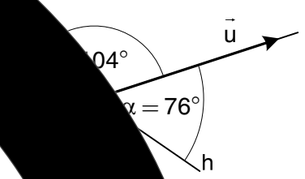
$$\alpha = \cos^{-1}(-0.24) \approx 104°$$

2. Berechnen des Schnittwinkels zwischen den Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

   Man setzt die Richtungsvektoren der Geraden in die Formel ein. (Beachten Sie dabei, dass die Richtungsvektoren mit den Vektoren aus 1. übereinstimmen.)

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{__ + __ + __}\cdot\sqrt{__ + __ + __}}$$

$$= \frac{|__ + __ + __|}{__} = 0{,}24$$



$$\alpha = \cos^{-1}(0{,}24) \approx 76°$$

Erläutern Sie die Wirkung der Betragsstriche im Zähler des Bruchs:

3. Prüfen, ob zwei Vektoren oder zwei Geraden orthogonal sind.

   a) Erläutern Sie folgende Rechnung:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{0}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}(0) = 90°$$

4. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Alle drei Geraden liegen in einer Ebene und haben jeweils einen Schnittpunkt. Geben Sie an, welche der Geraden orthogonal sind. Führen Sie die folgenden Rechnungen und den Text ergänzen:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = ____ + ____ + ____ = 8$$

Die Geraden ___ und ___ sind _____

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = ____ + ____ + ____ = 0$$

Die Geraden ___ und ___ sind _____

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = ____ + ____ + ____ = 3$$

Die Geraden ___ und ___ sind _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a
selbstorganisiert erlernen

Kap

Vektor- oder Kreuzp

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea ... atio 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... igkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... - od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... ... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 11: Vektor- oder Kreuzprodukt

Neben dem Skalarprodukt, bei dem das Ergebnis der Multiplikation ein Skalar [illegible] ibt es [illegible] e weitere Möglichkeit Vektoren miteinander zu multiplizieren. Wie der Name [illegible] produ[illegible]t, ist das Ergebnis dieser Multiplikation ein Vektor.

Eine Anwendung dieser Multiplikation ist in der Physik bei [illegible] chnun[illegible] zkraft, die bei der Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld auftritt, zu find[illegible]

Die Definition des Vektor- oder Kreuzprodukts zwei[illegible]en [illegible]aums $\vec{a} \times \vec{b}$ [illegible]rich: a kreuz b) kann in jedem Tafelwerk nachgeschlagen w[illegible]nd i[illegible]

Definition Vek[illegible]dukt $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Neben der Anwend[illegible] Form[illegible] man a[illegible]eignete Tasc[illegible]enrechner einsetzen, um das Vektorprodukt zu [illegible]ittel[illegible] bestem[illegible]. Zudem die Mo[illegible]ichkeit dies[illegible]rodukt manuell zu berechnen. Hierbei wird ersich[illegible] dieses Pro[illegible]kt [illegible]uch als Kr[illegible]dukt bezeichnet.

Berech[illegible]g [illegible]reu[illegible]dukts ohne [illegible]endung der [illegible]ner oder des Taschenrechners:

[illegible] Sc[illegible]
[illegible]e
k[illegible]ponente
be[illegible]
[illegible]en unten
an[illegible]ngen.

2. Schritt
x-K[illegible]mponente berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1$$

2 3

y- und z-Komponenten werden [illegible]liziert.

3. Schritt
y-Komponente berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1$$

2 3

z- und angehängte x-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

$$\begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ [illegible] \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ [illegible] - (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 9 - 2 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Schritt
z-Ko[illegible]n:

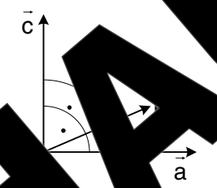
[illegible] 3

[illegible] 2 3

x- und y-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

Eigenschaften des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

1. Der Vektor $\vec{c}$ ist orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



Aufgabe 11.1

Ergänzen und erläutern und Sie die folgende Rechnun[illegible]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = ____ + _____$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = ____ + _____ = 0$$

2. Das [illegible]ktor[illegible]dukt [illegible] ein Recht[illegible]ystem.

Der Vektor an der ersten Position, hier $\vec{a}$, zeigt in Richtung Daumen.

Der Vektor an der zweiten Position, hier $\vec{b}$, zeigt in Richtung Zeigefinger.

$\vec{c}$ zeigt in Richtung Mittelfinger.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Vertauschen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bewirkt Umkehrung von $\vec{c}$.

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

Die Richt[illegible]
ab[illegible]
[illegible]et, und kann [illegible]
[illegible]**nd-Regel** ermittelt werden.

Aufgabe 11.2

Weisen Sie dur[illegible]n, dass gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

_____

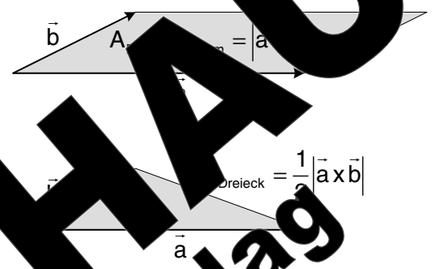
[illegible] =

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Flächen berechnen.

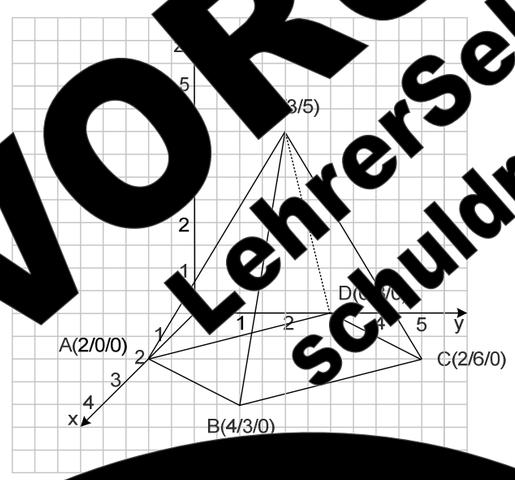
Für die Fläche eines Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:



Für das markierte Dreieck gilt demnach:

Aufgabe 11.3

Zeigen Sie, dass die Grundfläche der gebildeten Pyramide eine Raute ist und ergänzen bzw. erläutern Sie die Berechnung der nachfolgenden drei Berechnungen:



Berechnung 1:

Erläuterung:

Berechnung 2:

Erläuterung:

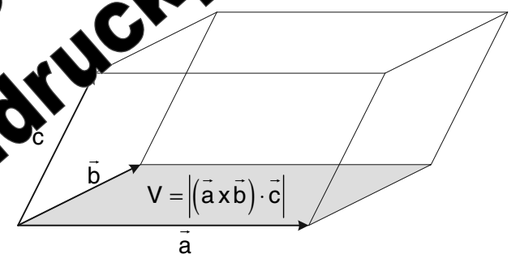
Berechnung 3:

A = 12 + 38 = 50

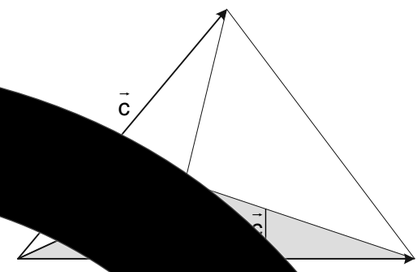
Erläuterung:

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Volumen berechnen

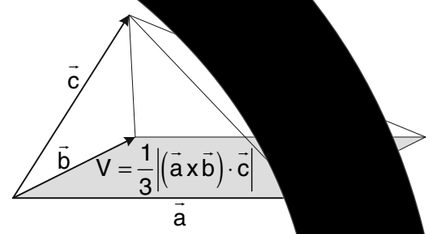
a) Volumen eines Spats



b) Volumen



c) Volumen einer beliebigen Pyramide mit einer beliebigen Grundfläche



Erläuterungen:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge
selbstorganisiert erlernen

Kap

Darstellung von E

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea ... atio 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... igkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... ... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 12: Darstellung von Ebenen

Aufgabe 12.1

Während Geraden im Raum in der linearen Algebra nur mit Hilfe d[illegible]ergleichung angegeben werden, kann man Ebenen mit drei verschiedenen Darstellungsform[illegible]n. Erarbeiten Sie sich mit Hilfe der folgenden Informationen und Aufgabenstellu[illegible] die Eb[illegible]stellung im Raum.

1. Ebenen in Parameterdarstellung

Sie wissen bereits, dass eine Gerade durch zwei P[illegible] und [illegible]it Hilfe der Parametergleichungen g: $\vec{x} = \vec{p} + s\overrightarrow{PQ}$ oder g: $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}$ ange[illegible]wird. [illegible]man aus der folgenden Abbildung erkennt, kann durch Hinzufügen eines dritten P[illegible]es R und dar[illegible]urch Hinzufügen eines zweiten Vektors von P nach R eine Ebene festgelegt w[illegible]n (vgl. [illegible]itel 7 Lineare Unabhängigkeit). Durch Linearkombination der beiden [illegible]ren [illegible]d $\vec{v}$ [illegible]steht entsprechend zur Ge[illegible]angleichung eine Ebenengleichung in Param[illegible]darstellung:

E: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$

Bezeichnungen:

$\vec{x}$: O[illegible]ktor zu einem beliebigen Punkt [illegible]der Ebene

$\vec{p}$: Stützvektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt P

$\vec{u}$: Spannvektor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$

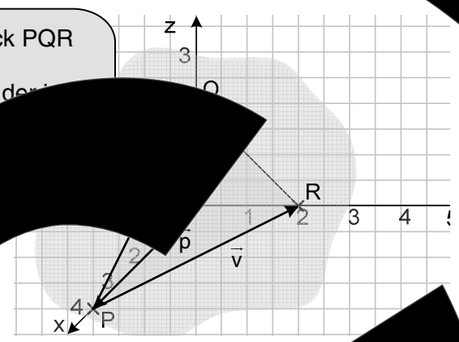
$\vec{v}$: Spannvektor $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$

Man spricht bei Ebenen nicht mehr von einem Richtungsvektor, sondern von zwei Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, welche die Ebene aufspannen.

Um die [illegible]arzustellen, werden Ebenen, wie im folgenden [illegible]atensystem dargestellt.

[illegible]geben ist eine Ebene, welche die folgenden Pu[illegible]/0), Q(0/2/0) und R(0/0/2)

Das Dreieck PQR ist nur ein Ausschnitt der [illegible] unendlic[illegible] aus[illegible] E[illegible]



[illegible]$\overrightarrow{Q} + s\overrightarrow{PR}$

E: [illegible] $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

oder mit g[illegible]annvektoren

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Ebenen in Normalendarstellung

Für die Normalendarstellung der Ebene benötigt man einen Stützvektor $\vec{p}$ und [illegible] belie[illegible]n Repräsentanten des Vektors, der orthogonal zur Ebene E verläuft. Di[illegible] Vektor [illegible] **Normalenvektor $\vec{n}$** der Ebene bezeichnet. Wie man den folgenden A[illegible]n entn[illegible]ren kann, legen der Stützvektor die Position der Ebene und der Normalenvektor [illegible] La[illegible] Ebene im Raum fest.

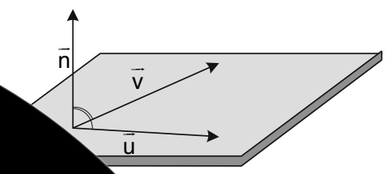
Der Stützvektor $\vec{p}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen bekannten Punktes auf E.

Die Lage der [illegible] wird [illegible]n den Normalenvektor best[illegible] Ände[illegible] Normalenvektor[illegible] ine[illegible] R[illegible]ung, verände[illegible]h auch die [illegible]ge der Ebene.

Begr[illegible]n Sie, warum [illegible]n den Norma[illegible]vektor einer Ebene mit Hilfe des Vektorprodukts bestimmen kann, in dem Sie den fo[illegible]en den Satz vervollständigen:

Das Vektorprodukt aus zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

erzeugt einen Vekto[illegible] zu den beid[illegible] sen[illegible]



[illegible]gespannt wird. Damit gilt fur [illegible]ektor $\vec{n}$ der Ebene:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

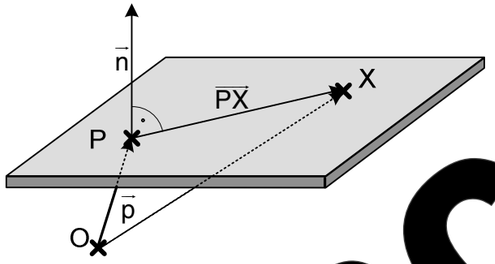
[illegible]nvektoren [illegible]genau [illegible]vektoren

Für di[illegible] gilt damit:

$$\begin{pmatrix} [illegible] \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Anhand der folgenden Abbildung wird nun die Überlegung, die der Ebene darstellen in Normalenform zugrunde liegt, erläutert:



Bezeichnung

$\vec{x}$: Ortsvektor zu einem beliebigen bekannten Punkt auf der Ebene

$\vec{p}$: Vektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt

$\vec{n}$: beliebiger Repräsentant des Normalenvektors der Ebene E

$\overrightarrow{PX}$: Vektor vom Punkt $P(p_1 / p_2 / p_3)$ zum Punkt $X(x_1 / x_2 / x_3)$

Die Ebenengleichung ergibt sich aus der Zusammenfassung der drei Überlegungen:

1. Der Vektor $\vec{n}$ und der Vektor $\overrightarrow{PX}$ sind orthogonal.

2. Bei orthogonalen Vektoren ist das Skalarprodukt Null: $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$

3. Für den Vektor $\overrightarrow{PX}$ gilt: $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$

$$E_N: \left(\vec{x} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

Für das Beispiel 1 gilt damit:

E_N : [illegible] E_N : $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

3. Darstellung einer Ebene in Koordinatenform

Multpliziert man das Skalarprodukt der Ebene aus der Normalendarstellung aus, erhält man die Ebene in Koordinatendarstellung.

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow n_1x + n_2y + n_3z - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0$$

$$\Rightarrow n_1x + n_2y + n_3z = d$$

Wichtig:
Die Vorfaktoren von x, y und z entsprechen den Komponenten des Normalenvektors.

Da man die Zahlenwerte von n_i und p kennt, ergibt diese Summe einen Zahlenwert, den man mit d bezeichnet.

In Tafelwerken findet man die Koordinatendarstellung in der Regel in der folgenden Form:

$$E_K: ax + by + cz = d \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren der Normalendarstellung, dass sich die Ebene aus Beispiel 1, wie unten angegeben, darstellen lässt:

$$\left[\begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad _____ + _____ + _____ + _____) = 0$$

E_K : x + [illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 12.2

Eine Ebene F ist durch die Punkte A(–4 / 1 / 3), B(1 / 0,5 / 1) und C(2 / –3 / [illegible]) gegeben.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich bei der Wahl von Punkt A als Stützpunkt für die Ebene die folgende Ebenengleichung in Parameterdarstellung ergibt: $E_P: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Ermitteln Sie die Normalendarstellung der Ebene F. (Zur Kontrolle: $E_N: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ 34 \end{pmatrix} = 0$)

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene F in Koordinatendarstellung und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit der Koordinatendarstellung der Ebene E im Beispiel 1 von Aufgabe 12.1 übereinstimmt.

Aufgabe 12.3

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Aufgaben 12.1 und 12.2 und ergänzen Sie:

- Die Parameterdarstellungen der Ebenen E und F weisen _____ Gemeinsamkeiten auf und man kann _____ erkennen, dass es sich um die gleichen Ebenen handelt.
- Die _____ Normalenvektoren sind _____.

  Die Koordinatendarstellung der Ebenen E und F ist _____.
- Wenn man überprüft, ob zwei Ebenen identisch sind, gilt:

  Die _____ ist dafür ungeeignet, da ein und [illegible] Ebene verschieden kann.

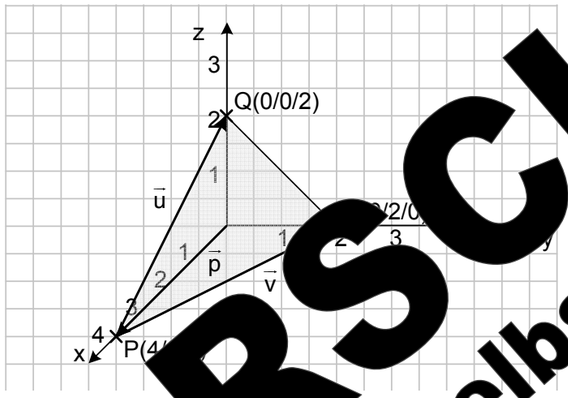
  _____darstellung ist am besten geeignet, da gleiche Parameter [illegible] tische Gleichungen haben.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 12.4

Zusammenhang der Koordinatendarstellung einer Ebene und ihrer Achs[illegible]schn[illegible]

Die Ebene aus dem Einstiegsbeispiel in Aufgabe 12.1 soll hier ern[illegible] [illegible]stellu[illegible] Zusammenhänge herangezogen werden.



[illegible]dina[illegible]leichung in der einfachsten [illegible]ung:

E_K: $x + 2[illegible] + 2z = 4$

Umfor[illegible]g der K[illegible]dinatengleichung:

W[illegible] ma[illegible]telte Koordi[illegible]tendarstellung [illegible] Ebene E so umformt, dass auf der rechten Seite de[illegible]eichne[illegible]eichens e[illegible]tent, erhält[illegible] die Gleichung:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Nennern der umgeformten Koordinatendarstellung der Ebene E sowie den Koordinaten der Achsenabschnitte, indem Sie die folgenden Lücken vervollständigen:

[illegible] $z = 1$

[illegible]abschnitt auf der [illegible] Achsenabschnitt auf der-
___-Achse P(4/0/0) Achsen[illegible] ___-Achse [illegible] ___-Achse Q(0/0/2)

Stellt man eine Ebene in der Koordinatendarstellung so dar, dass [illegible] Gleichheitszeichen eine 1 steht und im [illegible] links vom Gleichheitszeichen [illegible] ohne Vorfaktoren erscheinen, [illegible] _____ der Ebe[illegible] Nenner bestimmen.

D[illegible] [illegible]oordinaten[illegible]ellung einer Ebene wird auch als **Achsen[illegible]form** bezeichnet.

4. Eine Ebene – Drei verschiede Darstellungen – Zusammenhänge am Beisp[illegible]l aus A[illegible]be 12.1

Die Ebene E enthält die Punkte:

P(4/0/0) Q(0/2/0) R(0/0/2)

Ortsvektor von P als Stützvektor wählen

Spannvek[illegible] $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ und [illegible]den

Zu ein[illegible]ene gibt es je n[illegible]hl der drei P[illegible]kte unendlich[illegible]iele [illegible]nterschiedli[illegible]ata-[illegible]eterdarstell[illegible]en.

Span[illegible]ktoren darf ma[illegible]kürzen.

Parameterdarstellung

[illegible] $\vec{x} = [illegible] + r\overrightarrow{PQ} + [illegible]\overrightarrow{PR}$

$E_P: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$

Der Stützvektor von E ist der bekannte Punkt P auf der Ebene

Das Vektorprodukt [illegible] ergibt den Normalenvektor

[illegible]ndarstellung

$E: \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$

Normalenvektoren darf man kürzen.

Gleiche Ebenen haben gleiche gekürzte Normalenvektoren.

[illegible]larprodukt

$E_K: x + 2y + [illegible]$

Koeffizienten bilden den Norma[illegible]

Gleiche Ebenen haben in Koordina[illegible]tendarstellung iden[illegible]he Gleichungen.

[illegible]natendarstellung

$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$

[illegible]er liefern die Achsenabschnitte der Ebe[illegible]

Achtung
Im Zä[illegible]
und[illegible]
Z[illegible]

[illegible]s ein +
[illegible] auf der
[illegible]eite eine 1.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 12.5

Vertiefendes Beispiel

Die Punkte P(1/1/0), Q(2/0/1) und R(0/1/2) liegen in einer Ebene E.

a) Ermitteln Sie eine Parameter-, eine Normalen- und eine Koordinatendarstellung der Ebene.
(Kontrollergebnis: E: 2x + 3y + z = 5)

b) Erläutern Sie, warum es sinnvoll ist, ein Kontrollergebnis in der Koordinatendarstellung oder in der Achsenabschnittsform anzugeben.

c) Zeichnen Sie die Ebene anhand ihrer Achsenabschnitte so, dass ein räumlicher Eindruck von der Lage der Ebene entsteht.

5. Kurze Zusammenfassung der Ergebnisse zur Darstellung von Ebenen

Parameterdarstellung: $E_P: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$

Normalendarstellung: $E_N: \left(\vec{x} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Koordinatendarstellung: mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Achsenabschnittsform:

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

Achsenabschnitt x – Achse:

Achsenabschnitt y – Achse: Y(0

Achsenabschnitt z – Achse: Z(0/0/

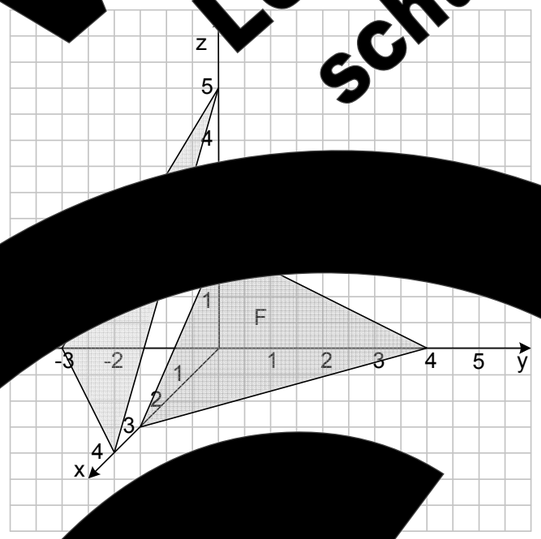
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 12.6

Zeichnen Sie die Ebene E: 3x + 2y + 6z = 6 mit Hilfe der Achsenabschnitte a[illegible]ägbi[illegible]

[illegible]gabe 12.7

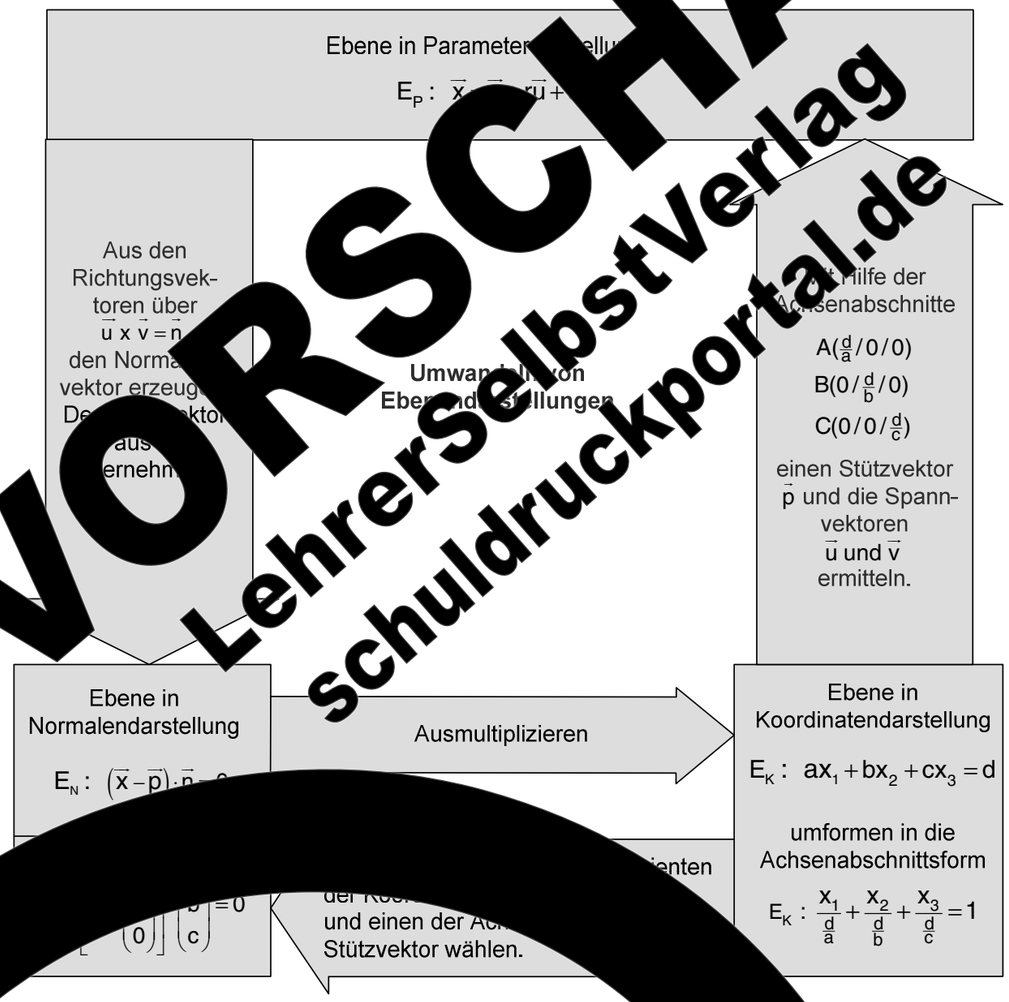
Er[illegible]eln Si[illegible] Gleichung[illegible] Ebenen [illegible] in Koordinatenform mit dem geringst möglichen Rec[illegible]aufwand.



[illegible]ungen:

6. Überblick Umwandeln von Ebenen

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, eine Ebene von einer Darstellung in ei[illegible]dere umzuwandeln. Die in der folgenden Abbildung dargestellten Verfahren [illegible]ben in [illegible]chtu[illegible]elesen eine begrenzte Auswahl an Varianten an, mit der man jede Darstellu[illegible] Ebene [illegible]andere umwandeln kann.



Ergä[illegible]ngen:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 23
Besondere Ebenen

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ratio 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 13 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... ... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

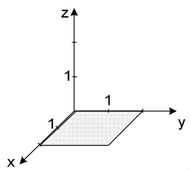
Kapitel 13: Besondere Ebenen

Aufgabe 13.1

In den folgenden Abbildungen sind die Koordinatenebenen abgebi[illegible]eln Si[illegible] jeder Koordinatenebene eine möglichst einfache Gleichung in Parameter[illegible]teln[illegible]rmalendarstellung und Koordinatendarstellung.

x,y-Ebene

Parameterdars[illegible]g:

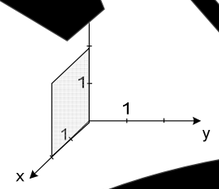


N[illegible]lung:

[illegible]tendarstellung:

x[illegible]be[illegible]

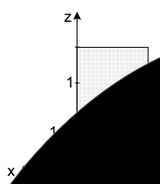
[illegible]rameterdarstellung:



Normalendarstellung:

[illegible]ene

Parameterdarstellung:



[illegible]darstellung:

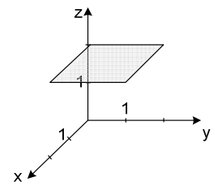
Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.2

In den folgenden Abbildungen sind zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen a[illegible]det. E[illegible]teln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einfache Gleichung in P[illegible]terdars[illegible] Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.

Zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen

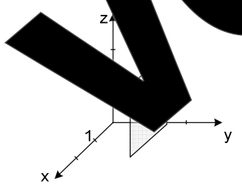
Parameterdarstellung:



Normalendars[illegible]llung:

[illegible]tenda[illegible]g:

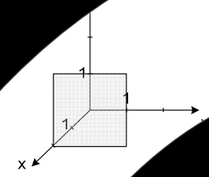
[illegible]arameterdar[illegible]ung:



Nor[illegible]lendarst[illegible]ung:

Koordinatendarstellung:

Parameterdarstellung:



Normalendarstellung:

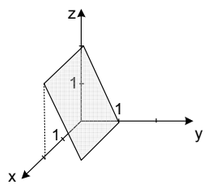
[illegible]rstellung:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 13.3

In den folgenden Abbildungen sind Ebenen dargestellt, die zu jeweils einer K[illegible]atena[illegible]e parallel sind. Ermitteln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einf[illegible] Gleich[illegible] Parameterdarstellung, Normalendarstellung und Koordinatendarste[illegible]

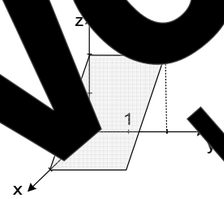
Parameterdarstellung:



Normalendars[illegible]ng:

Koordinatenda[illegible]llung:

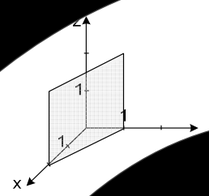
Parameterd[illegible]stellung:



Normalendar[illegible]ung:

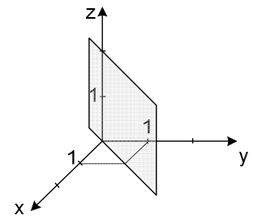
Koordinatendarstellung:

Parameterda[illegible]



Normalendarstellung:

[illegible]tendarstellung:



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstell[illegible]

Aufgabe 13.4

a) Formulieren Sie eine R[illegible]che be[illegible], wie m[illegible] der Koordina[illegible]stellung einer Ebene erkennen kann, das[illegible] zu e[illegible]r der [illegible]inatenet[illegible]arallel verl[illegible]

Formu[illegible]en Sie eine Regel, w[illegible] beschreib[illegible] man an der Koordinatendarstellung einer Ebene [illegible]kann, dass sie zu [illegible]er der Koordin[illegible]achsen parallel verläuft.

c) Formul[illegible]en erkennen kann, dass die Ebene durch d[illegible]

[illegible]lung:

[illegible]ndarstellung:

Koordinatendarstellung:

Ergänze[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge ra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Lagebeziehungen be

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V 65

Eben ... un

Kap 12 – 69
Kap 3 – Be 81
Kapitel 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
..... 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa bra selbstorganisiert erlernen (L 031-266)
S

rbehalten. ghts reserved.
, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 14: Lagebeziehungen bei Ebenen

In der linearen Algebra gibt es für die Untersuchung der Lagebeziehungen zw[illegible]n Eb[illegible]n im Raum und Punkten sowie Geraden und anderen Ebenen eine Vielzahl vo[illegible]lichkei[illegible]edoch völlig ausreichend eine Methode zu beherrschen. Daher wird in den folge[illegible]chnitte[illegible] die verschiedenen Aufgabentypen jeweils nur eine Variante vorgeschlag[illegible]

1. Lagebeziehung Ebene E und Punkt R

Prinzipielle Vorgehensweise:

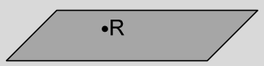
Die Koordinaten bzw. Komponenten d[illegible]tsvektors z[illegible]unkt R, als[illegible] $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ werden unabhängig

von der Darstellung der Eben[illegible]er E[illegible]ngle[illegible]ng für d[illegible]onenten x, [illegible] z eingesetzt.

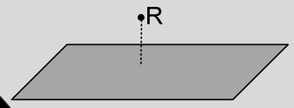
Ebene in Parameter[illegible]ellung	Ebene[illegible] Normale[illegible]stellung	Ebenen in [illegible]ordinatendarstellung
$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ [illegible]e Pa[illegible]s und t mit Hilfe eines [illegible]S berechnen. [illegible] Berechnung des [illegible]S ist oft [illegible]ändig. Da[illegible] ist es günstiger, d[illegible] Ebene in die Koo[illegible]inatendars[illegible]ung umzurechnen.	Ebene in [illegible]ordinatenda[illegible]ung [illegible]nformen [illegible]nn wie rechts ne[illegible] beschrie[illegible].	Komponenten von r für x, y und z einsetzen. $ar_1 + br_2 + cr_3 = d$ Linke Seite der Gleichung berechnen.

Interpretation der Ergebnisse

Rechnung ist wi[illegible] ⇒ R liegt in E



[illegible]echung liefert Widerspruch ⇒ [illegible]

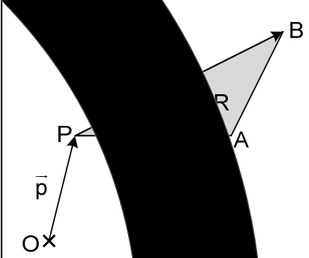


Zusatzinfo:

Bei Frag[illegible]em Dreieck PAB liegt, (s. A[illegible]meterdarstellung g[illegible]mittelt zu können.

[illegible]B, wenn für s und t [illegible] die folgenden drei Bedingungen gelten:

[illegible] $t < 1$ und
[illegible] $s < 1$ und
[illegible] $t + s < 1$



Aufgabe 14.1

Zeigen Sie, dass der Punkt R(6/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ liegt. E[illegible]zen[illegible] die beiden Rechnungen und beurteilen Sie, bei welchem Weg der R[illegible]chenau[illegible]nd[illegible]ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten und das [illegible]S lösen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS erstell[illegible]

I [illegible] $t =$ [illegible]
II [illegible]
[illegible] $-s \quad t = -1$ [illegible]
IV $-2t = 2$
$t = -1$

t in III: $-s + 1 = -1$

[illegible]
$-5 = -5$

[illegible]as LGS widerspruchsfrei gelöst werden kann, [illegible]egt R auf E.

Beurteilu[illegible]

[illegible]

[illegible]

Ebe[illegible]ichung in K[illegible]ordinatendarstellung u[illegible]rm[illegible]

[illegible]malenve[illegible]or[illegible]estimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

E: _____

$E: -2x - 3y + 7z = 2$

Koordinaten von R einsetzen:

$-12 + 0 + 14 = 2$
$2 = 2$

[illegible]uch ⇒ R liegt in E

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 14.2

Prüfen Sie, ob der Punkt R(1/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\[illegible]\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\-1\end{pmatrix}$ liegt. Bearbeiten Sie beide Wege mit Hilfe des vorherigen Beispiels und geben Sie mit Begründung an, welcher Rechenweg einfacher für Sie ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten, das LGS lösen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\[illegible]\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\[illegible]\\0\end{pmatrix}$$

LGS e[illegible]

I [illegible] $= 0 \quad \Rightarrow t = 0$

[illegible] s [illegible] $= 1$

$-s$ [illegible] $= [illegible] \quad \Rightarrow s = 1$

s,t in II: $-1 \neq 1$

Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E

Weg 2

E[illegible]ngleichung in Koordinatendarstellung umwandeln.

Normalenvektor bestimmen.

$$\begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$E: \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

E: _____

$E: x + y - z = 1$

R in E einsetzen: $1 + 0 - 2 = 1$
$-1 \neq 1$

Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E

[illegible]ung:

_____

_____

_____

[illegible] Übungen: _____

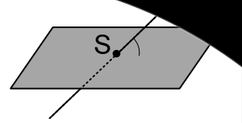
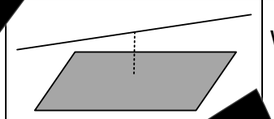
_____

2. Lagebeziehung Ebene E und Gerade g

Prinzipielle Vorgehensweise:

Die Komponenten x, y und z des Vektors $\vec{x}$ der Ebenengleichung E: $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$ [illegible] durch die entsprechenden Komponenten der Geradengleichung g: $\vec{x} = \vec{q} + r\vec{w}$ e[illegible]zt.

Gegeben: E: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ und [illegible] $\begin{pmatrix}x\\[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[illegible]\\q_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}[illegible]\\w_2\\[illegible]\end{pmatrix}$ bzw. $x = q_1 + rw_1$, $y = q_2 + rw_2$, $z = q_3 + rw_3$

Ebene in Parameterdarstellung	Ebene in Normalen-darstellung	Ebenen in Koordinatendarstellung
Die Ebenengleichung mit der Geradengleichung gleichsetzen und das LGS nach r, s und t auflösen. $\vec{q} + r\vec{w} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$ oder $\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\[illegible]\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\[illegible]\end{pmatrix}$ [illegible] Berechnung des LGS mit [illegible] ist im Allgemeinen aufwe[illegible] daher besser mit der Koordinatendarstellung arbeiten. Wenn geprüft werden soll, ob der Durchstoßpunkt in einem bestimmten Dreieck liegt müssen s und t bestimmt werden. (Vgl. Zusatzin[illegible] Lagebeziehu[illegible]	[illegible] in Koordinatendar-[illegible]ung [illegible]formen [illegible] dann wie [illegible] nebenan [illegible] beschrieben.	Komponenten vom Vektor $\vec{x}$ der Geradengleichung [illegible] $q_1 + rw_1$, $q_2 + rw_2$ und $q_3 + rw_3$ für x, y und z in der Ebenengleichung $ax + by + cz = d$ einsetzen und nach r auflösen: $a(q_1 + rw_1) + b(q_2 + rw_2) + c(q_3 + rw_3) = d$
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible] für r, s und t. [illegible] von r in die [illegible]engleichung g liefert die [illegible]ordinaten des Schnittpunktes bzw. Durchstoßpunktes $S(s_1/s_2/s_3)$.		[illegible] der Gleichung liefert [illegible]ösung für r. Einsetzen von [illegible]ngleichung g liefert die [illegible] Schnittpunktes bzw. Durc[illegible] $S(s_1/s_2/s_3)$.
Das LGS ist unter[illegible] Lösungsmen[illegible]		Gleichun[illegible] allgemeing[illegible] der Form 0=0; Lösung[illegible] die Gerade.
Wid[illegible] [illegible]st parallel zu [illegible] g II E		Widerspruch [illegible]lel zu E

VORSCHAU
LehrerSelbstverlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 14.3

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuch[illegible] die Lag[illegible]ng von E zu den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und [illegible] $\begin{pmatrix} 2 \\ [illegible] \\ -2 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, indem Sie die folgenden Rechnungen vervollständigen. B[illegible]ünde[illegible] zunäch[illegible], warum [illegible]voll ist, hier mit der Koordinatendarstellung der Ebene zu a[illegible] und ze[illegible] Sie durch R[illegible]chnung, dass sich für die Koordinatendarstellung die Gleichung: [illegible]x + 4y + 6z = [illegible]gibt.

Begründung:

_____

_____

Berechnung de[illegible]arstellung von E:

Lagebeziehung von E und g:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: [illegible]
z =

Eins[illegible] ___ – ___) + ___(___ + ___) = 9

_____ = 9

9 = 9

[illegible]gebnis hat die Form 0 = 0, ist also allgem[illegible] ⇒ g liegt [illegible]

Lagebeziehung E und h:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: x = _____
y = _____
z = _____

Einsetzen in E ergibt: ___ + ___ + ___(___ – ___) + ___(___ [illegible]) = 9

_____

_____ = ___

[illegible] = ___

Widerspruch ⇒ g ist [illegible] zu E

Lagebezi[illegible]ng E [illegible]i

Aus [illegible] = [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: [illegible] = _____
y = _____
z = _____

Einse[illegible]m E ergibt: [illegible] + ___ + [illegible] – ___) + ___(___ + ___) = 9

_____ = 9

_____ =

[illegible] = ____

[illegible] = 4

[illegible] eine Lösung gibt, existiert ein Schnittpunkt.
[illegible]tpunkt berechnen durch Einsetzen von r in die Gerade [illegible]

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + ___\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ___ \\ [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ [illegible] \end{pmatrix}$

Die G[illegible] [illegible] E im Punkt S(__ / __/ __).

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

3. Spurpunkte von Geraden

Def.: Spurpunkte S sind die Durchstoßpunkte der Gerade g durch die Koordinatenebenen

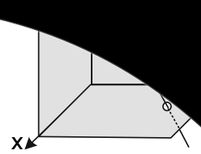
Aufgabe 14.4

Berechnen Sie die Spurpunkte für die Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} [illegible] \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} [illegible] - r \\ y = 6 - 2r \\ z = -1 + r \end{array}$

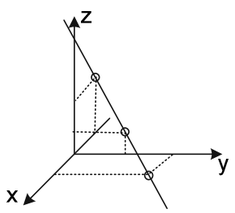
Ermittelt man die Spurpunkte mit [illegible]r Koor[illegible]endarstellu[illegible] der Koordinatenebenen wird die [illegible]chnung beso[illegible] einfach, da man die einzelnen Komponente[illegible]r Gera[illegible]ur Null setzen muss.

Spurpunkt x,y-Ebene	Spurpunkt x,z-Ebene	Spurpunkt y,z-Ebene
Koordinatengl[illegible]ng: [illegible]0	[illegible]ordinate[illegible]ng: y = 0	Koordinatengleichung: x = 0
z-Koordinate Nu[illegible]	y-Koordi[illegible]e Null setzen:	x-Koordinate Null setzen:
$-1 + [illegible] = 0$ $[illegible] = 1$	$6 - 2r = 0$ $r = 3$	$2 - r = 0$ $r = 2$
[illegible]n g[illegible]tz[illegible]	r in g ein[illegible]tzen	r in g einsetzen
$\vec{s}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{s}_{xz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \quad \vec{s}_{yz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Spurpunkt: $S_{xy}(1/4/0)$	Spurpunkt: $S_{xz}(-1/0/2)$	Spurpunkt: $S_{yz}(0/2/1)$

[illegible]r Spurpunkte kann man [illegible]umliche Lage von Geraden [illegible]besonders anschaulich darstellen:



[illegible]der



Übungen

Ü14.1 Berechnen Sie die Spurpunkte der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und [illegible]eichnen [illegible]die G[illegible]de so, dass ein räumlicher Eindruck entsteht.

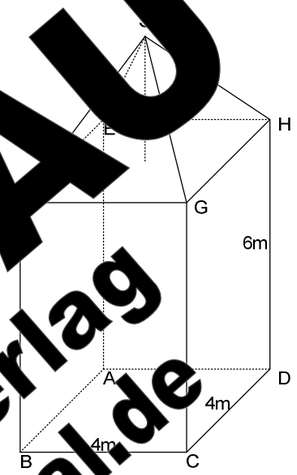
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ü14.2 Auf einen Turm, dessen Dach aus einer quadratischen Pyramide besteht (s. Abbildung), treffen Sonnenstrahlen auf.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Eckpunkte so, dass der Punkt A im Ursprung des Koordinatensystems steht.

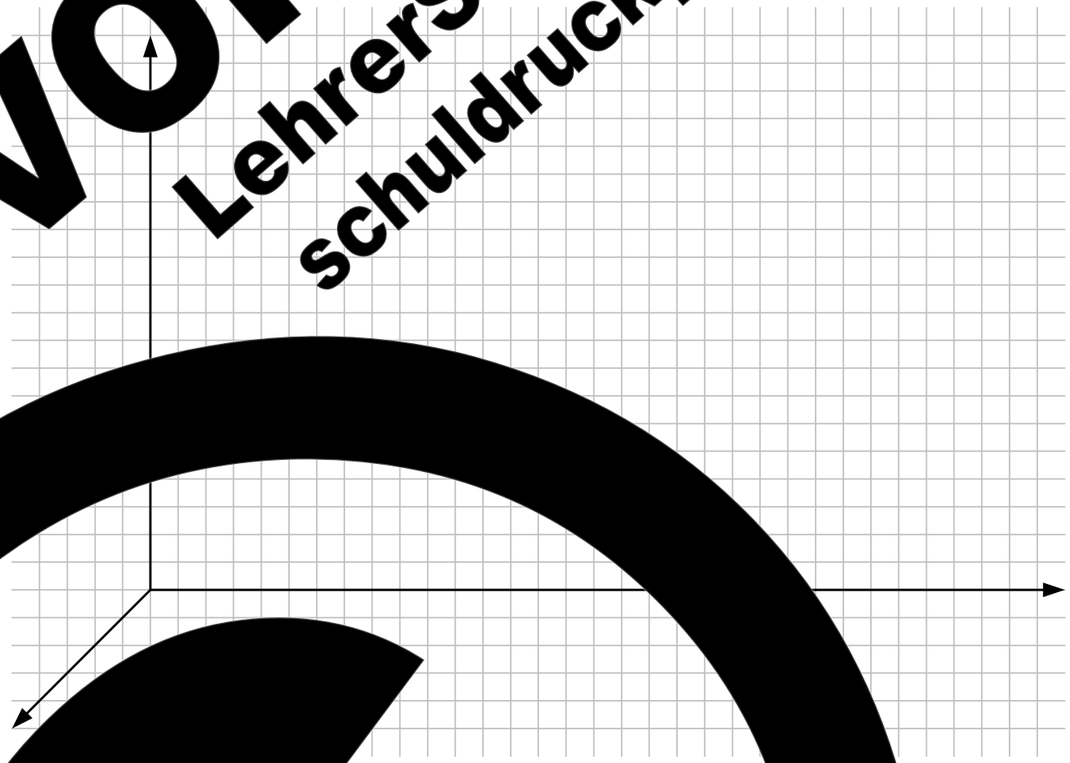
b) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Turms.
(1m ≙ 2 Kästchen)

c) Die Richtung der Sonnenstrahlen wird d[illegible] der [illegible]
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben. Auf der [illegible] (x,y-[illegible]e)
entsteht dadurch ein Schatten. [illegible]ittel[illegible] Eckpunkte der Schattenfläche [illegible]n Bod[illegible]kieren Sie d[illegible] gesamte Schatten[illegible]he.



A(/ /) B([illegible]) C([illegible]) D(/ /)

E(/ /) F([illegible]) G(/ /) H(/ /) S(/ /)



[illegible]hnungen auf der Folgeseite:

Ergänzen[illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

4. Lagebeziehungen bei Ebenen

Bei der Bestimmung der Lagebeziehung von zwei Ebenen sollte man aufgr[illegible]es Rechenaufwandes darauf achten, dass entweder eine Ebene in K[illegible]tenda[illegible] oder beide Ebenen in Koordinatendarstellung vorliegen. Damit kann man die [illegible]enste[illegible]g auf die beiden im Beispiel beschriebenen Fälle reduzieren.

Zwei Ebenen schneiden sich → Es exis[illegible]ine [illegible]nittgerade g

Ebene 1 in Koord[illegible]rstellu[illegible]
Ebene 2 in Par[illegible]eterd[illegible]tellu[illegible]

E_1: [illegible]y [illegible]36

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\[illegible]\end{pmatrix} + [illegible]\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\[illegible]\end{pmatrix}$$

$x = 3r + [illegible]s$

[illegible]$_2$ folgt: $y = [illegible]2r$

$z = 3 - r - s$

Einsetzen der Komponenten x,y,z in E_1 ergibt:

$4(3r + 3s) + 3(2r) + 6(3 - r - s) = 36$

nach r oder [illegible]

s[illegible]

[illegible]che E_2 einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9-6r\\0\\-3+2r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+3r+9-6r\\0+2r\\3-r-3+2r\end{pmatrix}$$

Zusammenfa[illegible]
Summa[illegible]
Schni[illegible]

$$\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\r\end{pmatrix} \Rightarrow g: [illegible] = \begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Koordinatendarstellung

Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren

E_1: I $x + 2y + 2z = 6$
E_2: II $x - y + z = 3$ | I-II
III $3y + z = 3$

Da das LGS unterbestimmt ist, darf man eine Variable frei wählen. Hier z.B.: $z = 3t$

einsetzen z in III liefert y $y = 1 - t$

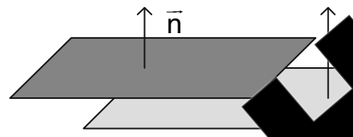
[illegible]nd z in II liefert x $x = 4 - 4t$

Die Ausdru[illegible]z werden als Vektor dargestellt un[illegible]t, dass sich die Parameterdarste[illegible]nittgeraden g ergibt.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-4t\\1-t\\3t\end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Zwei Ebenen sind parallel zueinander → Es ergibt sich ein Wid[illegible]pruch

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle Verfahren er[illegible]ugen e[illegible] Wide[illegible]uch bei der Lösung der entsprechenden Gleichu[illegible]



Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Parameterdarstellung

E_1: $2x + y + z = 1$

$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\[illegible]\end{pmatrix}$$

$x = -2[illegible]$

aus E_2 folgt: [illegible]$2r + s$

[illegible]$- s$

Einsetzen [illegible] Kompo[illegible]ten x,y,z in E_1 ergi[illegible]t:

$2(-2[illegible]2s) [illegible] s + [illegible] 2r - 5s = 1$

$-4[illegible]s + 2[illegible]2 + 2r - [illegible] = 1$

[illegible]2 = 1

[illegible]ne 1 i[illegible]ordinatendar[illegible]ung
Ebene 2 in [illegible]rdinatendar[illegible]tellung

Durch [illegible]ditionsv[illegible]fahren x, y oder z [illegible]tieren

E_1: I $x - [illegible] + 2z = 6$
E_2: II $2x - y + 4z = 8$ [illegible]I-II
[illegible] 0 [illegible]

Zwei Ebenen sind ide[illegible]ch → Es ergibt sich eine allgemeingültige Lösung

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle drei Verfahren erzeugen allgemeingültige Lösung[illegible]nen selbst sind dann Lösungsmenge.

Ebene [illegible]
Eb[illegible]

[illegible] = 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$$

$x = [illegible]$

aus E_2 folgt: [illegible]

Einse[illegible]nten x,y [illegible] E_1 ergibt:

$2(-[illegible] s + 1 + 2r - 5s = 1$

[illegible]$2r + s + 1 + 2r - 5s = 1$

$1 = 1$

[illegible] Koordinatendarstellung
[illegible]rdinatendarstellung

D[illegible]en x, y oder z eliminieren

E_1: I x [illegible]
E_2: II $2x - 4$[illegible]I-II
[illegible] 0 [illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Beispiel: Schnitt zweier Ebenen, die zu einer Koordinatenachse parallel verla

Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x + y = 7$
E_2: $4x - y = 5$

Zur Er
Wenn d r-K nente in der benengl h ist die ne zu nse parallel.

Additionsverfahren: E_2: II $4x - y = 12$ | I

$6x$

x

x in I $8 - y =$

3

z frei wählbar: $z = r$

Da die K ponente in keine Gleichung vorkommt, ist das LGS unabhängig von der Wahl für z lösbar. Daher kann man z frei wählen.

ungs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 3+0 \\ 0+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Schnittgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da die beiden Ebenen parallel zur z-Achse verlaufen, ist auch die Schnittgerade parallel zur z-Achse

Ergä

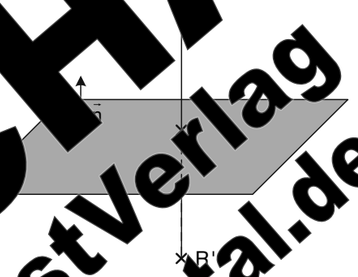
5. Orthogonale Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Aufgabe 14.3

Erarbeiten Sie sich das hier dargestellte Verfahren zur Spiegelung ein ktes R bene E (es gibt auch andere Verfahren, die hier nicht behandelt werden) inde m Beispiel dargestellten Rechenschritte erläutern.

Gegeben sind der Punkt R(4 / –3 / 6) und die
Ebene E: $x - 2y + z = 4$

Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes R'.



Schritt 1:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x}$ +

$\vec{x} =$ $+ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 2:

$4 + t - 2(-3 - 2t) + 6 + t = 4$

$4 + t + 6 + 4t + 6 + t$

$\vec{r} + 2t\vec{n}$

$\vec{r'} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$

Ergebni

Erg ungen:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 15
Abstände

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ratio 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und i Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od reuzpr kt 65

Eben ... un

Kap 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
... ... ienungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... 031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 15: Abstände

1. Abstandsberechnungen Punkt–Ebene

Aufgabe 15.1

Herleitung der Formel zur Abstandsberechnung Punkt–Ebene

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten den Abstand eines Punktes von einer Ebene E zu berechnen. Die Betrachtungen sollen hier auf die Herleitung der Abstandsformel, die sich in den Tafelwerken befindet beschränkt werden. Verdeutlichen Sie die Herleitung dieser Formel, indem Sie die geforderten Begründungen und Erläuterungen formulieren.

Da E bekannt ist, kennt man auch einen Punkt P auf E und den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$.

Erinnerung: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Die Länge der Lotstrecke $\overline{RF}$ also der Betrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$ ist die kürzeste Verbindung von R zur Ebene E und gibt damit den Abstand d von R und E an, wobei F nicht bekannt ist.

Für den Vektor $\overrightarrow{RF}$ gilt hier: $\overrightarrow{RF} = -d \cdot \vec{n}_0$

Für den Vektor $\overrightarrow{RF}$ gilt hier: $\overrightarrow{RF} = d \cdot \vec{n}_0$

1. Begründen Sie, warum gilt: $(\vec{f} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$

2. [illegible] kannt. Begründen Sie, warum unabhängig der Lage des Punktes [illegible]

3. Begründen Sie, warum gilt:

Wenn R und $\vec{n}_0$ auf der gleichen Seite von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r} - d\vec{n}_0$.	Wenn R und $\vec{n}_0$ auf unterschiedlichen Seiten von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r}$ [illegible]

4. Setzen Sie den unter 3. ermittelten Ausdruck für $\vec{f}$ nur teilweise in den Ausdruck $(\vec{f} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$ ein und zeigen Sie durch geeignete Umformungen, dass sich aus den beiden angegebenen Beziehungen ergeben:

R liegt oberhalb von E: $d = (\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}$	R liegt unterhalb von E: $d = -(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}$

5. Begründen Sie, warum man die beiden Ergebnisse zu der folgenden Formel zusammenfassen kann:

Abstand eines Punktes R von einer Ebene E: $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$

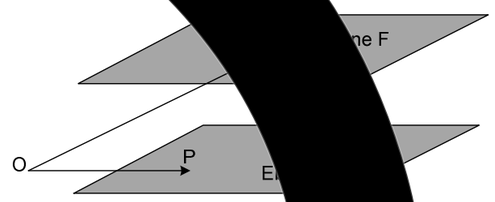
Begründung: [illegible]

[illegible] 15.2

[illegible]standsprobleme, die sich auf den Abstand Punkt - Ebene [illegible]lassen

a) Abstand zweier Ebenen

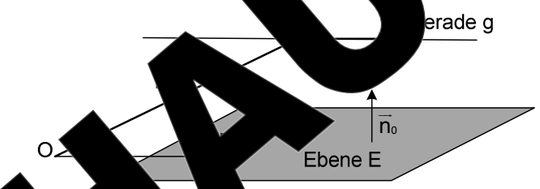
Begründen Sie, [illegible]chts, dass die [illegible]hen E und F [illegible]chnung zwi[illegible]ene E ist u[illegible]mel $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ [illegible]werden kann.



VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

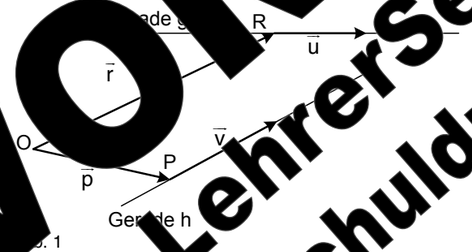
b) Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade

Begründen Sie anhand der Abbildung rechts, dass die Abstandsberechnung der Ebene E und Gerade g identisch mit der Abstandsberechnung zwischen dem Punkt R und der Ebene E ist und somit die Formel $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ angewandt werden kann.



c) Abstand zwischen wind[illegible]en Ge[illegible]

Begründen Sie anhand [illegible]dungen 1 bis 3, [illegible]ass man den [illegible]stand zwischen zwei windschiefen G[illegible]mit der Abst[illegible]sformel Pu[illegible]ene $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ berechnen kann und geben Sie [illegible]e d[illegible]ormale[illegible]nheitsve[illegible] berechne[illegible]



[illegible]. 1

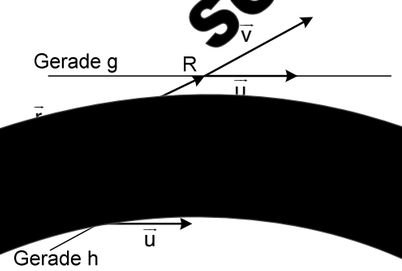
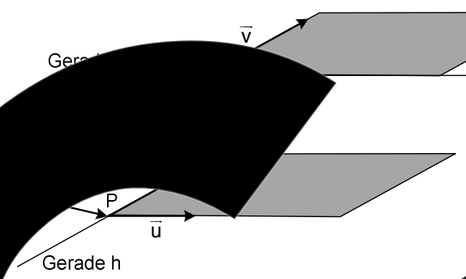


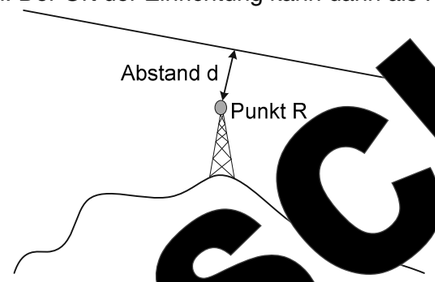
Abb. 2



[illegible] 3

2. Abstand Punkt–Gerade

Ein klassisches Beispiel hinsichtlich der Berechnung des Abstandes v[illegible] Punkten [illegible]Gera[illegible] findet sich im Bereich der Flugsicherung. Oft müssen Flugrouten, die im Ide[illegible] Gera[illegible]sehen werden können, in einem bestimmten Abstand von wichtigen Einrichtu[illegible]en, [illegible]ielsweise von Türmen verlaufen. Der Ort der Einrichtung kann dann als Pun[illegible]betrac[illegible]w[illegible]



Aufgabe 15.3

Erarbeiten Sie sich da[illegible]e Verfahre[illegible] Bestimmung [illegible]es Abstands eines bekannten Punktes R v[illegible] beka[illegible]n Gerade g, in[illegible]as Beis[illegible]ie s[illegible]ttweise durcharbeiten und die Texte erg[illegible]n.

Gegeben sind der Punkt R(3/4/4) und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

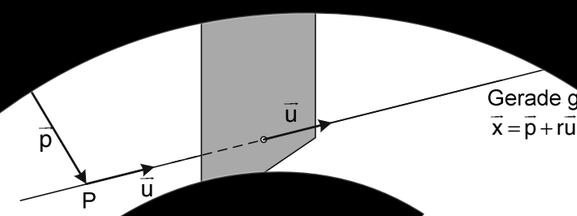
Gesucht ist der Abstand des Punktes R von der Geraden g.

Schritt 1:

[illegible] $\cdot \vec{u} = 0$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

[illegible] $x - 4y + z = -9$

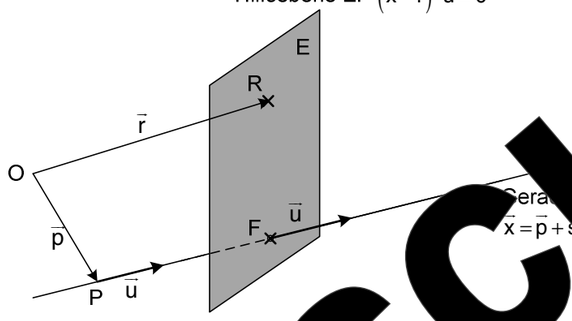


Mit [illegible] [illegible]wird eine Hilfsebene E in _____ [illegible]lung durch _____ ermittelt. Der Normalenvektor entspricht dem _____ [illegible]mit verläuft die Gerade g _____ zur Ebene [illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Schritt 2:

Hilfsebene E: $\left(\vec{x}-\vec{r}\right)\cdot\vec{u}=0$



$s-4(\ldots)\ldots+s=-9$

$\ldots20+18s+4+s=-9$

$18s=-36$

$s=-2$

Gera

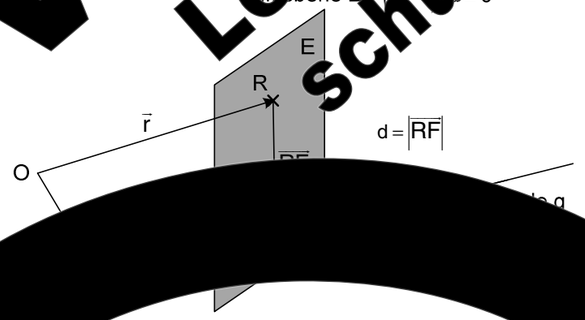
$\vec{x}=\vec{p}+s\ldots$

$\vec{f}=\begin{pmatrix}3\\\ldots\\\ldots\end{pmatrix}\ldots\cdot\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\-5+8\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

Ermitteln des _____ F(3|4|2) der _____ g durch die Hilfsebene E

Schritt 3:

Hilfsebene E: $\left(\vec{x}-\vec{r}\right)\cdot\vec{u}=0$



$d=\left|\overrightarrow{RF}\right|$

$d=\left|\overrightarrow{RF}\right|=\left|\begin{pmatrix}1-3\\3-4\\2-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+1+4}$

$d=3LE$

Berechnen _____ von ... Betrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$ entspricht dem _____ des Punktes ... de g.

Übungen: _____

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 23
Schnittwinkel

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ratio 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittwinkel 105
Kapitel 17 – Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... ...enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

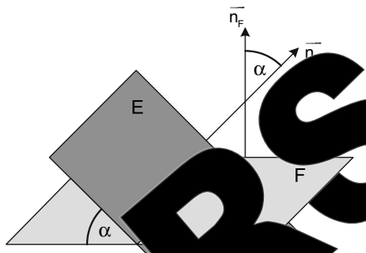
Kapitel 16: Schnittwinkel

Aus Kapitel 10 ist die Berechnung von Schnittwinkeln zwischen zwei Geraden bereits bekannt. Die Ermittlung von Schnittwinkeln bei Ebenen läuft in der Regel darauf hinaus, die in Formelwerken angegebenen Formeln richtig anzuwenden.

Aufgabe 16.1

Verdeutlichen Sie sich die gegebenen Formeln anhand der Abbildungen und berechnen Sie die geforderten Schnittwinkel.

a) Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

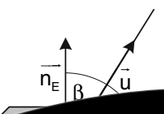


Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen entspricht dem Schnittwinkel der Normalenvektoren.

Schnittwinkel zwischen Ebenen: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n_E}\cdot\vec{n_F}\right|}{\left|\vec{n_E}\right|\cdot\left|\vec{n_F}\right|}$

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E: 2x + y + 3z = 4 und F: x – 5y = 3

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene



Der Richtungsvektor der Geraden $\vec{u}$ schließt mit dem Normalenvektor der Ebene den Winkel β ein. Es gilt damit:

$$\cos\beta = \frac{\left|\vec{n_E}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n_E}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}$$

$\cos\beta = \cos 90° - \alpha = \sin\alpha$, also $\cos\beta = \sin\alpha$ gilt, folgt:

$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \beta$

g

zwischen Gerade: $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{n_E}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n_E}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}$

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E: [illegible] und der Geraden [illegible]

de Übungen:_____

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 17
Ebenenscharen

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme
Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung
Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau
Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un
Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen
Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 17: Ebenenscharen

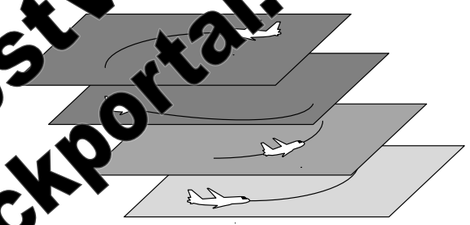
Der Begriff Ebenenschar

Die bisherigen Betrachtungen zu Ebenen haben sich bereits auf L[illegible]hunge[illegible]en Ebenen bezogen. Dieses Kapitel beschränkt sich auf Ebenen, die **parallel z[illegible]na[illegible]liegen)** und auf Ebenen, welche **eine gemeinsame Schnittgerade** besitzen. Da es i[illegible] beiden [illegible]elzahl von Ebenen mit den angegebenen Lagebeziehungen gibt, spricht man hie[illegible] **Ebene[illegible]ren**. Man erkennt eine Ebenenschar anhand der Ebenengleichung. Die Ebenengleic[illegible]en e[illegible]lten neben den Variablen x, y und z noch einen **Parameter**, wie z.B. den Parame[illegible]

Beispiel für eine Ebenenschar: E_a: $ax + 2a^2$[illegible] = 1[illegible]

Ebenenscharen bei parallelen [illegible]en

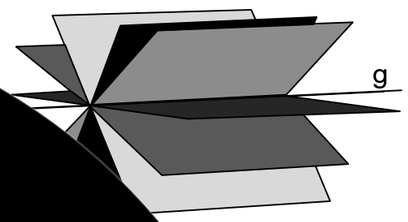
Zur Veranschaulichung findet [illegible] Beispiel aus dem Bereich der Fl[illegible]. Wen[illegible]ch an einem Flugplatz meh[illegible] Landu[illegible]eifende Flugzeuge in Wa[illegible]leif[illegible] befind[illegible]d eine Kollision der Flugz[illegible]lassen werde[illegible] soll, kann m[illegible] den [illegible]er F[illegible]euge a[illegible] Flugbah[illegible]f pa[illegible]en Ebenen li[illegible] interpr[illegible]en. D[illegible]ilme[illegible] der Eben[illegible], [illegible] d[illegible]en [illegible] Flugba[illegible] verlaufen kö[illegible]bildet [illegible] e[illegible]genan[illegible]e Ebenensc[illegible] D.h., aus de[illegible] u[illegible]llich[illegible] der mögliche[illegible] parallelen Eb[illegible]n gehören nur die Eb[illegible] zur Ebene[illegible], [illegible]ie [illegible]ie Flugbahnen z[illegible]lassen sind.



Kollisionsfreie Flugbahnen befinden sich auf einer Schar paralleler Ebenen.

Ebenenscharen bei sich schn[illegible]denden Geraden

Alle Ebenen, die als besondere Eigenschaft eine gemeinsame Gerade als S[illegible] haben, werden als **E[illegible]** gem[illegible]



[illegible] parallelen Ebenen bei den [illegible]en, unter den unendlich vielen Ebenen im [illegible]chel einen Teil von Ebenen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen. Diese Teilmenge von Ebenen bezeichnet man dann, wie bei den parallelen Ebenen, als Ebenenschar.

Das Verf[illegible]hörigkeit zu einer Ebenenschar e[illegible], wird in den folge[illegible]d von parallelen Ebenenscharen ve[illegible]

Aufgabe 17.1

Ebenenscharen bei parallelen Ebenen

Die Ebenengleichungen bei einer Ebenenschar haben in der Regel folgendes charakteristisches Aussehen:

E_a: $(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z = 1 + a$ mit $a \in IR$

Für jedes $a \in IR$ erhält man eine Ebene, die zur Ebenensc[illegible] gehört, wobei man für a = 0 die besonders einfach [illegible]rech[illegible]e Ebene E_0 erhält.

E_0: $x + 2y - 3z = 1$ oder $x +$ [illegible] $3z - 1$[illegible]

Erläutern Sie für die Ebenenschar E[illegible] $2 + 4a)y - (3 +$ [illegible]$a)z = 1 + a$ di[illegible]nden Rechenschritte bzw. ergänze[illegible] Lu[illegible]n im T[illegible]

a) E_a: $(1 + 2a)x + (2 +$ [illegible] $- (3 +$ [illegible]$6a)z =$ [illegible]

(1) x [illegible] $+ 4a$[illegible]$z - 6az - 1$ [illegible] _____

_____

(2) [illegible] $+ 2y - 3z - 1 + 2ax$ [illegible] $4ay - 6az$ [illegible] _____

_____

_____

(3) $\underbrace{x + 2y - 3z - 1}_{E_0} + a(\underbrace{2x + 4y - 6z - 1}_{E^*}) = 0$

_____

_____

[illegible]e Ebene E* gilt: $2x + 4y - 6z = 1$

[illegible]ne Ebenenschar E_a als [illegible]on aus der Ebene E_0 und [illegible]ne E* auffassen. Hier gilt: [illegible]*

(4) $\vec{n}_{E}$ [illegible] $\times \vec{n}_{E_0}$

Da die Normalenv[illegible] E_0 und E*

_____ [illegible]en die Ebenen

E_0 und E* nur _____ [illegible] _____ oder

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

(5) $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 4y - 6z &= 1 \\ \hline 0 &= -1 \end{aligned}$

Prüfen, ob die Ebe[illegible] parallel[illegible]
Aus dem Widerspruc[illegible]ibt sic[illegible]

E_0 und E* [illegible]

Zur Information:

Die Ebene E_0 gehört zur Eb[illegible]nschar E_a, da man durch Einsetzen von a = 0 die Ebene E_0 erzeugen kann. Di[illegible]ene E* [illegible]zwar parall[illegible]llen Eben[illegible] Ebenenschar, geh[illegible]och n[illegible]enschar E_a, da es kein a [illegible] gibt, mit dem sich durch [illegible]setz[illegible] E_a d[illegible]ene E* berec[illegible]en lässt.

Aufgabe 17.2

Rechner[illegible]erp[illegible]g der Zugeh[illegible]keit einer Eb[illegible] M zu einer parallelen Ebenenschar

Wie in [illegible]gabe 1 [illegible]erdeutlicht wurde, gehört jede E[illegible], die sich durch Einsetzen einer Zahl $a \in IR$ i[illegible]e E[illegible]ngleic[illegible]g E_a ergibt, z[illegible]ieser Ebenenschar. Um zu prüfen, ob eine Ebene M ebenfalls zu d[illegible]r S[illegible] muss man [illegible]ne Ebene M [illegible]uformen können, dass sie der Berechnungsvorschrift de[illegible]har ge[illegible]t. Das kan[illegible] mit dem folgen[illegible]Ansatz überprüft werden:

$$E_a = \mathbf{b \cdot M} \quad \text{mit } b \in IR$$

Beispiel 1:

Die Ebene M: $3x + 6y - 9z = 2$ bzw. $3x + 6y - 9z - 2 = 0$ entsteht durch Einsetzen von 1 in die Ebenenschar E_a aus A[illegible] [illegible]hört damit zur Ebenenschar E_a. Damit muss der Ansatz E[illegible]

[illegible]nf Unbekannten, nämlich mit den [illegible] sowie den Paramet[illegible]

[illegible]eichung: $\underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = [illegible] 2b$

Die Lösung einer derartigen Gleichung kann mit Hi[illegible]zientenvergleichs [illegible]rden.

Sch[illegible]

[illegible]en E_a und b · M übereinander schreib[illegible]

$$\begin{aligned} E_a:\ & (1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a) = 0 \\ b \cdot M:\ & 3bx + 6by - 9bz - 2b = 0 \end{aligned}$$

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identisch sind, dann m[illegible]sen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem [illegible]

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 3b$
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 6b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 9b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$1 + a = 2$[illegible]

Schritt 3: LGS lösen:

I – 2IV ⇒ $-1 = -b$ ⇒ b[illegible]

b in IV ⇒ $a = 1$

a, b in II ⇒ $6 =$ [illegible]

a, b in III ⇒ 9[illegible]

Ergebnis: Das LG[illegible]t si[illegible]iderspr[illegible]sfrei löse[illegible]it ist der A[illegible] $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechne[illegible]en, dass die [illegible]bene M zur E[illegible]nschar E_a gehört.

Beispi[illegible]2:

Hier wir[illegible]t de[illegible]piel 1 e[illegible]n Verfahren d[illegible] Koeffizientenvergleichs gezeigt, dass die [illegible]e E[illegible]ht zur Ebenenschar [illegible]gehört, da der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleicht[illegible] $\underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = \underbrace{2bx + 4by - 6bz - b}_{b \cdot E^*}$

Auch hier wird die Lös[illegible] mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs schrittweise ermittelt.

Schritt 1: Die Ebenengleichungen E_a und b · E* übereinander schreiben:

[illegible] (1 + a) =0
[illegible] b =0

[illegible]de Seiten der Gleichung [illegible]nd, dann müssen die [illegible]oeffizienten identisch sein. Koeffizienten[illegible]em LGS.

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 2$[illegible]
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 4b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 6b$
Ausdruck[illegible]	IV	$1 + a = b$

Schritt 3: [illegible]

[illegible]Widerspruch

Erg[illegible] [illegible]as LGS lässt sich nicht widerspruchsfrei lösen. Damit ist der Ansa[illegible] E* nicht [illegible]erfüllt und es ist rechnerisch nachgewiesen, [illegible]ie Ebene E* nich[illegible]nschar E_a [illegible]gehört.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Wenden Sie das Verfahren aus Beispiel 1 und 2 an, um zu zeigen, dass die Ebene [illegible]2y + 3z = 0 zur Ebenenschar E_a aus Aufgabe 17.1 gehört:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 17.3

Prüfen Sie, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar aus parallelen Eb[illegible] han[illegible]

Erläutern Sie für die Ebene E_a: $(2 + 2a)x + (2 + 2a)y - (3 + 3a)z = 1 + 2a$ [illegible]den [illegible]mungs- und Rechenschritte.

(1) E_0: $2x + 2y - 3z = 1$

(2) E_1: $4x + 4y - 6z = 3$

(3) $\overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix}$

Da die Normalenvektoren von E_0 und E_1 _____ sind, können die Ebenen E_0 und E_1 nur _____ oder _____ sein. Damit ist E_a eine Schar [illegible]eler Ebenen.

Ergänzen Sie: Man prüft, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar paralleler Ebenen handelt, indem man die _____vektoren von zwei beliebigen Ebenen der Schar auf [illegible]

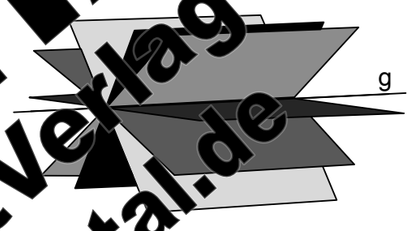
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 17.4

Ebenenscharen bei Ebenenbüscheln

Grundlegend kann man die bei den parallelen Ebenenscharen erfo[illegible]legung [illegible]uch auf Ebenenbüschel übertragen.

Die Struktur der Gleichung für ein Ebenenbüschel is[illegible] vergleichbar mit der Gleichung für eine Ebenenscha[illegible] parallelen Ebenen. Für $a \in IR$ soll folgendes B[illegible]spiel betrachtet werden.



E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z = 1 + 2$[illegible]

oder

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 +$ [illegible] $(1 +$ [illegible] $=0$

Zeigen Sie durch [illegible]preche[illegible]de U[illegible]ung, da[illegible] auch bei Ebenenbüsch[illegible]e [illegible]char E_a in die Form $E_a = E_0 + aE^*$ umfo[illegible] [illegible]ich damit folgender Ausdruck

E_a: x [illegible] $+ z - 1$ [illegible] $-2x - 3y + z - 2) =$

E[illegible] $+ y$[illegible]

E^*: [illegible] $- 3y + z = 2$

Information:
Wie bei parallelen Ebenen gilt auch hier: Die Ebene E* gehört zwar zum Büschel mit der Trägergeraden g, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a.

Raum für Umformungen:

Aufgab[illegible]

Re[illegible] **Zugehörigkeit einer Ebene E zu einer** [illegible]**ar**

[illegible]berlegungen hinsichtlich der Überprüfung, ob eine Ebene zu ei[illegible]char gehört, [illegible]n der Betrachtung bei den parallelen Ebenen[illegible]aren auf Ebenenb[illegible]tragen werden. [illegible]d für die Überprüfung auch hier der Ansat[illegible] **M** verwendet [illegible]tehende [illegible]g mit Hilfe eines Koeffizientenvergleich[illegible]

Beispiel 1:

Prüfen Sie, ob die Ebene

M: $-x - 2y + 2z = 3$ bzw. $-x - 2y + 2z - 3 = 0$

zur Ebenenschar E_a gehört.

Der Ansatz $E_a = b \cdot M$ führt, wie bei Scharen paralleler Eb[illegible]n, z[illegible] Glei[illegible]g mit fünf Unbekannten, nämlich mit den Variablen x, y und z sowie [illegible]ne[illegible] und b, die [illegible]nfalls wieder mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs gelöst werd[illegible]n.

Gleichung: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z$ [illegible] $+ 2a) =$ [illegible] $- 2by + 2b$[illegible]

Schritt 1: Die Ebenengleichung [illegible] M übereinande[illegible]schreiben:

E_a: $(1 -$ [illegible] $- 3a)$[illegible] $+ a)z$ [illegible] $(1$ [illegible] $2a)$ $=0$
$b \cdot M$: [illegible]$-bx$ [illegible] $2b$[illegible] $2bz$ [illegible] $3b$ $=0$

Schritt 2: [illegible] Sc[illegible] der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identisch sind, dann müssen die [illegible]oeffizie[illegible] identisch sein. K[illegible]efficientenvergl[illegible]ch führt zu einem LGS:

[illegible]ffizie[illegible] von x	I	[illegible]$2a$ $= -b$
K[illegible]ten von [illegible]	II	[illegible]$3a$ $=-2b$
Koeffizienten von z	III	[illegible] $+ a = 2b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$-1 - 2a = -3b$

Schritt 3: LGS lösen:

I – IV $\Rightarrow$ $2 = 2b$ $\Rightarrow$ $b = 1$

b in I $\Rightarrow$ $a = 1$

[illegible] Das LGS lässt sich widerspruchsfrei lösen. Da[illegible] $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechnerisch nachgewiesen, dass die Ebene M z[illegible] E_a gehört.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

Beispiel 2:

Die Ebene E* von Aufgabe 17.4 gehört zwar zum Ebenenbüschel mit der Trägergeraden, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a, da man durch Einsetzen einer Zahl a die Ebene nicht erhält. Zeigen Sie, dass der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleichung: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z - (1 + 2a) = -3by - z - 2b$

Schritt 1: Gleichungen übereinander schreiben:

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z - (1 + 2a) = 0$

$b \cdot E^*$: _____x _____y _____ _____ = 0

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot E^*$ identisch sind, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem LGS.

Koeffizienten von x I $1 - 2a = -2b$
Koeffizienten von y II $1 - 3a = -3b$
Koeffizienten von z III $1 + a = -1$
Koeffizienten der Variable ohne x IV $-1 - 2a = -2b$

Schritt 3: LGS lösen:

_____ | _____
IV _____ = _____ | IV
_____ | _____
2 _____ | _____ ⇒ Widerspruch

Ergebnis: Das LGS führt zu einem Widerspruch. Damit ist der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ nicht erfüllt, und die Ebene E* gehört (wie oben schon erläutert) nicht zur Ebenenschar.

Aufgabe 17.6

Trägergerade bei einem Ebenenbüschel bestimmen

Für die Bestimmung der Trägergeraden gibt es zwei Verfahren.

Verfahren 1: Gerade von zwei möglichst einfachen Repräsentanten einer Ebenenschar, beispielsweise die Schnittgerade von E[illegible]

Verfahren 2: Ebenenschar wie in Aufgabe 17.5 in $E_a = E_0$ [illegible] ermittelt die Schnittgerade von E_0 und E*.

Übungen

Ü17.1 Bestätigen Sie durch Rechnung mit Hilfe von Verfahren 1, dass die Ebenenschar

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z = 1 + 2a$ die Trägergerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [illegible] \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ besitzt.

Ü17.2 [illegible] $2x + 3y - z = 1$ und F: $x - 2z = 2$ eine E[illegible] G_a, zu der [illegible] nicht gehört, und eine Ebenenschar H_a, zu der die Ebene E[illegible].

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ü17.3 Ermitteln Sie die Trägergerade g zur Ebenenschar E_a: $(a-1)x + 2y + (2a+3)z = a - 2$ mit Hilfe von Verfahren 2, und geben Sie eine Ebene an, welche die Trägergerade g enthält, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a gehört. (Zur Kontrolle: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

Übungen: _____

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a
selbstorganisiert rlernen

Kap

Grundlegendes zu M

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineat ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – L ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... ... ehungen 145
... **tel 23** – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 18: Grundlegendes zu Matrizen

Der Begriff der Matrix und die Rechenregeln für den Umgang mit Matrizen wa[illegible] bereits [illegible] 19. Jahrhundert bekannt. Die Bedeutung der Matrizen für die Anwendung w[illegible] jedoch [illegible] deutlich. Man kann Matrizen beispielsweise bei der Verschlüsselung bzw. Kodier[illegible]ten, [illegible] Beschreibung von Produktions- und Transportprozessen sowie für die Transformation [illegible] Ko[illegible]ensystemen bei der Programmierung von Robotersteuerungen und vielem me[illegible]rwend[illegible] [illegible]en dieser Unterlagen wird der Einsatz der Matrizen auf die Anwendung bei linear[illegible]bildu[illegible] und den dazu notwendigen Rechenoperationen für Matrizen beschränkt. Darüb[illegible]inau[illegible]de [illegible]eln und Verallgemeinerungen können Tafelwerken und Schulbüchern entnommen [illegible]

Begriff Matrix

Als Matrix bezeichnet man ein Zahlenfeld [illegible]m Zeil[illegible]nd n Spalten. [illegible] linearen Ab[illegible]ungen kommen nur Matrizen mit gleiche[illegible]ahl [illegible]eilen [illegible]d Spalte[illegible] [illegible]an nennt d[illegible]atrizen **quadratische Matrizen**.

Quadratische Mat[illegible] Ebene als [illegible] R^2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Quad[illegible]atrix [illegible]Raum, also in [illegible] $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Die Elemente einer Matrix A werden mit a_{mn} oder für eine Matrix B mit b_{mn} angegeben.

Die **erste Ziffer** gibt die **Zeile** m an.

Die **zweite Ziffer** gibt die **Spalte** n an.

Au[illegible]be 1[illegible]

[illegible]n und Subtrakt[illegible]n von Matrizen

Ergänzen Sie im folg[illegible]den Beisp[illegible]l f[illegible]ende Zahlenwerte, erläutern Sie anschließend, wie man zwei Matrizen addiert.

Addition im R^2 [illegible] $\begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ [illegible] & [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & __ \end{pmatrix}$

[illegible] im R^3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & [illegible] \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & __ \\ 3 & __ & __ \\ __ & 2 & __ \end{pmatrix}$

Subtraktion im R^3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ [illegible] & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-4 & [illegible] \\ ___ & ___ & 1- \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix}$ [illegible] -4 $__$ 0 $__$

Erg[illegible]

[illegible] werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die an den ents[illegible] Stellen [illegible]en _____ addiert bzw. sub[illegible]iert.

Aufgabe 18.2

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl r

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel und ergänzen S[illegible] der F[illegible] und im Text fehlenden Angaben:

Multiplikation im R^2 $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ oder im R^3 [illegible] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & [illegible] \\ [illegible] & 5 & [illegible] \\ -9 & [illegible] \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ 21 & __ & -27 \end{pmatrix}$

Man multipliziert eine Matrix mit einer reellen Zah[illegible] man [illegible] _____ [illegible]nent der Matrix mit der Zahl r _____.

Aufgabe 18.3

Multiplikation einer Matrix [illegible]inem Vektor

a) Verdeutlichen Sie s[illegible] Vo[illegible]hensweise am Beisp[illegible]l, [illegible]nd ergänze[illegible] die in der Rechnung und im Text fehlenden Ang[illegible]

Die Multip[illegible]ion von Matrizen mit einem Spalten[illegible]tor entspricht dem Skalarprodukt jed[illegible]eile der Matrix mit dem Spaltenvektor.

Multip[illegible]ion im R [illegible] $\begin{pmatrix} 2 & [illegible] \\ 3 & [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + [illegible] \\ 3 \cdot 4 + [illegible] \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 6 \\ 12 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \end{pmatrix}$

Multiplikation im R^3 $\begin{pmatrix} [illegible] & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) + __ \cdot 4 + 6 \cdot __ \\ 7 \cdot (-1) + __ \cdot 4 + __ \cdot __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 8 + __ \\ __ + 20 + 18 \\ __ - __ + __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ -2 \end{pmatrix}$

Eine Matrix A wird mit einem V[illegible] $\vec{[illegible]}$ [illegible]ultipliziert, indem man jedes Element in einer _____ der Matrix m[illegible] [illegible]ie drei Produkte anschließend zeilenweise [illegible]

[illegible]tlichen Sie sich durch Berechnung des folgenden Pr[illegible] [illegible]er Multiplikation der Matrix mit einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein lineares Gleichungssystem [illegible]

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & [illegible] \\ 3 & [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ [illegible] $+ z$ / [illegible] $y + 2__$ / [illegible] $___ + ___$ [illegible] $2x +$ [illegible] / $x + 4y + 2$[illegible] / $3x + y + 2z$ [illegible]

[illegible]urch die Multiplikation entsteht ein Vektor.

D[illegible]chung wi[illegible]nten-we[illegible]t.

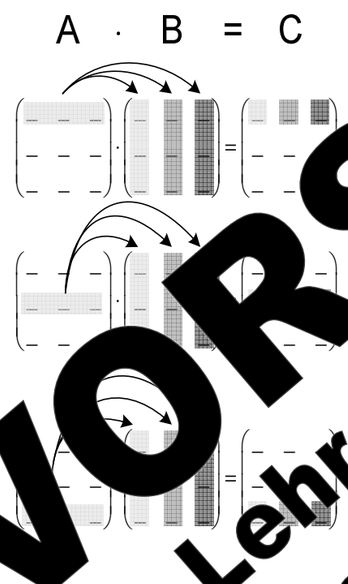
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 18.4

Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix

Verdeutlichen Sie sich anhand der Graphik die Vorgehensweise bei der Multiplikation von quadratischen Matrizen mit drei Zeilen und 3 Spalten und ergänzen Sie im Text fehlende Begriffe.

a)



– Das 1. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der __ Zeile von A mit der __ Spalte von B.

– Das 2. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation _____ von A mit der _____ von B.

– Das 3. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation _____ von A mit der _____ von B.

– Das 1. Element der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

– Das 2. Element der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

⋮

– Das 3. Element der 3. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

b) Übertragen Sie das Verfahren zur Multiplikation auf 2x2 Matrizen und bestätigen Sie das angegebene Ergebnis für die folgenden Matrizen durch Nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 & \dots & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie die angegebenen Ergebnisse und begründen Sie damit, dass für die Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz nicht gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 10 & 2 & 11 \\ 7 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \dots \\ \dots & \dots \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 2 \\ 15 & -1 & 7 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ. Die Produkte $A \cdot B$ _____

_____.

d) Bestätigen Sie mit Hilfe der Matrizen A, B und C, dass das Assoziativgesetz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ für die Matrizenmultiplikation gültig ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix}$$

Kontrollergebnis: In beiden Fällen die Matrix: $\begin{pmatrix} 19 & 37 \\ 2 & \dots \end{pmatrix}$

Aufgabe 18.5

Berechnen der Determinante einer Matrix

Durch die Berechnung der Determinante einer Matrix wird dieser ein Skalar bzw. Zahlenwert zugeordnet. Der ermittelte Skalar enthält vielseitig verwendbare Informationen, auf die an dieser Stelle jedoch nicht ausführlich eingegangen werden soll. Es wird hier jedoch jeweils an einem Beispiel beschrieben, wie man bei einer 2x2-Matrix und einer 3x3- Matrix die Determinante berechnen kann.

a) Determinante bei einer 2x2-Matrix

Anstatt den Ausdruck Det vor die Matrix mit runden Klammern zu schreiben, kann man die Matrix auch mit Strichen darstellen. Die Elemente werden miteinander multipliziert.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

–bc ad

Zeigen Sie, dass sich für die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ der Wert ergibt.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Determinante bei einer 3x3-Matrix

Auch hier kennzeichnen die beiden senkrechten Striche, dass die Determinante der Matrix berechnet wird.

Die ersten beiden Spaltenvektoren d[illegible] Matrix werden hinte[illegible] angehängt.

$$\text{Det}\,A = \text{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$-ceg \quad -afh \quad -bdi \quad aei \quad bfg$

$\text{Det}\,A = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

[illegible] Elemente unter den diagonalen Linien [illegible]n multipliziert.

Das Produkt erhält ein **positives** Vorzeichen, wenn von oben links nach unten rechts multipliziert wird.

Das Produkt erhält ein **negatives** Vorzeichen, wenn von oben rechts nach unten links multipliziert wird.

[illegible] Sie, das[illegible] Determinante der Matrix $D = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & [illegible] & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ [illegible] & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ den Wert $1^{(*)}$ hat.

[illegible]ng: Sie werden später in Übung 22.1 lernen, dass die Matrix D ei[illegible]nte Drehmatrix ist. Bei einer linearen Abbil[illegible]at die Determina[illegible]ehmatrix immer den Wert 1. (vgl. auch Kapit[illegible]lick zu Drehung)

Aufgabe 18.6

Besondere Matrizen

a) Die Einheitsmatrix

Die Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird als **Einheitsmatrix E** bezeichn[illegible]

Weisen Sie am folgenden Beispiel nach, dass für die Mul[illegible]tion ei[illegible] Matrix A mit der Einheitsmatrix E gilt: $A \cdot E = A$ und auch $E \cdot A$ [illegible]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen S[illegible]rch Re[illegible]ung, dass für die folgenden Matrizen jeweils gilt: $A \cdot B = E$

$$\begin{pmatrix} 3 & [illegible] \\ [illegible] & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & [illegible] \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & [illegible] \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 4 & [illegible] \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Die Matrix B wird als **inverse Matrix** [illegible] Matrix A bezeichnet. Man schreibt für B auch A^{-1}.

Für inv[illegible]

[illegible]enoperationen, hier vor allem das Berechnen von inv[illegible]nvertieren von Matrizen), [illegible] Regel eines umfangreichen Rechenaufwands bedürfen, ist e[illegible] Taschenrechner zu [illegible]wenden. Erarbeiten Sie sich ggf. mit Hilfe der Bedienungsanleitung [illegible]er Multiplikation von Matrizen Ihren Taschenrechner einsetzen können und wie Sie mit Hilfe [illegible]rechners eine Matrix invertieren kö[illegible]

Er[illegible]bungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 19
Projektion

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme
Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung
Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau
Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un
Kap ... 12 – L ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen
Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 19: Projektion

Was man in der linearen Algebra unter einer Projektion versteht, kann man si[illegible]hr an[illegible]aulich verdeutlichen, wenn man an die Programmierung von Computersp[illegible]denkt. [illegible] beispielsweise Spielabläufe, die im dreidimensionalen Raum stattfi[illegible]dem B[illegible]chirm eines Monitors dargestellt werden. Das bedeutet unter Verwendung der F[illegible]fern[illegible]ie, dass der dreidimensionale Raum R^3 auf die zweidimensionale Fläch[illegible]s Bild[illegible] den R^2, projiziert wird. Um ein möglichst hohes Maß an Anschaulichkeit zu erhalte[illegible]rden [illegible]n ersten Aufgaben nur Projektionen in der Ebene betrachtet.

Aufgabe 19.1

Projizieren Sie die Punkte in der x,y-Eber[illegible] Richtu[illegible]er zweiten Win[illegible]halbierende auf die Gerade g_B: y = 0,5x oder in vel[illegible]er Dars[illegible] $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

a) Erläuterung der Auf[illegible]stellung

Umgangsspra[illegible] be[illegible]tet das, wie man de[illegible] Abbildung 19.1 e[illegible] dass alle Punkte[illegible] Eb[illegible] Richtung der zweite[illegible] Win[illegible]halbi[illegible]en, [illegible]ie **Bildgerade** o[illegible] "ge[illegible]oben", [illegible]projiziert werden, [illegible]ie Ric[illegible] der P[illegible]ktion bzw. "Verschiebung" [illegible]t n[illegible]ber[illegible] durch ein[illegible] Gerade an, d[illegible] **Projektionsgerade g_P** [illegible]net wird.

D[illegible]unkt A hat beis[illegible]weise den B[illegible]unkt A'. [illegible]e, welche bereits auf der Bil[illegible]den g_B liegen werden au[illegible]ch selbst a[illegible]bildet, hier z.B D = D'. Punkte, die au[illegible]ch selbst abgebildet werden, nennt ma[illegible] **Fixpunkte**.

Geben Sie jeweils die Koordinaten der eingezeichn[illegible]

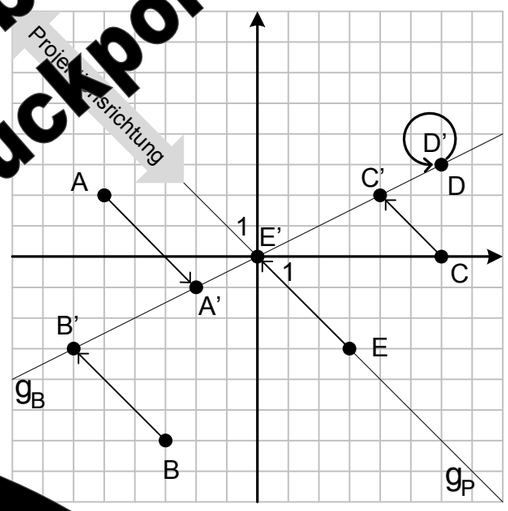


Abb. 19.1

[illegible]__) ⟶ B'(__/__)

C(__/__) ⟶ C'(__/__)

D(__/__) ⟶ D'(__/__)

E(__/__)

[illegible]/y) der Ebene durch Projektion in Richt[illegible]aden g_P ein [illegible](x'/y') auf der G[illegible]aden g_B zugeordnet. Man nennt eine solch[illegible] eine Abbildung [illegible] (also des zweidimensionalen Raumes R^2) auf eine Gerade (a[illegible]eindimensionalen [illegible]')

b) Ermittlung der Abbildungsvorschrift in Form einer Projektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Geradengleichung der Projektionsgeraden g_P, welch[illegible] Richt[illegible] der Projektion vorgibt

$$g_P: \quad \vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$g_P: \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Punk[illegible]it dem Ortsvektor $\vec{x}$ wird au[illegible]e B[illegible]de projiziert (g[illegible]oben), [illegible]ch [illegible]an den Bildpunkt X' [illegible]m O[illegible]ektor $\vec{x'}$ erhält.

Schritt 2: Die in Abb. 19.1 eingezeichnete Pr[illegible]sge[illegible]verläuf[illegible] durch de[illegible]. Der Bildpunkt von E liegt im Schnittpu[illegible] Projekt[illegible]eraden g_P [illegible]it d[illegible] Bildgeraden g_B, hier also im Ursprung. Wenn Sie [illegible] Projektio[illegible]e durch [illegible]nkt B zeichnen, erkennen Sie, dass der Bildpunk[illegible]benfal[illegible] Schnittpu[illegible] Bildgera[illegible]it der Projektionsgeraden lieg[illegible]

Ergänzen Sie:
Für alle Punkte[illegible] Eb[illegible]gilt: D[illegible]ildpunkt X' [illegible]es beliebige[illegible]tes X liegt im

_____ [illegible]e Geraden [illegible] und g_B. D.h. man berechnet

X' [illegible]h Gle[illegible]tzen [illegible] Gerad[illegible] und ____.

Schri[illegible]3: [illegible]leichse[illegible] und Berechn[illegible] Parameters[illegible] der Projektionsgeraden. Verdeutlichen [illegible]sich [illegible] Rechenschritt[illegible]d die Unte[illegible]de zur bisherigen Schnittpunktsberechnung b[illegible]n.

$$g_B = g_P$$

$$r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Neu:
In der Geradengleichung hat der Stützvektor keine eindeutigen Zahlenwerte, sondern ist variabel.

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & 2r = x + s & \\ \text{II} & r = y - s & \text{I} - 2\text{II} \end{array}$$

Neu:
Der Parameter s nimmt nun keinen Zahlenwert an, sondern ist von x und y abhängig.

[illegible]nnen des von x und y abhängige[illegible] [illegible]h Einsetzen von s in die [illegible] Projektionsgerade g_P.

[illegible]fassen

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

[illegible]$x + \frac{2}{3}y$
[illegible]$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$ $= \begin{pmatrix}x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\\ y + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\end{pmatrix}$

[illegible]$x + \frac{2}{3}y$
[illegible]$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Die Matrix [illegible]
A= [illegible]
[illegible]**atrix** [illegible]eziell als [illegible]**smatrix** [illegible]et.

Der [illegible] der Klam[illegible]nt dem Produk[illegible] Matrix und der [illegible] Der Vektor k[illegible] ausgekla[illegible]den.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

c) Anwenden einer Abbildungsmatrix

Die folgende Aufgabenstellung verdeutlicht die Anwendung der unter b) e[illegible]lten P[illegible]ktionsmatrix in Bezug auf die in Abb. 19.1 dargestellten Punkte. Verdeutliche[illegible] die Vo[illegible]se am Beispiel von Punkt A, berechnen Sie anschließend analog dazu [illegible]linate[illegible] Bildpunkte von B, C, D und E und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Ab[illegible]9.1.

$A(-5/2) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} + \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'(-2/1)$

$B(__/__) \quad \Rightarrow \quad \vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ & __ \\ __ & __ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B'(__/__)$

$C(__/__) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} __ & __ \\ __ & __ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ & __ \\ __ & __ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C'(__/__)$

$__ \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} __ & __ \\ __ & __ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ & __ \\ __ & __ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad __'(__/__)$ (Fixpunkt)

$E(__/__) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} __ & __ \\ __ & __ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ & __ \\ __ & __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad __'(__/__)$

Vergl[illegible]

Zusammenfassung: Projektion auf eine Gerade im R^2

Mit Hilfe der Gleichu[illegible] man bei der Projektion eines [illegible]) die Koordinaten des Bildpunktes X[illegible]

De[illegible]

[illegible]ng, die man mit einer Gleichung der Form $A\vec{x} = \vec{x}'$ besc[illegible]nn, wird als [illegible]bildung bezeichnet. Bei einer linearen Abbildung auf eine G[illegible]n die [illegible]te immer auf einer Ursprungsgeraden.

Aufgabe 19.2

Eigenschaften der Projektionsmatrix

Anhand des Beispiels von Aufgabe 19.1 sollen nun wichtige Eigenschaft[illegible] Projek[illegible]zen dargestellt und neue Begriffe wie Fixpunkt- und Bildmenge sowie Kern e[illegible] A[illegible]g erläutert werden. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Ausführungen und ergänzen Sie ggf. [illegible]len [illegible]ben.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass gi[illegible] A

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ & _____ \\ _____ & _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ & _____ \\ _____ & _____ \end{pmatrix}$$

Geometrische Erläuterung:
Eine einmalige Anwendung der M[illegible]en Punkt projiz[illegible]t bzw. verschi[illegible] diesen Punkt auf die Bildgerade. Alle Punkt[illegible] der [illegible]gerad[illegible] (vgl. Punkt [illegible] Abb. 19.1) [illegible]xpunkte und werden nicht verschob[illegible]edeute[illegible] man d[illegible] A zweimal [illegible]einander erst auf den Punkt und danach a[illegible] Bi[illegible]unkt a[illegible]det, wird [illegible]ebnis der [illegible]n Abbildung nicht mehr verändert.

b) Vergleich[illegible] Sie de[illegible]htu[illegible]vektor der [illegible]ldg[illegible]raden mit den Spaltenvektoren der Matrix A und ergä[illegible]en [illegible] den fo[illegible]den Satz.

[illegible]ldge[illegible]e: $g_B: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ [illegible]bildungsmatrix: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Die Spa[illegible]envektoren de[illegible]bildungs[illegible]atrix sind linear abhängig und entsprechen dem

_____ der B[illegible]geraden.

c) Fixpunktme[illegible]

D[illegible] Bedeutung der Begriffe bei einer [illegible]and des Beispiels vo[illegible]

[illegible]**tz Fixpunktmenge**: $A \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

[illegible]**unktmenge** liefert [illegible] die bei der [illegible]f sich selbst [illegible]den.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y = x \\ &\text{II} \quad \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y = 0 \\ &\text{II} \quad \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y = 0 \end{aligned}$$

Beide Gleichu[illegible]ntisch.
$\Rightarrow \; x - 2y = 0$

Int[illegible] Ergebnisses:

Das Ergebnis ist die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ d[illegible] $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit entspricht die [illegible]punktmenge der [illegible].

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ansatz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der K[illegible] liefert a[illegible]gebnis die Menge [illegible] Punkte[illegible]e auf den [illegible]sprung [illegible]bil[illegible] werden.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \text{II} & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = [illegible] \end{array}$$

Beide [illegible]eich[illegible] sind identisch. [illegible]umgef[illegible] $x + y = 0$

Interpretation des Ergebnisses: Das Erge[illegible] ist d[illegible]ktio[illegible]gerade $y = -x$ und damit die 2. Winkelha[illegible]e. [illegible]lle Punkte [illegible] der Pr[illegible]sgeg[illegible]n werd[illegible] in der P[illegible] der Projektion auf [illegible] Ursprung a[illegible]ildet.

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} = [illegible]$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = x' \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = y' \quad | \cdot 2 \text{ II} \\ \hline 0 = x' - 2y' \end{array}$$

Das LGS mus[illegible] umformen la[illegible], da[illegible] auf der linken Se[illegible]

Die **Bild[illegible]** ist hier nur bes[illegible]bar, weil alle abg[illegible]bildeten Punkte auf [illegible]geraden liegen, a[illegible] eine einheitlich beschreibbare Bildmenge haben.

Inte[illegible]atio[illegible] Erg[illegible]sses: [illegible] Ergebnis [illegible]zu $y' = \frac{1}{2}x'$ umgeformt werden und entspricht de[illegible]ixpunktmenge oder der Menge aller Bildp[illegible]te a[illegible] der Bildgeraden.

Ü[illegible]en

[illegible] Projizieren Sie [illegible] Punkte de[illegible]ebene in Richtung der Geraden $y = -\frac{1}{3}x$ auf die x-Achse. Führen Sie [illegible] Berechnu[illegible]gen im Heft durch.

a) Zeigen Sie anhan[illegible]ner Zeichnung, dass der Punkt P(–1/2) auf den Punkt P'(5/0) abgebildet wird.
b) Zeigen Sie durch Rechnung analog zur Aufgabe 19.1, dass sich als Projektionsmatrix die [illegible]

[illegible]gsmatrix A linear abhängig sind und [illegible]n Richtungsvektor der Bildge[illegible]

[illegible] Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19.[illegible]e, den Kern und die Bildmenge bei der Projektion und interpretieren Sie die [illegible]

Ü19.2 Projizieren Sie die Punkte der x,y-Ebene in Richtung [illegible] $= -x$ auf die Gerade y = x (orthogonale Projektion). Führen Sie die Berechnungen [illegible]

a) Zeigen [illegible]r Zeichnung, dass der Punkt P[illegible] Punkt P'(6/6) abgebildet [illegible]n Fixpunkt ist.
b) [illegible]g analog zur Aufgabe 19.1, das[illegible]jektionsmatrix die [illegible]bt.

[illegible]berprüfen Sie, ob gilt: $A \cdot A = A^2 = A$
Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix A [illegible]ngig sind und dem Richtungsvektor der Bildgeraden ents[illegible]chen.
e) Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19[illegible]punktmenge, de[illegible] die Bildmenge bei der Projektion und interpretiere[illegible]bnisse.

Aufgabe 19.3

Projektionen im Raum

Die Erkenntnisse zur Projektion in der Ebene können im Wesentlichen a[illegible]m übe[illegible]gen werden. In der folgenden Aufgabe werden die Punkte des Raumes in Ric[illegible]g e[illegible]rojektions-geraden g_p auf eine Projektionsebene bzw. Bildebene E_B projizi[illegible] Wie be[illegible]en" Abbildungen ist die Projektionsebene eine Ursprungsebene.

Projektionsebene: E_B: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

oder

E_B: $y - z = 0$

Veranschau[illegible]bildung im 1. [illegible]uadranten:

Projektionsrichtung: g_p: [illegible]

a) Erm[illegible]n d[illegible]ktionsmatrix

[illegible]hritt [illegible] Bestimmen der Ga[illegible]dengleichung [illegible] Projektionsgeraden g_P. Diese Gerade gibt die [illegible] Verschiebungs[illegible]tung bzw. Pro[illegible]onsrichtung an, in der ein beliebiger Punkt X(x/y/z) [illegible] auf die Bi[illegible]ebene bzw. Proj[illegible]sebene projiziert (geschoben) wird.

$$g_P: \vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: [illegible]rchstoßpunkten der Geraden g_p durch die [illegible]e. Einsetzen von g_p in E_B liefert den

$$\begin{aligned} y - s - z - 2s &= 0 \\ 3s &= y - z \\ s &= \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z \end{aligned}$$

Schritt 3: Einsetzen von s in die Gerade g_p:

$$\vec{x'} = [illegible] \begin{pmatrix} x + 0 \\ [illegible]\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z) \\ [illegible] + 2(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ z + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \end{pmatrix} = [illegible]$$

$$= \begin{pmatrix} [illegible] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Abbildungsmatrix: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Anwenden der Abbildungsmatrix auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(3/9/6) auf den Punkt P'(3/8/8) abgebildet wird, wie der Punkt Q(3/1/1) und alle Punkte R(r/0/0) auf der x-Achse Fixpunkte bei der Abbildung sind.

$$P(3/9/6) \quad \Rightarrow \vec{p'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (__/__/__)$$

$$Q(__/__/__) \quad \Rightarrow \vec{q'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} \Rightarrow \quad Q'(__/__/__) = Q$$

$$R(__/__/__) \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} \Rightarrow \quad R'(__/__/__) = R$$

Aufgabe 19.4

Eigenschaften der Projektionsmatrix

Analog zu den Untersuchungen zu den Eigenschaften von Projektionsmatrizen in der Ebene wird nun die Projektionsmatrix aus Aufgabe 19.3 untersucht.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass auch bei einer Projektion im Raum der Zusammenhang

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

b) Vergleichen Sie die Spaltenvektoren der Projektionsebene mit den Spaltenvektoren der Matrix A und ergänzen Sie:

Ebene: E_B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Projektionsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & _ \\ 0 & \frac{2}{3} & _ \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ _ & 1 \\ _ & 1 \end{matrix}$

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix lassen sich in der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ _ \\ _ \end{pmatrix}$ darstellen und sind linear _____. Die Spaltenvektoren entsprechen den Parametern der _____ .

c) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Projektion

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach den gleichen Verfahren wie bei der Abbildung in der Ebene. Arbeiten Sie beispielhaft durch, und wenden Sie die Verfahren auf nachfolgende Übungsaufgaben an.

Ansatz Fixpunktmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x & = & x \\ \text{II} & \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z & = & y \\ \text{III} & \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z & = & z \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} & & = & 0 \\ \text{II} & -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z & = & 0 \\ \text{III} & \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z & = & 0 \end{array}\right\} \text{II und III sind identisch: } \Rightarrow y - z = 0$$

Interpretation des Ergebnisses: In diesem unterbestimmten LGS sind zwei Variablen frei wählbar. Wählt man x = r und z = s ergibt sich aus

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder nach Umrechnung die Ebene } y - z = 0$$

Es entspricht die Fixpunktmenge der Projektions-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x & = & 0 \\ \text{II} & \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z & = & 0 \\ & \frac{1}{3}z & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow x = 0$$

Beide Gleichungen sind identisch: $\Rightarrow 2y + z = 0$

Interpretation: In diesem unterbestimmten LGS ist eine Variable wählbar. Wählt man z = r, folgt z = –2r. Als Lösungsvektor ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$ Dies entspricht der Projektionsgeraden durch den Ursprung des Koordinatensystems, d.h. die Bereiche des Kerns liefert die Richtung der Projektion.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ansatz Bildmenge:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$A \cdot \vec{x} = \vec{x'}$

Zu lösendes LGS:

I $\quad x = x'$ $\quad \Rightarrow$ x-Achse wird [illegible] abgebildet

II $\quad \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = y'$

III $\quad \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = z'$ $\quad$ II – III

$0 = y' - z'$

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich Null.

Interpretation des Ergebnisses: Die Bildmenge entspricht [illegible] Fixpunktmenge. Damit handelt es sich bei der linearen Abbildung um eine Projektion.

Aufgabe 19.5

Bedeutung der Einheitsvektoren bei Projektionen

a) Als Projektionsebene wurde [illegible] Ebene x + y + z = 0 gewählt. Zeigen Sie durch entsprechende Rechnung, dass [illegible] Abbildungsmatrizen ergeben.

$\begin{pmatrix} 0 & [illegible] \\ 0 & 1 & [illegible] \\ 0 & [illegible] \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert.

$\begin{pmatrix} [illegible] \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des [illegible] $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ (y-Achse) projiziert.

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert.

Ergänzen Sie:

Bei der Projektion in Richtung der Einheitsvektoren [illegible] enthalten drei Matrizen jeweils eine Spalte mit Nullen auf. Bei Projektion [illegible] des Einheitsvektors $\vec{e_1}$ entspricht die ___ Spalte dem Nullvektor. [illegible] in Richtung des Einheitsvektors ___ entspricht die 2. Spalte dem Nullvektor. Bei Projektion in Richtung des Einheitsvektors ___ entspricht die ___ Spalte dem Nullvektor.

[illegible] Aufgabe 19.4 wurde bei der Projektion auf die Ebene E: y – z = 0 in Richtung der [illegible] geraden

g_p: $\vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Projektionsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ermittelt. Setzt man in der Projektionsgeraden für den Vektor $\vec{x}$ nacheinander die Einheitsvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ ein und berechnet die Durchstoßpunkte [illegible] Projektionsebene E, erhält man deren Bilder $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$ und $\vec{e_3}'$. Führen Sie [illegible] ergänzen Sie den nachfolgenden Satz.

[illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] \\ 2 \end{pmatrix}$ in $E_B \Rightarrow$ $\quad -s - 2s = 0$ [illegible] $\Rightarrow \vec{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $E_B \Rightarrow$ $\quad 1 - s - 2s = 0 \quad \Rightarrow \quad s =$ ___ [illegible] $\begin{pmatrix} 0 \\ [illegible] \end{pmatrix} +$ ___ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

iii) $\vec{e_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ [illegible] ___ $\Rightarrow \quad s =$ ___ $\Rightarrow$ [illegible] $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

[illegible]r Einheitsvektoren entsprechen den _____ der [illegible]matrix. Damit kann man die Projektionsmatrix über die Abbildung [illegible]toren ermitteln.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 19.6

Untersuchung auf Existenz einer inversen Matrix bei der Projektion

Aus Aufgabe 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A au[illegible] verse[illegible]ix A^{-1} geben kann und dass gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 19.4 wissen Sie, d[illegible]ei P[illegible]ionen gilt: $A^2=A$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zus[illegible]ng[illegible]ewandt, u[illegible] untersuchen, ob zu einer Projektionsmatrix A eine inverse Mat[illegible]$^{-1}$ ex[illegible] Erläu[illegible]n Sie die Ze[illegible]2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

(2) $A \cdot (A$[illegible]$) = A$[illegible]

(3) [illegible]$A) \cdot A^{-1} = A$[illegible]

(4) $A^2 \cdot A^{-1}$[illegible]

(5) [illegible]t ein Widerspruch zur Zeile (1), da das Produkt einer [illegible]r inversen Matrix die _____ [illegible]eben muss.

Ergebnis: Bei einer Projektion existiert zur Projektionsmatrix [illegible] inverse Matrix A^{-1}.

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 23
Spiegelung

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme
Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung
Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau
Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un
Kap ... 12 – L ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen
Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 20: Spiegelung

Aufgabe 20.1

Im Rahmen dieser Aufgabe wird entsprechend zur Projektion eine Spiegelmatrix ermittelt und anschließend die Eigenschaften dieser Matrix untersucht.

Wie bei allen "linearen" Abbildungen ist die Ebene, an der gespiegelt wird, eine Ursprungsebene.

Hier wird die Ebene E: x – y = 0 [illegible]lt u[illegible]

in Richtung der Geraden g_S : [illegible] $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix}$

gespiegelt.

Abb. 20.1

a) Erm[illegible]n der [illegible]gel[illegible]x

[illegible]itt [illegible] Bestim[illegible]n der Gleichu[illegible] der Gerade[illegible] welche die Richtung der Spiegelung vorgibt.

$$g_S: \vec{x}' = \vec{x} + s\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Wie Sie bereits im Kapitel 14 Aufgabe 14.3 gelernt haben, benötigt man zur Berechnung der Koordinaten [illegible]lten Punktes die Koordinaten des Durchstoßpunktes S ([illegible] die Ebene E. Die Berechnung liefert den Parameter s.

[illegible]: Koordinaten des Spiegelpunktes analog [illegible]erechnen.

$$\vec{x}' = \vec{x} + 2s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[illegible]\begin{pmatrix} x - 2x + 2y \\ [illegible] \\ z + 2x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y + 0 \\ 0 + y + 0 \\ 2x - 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 2[illegible] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Spiegelmatrix}: \; S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Anwenden der Abbildungsmatrix S auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(–2/0/3) auf den Punkt P'(2/0/–1) abgebildet wird, s[illegible] der P[illegible] Q(2/2/3) und alle Punkte R(0/0/r) auf der z-Achse Fixpunkte bei der A[illegible]ng sin[illegible]

$$P(-2/0/3) \quad \Rightarrow \vec{p}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [illegible](__/__/__)$$

$$Q(__/__/__) \quad \Rightarrow \vec{q}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q'(__/__/__) = Q$$

$$R(__/__/__) \quad \Rightarrow \vec{r}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R'(__/__/__) = R$$

Aufga[illegible] 20.[illegible]

[illegible]ensc[illegible]ten d[illegible]egelmat[illegible]

Ent[illegible] zu Projektionsm[illegible]tzen weisen a[illegible] Spiegelmatrizen charakteristische Eigenschaften auf.

a) Wenden Sie die Spiegel[illegible]atrix auf d[illegible] Punkt P' aus Aufgabe 20.1 b) an und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$P'(2/0/-1) \quad \Rightarrow \quad \vec{p}'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} __ \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ \\ _____ \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P''(__/__/__) = P$$

[illegible]iche Matrix noch einmal

[illegible]hält man den _____

[illegible]her gilt bei einer Spiegelung $S \cdot (S \cdot \vec{x}) = S \cdot S \cdot \vec{x} = S^2 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ u[illegible]kt $S \cdot S = S^2$ muss

daher der Zusammenhang [illegible] erfüllt sein.

Zeigen Sie d[illegible]s $S \cdot S = S^2$ für die Matrix aus [illegible] dass bei einer Spiegelun[illegible]g ist.

$$S^2 = [illegible] \begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & [illegible] \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Spiegelung

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach den [illegible]chen [illegible]ahren wie bei der Projektion. Arbeiten Sie die Beispiele durch, und wenden [illegible] die Ver[illegible]nachfolgende Übungsaufgaben an.

Ansatz Fixpunktmenge: $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrcl} & & 2y & \\ & & y & \\ & 2x & -2y & z = \\ \hline \mathrm{I} & & & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & 2x & -2y & = \end{array}$$

[illegible] und III sind identisch: $\Rightarrow x - y = 0$

Interpretation de[illegible]ge[illegible]ses: [illegible] diesem [illegible] sind zwei Variablen frei wählbar. Man erhält als Lösungsvektor eine Ebene, die der Ebene $x - y = 0$ entspricht, damit entspricht die Fixpunktmenge der Spiegelebene, d.h. alle Punkte auf dieser Ebene werden auf sich selbst abgebildet.

Ansatz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & -x + 2y & = 0 & \\ \mathrm{II} & y & = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \\ \mathrm{III} & 2x - 2y + z & = 0 & \end{array}$$

y in I $\Rightarrow \quad x = 0$

[illegible] $\Rightarrow \quad z = 0$

[illegible]nge aller Punkte an, die auf den Urs[illegible]uf den Ursprung gespiegelt werden. D[illegible]iegelung jedoch nur der Ursprung selbst[illegible]dere Punkt einen vom Ursprung verschied[illegible]hat. Dieses Ergebnis ist daher charakteristisch[illegible]lung.

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x'}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & -x + 2y & = x' & \\ \mathrm{II} & y & = y' & \mid -2\mathrm{II} \\ \mathrm{III} & 2x - 2y + z & = z' & \mid \mathrm{III} \\ \hline \mathrm{IV} & -x & & \\ \mathrm{V} & x & z = & \mid + \mathrm{V} \\ \hline & & z = 2x' & - z' \end{array}$$

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich durch die Addition nicht Null.

Interpretation des Ergebnisses: Da sich die [illegible]seite des [illegible] nicht so umformen lässt, dass [illegible]ei der Projekti[illegible] Null ergibt, als Ergebnis der [illegible]orm [illegible] $2x' - 2y' + z$ [illegible]ntsteht, existiert keine Bildmenge. Das [illegible]uch Sin[illegible] bei einer Spiegelung jeder Punkt individuell auf einen Bildpunkt [illegible]ebildet wird und somit keine einheitlich [illegible]eschreibende [illegible]ldmenge vorhanden ist.

Aufgabe 20[illegible]

Unters[illegible]un[illegible] Exi[illegible]nz einer in[illegible] Matrix bei Spiegelung

[illegible] Aufg[illegible] 18.6 wissen Sie bere[illegible], dass es zu einer Matrix A auch eine inverse Matrix A^{-1} geben ka[illegible] gilt: $A \cdot A^{-1} = E$.

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 20.2 wissen Sie, dass bei Spiegelungen gilt: $S^2 = E$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zusammenhänge angewendet, um zu untersuchen, ob zu einer Spiegelmatrix S eine inverse Matrix S^{-1} existiert. Erläutern Sie die Zeilen (2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) We[illegible]

$S \cdot (S \cdot S^{-1}) = S \cdot E$ _____

(3) _____

(4) $S^2 \cdot S^{-1} = S$ _____

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

(5) $E \cdot S^{-1} = S$

oder $S^{-1} = S$

Ergebnis: Wenn eine inverse [illegible]ert, gilt bei einer Spiegelung [illegible] = S

Übungen

Ü[illegible].1 [illegible]ntersuchen Sie die orthogonale Spiegelung [illegible] der Ebene x – z = 0 in Ihrem Heft.

a) Zeigen Sie, das[illegible] sich als Spiegelmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $S^2 = E$ erfüllt ist.

c) Zeigen [illegible], dass die Fixpunktmenge der Spiegelebene entspricht.

d) Zeigen Sie, dass [illegible] Kern der Abbildung dem Nullvektor entspricht.

e) Zeigen Sie, dass keine Bildmenge existiert.

Ü20.2 [illegible] Sie durch Rechnung, dass es sich bei der [illegible] eine orthogonale Spiegelung [illegible]andelt, indem Sie die [illegible]xpunktmenge, den Kern und die Bildmenge [illegible]suchen.

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a
selbstorganisiert rlen en

Kap

Zentrische Strec
aus dem Ursprung

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U igkeit 47

Geraden in der Ebene und Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V od reuzpr kt 65

Eben un

Kap 12 – D llung von Ebenen 69
Kap 3 – Be dere Ebenen 81
Kapitel ebeziehung ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw el 105
Kapitel 17 – Eben scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
..... enungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa bra selbstorganisiert erlernen (L 031-266)
S

rbehalten. ghts reserved.
K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 21: Zentrische Streckung aus dem Ursprung

Aufgabe 21.1

Eigenschaften von Streckmatrizen bei zentrischer Streckung a[illegible]rsprung

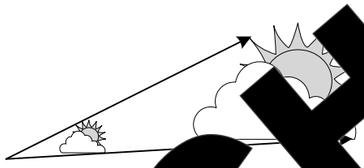


Abb. 21.1

Die Abbildungen 21.1 und 21.2 zeigen jeweils zentrische Streckungen von Bildern und Vektoren. Sie haben bereits gelernt, dass man Vektoren durch Multiplikation mit einer reellen Zahl verlängern bzw. verkürzen und diese Streckung umkehren kann. Neu ist nun, dass man diese bekannten Operationen die Bedeutung einer linearen Abbildung zuordnet und eine Abbildungsmatrix erhält.

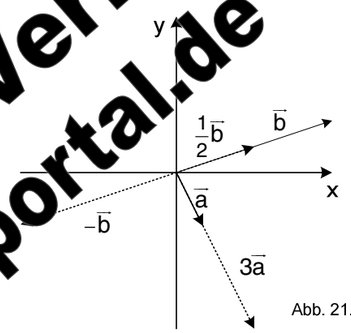


Abb. 21.2

Die folgende Umformung zeigt die Herleitung der Streckmatrix der Ebene.

a) Übertragen Sie das Vorgehensweise auf Vektoren im Raum und leiten Sie die entsprechende Streckmatrix ab.

Streckmatrix der Ebene: $\vec{x}' = u\vec{x} = u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux + 0 \\ 0 + uy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}}_{\text{Streck-matrix Ebene}}\vec{x}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & _ & _ \\ _ & u & _ \\ _ & _ & u \end{pmatrix}$

_____

[illegible]zen Sie: Eine Streckmatrix erkennt man da[illegible]gonalen drei _____

Zahlenwerte stehen und in allen restlichen Feldern eine _[illegible]int.

c) Eigenschaften [illegible]

Verd[illegible]olgenden Angaben, inwiefern da[illegible]ergebnis bei einer ze[illegible]rsprung von dem Zahlenwert u in de[illegible]matrix abhängt.

[illegible] $\Rightarrow$ Streckung in Richtung des Vektors $\vec{x}$

[illegible]u = 1 $\Rightarrow$ A entspricht der Einheitsmatrix [illegible]nd bildet $\vec{x}$ auf si[illegible]
Damit liegt für u = 1 keine ze[illegible] Streckung vor.

[illegible] < u < 1 $\Rightarrow$ Verkürzung des Vekto[illegible]

u = 0 $\Rightarrow$ Abbildung des Vektors $\vec{x}$ auf den Ursprung. In diesem Fa[illegible]gt **kein**[illegible] zentrische Streckung vor.

−1 < u < 0 $\Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung mit Verkürzung de[illegible]tors $\vec{x}$

u = −1 $\Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung

u < −1 $\Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung mit Streck[illegible]des Ve[illegible]x

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei der zentrischen [illegible]kung, [illegible] für $u \neq 1$ u[illegible] $\neq 0$.

Fixpunktmenge: $A\vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & [illegible] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ [illegible] \end{pmatrix}$

Lösen des LGS: $\left.\begin{matrix} ux = [illegible] \\ [illegible] = y \\ [illegible] = z \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}$

Interpretatio[illegible] Da die Fixpu[illegible]nge alle Pu[illegible]iert, die auf sich selbst
Ergebniss[illegible]gebildet werden, kann, wie das Ergebnis zeigt, nur der Ursprung
die Fixpunktmenge sein, d[illegible] der Nullvektor wird auf sich selbst
abgebil[illegible]

Ke[illegible] $A\vec{x} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösen des LGS: $\left.\begin{matrix} ux = 0 \\ uy = 0 \\ [illegible] \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Int[illegible] [illegible]f den Ursprung abgebildet werden.
[illegible]ullvektor, da außer dem
Ursprung selbst k[illegible]en Ursprung abgebildet
wird.

Bildmenge: $A\vec{x} = \vec{x}'$ $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ [illegible] & [illegible] & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Lösen des [illegible] $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} ux = \bar{x} \\ uy = \bar{y} \\ uz = \bar{z} \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$ keine E[illegible]n x, y und z auf der [illegible] möglich

[illegible] des [illegible]s:

Jeder Punkt hat einen indi[illegible]en Bildpunkt. Da[illegible] keine einheitlich anzugeben[illegible]ge.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 23
Drehungen

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme
Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung
Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineaf ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau
Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un
Kap ... 12 – L ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen
Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

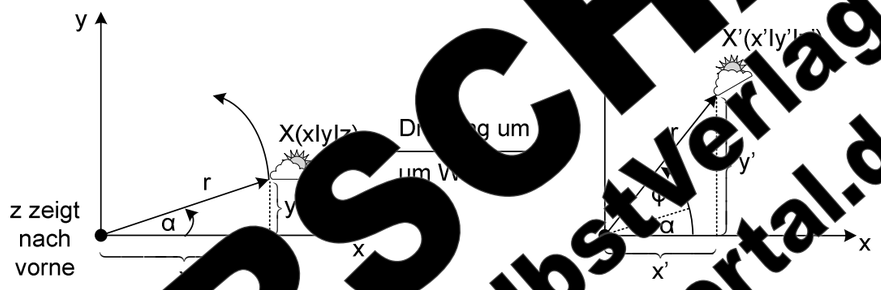
... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 22: Drehungen

Aufgabe 22.1

Die Betrachtung von Drehungen beschränkt sich hier auf die Dreh[illegible] die Koordinatenachsen. In der folgenden Abbildung ist die Drehachse die z-Achse und zeigt nach [illegible] der Papierebene heraus. Die Position der Wolke vor und nach der Drehung wird durch die Koordinaten des Punktes X bzw. X' angegeben. Verdeutlichen Sie sich die Herleitung der Drehmatrix bei der Drehung um die z-Achse, indem Sie die Umformungen erläutern.



$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \Rightarrow x = r\cos\alpha$ $\qquad x' = r\cos(\alpha+\varphi)$

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \Rightarrow y = r\sin\alpha$ $\qquad y' = r\sin(\alpha+\varphi)$

$z = z$ $\qquad z' = z$

Mit [illegible] der Additionstheoreme (vgl. Tafelwerk)

$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi$

$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$

ergeben sich folgende Umformungen bei der Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse. Erläutern Sie die Schritte (1) bis (4).

(1) [illegible] (1) _____

(2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi \\ r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

(3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x\cos[\text{illegible}] \end{pmatrix}$ (3) _____

$\begin{pmatrix} [\text{illegible}]\varphi - y\sin\varphi + 0 \\ [\text{illegible}]\sin\varphi + y\cos\varphi + 0 \\ 0 + 0 + z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix } M[\text{illegible}]} \vec{x} = M\vec{x}$ (4) _____

Wenn man die Betrachtungen zur Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse auf Drehungen um die x- und y-Achse überträgt, ergibt sich folgender Überblick über Drehmatrizen:

Drehung um die x-Achse

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehung um die y-Achse

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & [\text{illegible}] \end{pmatrix}$$

[illegible]g um [illegible] Achse

$$[\text{illegible}] = \begin{pmatrix} [\text{illegible}]\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22.2

Berechnen Sie

a) die Drehmatrix bei einer Drehung [illegible] 90° [illegible] die [illegible]se: $M = \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix}$

b) die Drehmatrix bei ein[illegible] 45° um die [illegible]se: $M = \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix}$

c) die [illegible] bei ei[illegible] Drehung u[illegible] 270° um die [illegible]chse: $M = \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix}$

Aufgabe [illegible]

Eigenschaften von Drehmatrizen

Die Betracht[illegible]oren von $M_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \underbrace{0}_{\vec{a}_1} & \underbrace{0}_{\vec{a}_2} & \underbrace{1}_{\vec{a}_3} \end{pmatrix}$

[illegible]er Spaltenvektoren

[illegible]eigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berech[illegible]ge bzw. der Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Drehm[illegible]ie Länge 1**.

$|\vec{a}_1| = \sqrt{\cos^2\varphi + [\text{illegible}]}$

$|\vec{a}_2| = [\text{illegible}]$

$|\vec{[\text{illegible}]}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Orientierung der Spaltenvektoren

Zeigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berechnung der [illegible]ige bz[illegible]er Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Dre[illegible]rix sin[illegible]e orthogonal.**

Def.: Orthonormale Matrizen

Matrizen, deren Spaltenvektoren normiert und pa[illegible]ise zu[illegible]nder orthogonal sind, nennt man orthonormale Matrizen

$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}=-\cos\varphi\sin\varphi\ [\text{illegible}]\ \sin\varphi\cos\varphi=0$$

$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_3}=\begin{pmatrix}___\\ ___\\ ___\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}___\\ ___\\ ___\end{pmatrix}=_____=0$$

$$\vec{a_2}\cdot\vec{a}\ [\text{illegible}]\ \begin{pmatrix}___\\ ___\\ ___\end{pmatrix}\ [\text{illegible}]\ _____=0$$

c) [illegible]rech[illegible] Drehw[illegible]ls

D[illegible] Drehwinkel lässt[illegible]über die Sp[illegible] Matrix berechnen.

Def.: Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix [illegible] die Summe der Elemente in der Diagonalen.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & \dots\\ \dots & a & \end{pmatrix}\qquad \text{Spur } A=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

[illegible]er gilt: $\cos\varphi=\frac{1}{2}$(Spur [illegible] – 1)

Zeigen Sie, dass die Matrix $D=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ eine Drehung [illegible] die z-Achse bewirkt.

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei Drehmatrizen

Fixpunktmenge: Bei einer Drehmatrix werden nur die Punkte der Drehachse au[illegible] abge[illegible]et. Daher ergibt sich bei der Fixpunktmenge die Drehac[illegible]lso die [illegible]z-Achse als Lösung.

Kern: Der Kern liefert alle Punkte, die auf den Urs[illegible]g abg[illegible]. Daher liefert der Kern ebenfalls den Nullvektor, da außer [illegible]Irspr[illegible]elbst kein weiterer Punkt auf den Ursprung abgebildet wi[illegible]

Bildmenge: Eine einheitliche Bildmenge ist [illegible]bar, da[illegible] der Punkt i[illegible]uell auf einen eigenen Bildpunkt ab[illegible] wird.

Übungen

Ü22.1 Ermitteln Sie für die folgen[illegible] D[illegible]n die Drehmatr[illegible]n. G[illegible]ben Sie die [illegible]te ggf. in Vielfachen von $\sqrt{2}$ o[illegible] $\sqrt{3}$[illegible]

a) 45[illegible] die Z[illegible]se $D=\begin{pmatrix}___ & -[illegible] & 0\\ \sin[illegible] & \cos[illegible] & [illegible]\\ 0 & 0 & [illegible]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}$

[illegible]90° um di[illegible]x-Ac[illegible]se $D=\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}$

c) [illegible] $\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}$

d) 270° um die z-Achse $D=\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}$ [illegible]

[illegible]um die z-Achse $D=\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\\ ___ & ___ & ___\end{pmatrix}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 23

Verkettung von linearen Abbildungen

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineat ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... gigkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ebeziehung ... ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
... . 143
... ehungen 145
... **tel 23** – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

Kapitel 23: Verkettung von linearen Abbildungen

Aufgabe 23.1

a) Für ein Computerspiel soll die dreidimensionale Umgebung einer Burganlage auf 25% der ursprünglichen Größe verkleinert und auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden. Erläutern und ergänzen Sie die nachfolgenden Rechenschritte:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}$

(2.1) $E_P: \quad x$

$\vec{x} = \vec{\ } + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2.2) $x + r = 0$

$r = ___$

(2.3)

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) P(4/8/12)

$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= B \cdot \vec{p'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) $M = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{p''}$

(5) $N = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

(6) $M \cdot \vec{p} = N \cdot \vec{p} = \vec{p}$ $\Rightarrow$ B = B

b) Für e[illegible] sequen[illegible] Burganlag[illegible] 45° um die z-Achse gedreht und dann in [illegible]Be in Richtung [illegible]geraden $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden.

Erläutern Sie die nachfolgenden A[illegible]en und Rechenschritte und ergänzen Sie fehlende Angaben:

(1) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ & & \end{pmatrix}$

A

(2.1) $E_P: \quad x = 0$

$g_P: \quad \vec{x'} = \vec{\ }\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$

(2

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

(2.3)

$$\vec{x}' = \vec{x} - x\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+0\\2x+y+0\\0+0+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) P(4/8/12)

$$\vec{p}' = A\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\ 6\sqrt{2}\\ 12\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}'' = B\vec{p}' = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\6\sqrt{2}\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\12\end{pmatrix}$$

(4)

$$M = B\cdot A = \begin{pmatrix}0&0&0\\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix}0&0&0\\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\12\end{pmatrix} = \vec{p}''$$

$$N = A\cdot B = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

c) Ergänzen Sie anhand der Ergebnisse aus (6) in Aufgabenteil a) und (5) in Aufgabenteil b) folgenden Sätze:

Bei einer linearen Abbildung werden, wie im Aufgabenteil a) und b), zwei Abbildungen A und B nacheinander angewendet. Man bezeichnet das als **Verkettung** von Abbildungen. Dann gilt:

- Die Verkettung zweier linearer Abbildungen kann durch d_____ der beiden Abbildungsmatrizen berechnet werden.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Reihenfolge der Abbildungen keine Rolle spielt. In diesem Fall sind die Ergebnisse der Produkte $A\cdot B$ und $B\cdot A$ _____.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Ergebnisse der Produkte $A\cdot B$ und $B\cdot A$ unterschiedlich sind. Bei diesen Verkettungen ist die Reihenfolge der beiden Abbildungen _____ Rolle.
- Da es Verkettungen gibt, bei denen $A\cdot B \neq B\cdot A$ gilt, muss die _____, in der die Abbildungen ausgewertet werden, stets beachtet werden.

Wird die Abbildung A zuerst und die Abbildung B danach durchgeführt wird, gilt für die Gesamtabbildung:

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$
$$\vec{x}'' = B\vec{x}' = B(A\vec{x}) = B\cdot A\vec{x} = M\vec{x} \quad \Rightarrow M = _____$$

Aus dem Produkt $B\cdot A$ erkennt man, dass zuerst Abbildung A und danach Abbildung B ausgeführt wurde.

Ergänze

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel 24
Überblick lineare Abbildungen Ax = x'

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineare Kombination 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit 47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden 55
Kapitel 10 – Skalarprodukt 59
Kapitel 11 – Vektor- oder Kreuzprodukt 65

Ebenen und Raumebenen

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen 69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen 81
Kapitel 14 – Lagebeziehung zwei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittwinkel 105
Kapitel 17 – Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

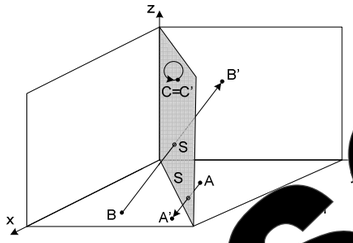
Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Kapitel 20 – [illegible] 137
[illegible] 143
[illegible] Verknüpfungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

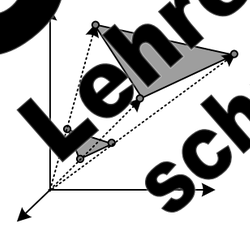
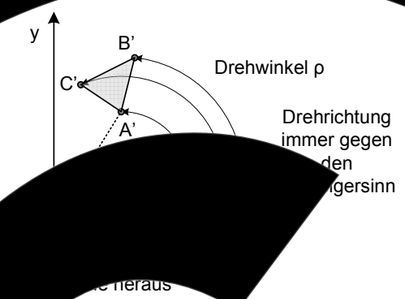
Gesamtwerk: Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen (ISBN [illegible]-031-266)
Sprache: [illegible]

[illegible] vorbehalten. All rights reserved.
[illegible], auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible] SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible] www.f-druck.de

Kapitel 24: Überblick lineare Abbildungen $A\vec{x} = \vec{x}'$

Abbil-dungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der Abbildungsmatrizen
Allge-meines	Bei einer "linearen" Abbildung $\mathbf{A\vec{x} = \vec{x}'}$ sind Projektionsgeraden und Projektionsebenen sowie Spiegelgeraden und Spiegelebenen immer Ursprungsgeraden bzw. Ursprungsebenen.	Grundlegend zu [illegible], wobei E die Einheitsmatrix [illegible] zu A inverse Matrix angib[illegible] **[illegible] und $E \cdot A = E$** **$\vec{x}' = E\vec{x}$ und $A^{-1} \cdot A = E$** **$E \cdot \vec{x} = \vec{x}$**
Verkettung	Werden zwei Abbildungen nacheinander ausgeführt, wird die gesamte Abbildung durch das Produkt der beiden Abbildungsmatrizen beschrieben, im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$, muss die Reihenfolge der Ausführung beachtet werden.	Es gilt: Matrix A beschreibt die erste Abbildung, Matrix B beschreibt die zweite Abbildung, dann folgt für die Verkettung M: $\mathbf{M = B \cdot A}$
Spiegelung		1. Eine einmalige Abbildung projiziert jeden Punkt P im Raum auf die Projektionsebene. Alle Punkte P' liegen auf der Projektionsebene und sind Fixpunkte. Es gilt: **1. Abbildung: $\vec{x}' = A\vec{x}$** **2. Abbildung: $\vec{x}'' = A\vec{x}' = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x}$** $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{A^2 = A}}$ 2. Es existiert **keine inverse Matrix A^{-1}**. Beweis: Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$ $A(A \cdot A^{-1}) = AE$ $(AA) \cdot A^{-1} = A$ $A \cdot A^{-1} = A$ $\Rightarrow$ Widerspruch! 3. Die Spalten von A sind linear abhängig. 4. Die Spalten von A liefern die Spannvektoren der Projektionsebene. 5. Die Bilder der Basisvektoren entsprechen den Spaltenvektoren. Ansatz für 1. Spalte: $\vec{x} + s\vec{u}$ etc. 6. Ist ein Spaltenvektor der Nullvektor, so entspricht die Projektionsrichtung der Richtung des entsprechenden Einheitsvektors.

Abbil-dungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der Abbildungsmatrizen
Spiegelung		1. Wendet man die Abbildung [illegible] mal an, so wird jeder Punkt X' wieder auf den ursprünglichen Punkt X bzw. zurück abgebildet bzw. zurückversetzt. **1. Abbildung: $\vec{x}' = A\vec{x}$** **2. Abbildung: $\vec{x}'' = A\vec{x}' = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x} = \vec{x}$** $\Rightarrow$ $\boxed{A^2 = E}$ 2. Wenn A existiert, gilt bei der Spiegelung: $\boxed{A^{-1} = A}$ Beweis: $A \cdot A^{-1} = E$ $A(A \cdot A^{-1}) = AE$ $(AA) \cdot A^{-1} = A$ $A^2 \cdot A^{-1} = A$ $A \cdot A^{-1} = A$ $A^{-1} = A$
Zentrische Streckung aus Ursprung		Die Streckmatrix hat immer die Form: $A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$ Das Abbildungsergebnis ist abhängig von u: $u > 1$ $\Rightarrow$ Streckung in Richtung von $\vec{x}$ $0<u<1$ $\Rightarrow$ Verkürzung $-1<u<0$ $\Rightarrow$ Spiegelung mit Verkürzung $u = -1$ $\Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung $\Rightarrow$ Spiegelung mit Streckung
Drehung		Z[illegible]r für Drehung um die [illegible] Form: $M_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & [illegible] \\ \sin\varphi & [illegible] \\ 0 & [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos-\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos-\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. Spaltenvektoren [illegible] Länge 1. 3. Spaltenvektoren sind [illegible] orthogonal. 4. Drehwinkel $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1) = [illegible] + a_{33} - 1)$ 5. Zusätzliche Information: [illegible] Determinante gilt [illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Die Ergebnisse der Berechnung der Fixpunktmenge, des Kerns und der Bildmenge liefern für jede Abbildung charakteristische Ergebnisse.

Abbildungsart	Fixpunktmenge $A\vec{x} = \vec{x}$	Kern $A\vec{x} = \vec{0}$	Bildmenge $A\vec{x} = \vec{x}'$
Definitionen	Die Fixpunktmenge liefert alle Punke, die bei der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.	Der Kern liefert als Ergebnis die Menge aller Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden.	Die Bildmenge ist nur bestimmbar, wenn der Ort der abgebildeten Punkte auf einer Geraden oder einer Ebene liegt.
Ergebnisse bei der Projektion	**Projektionsebene** Erläuterung: Bei der Projektion ist im R^3 die Ebene, im R^2 die Gerade auf welche die Punkte des Raumes bzw. der Ebene projiziert werden, auf der Projektionsebene bzw. den Punkten auf sich selbst abgebildet und bilden daher die Fixpunktmenge.	**Projektionsgerade durch den Ursprung** Erläuterung: Alle Punkte, die auf der Projektionsgeraden durch den Ursprung liegen, werden auf den Ursprung abgebildet.	**Projektionsebene** Erläuterung: Das Ergebnis ist identisch mit der Fixpunktmenge, da die Menge aller Bildpunke auf der Projektionsebene liegen. Der Ansatz $A\vec{x} = \vec{x}'$ führt auf ein LGS, bei dem durch entsprechende Addition auf der linken Seite 0 entstehen muss. Auf der rechten Seite ergibt sich dann die Gleichung der Projektionsebene.
Ergebnisse bei der Spiegelung	**Spiegelebene** Erläuterung: Alle Punkte auf der Spiegelebene werden auf sich selbst abgebildet und gehören damit zur	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Alle Punkte außerhalb von E werden auf einen individuellen Punkt außerhalb von E abgebildet. Die Punkte auf E sind Fixpunkte, damit wird nur der Ursprung auf den	**existiert nicht** Erläuterung: Jeder Punkt, außer den Fixpunkten auf der Spiegelebene, hat einen individuellen Bildpunkt. Damit kann man keine Ebene oder Gerade als Bildmenge bestimmen. Bei der Rechnung lässt sich die linke Seite des LGS nicht auf Null bringen.
Ergebnisse bei der zentrischen Streckung	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Nur	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	**existiert nicht** Erläuterung: Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt.
Ergebnisse bei der Drehung	Erläuterung: Alle Punkte auf der Drehachse sind Fixpunkte.	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	**existiert nicht** Erläuterung: Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
LehrerSelbstverlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de
©