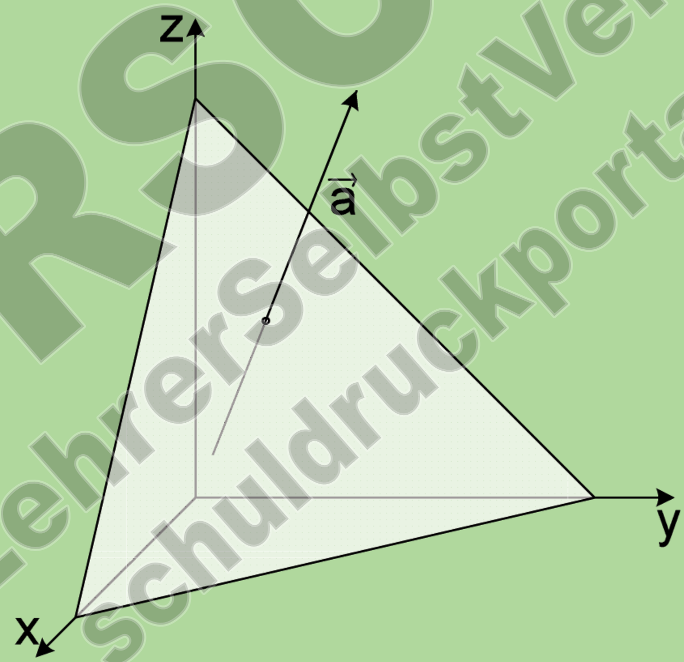
Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-031-266

Umschlag Vorderseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i... Rau...

Ebe...

Lineare Abbildungen

Gesa... ...bra selbstorganisiert erlernen (... -031-266)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F...

Lineare A...bra

selbst...ganisiert ...lernen

...e Mathematik

...estellnummer 02-031-266

Stand: 21.07.2014

…eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2013
…erselbstverlag.de

www.f-druck.de

Lineare Abbildungen

Vorwort

Die Konzeption des vorliegenden Arbeitsbuches beruht auf meinen langjährigen Unterrichtserfahrungen in der Oberstufe von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Im Mittelpunkt der Zielsetzung steht hier, den Schülerinnen und Schülern einen übersichtlichen Weg durch die Vielfalt der Methoden und Lösungswege in der linearen Algebra aufzuzeigen. Demzufolge haben die einzelnen Kapitel eine zusammenhängende, aufeinander auf[illegible]de Struktur, wobei für die jeweilige Pro[illegible]stellung meist nur ein Lösungsweg zum Ansat[illegible]mt. Ergänzt durch Übungsaufgaben a[illegible]ulb[illegible]rn oder anderen Quellen, erhalt[illegible] die Schülerin[illegible] und Schüler einen umfassende[illegible]er die im Inhaltsverzeichnis a[illegible]teten Theme[illegible]ie im Wesentlichen den A[illegible]gen [illegible]sischen Landesabiturs im [illegible]d- [illegible] Leistungskurs entsprechen.

Die For[illegible] A[illegible]eng[illegible]tung stellt eine Anleitung fü[illegible]lbstorg[illegible]ierte Lernformen [illegible]ar. In der P[illegible] b[illegible] sich L[illegible]teams, in de[illegible] die Schülerin[illegible] un[illegible]n Dialog die Inhalte überw[illegible]gen[illegible]elbständig erarbeiten. H[illegible]ig kommu[illegible] [illegible]d[illegible]eams in den Le[illegible]ppen, in de[illegible]iese Le[illegible]praktizier[illegible]wird und zum Sta[illegible] geworden ist, auch untereir[illegible]der und ta[illegible]schen Erkenntnisse sowie Einsichten zur The[illegible]tik aus. Während leistungsstärkere Teams die Aufgabenstellungen und zusätzliche Übungen in der Regel ohne weitere Hilfe bewältigen und [illegible] bietet diese Unte[illegible] den [illegible] [illegible]ng ihrer Kompetenzen zu [illegible] [illegible]e Aufgabenstellungen erfordern zudem, [illegible] dargestellte Sachverhalte oder Zusammenhänge zu beschreiben sowie Ansätze zu begründen. Dadurch werden neben rein themenspezifischen auch sprachliche Kom[illegible]ichtlich der Verwendung der [illegible]. Lehrerzentrierte[illegible]el nur noch zu Be[illegible]Wiederholung und[illegible]esprechung von H[illegible]att. Damit wird den Erkenntnissen [illegible]rie und den daraus resultierenden For[illegible] selbstorganisierte Lernformen einzusetzen [illegible]mfänglich Rechnung getragen.

Oberstudienrätin Ursul[illegible]

Kommentare vo[illegible]hülern[illegible] und Schülern

„Ich finde [illegible] dass man, wenn man mal kra[illegible]k ist, zu[illegible]us[illegible]beitsbuch nachvollziehe[illegible]nn, w[illegible] Unterricht gemacht wurde. Dan[illegible]t ma[illegible]e Chance, anschließend ohne L[illegible]er [illegible]itarbeiten zu können.“

„[illegible] finde es gut, k[illegible]lose Blätter zu haben. M[illegible] verliert kei[illegible]eiten und hat am Schluss alles übersicht[illegible] und komple[illegible]“

Zi[illegible]gruppe

[illegible]e Unterla[illegible] sind primär für den Unterricht im Grund- u[illegible]ungskurs in der gymnasialen Oberstufe [illegible]ckelt worden, können aber auch an allen Ein[illegible]ungen, in denen die allgemeine Hochschulr[illegible] erworben werden kann, eingesetzt werden.

Ebenfalls ist das Konzept für Fachoberschulabsolventen geeignet, die an Hochschulen bzw. Fachhochschulen einen Studiengang wählen, der Mathematik beinhaltet. Angehende Studentinnen und Studenten, die keine oder nur sehr geringe Kenntnisse im Bereich der Linearen Algebra haben, können sich selbständig oder im Rahmen von Vorbereitungskursen in die für das Studium notwendige Thematik einarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik [illegible] Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vor[illegible]eignet, da die Unterlagen die Bedürfnisse [illegible]e „Zugangsproblem in Mathematik“

Metho[illegible]daktische Anmerku[illegible]

Die Unterlagen[illegible]ausgerichtet, dass die Schülerinnen und[illegible]tgehend eigenständig und individuell in [illegible]aber auch zu Hause die einzelnen Them[illegible] sowie bei Fehlzeiten nacharbeiten kön[illegible]ausaufgaben kann de[illegible] zeitliche Rahmen[illegible]esteuert werden, [illegible]alle vom Lehrpla[illegible]iebenen Themen [illegible]ufe des zur Verf[illegible]enden Halbjahres [illegible]itet werden kön[illegible]

Da alle Kapitel aufeinander aufbauen, ist eine lückenlose Bearbeitung der einzelnen Aufgaben notwendig. Auf eine vollständig umfassende Theorie der linearen Gleichungssysteme wird zugunsten einer exemplarischen und anschaulichen Darstellung der Thematik verzichtet. Die hier angeführten Beispiele orientieren sich überwiegend an Bedürfnissen, die sich aus den Aufgabenstellungen der folgenden Kapitel ergeben.

Die Gestaltung der Unterlagen ermöglicht es, das Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse v ständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben w den, sodass keine unübersichtlichen lo blätte sammlungen entstehen und alle ormationen ohne Suchaktionen schnell nachges en werden können. Die Lösungen zu Aufgabe d Übungen des Arbeitsbuchs werde eine stellung automatisch als P tei mit a die Unterlagen ergänzen lbuch eingesetzt werden, sind a Stellen, de pielsweise weitere Vertief durc ngsaufgaben gewünscht sind Platzha ein igt worden, dass Verweise de Lehrer auf zu ätzliche Übungsaufga bersic h notiert w können.

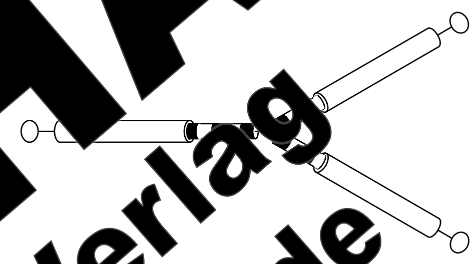
Anregung nd Verbess ngswünsche zu diesem Arb buch werden erne entgeg genommen und nen de Verlag per Mail der Adresse ce@lehr bstverlag.de zug endet werden.

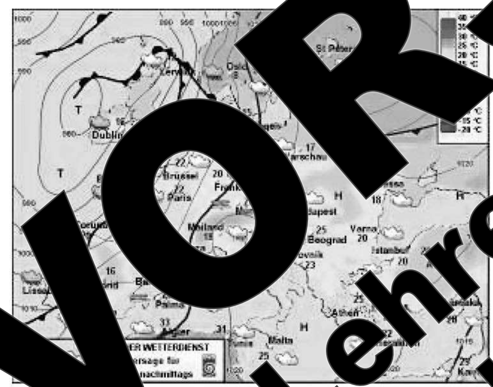
Vorbetrachtungen

Der Bezug zur Realität ist im Fach Mathematik häufig die Voraussetzung für d zepta Neues zu lernen. Daher sollen an dieser Stelle, bevor der Einstieg in das The eare A em sehr abstrakt und anwendungsfremd erscheinenden Gebiet der linearen ssyst erfolgt, zunächst einige Beispiele für praktische Anwendungen erläutert werden.

Vektoren in der Physik

Der der aus dem Physikunterricht bekannte Begriff d Vektors spielt eine zentrale Rolle in der lineare Algeb e Sie sicherlich wissen, besitzen alle Größen e Richtung haben, einen vektoriellen Chara Dies bedeute beispielsweise bei Kräften, die in untersch che Richtungen wirken, dass man die e einfa addieren darf.



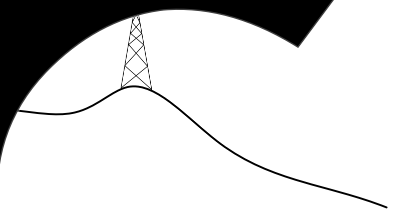


Wetterkarte und lineare Algebra

Die rstellung v etterkarten mit der Berechnung von Windstärke, Wi chtung und der Bewegung der Tief- und Hochdru ebiete basiert auf der Anwendung Vektorrechnung.

Computerspiele programmieren

Bei der Progr d der dreidi f einem Z g bzw. der linearen Algebra au n Eindruck passenden Stellen des Bildsch iert.



Flugsicherung

Die Berechnung von und Abständen b Flugbewegungen nfalls zusätzlich r der Einbeziehu richtung, wird ilfe der linearen . der rrechnung ermö

Raum für Notizen

Kapitel 1: Lineare Gleichungssysteme 2. Ordnung

Allgemeines

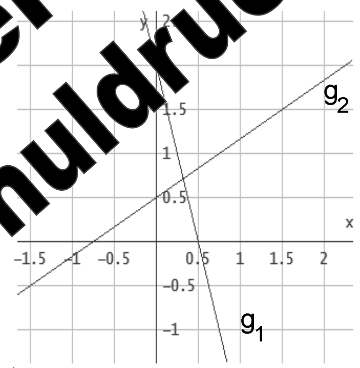
Der Umgang mit linearen Gleichungssystemen (LGS) gehört zu den [illegible]den Arbeitstechniken der linearen Algebra. Neben vielseitiger Verwendung bei Anwe[illegible]ungspr[illegible]em[illegible]en Sie lineare Gleichungssysteme bereits aus Schnittpunktberechnungen [illegible] Gerad[illegible]er auch aus Rekonstruktionsaufgaben von ganzrationalen Funktionen. In [illegible]m K[illegible]el werden lineare Gleichungssysteme zunächst anhand von Schnittp[illegible]rob[illegible]ei G[illegible]aden in der Ebene behandelt, um die Bedeutung von Lösungen möglichst anschau[illegible]uste[illegible]. Im weitere[illegible]rlauf des Kurses werden Sie feststellen, dass die Lösungen v[illegible]aren[illegible]chungssystemen[illegible]ch noch andere, auf den jeweiligen Kontext der Aufgabenstellung b[illegible]gene, Bede[illegible]en haben [illegible].

Aufgabe 1.1

Bekanntes aus neuem Blick[illegible]ttpunktproble[illegible] bei Geraden [illegible]r Ebene

Verdeutlichen Sie si[illegible]d der f[illegible] Beisp[illegible]e die Schreibwe[illegible]n im Umgang mit linearen Gleichungssyste[illegible]inde[illegible]Sie die [illegible]chnungen für die drei darge[illegible]lten Fallbeispiele nachvollziehen und anschließend [illegible]ssung verv[illegible]digen.

a) Beis[illegible]i Ge[illegible]n schneiden [illegible]



[illegible]ttpunktproblem in der Schreibweise der linearen Algebra

[illegible]gebildeten Geraden werden der Analysis [illegible] Funktionsschreibweise bzw. mit y links von Gleichheitszeichen dargestellt.

Gerade g_1: $y = -4x + 2$

Gerade [illegible]

[illegible]ebra können Gleichungen für Ge[illegible]e wie folgt vorliegen, wobei je nach [illegible]nd y als x_2 bezeichnet werden k[illegible]ebildeten Geraden gilt dann:

Gerade g_1: $4x_1$ [illegible]der $4x + y = 2$

Gerade g_2: $4x_1 - 6x$[illegible]er $4x - 6y = -3$

Umformen der Gerade II

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x - 6y = -$[illegible]

In der Analysis werden Schnittpunkte in der Regel durch Gleichsetzen berechnet:

$$g_1 = g_2$$
$$-4x + 2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$
$$\frac{14}{3}x = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{9}{28} \approx 0{,}32$$

Einsetzen von x in eine der beiden Gleichung

liefert $y = \frac{5}{7} \approx 0{,}71$

In der linearen Algebra löst m die Gl ungs-systeme meist mit Hilfe des ionsver ens oder Einsetzungsverfahrens. F ses B piel bietet sich das Additi erfahre man die zweite von der e chung ahiert:

$$\text{I} \quad 4x + y$$
$$\text{II} \quad 4x - 6y = \quad -\text{II}$$

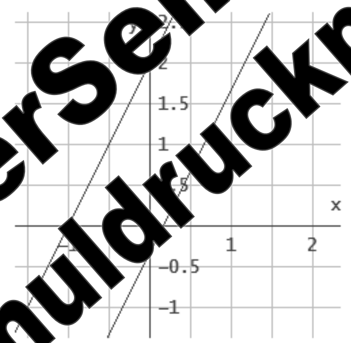
$$y = \quad y = \frac{}{7} = 0{,}71$$

etze y in eine der bei chungen liefert wie Gleichsetz ahren der Analysi

$$x = \frac{9}{28} \approx 0{,}32$$

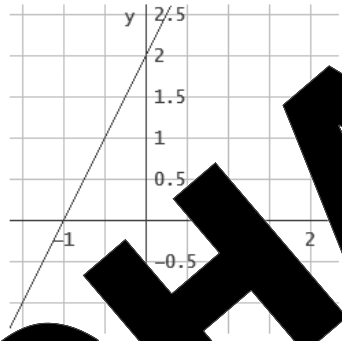
Der Begriff Additio sverfahren wird auch endet, wenn die Gleichungen subtrahiert.

b) Beispiel 2: Zwei Ge n s parallel



Schreibweise in der Analysis	Schreibweise in der linearen Algebra
Die Abbildung	Die beiden abgebildeten Geraden können auch folgt dargestellt werden.
$\frac{}{3}$	$= 2$
Schnittpunkt durch Gleichsetzen berechnen:	Mit H erfahrens erhält man hier anal tzungsverfahren einen Widerspruc
aus: $2x + 2 = 2x + \frac{1}{3}$	$\text{I} \; -2x + y = 2$ $\text{II} \; 6x - 3y = 1$ $\text{I} \; -6x + 3y = 6$ $\text{II} \; 6x - 3y = 1 \quad \vert \text{I} + \text{II}$ $0 = 7$
Wen ruch er	Wenn das Additionsverfa em Widerspruch führt kann m ext der Aufga nstellung auf para en

c) Beispiel 3: Zwei Geraden sind identisch



Schreibweise in d Analy	Sc eibweise in der li Algebra
Bei zwei identischen G den in der Analysis auch identisch chungen vor:	Bei wei entischen G aden können sich die Glei ungen in de aren Algebra durch ein aches untersc eiden:
g_1: y = 2 g_2: y = 2x +	g_1: −2x y = 2 g_2: 2y = −4
erk sofo ss man durch ichsetz ie Lösung 2 = 2 oder 0 = 0, also allgem gültige Lösun hält. D.h. bei V r Lösung in dieser Form k man schließ ss die beid Geraden identisch Damit ist d LGS für nendlich viele W von x und y lösbar, da der Punkt der Geraden L g für das LGS ist.	it Hilfe des Additionsverfahrens erhält man, links nebenan, den allgemeingültigen Ausdruck 0 = 0 und die gleiche Interpretation für das Ergebnis.

Zusammenfa Gleichungssystemen mit 2 Gleichungen und 2 Vari

nn es

____________ Lösung für jede der beid

2. __________ Lösung geben, da bei der Rechnung ein W ht, und

3. _________________ viele Lösungen geben.

Aufgabe 1.2

Allgemeine Betrachtungen zu linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen und mehr als zwei Gleichungen

Die Lösungsansätze vieler Aufgaben in der linearen Algebra führen auf lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen aber mehr als zwei Gleichungen. Man bezeichnet solche Gleichungssysteme auch als **überbestimmte** lineare Gleichungssysteme. Veranschaulichen Sie sich anhand der folgenden Beispiele, wie die Lösung schrittweise berechnet wird und was dabei beachtet werden muss. Übertragen Sie Ihre Überlegungen jeweils auf die Aufgabenstellungen in folgenden Übungsaufgaben:

Beispiel 1: Überbestimmtes LGS mit eindeutiger Lösung

Schritt 2:
Zum Lösen eines LGS mit zwei Variablen benötigt man zwei Gleichungen. Daher lässt man für die Ermittlung von x und y eine der Gleichungen zunächst völlig außer Acht. Man wählt am günstigsten die Gleichung mit Zahlenwerten aus, die keinen umfangreichen Rechenaufwand erwarten lässt. Hier wird die Gleichung I zunächst weggelassen.

Schritt 1:
Die gegebenen Gleichungen mit den römischen Ziffern I, II und III kennzeichnen und notieren, dass ... untereinander stehen.

Schritt 3:
Rechts neben den Gleichungen angeben, welche Gleichungen addiert oder subtrahiert werden.

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & 2x - y = 4 & \\ \text{II} & x - y = 1 & \\ \text{III} & x + y = -3 & \text{II + III} \\ \hline & 2x = -2 & \\ & x = -1 & \end{array}$$

Schritt 4:
Additionsverfahren mit den zwei ausgewählten Gleichungen.

Schritt 5:
... Addition verwendet wurde, berechnet werden. Man könnte auch Gleichung II nehmen.

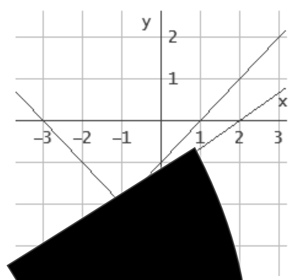
... y = –3
... –2

x und y in I einsetzen: ... = 4
... 4

Lösung: (–1/–2)

Schritt 6:
Beide ... die ... Gleichung eingesetzt werden. ... Gleichung erfüllt, gibt ... Lösung für das LGS.

Geometrische Deutung der Lösung:



... Geraden schneiden ... Punkt S(–1/–2).

Beispiel 2: Überbestimmte lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

Oftmals hängen die notwendigen Schritte bei der Lösung von Gleichungssystemen davon ab, welche Gleichungen für das Additionsverfahren verwendet werden und welche Gleichung man zunächst weglässt. Dies soll durch die Lösungswege 1 und 2 für die folgenden linearen Gleichungssysteme verdeutlicht werden. Die einzelnen Lösungsschritte erfolgen analog zu Beispiel 1.

Lösungsweg 1:

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & -2x + 4y = 6 & \text{I zunächst weglassen} \\ \text{II} & x - 2y = 3 & \\ \text{III} & 3x + 2y = 1 & \text{II + III} \\ \hline \text{IV} & 4x = 4 & \\ & x = 1 & \end{array}$$

x in II einsetzen: ... – 2y = 3

x und y in I einsetzen: ... + 4(–1) = 6
–2 – 4 = 6
... ⇒ Widerspruch

Lösung: ... keine

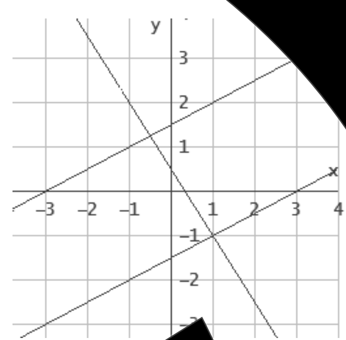
Bei einem überbestimmten LGS müssen die mit zwei Gleichungen ermittelten Lösungen immer in der nicht verwendeten Gleichung getestet werden.(Vgl. Schritt 5 bei Beispiel 1) Bei einem Widerspruch ist das gesamte LGS nicht lösbar.

Lösungsweg 2:

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & -2x + 4y = 6 & \\ \text{II} & x - 2y = 3 & \text{I + 2II} \\ \text{III} & 3x + 2y = 1 & \text{... zunächst weglassen} \\ \hline \text{IV} & & \end{array}$$

... nach Wahl der Gleichungen kann der Widerspruch auch sofort auftreten.

Geometrische Deutung der Lösung:



... gibt keinen gemeinsamen Schnittpunkt, da ... Geraden parallel ...

Beispiel 3: Überbestimmte LGS mit unendlich vielen Lösungen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -2x+4y=-6 \\ \text{II} & x-2y=3 \\ \text{III} & 3x-6y=9 \\ \hline \text{IV} & 0=0 \end{array} \quad \Big|\ 3\text{II}-\text{III oder I}+2\text{II oder }3\text{I}+2\text{III}$$

Je... Additio... Su...ktion führt zum Erg...is 0... alle drei Gleic...n identisch sind.

Da alle drei Gleichungen identisch sind, steht ... dem ...blem, nur eine Gleichung für die Bestimmung von x und y zu haben. Wie Sie ...erlich bereits ...en, benötig... man für die Bestimmung von zwei Variablen auch zwei G...chungen. ...ie folgenden Überlegungen zeigen, wie man vorgehen kann, um dieses Problem zu l...

Ermittlung einer allgemeingültige...

y frei wählen: ... $= r$

y in II einsetzen ... $x = 3 + 2r$

Lösung: $(3 + 2r\ /\ r)$

Info: ...s unendlich viele Lösungen geben k..., wählt man als Lösung für y eine beliebige Z... in Form eines **Parameters** $r \in \mathbb{R}$.

...: Man ...net diese Lösung auch als parametrisierte Lösung, ... sie vom Parameter r abhängt. Parametrisi... Lösungen hängen von der Wahl des Paramters ab und können damit unterschiedlich sein. Wählt man, wie in d... $x = r$, ergi...

Alternative Lösung:

x frei wählen: $x = r$

x in II einsetzen: $r - 2y = 3$; $-2y = 3 - r$; $y = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$

...: $(r\ /\ \frac{1}{2}r - \frac{3}{2})$

Geometrische Bedeutung der parametrisierten Lösung:

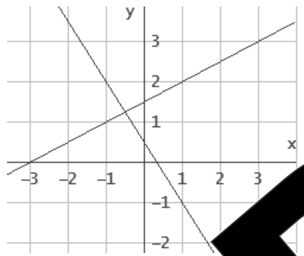
Fasst man jed... ...GS als Geradengleichung au... ...es sich um die gleichen G... ...en identisch sind. Formt man jed... ...ngen in die aus der ... um erhält man für alle drei Gleichung... . Ein Vergl... ...ametrisie... Lösung bei alternativer Lösung mit der Wa... ...zeigt, dass sich ...ng bei y der gleiche Ausdruck wie für die Gerade ergibt. Darau... ...chtlich, dass e... ...isierte Lösung eine Gerade beschreiben kann.

Beispiel 4

Im folgenden Beispiel entsteht durch Addition von Zeile I und II ein Ausdruck ... Form 0... . Begründen Sie anhand der Abbildung und durch Vervollständigung des Textes, warum es ...trotz... eine eindeutige Lösung gibt, die als Schnittpunkt von drei Geraden inter... werde...

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -2x+4y=6 \\ \text{II} & x-2y=-3 \\ \text{III} & 3x+2y=1 \\ \hline \text{IV} & 0=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{I}+2\text{II} \\ \\ \text{III zunächst weglassen} \\ \\ \end{array}$$

Bei ei... überb... LGS bedeut... 0 = ...eile nicht, dass ...unen... ...iele ...ungen gibt, da ...ve... ...ssen Gleich...gen no... ...rücksi...gt werden ...ssen.



Gleichung I u... ...leichun... repräsentieren ...ie ______________ Gerade. Die ... Gera... ...so ______________ und ...gen über-ei... ...iden Geraden ...ben daher genau einen ______________ ... der Gerade, die durch Gleichung III repräsentiert wird. ...eser ...punkt ist d... ______________ des LGS.

W... ...bei einem überbestimmten LGS eine 0= 0 Zeile entsteht, muss man das Lösungsverfahren mit anderen Gleichungen neu beginnen.

I -2... ...$4y = 6$ | I zunächst weglassen
...$y = -3$
$3x$... $= 1$ | II + III

$x = -\frac{1}{2}$

...etzen in II lie... $y = \frac{5}{4}$. Damit ist (–0,5 / 1,25) die Lösung des LGS.

Übungen:

Prüfen Sie, ob die ... ...chungssysteme eine eindeutige oder eine parametrisierte Lösung b... ...e Lösung und ordnen Sie die Lösungen den Abb... ...ten Beispielen dargestellt, auf eine

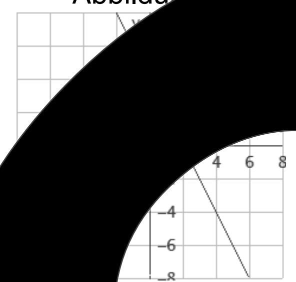
a) ...$y = -2$; ...$x - y = -1$; $x + 2y = 9$ (Lösung: (1/4))

b) $x + 2y = 8$; $-x + 3y = 6$; $2x + y = 4$ (Lösung: keine)

c) ... $7x$... (Lösung: ...)

d) $4x + 2y = 8$; $2x = 4 - y$; $3y = 12 - 6x$ (Lösung: (r / 4-2r))

Abbildung ...



...2

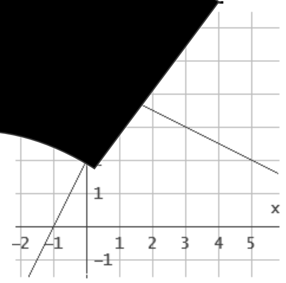
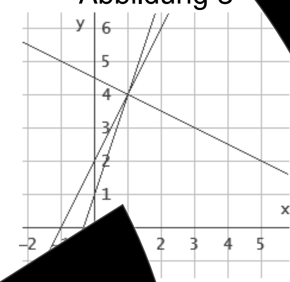
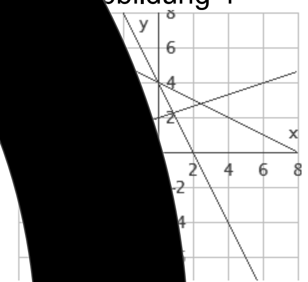


Abbildung 3



...bbildung 4



...r Rechnungen auf der folgenden Se...

Erg... ungen: ______________________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge...ra
selbstorganisiert ...le...en

Ka...

Lineare Gleichungss...
...mit drei Variablen

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und ... Rau...

Ebe...

Lineare Abbildungen

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Erweitert man die Betrachtungen der Ebene auf den dreidimensionalen Raum, ... komm... den Richtungen x und y eines Koordinatensystems in der Ebene die dri...ichtung ... ...aum hinzu. Damit entstehen bei Aufgabenstellungen der linearen Algebra Glei...steme, ...rei Variablen enthalten können. Im Folgenden werden die für lineare Gleichungss...eme ...wei Variablen erfolgten Untersuchungen auf die Betrachtung von linearen Gleichu...system... ...ariablen erweitert.

Um die Lösungsverfahren, wie bei den Geraden der Ebene, ...hst ...chaulich zu deuten, sollen die bei der Lösung eines LGS erhaltenen Ergebnisse g... ...werden. ...ichungen der Form ax + by + cz = d oder ax + by = c oder ax + bz ... c ko... als Eb...n im Raum ...efasst werden. Damit kann man hier, entsprechend zu Ge... der E..., das Löse... von ... Gleichungssystemen als Schnittpunktprobleme von E...en im Raum ...achten.

Aufgabe 2.1

Wie in der Ebene können auc... der Lösung ein... LGS die Mög...iten keine Lösung, genau eine Lösung und ... parametrisie... Lösung auf... Man mus... ...dings die Interpretation der Lösung auf die ... Ebene... ...um üb...

① Keine Lösung ...eut... ...ass die betrachtete... E...en keinen ...einsamen Punkt haben.

② Eine eindeutige ...g ..., dass sic... ...e betrachtete... ...benen genau in einem Punkt schn...

③ Ei... ...arame...erte ...ng bedeutet, ...ss es uner...liche viele Lösungen gibt, die als gemeinsame S...tgerade... ...r betrachteten E...en aufgefas... werden können.

...n ...ur Ver...chaulichung ... ...rei Lösung... ...ichkeiten von linearen Gleichungssystemen im R... der... ...gen die L...ngsziffern ① ... und ③ zu.

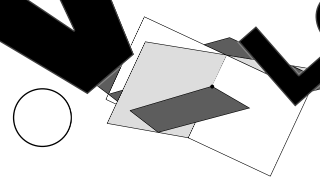


Abb. 2.1.1

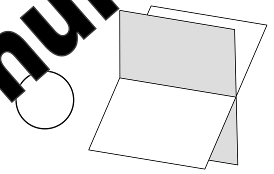


Abb. 2.1.2

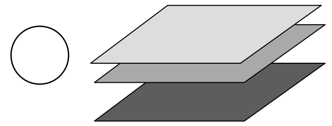


Abb. 2.1.3

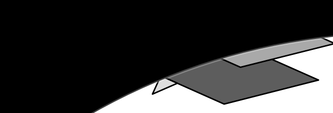


Abb. 2.1.4

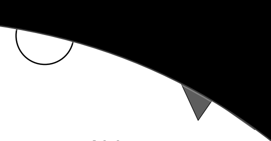


Abb. 2.1.5

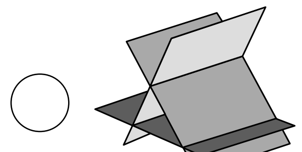


Abb. 2.1.6

Aufgabe 2...

Gleich... ...ungen, drei Variablen und gena... ...ng

Be... ...nearer Gleichungssysteme höherer Ord... ...man systematisch v... Möglichkeit hie...u stellt das Additionsverfahren nach Gauß ...annte **Gauß-**...ar.

...chen Sie sich anhand des folgenden Beispi... ...ier verwendete v... ...nde Abwandlung ...ahrens, und lösen Sie anschließend an... Übungsaufgabe...

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= -3 \\ x - y - z &= 4 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren lösen:

Schritt 1:
Die Gleichungen fortlaufend durchnummerieren

Schritt 2:
Gleichung I mit den Gleichungen II und III so addieren oder subtrahieren, dass die Variable ...

Schritt 3:
Mit den Gleichungen IV und V wie bei einem LGS mit zwei Variablen weiterrechnen und damit eine der beiden verbleibenden Variablen eliminieren.

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & 2x + y + 3z = -3 & \\ \text{II} & x - y - z = 4 & \text{I} + \text{II} \\ \text{III} & 3x - 2y + 2z = 5 & \ldots \text{III} \\ \hline \text{IV} & 3y + 5z = -11 & \\ \text{V} & 7y + 5z = \ldots & \text{IV} \ldots \text{V} \\ \hline \text{VI} & -4y = \ldots & \\ & y = -2 & \end{array}$$

Schritt 4:
Das Ergebnis, je nach Rechenaufwand in die Gleichung IV oder V einsetzen und die nächste Variable berechnen.

y in IV einsetzen

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2) + 5z &= -11 \\ -6 + 5z &= -11 \\ 5z &= -5 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Schritt 5:
Beide Ergebnisse in die erste Gleichung einsetzen und die Variable x berechnen.

z und y einsetzen

$$\begin{aligned} 2x - 2 + 3 \cdot (-1) &= -3 \\ 2x - 2 - 3 &= -3 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: (1/−2/−1)

Es existiert eine eindeutige Lösung. Die Lagebeziehung der Ebenen entspricht damit der Abb. 2.1.1

Übungen:

Ü2.1 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

Zur Kontrolle
(4/3/2)

b)

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 19 \\ 2x + 3y + z &= 4 \\ x - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
(3/−1/1)

Lineare Gleichungssysteme ohne Additionsverfahren lösen

Kommen in einem LGS in jeder Zeile nicht alle Variablen vor, so kann man die Lösung oft auch ohne Additionsverfahren ermitteln.

Gegeben ist das folgende LGS

Zeile 2 liefert schon das Ergebnis für y.

I $3x - 5y \ldots$
II

y einsetzen in III:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

y und x einsetzen ...

$$\begin{aligned} \ldots(-1) - 5 \cdot 2 - 2z &= -1 \\ \ldots - 10 - 2z &= -1 \\ -2z &= 12 \\ z &= -6 \end{aligned}$$

... (−1 / 2 / −6)

Ü2.2 Lösen Sie das folgende LGS ohne Anwendung des Additionsverfahrens

$$2x + 3z = 3$$
$$4x = 6$$
$$2x + 3y - 2z = 2$$

Zur Kontrolle: $\left(\frac{3}{2} / -\frac{1}{3} / 0\right)$

Aufgabe 2.…

Gleich…ssy…e m… drei Gleich…gen, drei Varia…len und keiner Lösung

…u w… bei linearen Gleichun…ystemen mit z… Variablen kann es bei der Lösung eines linearen Gle…stems mit drei V…blen zu Wide…üchen kommen. Das LGS ist dann nicht lösbar.

Zeigen Sie durch Ergänzen der folgend… R…chnung, dass ein Widerspruch entsteht und das LGS nicht lösbar ist.

I	x + 2y − z = 1	
II	x + y …	
III		…en
	y − z = 1	IV – III
	___ = ___	⇒ Widerspruch, ke…

Es existiert keine Lösu… Lagebeziehung der Eben… damit der Abb. 2.1.3 oder … 2.1.6 entsprechen.

Aufgabe 2.4

Gleichungssysteme mit drei Variablen und unendlich vielen Lösungen

Abbildung 2.1.5 zeigt drei Ebenen, die als gemeinsame Punkte ein… gerad… …. Das bedeutet, dass es unendlich viele Punkte gibt, die gleichzeitig zu allen drei Eb…n g…n. Interpretiert man jede der drei Gleichungen eines linearen Gleichungssystem als …enengl… …r gibt es unendlich viele Werte, die dieses LGS lösen, nämlich alle Punkte, die… …der S…geraden liegen. Entsprechend zur Aufgabe 1.2 Beispiel 3 erhält man eine parametri…erte L…

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden …nschr… ergänzen.

I	x + 2y + 2z = 1	
II	2x + z = 3	2I – II
III	3x + 2y + 3z = 4	… – III
IV	___ … =	
V	___ = ___	IV – V
	0 = …	

z fr… …ählen: z = 4…

…in … …setz…: 4… = −1
4y = −1 − …
y = … − 3r

z und y in I einsetzen: $x + 2(-\frac{1}{4} - 3r) + 2 \cdot 4r = -1$

… = __

… − __r

…mögliche Lösung: $\left(-\frac{1}{2} - 2r / -\frac{1}{4} - 3r / 4r\right)$

D… G…chung IV un… … …ntisch sind, als… f… die Be…timm…g der Variablen y u… z nur eine G…ichung bleibt, gibt …s unendlich… …e Lösungen, und man kann wi… … …en linearen Gleichu…ssystemen mit zwei Var…en beispielsweise z frei wählen. …n man z = 4r wählt, entstehen w…ig Brüche.

…r werden s…hen, …aus dieser Lösung eine …engleichung erzeugt.

Beachten Sie, d… …metrisierte Lösung von der W… …meters r bzw. vom Vielfachen vo… …nd sich hier unterschiedliche Lös… …en können.

Aufgabe 2.5

Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Während bei den späteren Aufgabenstellungen überbestimmte lineare G… …syste… … drei Variablen praktisch keine Bedeutung haben, werden jedoch häufiger **unte…esti…** lineare Gleichungssysteme auftreten. Das sind lineare Gleichungssyste… bei de… … Gleichungen als Variablen vorhanden sind. Da das Beispiel von Aufgabe 2.4. stre… …nomi… …u dieser Sorte von linearen Gleichungssystemen zählt, ist das Lösungsverfah…n verg… …ar.

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden Rech… …itte er… …zen.

Beispiel:

I	$x + 2y + z = 3$	
II	$2x + y + z = 1$	2I…
	___+ ___ = ___	
	$z = 5$…	
mit	…$y = r$	
ergibt sic… …z:	…– 3r…	
eins…en…	…2 __+ ___________	
	$x =$ __________	
Lö…	(r… 2 / r /… – 3r)	

We… nur noch ei… G…chung f… zw… Variablen vo…nden ist, kan… …ine Varia…e (…ier ist es …nstig r f…r y zu wählen) frei ge…ählt werden.

Begründen Sie, warum die geometris…e Deutung dieser Aufgabe der Abbildung Abb.2.1.2 entspricht, und erläutern Sie, wie man die Lösung anschaulich interpretieren kann.

____

____

____

____

Ergä… …gen: ______________________________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge…

selbstorganisiert …rle…en

Ka…

Koordinatensyst…

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und [illegible]

Eben[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible] [illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 3: Koordinatensysteme

1. Koordinaten in der Ebene

Die Darstellung von Punkten in der Ebene ist Ihnen hinlänglich bekannt. Alle Punkte liegen in der Papierebene, und man kann bei gegebenen Koordinaten einen Punkt p(x/y) im Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten eines markierten Punktes, hier A(2/3), direkt ablesen.

Die x-Achse kann auch mit x_1-Achse u[illegible] die y-Achse auch mit x_2-Achse bezeichnet [illegible]rden.

2. Koordinaten im Ra[illegible]

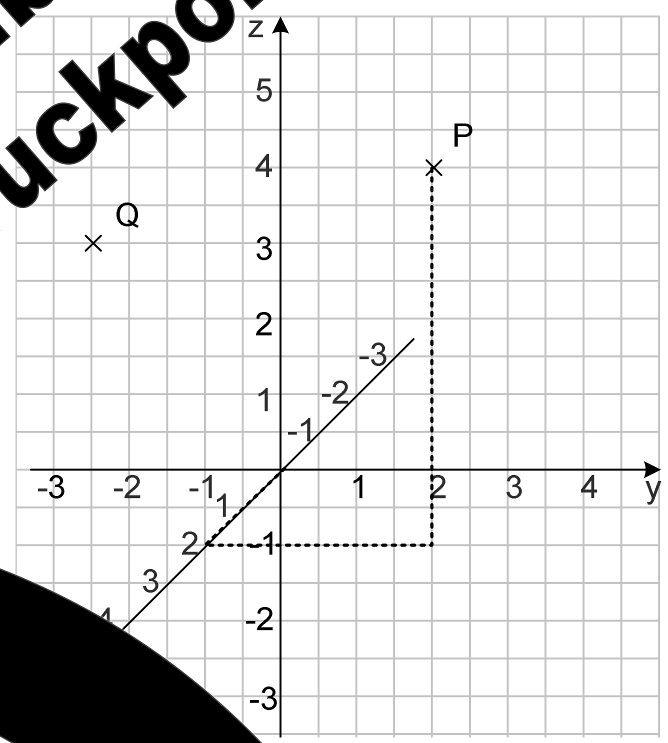
Für die Darste[illegible] vo[illegible] [illegible]kten im Raum trifft man in der Rege[illegible] [illegible]reinbarun[illegible]

Die [illegible]sen [illegible]e y-[illegible] x_2-Koordi[illegible]ate [illegible]d die z- b[illegible] x_3-Koo[illegible]ate liegen in der [illegible]pierebene.

[illegible]e x-[illegible]se wird als Diagonale [illegible]eichn[illegible] zeigt s[illegible] aus der [illegible]erebene nach vo[illegible] [illegible]raus, wobe[illegible] [illegible]nde der Skala [illegible]rzt gezeich[illegible] [illegible]erden. [illegible] Form der [illegible]arstellung wird a[illegible]als Kavalierperspektiv[illegible] bezeichne[illegible]

Hier: Abstand y- und z-Achs[illegible] zwei Kästchen
Abstand x-Achse ein Kästchen diagonal

Die Punkte [illegible]
Pa[illegible]



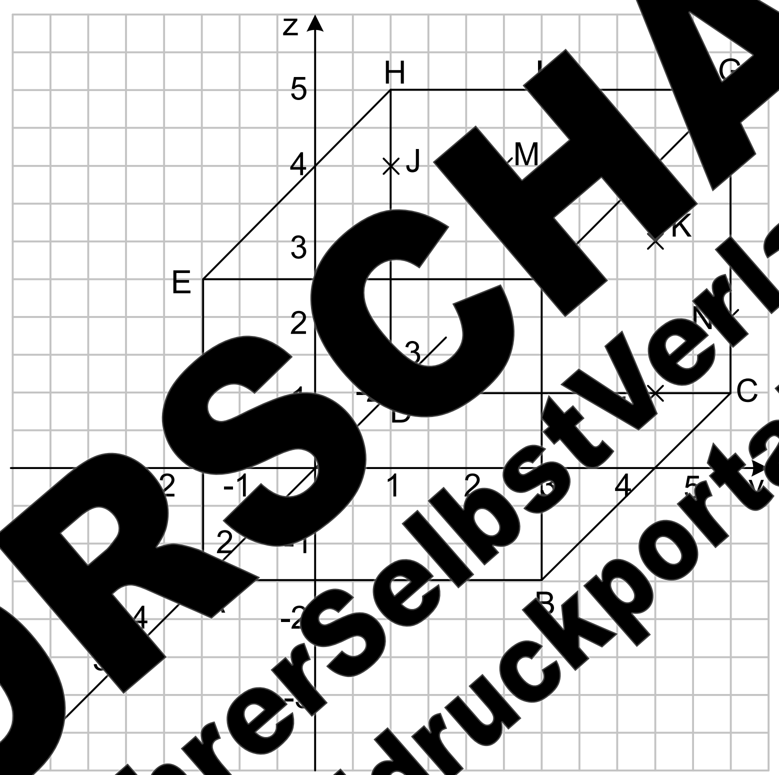
[illegible]as Eintragen bzw. Ablesen von Punkt P(2/3/5) erfolgt mit Hilfe der gestrichelten Hilfslinie: vom Ursprung ausgehend 2 Einheiten nach vorne entlang der x-Achse, 3 Einheiten nach rechts parallel [illegible] [illegible]heiten nach oben para[illegible]

Fü[illegible] [illegible]eutige Aussage [illegible] keine Hilfslinien [illegible]d.

[illegible]n Wahl der Skalierung können räumliche [illegible]te verzerrt erscheinen. Beispielsweise ka[illegible] [illegible]ürfel wie ein Quader aussehen.

Übungen

Ü3.1 Koordinaten ablesen und eintragen.



a) …mmen Sie die Eckpunkte de… …ders.

A (___/___/___) B (___/___/___) C (___/___/___) D (___/___/___)

E (___/___/___) F (___/___/___) G (___/___/___) H (___/___/___)

b) Bestimmen Si… …Koordinaten der eingezeichneten Punkte.

… …) L (___/___/___)

… N (___/___/___)

…Tragen Sie die folgenden Punkte ein. Verwenden Sie, w… …Hilfslinien:

P(1/0/0) Q(4/-1/3) R(3/4,5/–2) S(–1/1/3)

…e Übungen: ______________________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge…
selbstorganisiert …rle…en

Ka…

Grundlegendes zu de… …n

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i... Rau...

Ebe...

Lineare Abbildungen

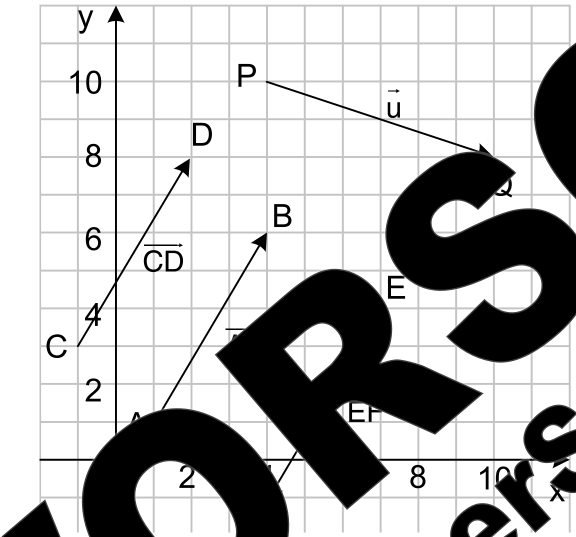
Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 4: Grundlegendes zu Vektoren

Vektoren in der Ebene

Aufgabe 4.1
In der folgenden Abbildung sind Vektoren in der Ebene dargestellt. ...be... ...sich die Zusammenhänge, indem Sie die gegebenen Informatione... ...charb... ...w. ...hlende Angaben ergänzen.



...s... ...ie ...unkte:

A(1... ...(4/6), C(–1...), ...(...3), E(7/4), F(4/–1)

...__/___), Q(___/___)

Vektor... werden durch einen Pfeil übe... ...n Buchstaben, der immer ...on links nach rechts zeigt, ge...ennzeichnet. Wie bei Strecken verwendet man entweder die großen Buchstaben von Anfangs- und Endpunkt oder einen kleinen Buchstaben.

Ke...eichnen von Vekto...:
...r ...l von A nach B ...d als Vektor $\overrightarrow{AB}$ ...zeichnet.

Der ...eil von C nach... wird als V...to... ____ bezeichnet.

Der Pfeil von E nach F wird als ...ktor ____ bezeichnet.

Der Pfeil von P nach Q wird als Vektor ____ bezeichnet.

Sp...

...e Verschiebung eines ... ...telle im Koordinatensystem an. Diese ...iebung wird mit Hilfe der Spaltenschreibweise ...

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = ...$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vers...

Verschiebung um –3 in x-Richtung –5 in y-Richtung

...g um ...tung ____ ...ung

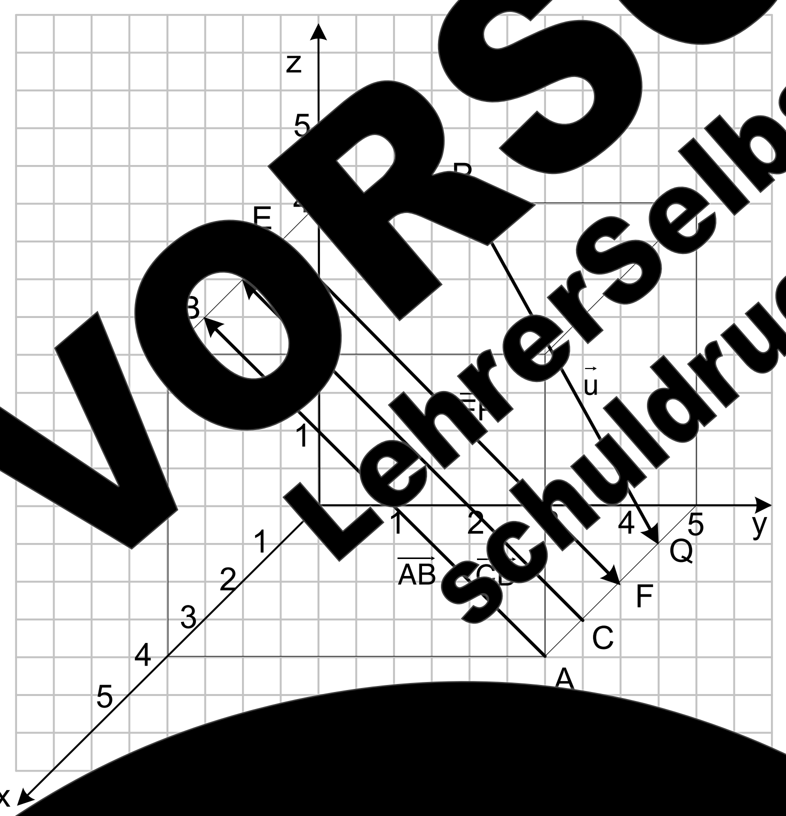
E...
...oren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ bewirken die gleiche Verschiebung. Sie gehö... ...r gleichen ...**klasse**.
...ektoren $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ und der Vektor $\overrightarrow{EF}$ si... ...n lang, aber entg... ...t. Man ...chnet solche Vektoren als **Gegenvekt...**

Vektoren im Raum

Aufgabe 4.2

Die Betrachtungen zur Vektordarstellung in der Ebene können direkt auf ... übe... werden. Man muss lediglich beachten, dass die Vektoren im Raum drei Kompone... ha... ...d in der Spaltenschreibweise in der Form $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dargestellt werden.

In der folgenden Abbildung sind Vektoren im Ra... gestellt ...itteln Sie di... Ko...aten, deren Anfangs- und Endpunkte C, D, E, F, P sowie Q ...d bestimmen ... die Vekto... $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ sowie $\overline{PQ}$ in Spaltendarstellung.



A(4/5/0)
B(3/0/4)
C(___/___/___)
D(___/___/___)
E(___/___/___)
F(___/___/___)
P(___/___/___)
Q(___/___/___)

... $\begin{pmatrix}\ \\ -5\\ 4\end{pmatrix}$ $\overline{CD}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\ \_\_\_\\ \_\_\_\end{pmatrix}$ $\overline{EF}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\ \_\_\_\\ \_\_\_\end{pmatrix}$

Ergänzen Si...

Die Ve... $\overline{EF}$ sind ____________________vektoren, da sie gleich ... entg... sind.

Berechnen von Vektoren aus den Koordinaten der Endpunkte

Aufgabe 4.3

Der Vektor $\overline{AB}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ aus Aufgabe 4.1 wurde durch Abzählen der ... im Ko...ensytem ermittelt. Sie haben bei Aufgabe 4.2 vielleicht schon festge...llt, das... ...ten auch direkt aus dem Anfangs- und Endpunkt des Vektors ermittelt werden ...en.

Koordinate der Pfeilspitze: B(4/6) ... ...ordinate de... ...ilendes: A(1/1)

Ko... ...n des ...rs

$... = \begin{pmatrix}4-1\\6-\ ...\end{pmatrix} ... \begin{pmatrix}...\\5\end{pmatrix}$

Ko...inaten de...

...rdinaten ...es Pfeilendes

Überprüfen Si... ...es ...fahren für den Vekto... ... aus Aufgab... 4.2

Gru...legende Defi...ionen und Zusammenhänge

- Die Vektoren $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind jeweils **Repräsentanten** der gleichen Klasse von Vektoren $\vec{v}$, die eine Verschiebung eines Punktes um ... ...tung bzw. v_3 in z-Richt... $\overline{AB}=\overline{CD}=\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$
- ...nd $\vec{v}$ sind gleich lang, ...nnt daher den Vektor $\vec{v}$ **Gegenvektor** ... ...chreibweise für Ebene entsprechend) $-\vec{u}=-\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u_1\\-u_2\\-u_3\end{pmatrix}$
- Ein Vektor, der einen Punkt A auf sich selbst abbildet (also keine Verschie... ...d **Nullvektor** genannt. $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- ... $\overline{AB}$ werden aus den ...er Punkte A(...$_2$/a_3) und B (b_1/b_2/b_3) durch ...ildung der einzelnen Komponenten a_1, a_2 und a_3 und ...nd b_3 berechnet: ...e Ebene gilt Entsprechendes.) $\overline{AB}=\begin{pmatrix}...\\ ...\\ b...\end{pmatrix}$

Übungen

Ü4.1 Gegeben ist der Vektor $\overline{AB}$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overline{AB}$ in Spaltendarstellung.

$\overline{AB} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

b) Zeichnen Sie einen weiteren beliebigen Repräsentanten der Klasse des Vektors $\overline{AB}$ ein.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Gegenvektors von $\overline{AB}$ in Spaltendarstellung und zei[illegible] einen beliebigen Repräsent[illegible] Gegenvektors von [illegible]

Gegenvektor: ___ [illegible]

[illegible] Sie a[illegible]ehend vom P[illegible] P(4/0/0) e[illegible]n Repräsentanten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

[illegible]d geben [illegible] die Koordinat[illegible] Gegenvektors an. Gegenvektor: ____ = $\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

Ü4.2 Bestimmen Sie den Vektor $\overline{AB}$ [illegible] den Koordinaten der Punkte $A(a_1/a_2)$ und $B(b_1/b_2)$ der Ebene bzw. $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$ des Raumes für folgende Punkte:

a)	b)	…	e)	f)	g)	h)
A(2/1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]/7)	A(2/7/4)	A(3/1/-2)	A(0/-3/1)
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	B(3/-2/0)	B(-1/4/-1)	B(-2/-1/3)

E[illegible]bungen:__________

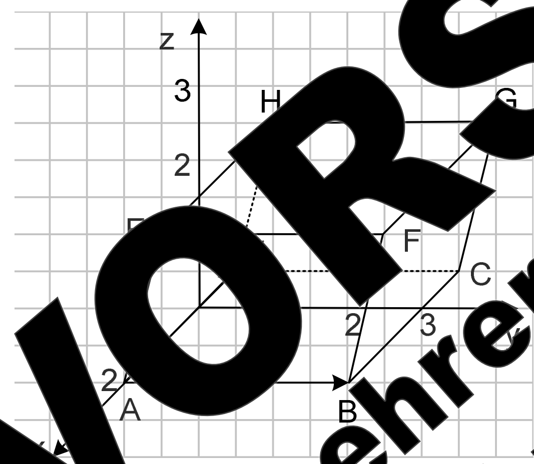
Ortsvektoren

Aufgabe 4.4

Gegeben ist der unten dargestellte verzerrte Quader. Man bezeich[illegible] Körp[illegible] **Spat**. Gegeben sind die Punkte A(2/0/0), B(2/3/0), C(-1/3/0) und E (2/0,5/2). Bearbe[illegible] Si[illegible] Aufgabenstellung unter Anwendung der folgenden Definition:

Definition Ortsvektor:

Ein Vektor $\vec{a}$, der im Ursprung O des Koor[illegible] beg[illegible]nt und d[illegible] Pfeilspitze am Punkt A endet, wird als Ortsvektor b[illegible]net. De[illegible] Ortsvektor er[illegible] zum Namen des Punktes zugehörigen kleinen Buc[illegible]ben: $\vec{a}$ = [illegible]



a) Geben Sie die Ortsvek[illegible] zu allen Ec[illegible]n an.

b) [illegible]stimmen Sie d[illegible] Koordinatendarstellung der Vektoren [illegible] $\overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AD}$ und $\vec{w} = \overline{AE}$. Welche w[illegible] Vektoren gehören zur gleich[illegible]ektorklasse wie $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$

c) [illegible]stimmen Sie die Vektoren [illegible]F, $\overline{AC}$, $\overline{AH}$, $\overline{CH}$, $\overline{BD}$ und $\overline{HF}$

Der Betrag von Vektoren

Aufgabe 4.5

Gegeben ist das folgende Koordinatensystem mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ u…

a) Die …kte … R, … d B liegen … n Ecken d… eingezeichneten Quaders. Tragen Sie die Koor…ten … te in de… ung sowie die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein. …stim… n Sie dann die Länge der folgenden Strecken:

$\overline{OP}$ = ____ LE   …Q = ____ LE $\overline{OR}$ = ____ LE

b) Erläutern Sie, wie die Länge der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{OB}$ berechnet wurden.

$\overline{OA}=\sqrt{36+64}=10$	… 5	$\overline{OB}=\sqrt{100+25}=11{,}2$

Definitio…

Der A… B im Koordinatensystem wird als L… recke $\overline{AB}$ … Übertragen a… die Vektorrechnung gilt Entsprechende… tand … fangs- und Endpunkt eines Vektors $\overline{AB}$ entspricht der Läng… tors und … etrag des Vektors $\overline{AB}$ bezeichnet. Man sch… t z. B.:

$|\overline{OA}| = 10\,LE$ oder ei… $|\overline{AB}| = 5$

c) Erläutern Sie den folgenden Ansatz für die Berechnung der Strecke $\overline{OB}$ b…w. des …ges des Vektors $\overline{OB}$. Formulieren Sie dabei auch, welcher Zusammenhang mit d… Koordina… des Ortsvektors $\vec{b}$ besteht. $\overline{OB}=|\overline{OB}|=\sqrt{|\overline{OP}|^2+|\overline{OQ}|^2+|\overline{AB}|^2}=\sqrt{6^2 … +5^2} = … +25 = 11{,}2$

d) Erläutern Sie unter Verwendung der ma…matisc… Fachau…drü… *Summe*, *K…*…*enten* des *Vektor*, *Wurzel* in eigenen W… wie de… …es Vekto… berechnet wird.

Berechnen des Be…ags e… Vekt…

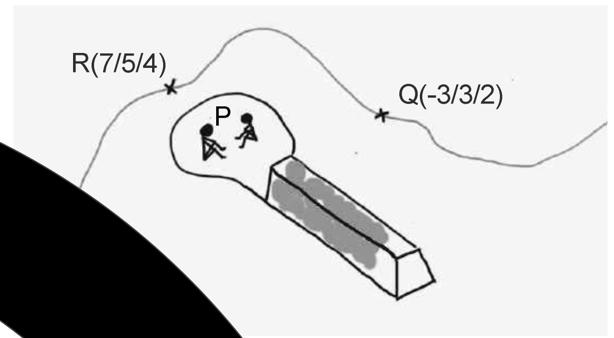
Betrag eines …ktors in de… …e: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

Be… Vekt… im Raum: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Übungen

Ü4.3 In einem Bergwerk sind nach dem Einsturz eines Schachtes Bergleute an der Stelle P(5/8/3) verschüttet … …uerstoff zu…

…weisen Sie durch Rech… … die Stelle R für die Bohrung am günstig… …st.



…nde Übungen: ____________

Die Definition des Einheitsvektors

Aufgabe 4.6

Zeigen Sie mit Hilfe der folgenden Definition, dass die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, … und $\vec{w} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren sind.

Definition Einheitsvektor:
Ein Vektor der Länge 1 bzw. mit dem Betrag … wird als Einheitsvektor bezeichnet. Dann gilt:
in der Ebene: $|\vec{a}| = 1$ also … $+ a_2^2$ …
im Raum $|\vec{a}| = 1$ also … $+ a_3^2 = 1$

Ergä…gen: ______

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap…

Rechnen mit Vekt…

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und ... Rau...

Ebe... un...

Lineare Abbildungen

Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (... -031-266)
S...

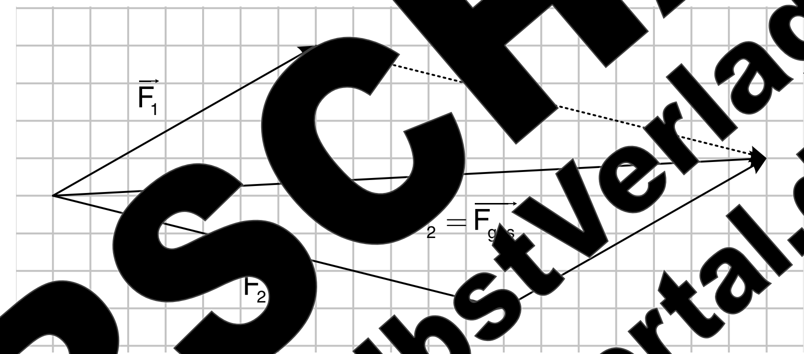
...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 5: Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Aufgabe 5.1

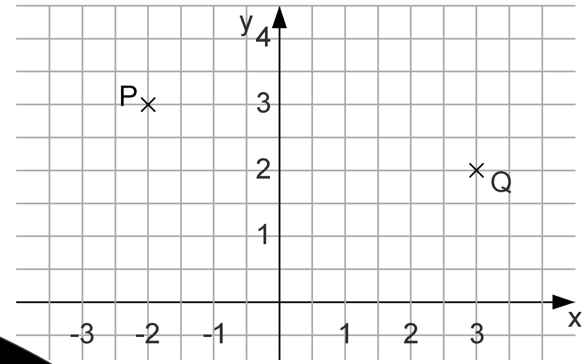
Aus dem Physikunterricht ist Ihnen bereits die Addition und Subtrakt... zw... ...fte mit Hilfe von Kräfteparallelogrammen bekannt. Die Addition und Subtra... von V... ...beruht auf dem gleichen Prinzip.



1. Addition von Ve...

a) Z...ner... ...e Ad...n in der Ebene

Z...nen Sie ...e Vektoren $\vec{a} = \binom{2}{...}$ und $\vec{b} = \binom{3}{2}$ ausg... ...on Punk... ...s Koordinatensystem ein.



...ichnen Sie ...nach den Vekto... ...ausgehend von der Spitze des Vektors ... ...nd den Vektor $\vec{b}$ ausgehend von der Spitze des Vektors $\vec{a}$ ein zweites Mal ein. Diese beiden Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ treffen mit ihren Spitzen den Punkt Q. Verbin...

b) Rechnerische Addition in der Ebene

Rechnerisch kann man zwei Vektoren addieren, indem ma... ...ten der Vektoren komponent... ...ühren Sie dies anhand der We... ...eispiel oben durch und vergl... ...en Wert.

$... 2) = \binom{\_\_}{\_\_}$

...gleich: ____________________

2. Subtraktion von Vektoren $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

a) Zeichnerische Subtraktion

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie den Vektor $\vec{a}$ ausgehend von Punkt P in das Koordinatensystem ein.
Zeichnen Sie danach den Gegenvektor vo… also $-\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ausgehend von der Spitz… es Vektors $\vec{a}$ ein. Die Spitze des G… vektors von $\vec{b}$ liegt im Punkt Q. Verbi… Q durch den Vektor $\overrightarrow{PQ} = \vec{…}$ und … Sie d… Koordinaten von $\vec{d}$ … eichnu…

$\vec{d} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

b) R… sche Su… aktion in der E…e

… Sub… ion e… pricht der A… des Gege… vektors. Berechnen Sie $\vec{d}$ und vergleichen Sie m… em Z… ch ermitte… Wert.

$\ldots \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{…}) = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

Vergleich: ______________________________

Die in der … Subtraktion von Vektoren können direkt auf B… die Merksätze.

…n Vektoren:
… Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die Koordina… nweise addiert:

Ebene: = $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \end{pmatrix}$ … Raum: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \ldots \begin{pmatrix} \_\_\_ + \_\_\_ \\ \_\_\_ + \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

Subtr… ektoren:
Der … d vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem man zu $\vec{a}$ den ______________________ vo…

Aufgabe 5.2

Addiert man zu einem Vektor seinen Gegenvektor, so erhält man in der …ne un… Raum den Nullvektor. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben:

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ … ullvekt… …e

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ + \_\_\_ \\ \_\_\_ + \_\_\_ \\ \_\_\_ + \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \ldots \end{pmatrix} = \vec{\_\_}$ … Nullve…r im Rau…

Aufgabe 5.3

Für das Rechnen mit reelle… ahl… ten d… Kommuta… nd das Ass…ativgesetz. Prüfen Sie anhand der Informationen in I… …h oder anderen geeigneten Qu…n, ob diese Gesetze auch für das Rechnen mit V… n Gültigkeit h…en, und noti… Sie diese G…etze.

Kommutativgesetz: ______________________________

A…ozi…gesetz: ______________________________

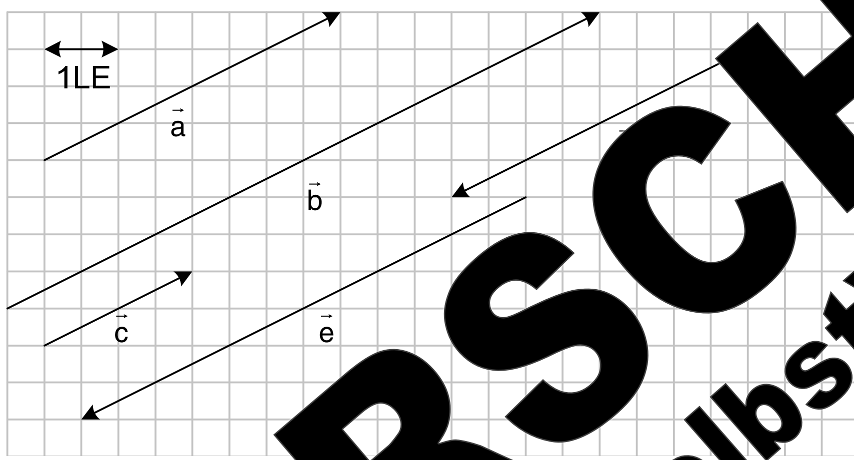
Ergänzende Übungsaufgaben: ______________________________

____

Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen

Aufgabe 5.4

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren durch Ab... der Z... ...ng und tragen Sie die Werte ein.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{e} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

a) Nennen Sie ... Gemeins...eit zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und den Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$.

______

b) Geb... Sie ... die zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und den Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$ an.

______

c) Stellen Sie die Vektoren $\vec{c}$ bis $\vec{e}$ wie im Beispiel für Vektor $\vec{b}$ durch das Vielfache des Vektors $\vec{a}$ dar.

$\vec{b} = 2\vec{a} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \_\_\_\_ = \_\_\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \_\_$ ... $= \_\_\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

...zen Sie im Merksatz die Angaben für den Raum.

> Vektoren werden verviel... ...r reellen Zahl r multipliziert, in...
> Komponente mit d...
>
> Für die ... $\begin{pmatrix} \\ a_2 \end{pmatrix}$ ... Für den Raum gilt: $r\vec{a} = \_\_\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.6

Erarbeiten Sie sich mit Hilfe Ihres Schulbuchs oder anderen geeigneten Qu... weite... Rechenregeln hinsichtlich der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, und n...ren Sie ... ...n hier.

Übunge...

Ü5.1 S...eiben S... die Vektoren ... ...odukt aus e... reellen Zahl und einem Vektor mit möglichst kl...n ganz...ligen Koordin...

a) $\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 500 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} ...6 \\ -84 \\ 144 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} ...,5 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

...nde Übungen: ______

Berechnen des Einheitsvektors zu einem gegebenen Vektor

Aufgabe 5.7

Verdeutlichen Sie sich die folgenden Informationen und berechnen Sie a… …ßend … $\overrightarrow{b_0}$.

Informationen:

- In der Abbildung nebenan sind Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie die zugehörigen Einheitsvektoren $\overrightarrow{a_0}$ und $\overrightarrow{b_0}$ eingezeichnet.
- Den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$ bezeichne… …an mit $\overrightarrow{a_0}$.
- Der Vektor $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ und ihr Ein… …$\overrightarrow{a_0}$ bzw. $\overrightarrow{b_0}$ zeigen in die … Richtung…
- Der Einheitsvektor a_0 … 1, also gilt: $\left|\overrightarrow{a_0}\right| = 1$
- Ma… …rec… …t den E… …eitsvektor zu… Vektor $\vec{a}$, inde… …an den Vektor $\vec{a}$ durch seinen Betrag divid…

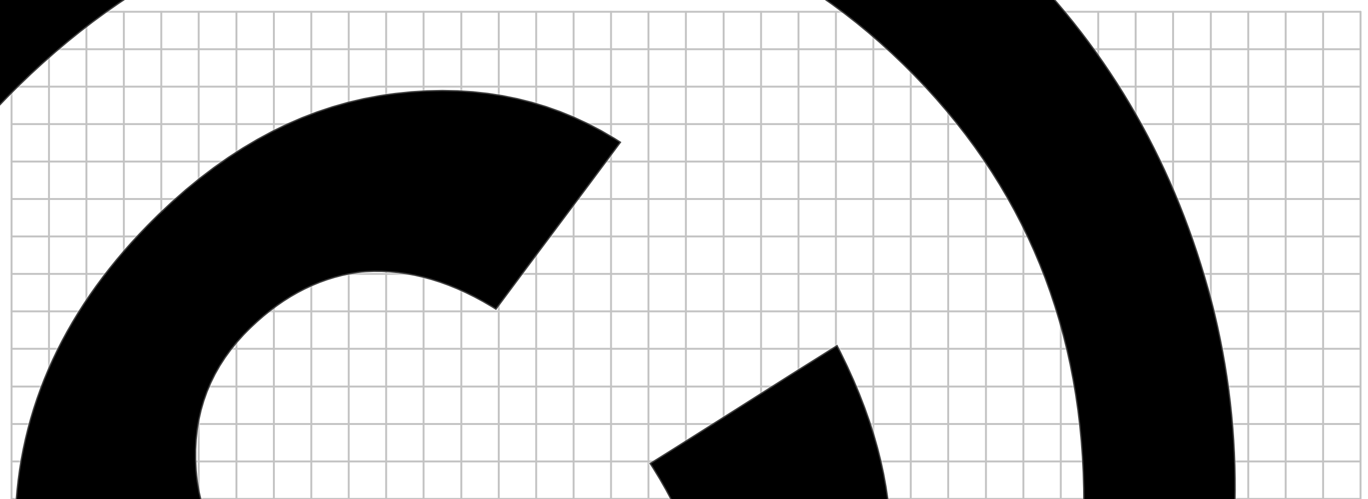
$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{100}}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\overrightarrow{b_0}$ analog:

$\overrightarrow{b_0} =$

Übung:

… Einheitsvektoren zu $\vec{u} = \begin{pmatrix}\ldots\\4\end{pmatrix}$ … $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$



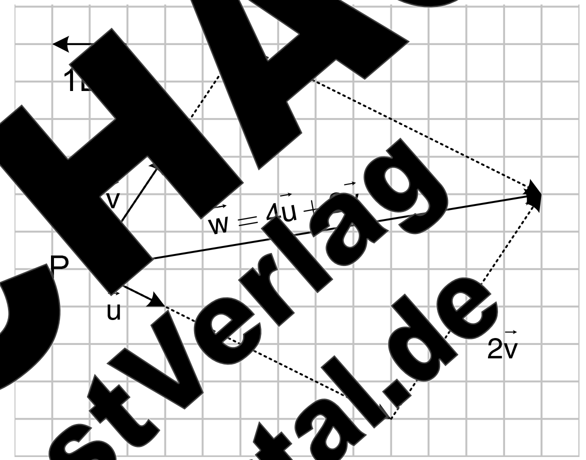
Addition vervielfachter Vektoren

Aufgabe 5.8

Beispiel

In der Abbildung neben wird der Vektor $\vec{w}$ durch eine Kombination aus den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erzeugt, indem man das Vierfache des Vektors $\vec{u}$ zum Zweifachen des Vektors $\vec{v}$ addiert. Durch Abzählen der Kästchen erhält man folgende

Koordinaten für $\vec{w}$: $\vec{w} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$



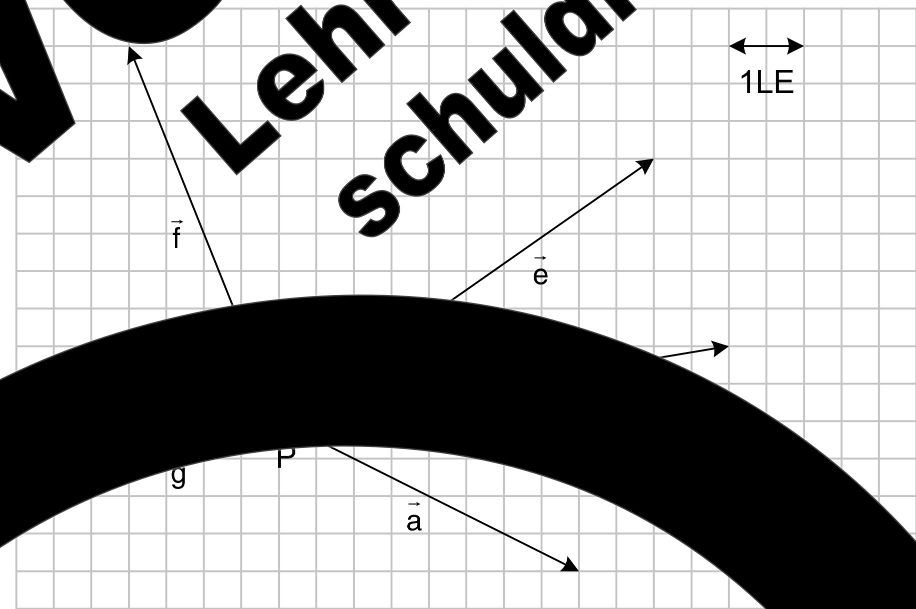
Rechnerisch lässt sich der Vektor … wie f… ermitteln:

$$\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v} = 4\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1{,}5\end{pmatrix} = \ldots + 3 \ldots = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabenst… …ung

Gegebe… …bge… …en Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$…

1. Geb… Sie die … …rdinaten der … …bildeten Ve… durch Ablesen aus der Abbildung an



$\vec{a} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{e} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{g} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$

2. Zeich… … wie im Beispiel durch Vektorad… … Abbildung ein.
3. … von Vektor $\vec{c}$ durch Rechnung … $+ 3\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\_\\\_\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$ und prüfen Sie durch Ab… … Kästchen, ob das … …nis mit der Zeichnung übereinstimmt.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de ©

4. In Aufgabe 2 und 3 wurde der Vektor $\vec{c}$ mit Hilfe der gegeben Beziehung $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ zu… eingezeichnet und dann berechnet. Nun sollen Sie umgekehrt vorgehen. Ermi… Sie, wie … die bereits gezeichneten Vektoren $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ und $\vec{g}$ aus einer Kombination der Vektoren … $\vec{b}$ … Vielfachen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lassen. Zeichnen Sie dazu wie im … oben …chende Hilfslinien ein und überprüfen Sie die Ergebnisse mit den unter 1. bere… Koordinaten.

$\vec{d} =$ ______________________________

$\vec{e} =$ ______________________________

$\vec{f} =$ ______________________________

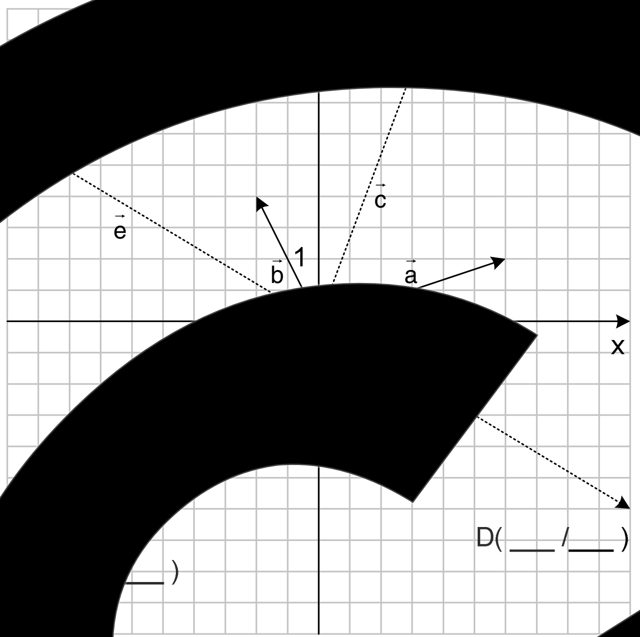
$\vec{g} =$ ______________________________

Fachbegriff fü… sum… aus vervielfa… Vektoren:

Definiti… Lin…kombin…n:
Eine Su… e ra… + …… für di… reellen Zahl… , t, … und die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ….nennt … eine… **…earkombination** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ….

Übungen

Ü5.3 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Stellen Sie alle anderen eingezeichneten Ortsvektoren, wie im Beispiel für $\vec{c}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, inde… D, E und F eintragen.



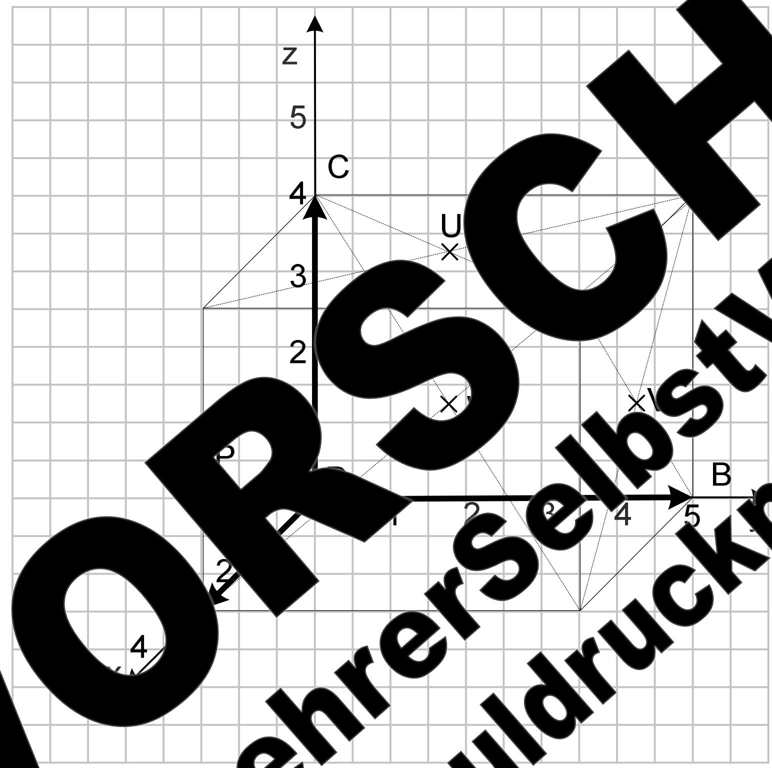
$\ldots = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 1{,}5\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\4\end{pmatrix}$

$\vec{d} =$ ______________________________

$\vec{e} =$ ______________________________

$\vec{f} =$ ______________________________

Ü5.4 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ zu den Punkten A, B und C. Ermitte… durch Abzählen zunächst die Koordinaten aller eingetragenen Punkte. Stelle… ansch…end die Ortsvektoren zu den Punkten U, V und W, wie im Beispiel für $\vec{p}$ dargeste… Li…kombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Überprüfen Sie das Ergebnis je… …end d… …gelesenen Koordinaten.



…(___/___/___) ⇒ $\vec{a} =$ (___ / ___ / ___)

B(___/___/___) ⇒ $\vec{b} =$ (___ / ___ / ___)

C(___/___/___) ⇒ $\vec{c} =$ (___ / ___ / ___)

P(3/0/2)

U(___/___/___)

V(___/___/___)

W(___/___/___)

Beispiel für $\vec{p}$:

$\vec{p} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot\vec{c} = 1\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$

____

$\vec{v} =$ ______________________________

____

…e Übungen: ______________________________

____

Raum für Notizen

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinat… nen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, … sie du… genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, das… **r = 3** … eichu… erfüllt.

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}$ Man erkennt sofo… ss **s =** … die Gleichu… erfüllt.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ Ma… erk… sofo… ass es **kein**… Zah… r gibt, we… die Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = …\begin{pmatrix} 1 \\ … \end{pmatrix}$ … en ka… keinen Vekt… der Ebene mit … m Vektor des Raumes verknüpfen.

…uf… n 6.1

…ben S… Lösungen … folgenden Ve… gleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

a) $\begin{pmatrix} 6 \\ … \\ 8 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -12 \\ -34 \\ -16 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ … \end{pmatrix} = s …$ c) $\begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 117 \\ -153 \\ 207 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen v… ung

Bei … erhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die …

… für Vektorgleichungen mit …

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ … \end{pmatrix}$

Man löst die Klammern … o auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als … Gleichungssystem (LGS) entsteht.

… $= 12r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

$8 = 6r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie… erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich… efern. Das ist für r = $\frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist r = $\frac{4}{3}$ … des LGS.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge… selbstorganisiert …rle…en

Ka…

Lösen von Vektorgle… …ei Linearkombinatio…

02-031-266

Gesa… …ebra selbstorganisiert erlernen (… …-031-266)
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinati[illegible]nen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, [illegible] sie durch genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, da[illegible] r = 3 [illegible]eichu[illegible] erfüllt.

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}$ Man erkennt sofo[illegible]ss **s =** [illegible] die Gleichu[illegible] erfüllt.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ Man erk[illegible] sofo[illegible] dass es **kein**[illegible] Zahl r gibt, w[illegible] die Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ [illegible]n ka[illegible] keinen Vekt[illegible] der Ebene mit [illegible]m Vektor des Raumes verknüpfen.

[illegible]ufg[illegible]n 6.1

[illegible]ben S[illegible] Lösunge[illegible] folgenden Ve[illegible]gleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

a) $\begin{pmatrix} 6 \\ [illegible] \\ 8 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -12 \\ -34 \\ -16 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ [illegible] \end{pmatrix} = [illegible]$ c) $\begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 117 \\ -153 \\ 207 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen vo[illegible]ung

Bei [illegible] Verhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die [illegible]

[illegible] für Vektorgleichungen mit e[illegible]

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ Man löst die Klammern [illegible] auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als[illegible] Gleichungssystem (LGS) entsteht.

[illegible] $= 12r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

$8 = 6r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie[illegible] [illegible]erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich[illegible] [illegible]efern. Das ist für r = $\frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist r = $\frac{4}{3}$ [illegible] des LGS.

Beispiel 2:

$\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ Man löst die Klammern der Vektore[illegible]uf, das[illegible] Gleichungen ergeben, also ein linea[illegible]ungss[illegible]m (LGS) entsteht.

I: $12 = 9r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

II: $16 = 12r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

III: $8 = 15r \quad \Rightarrow r = \frac{8}{15}$

Aus I und II f[illegible] r = $\frac{4}{3}$ [illegible] Gleichung III er[illegible] sich für r = $\frac{8}{15}$ also ein W[illegible]spruch. Dam[illegible] die Vektorg[illegible]ng nicht lösbar.

b) Beispiele für Vektorgl[illegible] zw[illegible] Variablen

Beispiel 1:

$r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ [illegible] \\ 0 \end{pmatrix}$ Auflösen de[illegible]ktorgleichung in drei einzelne Gleichun[illegible]en

I $2r + s$ [illegible] weglassen
II [illegible] $- s = 1$
III [illegible] $2s = 0$ II-III
IV $-s = 1$
$s = -1$ einsetzen in II $\Rightarrow r = 2$

Da es sich um ein überbestimmtes LGS handelt, müssen die Lösungen in der für die Rechnung bisher nicht verwendeten Gleichung I überprüft werden. Da sich kein Widerspruch ergibt, sind s = –1 und r = 2 Lösungen des LGS.

Einsetzen von r und [illegible]

[illegible] $+ s\begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Auflösen d[illegible]g in drei einzelne Gleichungen

I $2r + s$ [illegible]
II $r +$ [illegible]
III [illegible]

$= -1$ einsetzen in II $\Rightarrow r = 2$

[illegible]tzen in I: 3 = 4

Auch hier ergibt sich a[illegible] II und III das Ergebnis r = 2 und s = [illegible] Einsetzen in I ergibt hier [illegible] also einen **Widerspruch**. Damit ist d[illegible]chung nicht lösbar.

Kei[illegible]g

3. Lösen Sie die folgenden Vektorgleichungen:

a) $\begin{pmatrix}6\\21\\-9\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}15\\49\\-21\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}6\\21\\-9\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}14\\49\\-21\end{pmatrix}$

c) [illegible]

d) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

e) [illegible]

f) [illegible]

g) $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

h) [illegible]

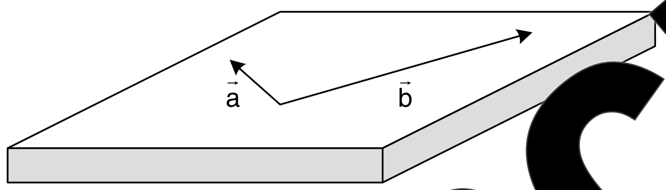
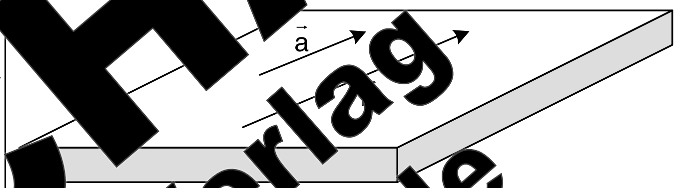
i) [illegible]

Lösungen in unsortierter Reihe[illegible]

keine Lösun[illegible] | [illegible]ine Lösung | keine Lösung
keine Lösun[illegible] | r = 3 und s [illegible] | r = 0,5 und s = 0,5
r = 15 und s = [illegible] | r = 2/7[illegible] | r = –3 und s = 1

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit i... der Eb...

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	Geg... sind ... $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$
	
Der Ansatz $r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ bedeut... dass der Vektor $\vec{b}$ als ...eli...es de... ...rs $\vec{a}$ dargestellt wer... ...ührt zum folgenden LGS:	Der An... $r\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ \,\end{pmatrix}$ ...eutet anschaulich, dass ...Vektor $\vec{b}$ als ...n Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestell... ...en kann und führt zum folgenden LGS:
LGS: 0= ... r = 2 ⇒ Widersp...	L...: 2r = 4 4r = 8
______ ... welc...s das LGS ...	Das LGS ist für r = _____ erfüllt.
Vektor $\vec{b}$ kann ______________ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Vektor $\vec{b}$ ist ein ____________________ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.
...erden kann, sind die Vekto... $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **linear unabhängig.**	...enn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein ...ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt ...n kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ...r abhängig.

Mathematisch er Ansatz für die Untersuchung au... ...hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben...

	$r\cdot\vec{a}=\vec{b}$ ... ...sung für r

...e: **Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear ______________________.**

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge...
selbstorganisiert ...le...en

Kap...

Lineare Abhängigk...
Unabhängigkeit

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i ... Rau

Ebe ... un

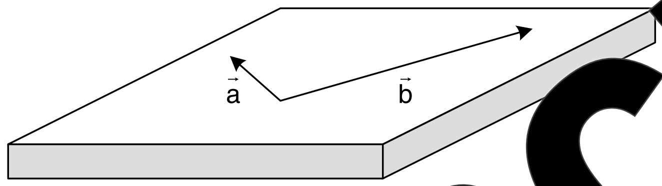
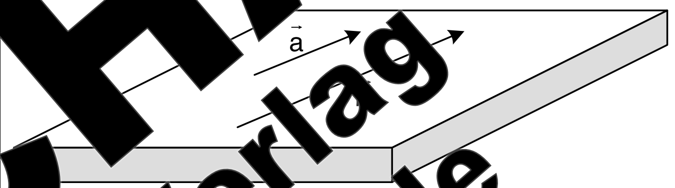
Lineare Abbildungen

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (... -031-266)
S ...

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

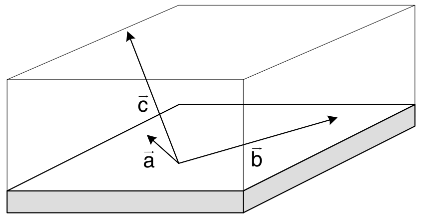
Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit i... der Eb...

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	Geg ... n sind ... V ... $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$
	
Der Ansatz $r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ bedeut ... dass der Vektor $\vec{b}$ als ... eli ... es de ... rs $\vec{a}$ dargestellt wer ... ührt zum folgenden LGS:	Der An ... r$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ \ldots\end{pmatrix}$ ... eutet anschaulich, dass ... Vektor $\vec{b}$ als ... Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt w ... en kann und führt zum folgenden LGS:
LGS: 0= ... r = 2 ... ⇒ Widersp ...	LGS: 2r = 4; 4r = 8
______ ... welc ... s das LGS ...	Das LGS ist für r = _____ erfüllt.
Vektor $\vec{b}$ kann _______________ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Vektor $\vec{b}$ ist ein ______________________ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.
... erden kann, sind die Vekto ... $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **linear unabhängig.**	...enn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein ... ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt ... n kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ... **r abhängig.**
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung au ... hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben ...	
	$r\cdot\vec{a}=\vec{b}$ ... sung für r
...e: **Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear** ______________________.	

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im Raum

Gegeben sind: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$



Der Ansatz $r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ bede... anschau-

lich, dass der Vektor $\vec{c}$ als L...ombination a...
den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ d...este... erde...
und führt zum folgenden ...

r + s = –1
s = ...
0 ... Wide...uch

Es gib... ...nd s ...che das LGS ...llen.

Ve... $\vec{c}$ kann ________ ...us einer
Line...ation der Vektor... $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ...
wer...

Gegeben sind: $\vec{a}=$ ...

...satz r ... bedeu... anschau-

lich, dass ... Vektor $\vec{c}$ a... ...earkombination aus
de... ...ren $\vec{a}$ und ... dargestellt werden kann
... ...rt zum fol... LGS:

0 = 0

Da... LGS ist für s = _____ und r = _____ erfüllt.

Vektor $\vec{c}$ kann als ____________________ der
Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden, da alle
drei Vektoren in einer Ebene liegen. Man sagt
auch, die Vektoren sind **komplanar**.

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum nicht durch
eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$
und $\vec{b}$ dargestell...
in der ...
...**bhängig.**

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum durch eine
Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und
$\vec{b}$ dargestellt werden kann, da er in der
...n Ebene wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt, sind die
...ektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$
...**ar abhängig.**

...athematischer Ansatz für die Untersuchung ... ...ängigkeit und Abhängigkeit im Raum...

$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$ **hat keine Lösung**	$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$ ... **...ung für r und s**

Ergänzen Sie: ... linear ________________ .
... sind linear ________________, w... ...planar sind.
...i Vektoren im ...aum sind linear ________________, we... in einer
Ebene liegen.

E... ...ungen: ______________________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge...
selbstorganisiert ...le...en

Ka...

Parameterdarstellung v... ...den

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Ebe[illegible]

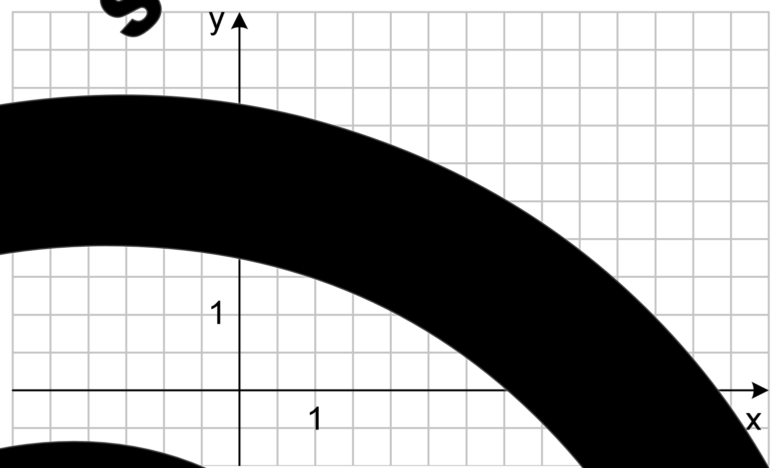
Lineare Abbildungen

Kapitel 8: Parameterdarstellung von Geraden

Aufgabe 8.1

Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sei ein Ortsvektor. Bestimmen Sie für d[illegible] Tabell[illegible]benen Werte von r jeweils die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{p}$ und die[illegible]rdinat[illegible]ektor $\vec{p}$ jeweils zugehörigen Endpunkte P(x/y). Zeichnen Sie jeden O[illegible]tsvekt[illegible]und d[illegible] Punkt P(x/y) in ein Koordinatensystem ein.

Parameter $r \in IR$	Ortsvekt[illegible]unkt P	Ko[illegible]ate[illegible]es Punktes P(x/y)
r = –1	$\vec{p} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix}2\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = 0	$\vec{p} = \begin{pmatrix}3\\ \_\_\end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = 0,5	$\vec{p} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ \_\_\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)
[illegible]	$\vec{p} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)
[illegible],5	$\vec{p} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix}2\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ \_\_\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)



Bes[illegible] Ort aller Endpunkte P:

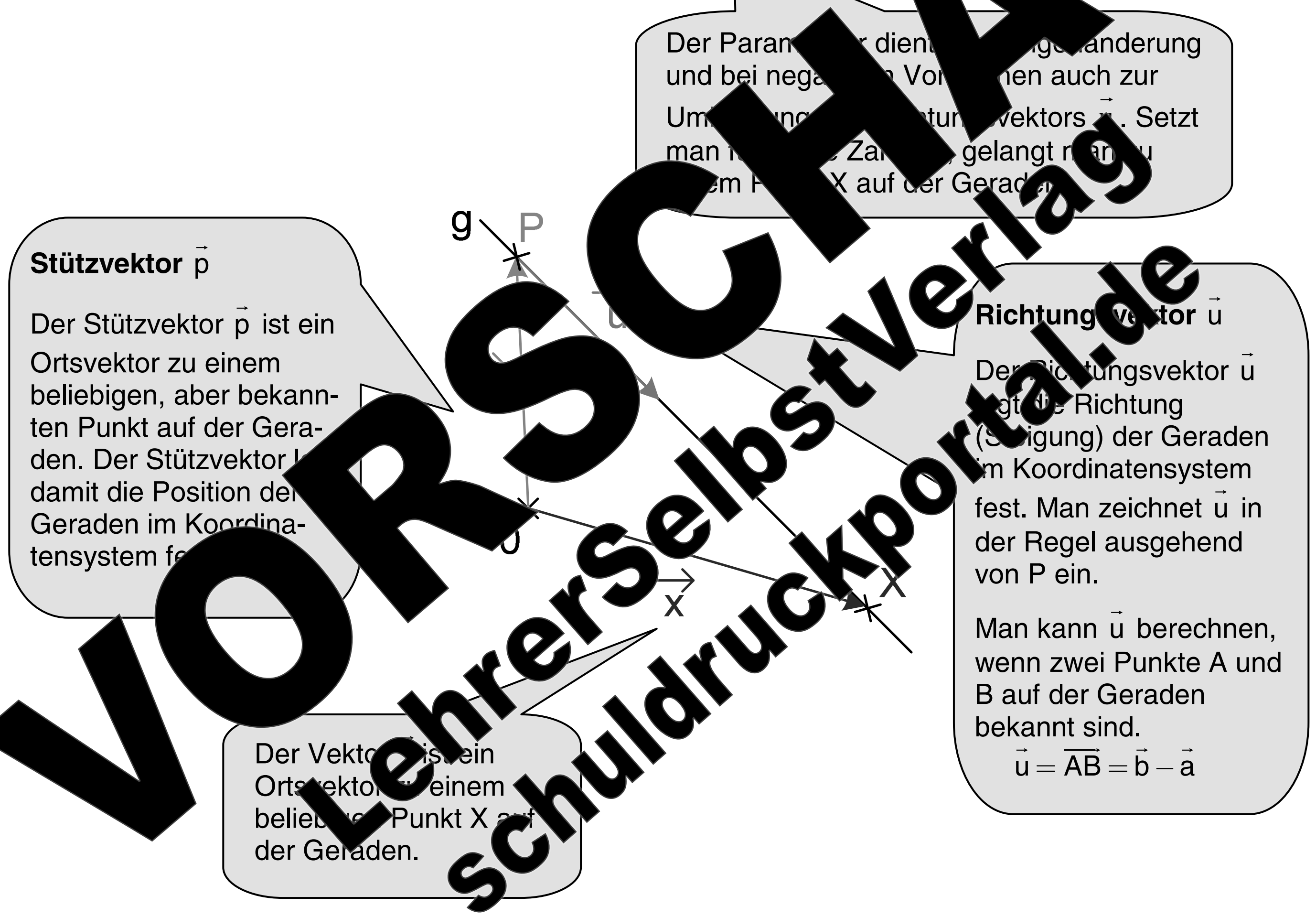
____

____

[illegible]n Sie diesen geometrischen Ort grafisch im [illegible]atensystem dar, [illegible]die Punkte [illegible]oll verbinden.

Information: Parameterdarstellung der Gerade

Parameterdarstellung einer Geraden: $\boxed{\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}}$



Parameterdarstellun... ...nten der Vektoren

Gerade... **Gerade im Raum**

$\ldots = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\ldots\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$

...er $\qquad$ oder

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}u_1\\\ldots\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}\ldots\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix}u_1\\\ldots\end{pmatrix}$

Anm... ... in der Analysis verwendete Form y = mx + b findet in der linear... ...blicherweise keine Anwendung, da diese Form ...er Geradendarste... ...r Geraden ...n der Ebene und nicht für Geraden im Rau... ...ist.

Aufgabe 8.2

Standardaufgaben bei Geraden

Arbeiten Sie die unten aufgeführten Beispiele zu den Standardaufg... ...Gerad... ...rch und lösen Sie anschließend mit Hilfe dieser Beispiele Aufgaben aus dem Schu...ch.

1. Erstellen der Parameterdarstellung der Gerad... ...bekannte P...kte P(1/0/2) und Q(1/2/3)

$\ldots = \vec{p} + r\vec{u}$ $\qquad$ mit $\vec{p}$ als Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ ergibt sich als Richtungsvektor

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}\ldots\\2-0\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

A... ...als Richtungsvektor wählen.

$\ldots\vec{q} + r\vec{u}$ $\qquad$ mit $\vec{q}$ als Stützvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix}\ldots\\2\\3\end{pmatrix}$ ...htungsvektor

$\vec{u} = \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}1-1\\0-2\\\ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

D... ...ene, jedoch gleichwertige Lösungen:

$\ldots + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ oder $\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

2. Die Koordinaten eines Punkte B auf der Geraden berechnen, indem man für den Parameter r einen vorgegebenen Wert einsetzt

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ Für r = 4 folgt: $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0\\0+8\\2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\6\end{pmatrix}$ also B(1/8/6)

Der Vektor $\overrightarrow{PB}$ ist viermal so lang wie der Vektor $\vec{u}$, wenn man für r den Wert 4 einsetzt.

3. Punktprobe: Überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden g liegt

a) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt A(1/4/4)

Schritt 1:

$\vec{a} = \vec{p} + r\vec{u}$

Für $\vec{x}$ wird der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A eingesetzt.

$\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Schritt 2:

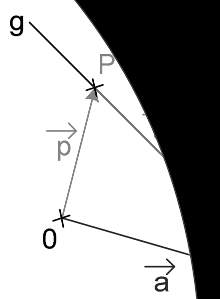
... die Vektorgleichung ... und prüft ob ... sfrei gelöst ...

$1 = 1$
$4 = 0 + 2r \quad \Rightarrow r = 2$
$4 = 2 + r \quad \Rightarrow r = 2$

Ergebnis: Kein Widerspruch, also liegt der Punkt A auf der Geraden g.

... des Ergebnisses:

... wurde, ist der Vektor ... nach A doppelt so lang wie der Richtungsvektor $\vec{u}$.



b) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt B(1/2/2)

Schritt 1:

$\vec{b} = \vec{p} + r\vec{u}$

$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

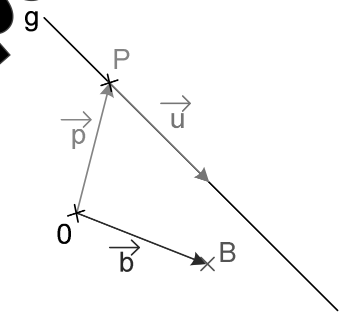
Schritt 2:

$1 = 1$
$2 = 0 + 2r \quad \Rightarrow r = 1$
$2 = 2 + r \quad \Rightarrow r = 0$

Ergebnis: Widerspruch, also liegt der Punkt B nicht auf der Geraden g.

Zeichnerische Interpretation des Ergebnisses:

Der Punkt B kann durch Vervielfachen des Richtungsvektors $\vec{u}$ nicht erreicht werden.



Übungen

Ü8.1 Begründen S... beliebig viele Gleichungen in Parameterdarstellung haben ka... unterschiedlich und die Richtungsvektoren kollinear sind.

... Übungen:

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge ra
selbstorganisiert rle en

Ka

Lagebeziehung von

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i… Rau…

Eben…

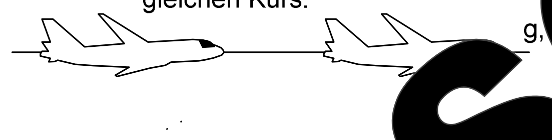
Lineare Abbildungen

Kapitel 9: Lagebeziehung von Geraden

Aufgabe 9.1

Sie wissen aus Untersuchungen in der Ebene bereits, dass sich zw… …n sch… …en können und dass sie parallel oder identisch sein können. Im Raum kommt eine w…ere … …ziehung hinzu, die man als **windschief** bezeichnet. Die Lagebeziehungen vo… …raden … …ssen sich anschaulich an Flugrouten von Flugzeugen, die sich hier zur Vereinfach… …eradl… …bewegen, veranschaulichen. Ergänzen Sie dazu in den folgenden Texten fehlend… …form…n:

Die Flugzeuge fliegen auf dem gleichen Kurs.



Die Flugzeuge flie… …uf …ichem Kurs … …terschiedli… …öhe.

Die Geraden g und … ________.

Die Ric… …ren … und h sind

linear ____________________.

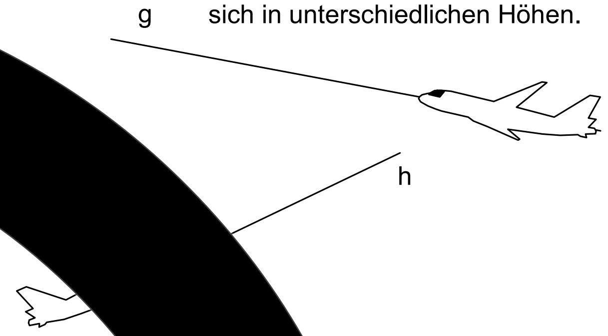
Die G… …n g und h sind ________________.

…Richtungsvektoren von g und h sind

linear ____________________.

Die Flu…

Die Flugrouten überschneiden sich in unterschiedlichen Höhen.



Die Ge… ________________

________________________.

…gsvektoren von g und h sind

… ____________________.

Die Geraden … ________________

________________________.

Die Richtungsve… … und h sind

…ear ____________________.

Um rechnerisch zu bestimmen, welche Lagebeziehung bei zwei Geraden vorliegt, gibt es m… …re Wege. Hier soll der Weg beschritten werden, der den geringsten Rechenaufwand … sich bri… …nd damit am wenigsten anfällig für Rechenfehler ist.

Schema für die Untersuchung der Lagebeziehung … …den

Untersuchung der Richtungsvekto… …uf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhäng…

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig.

Die Rich… …gsvektoren s… …inear unabhä… …ig.

Durch Punktprobe … …b die Gerade… parallel oder i… …sch… …d. Da… der Stützve… …ne… …den in die andere G… …eing…

…urch Gleichsetzen prüfen, ob die G… …en sich sch… …en oder windschief … …d.

Aufga… …2

…piel… …r Berechnungen zu… …agebeziehung von Geraden

Ergän… …bei den fo… …enden Untersuc… …en zur der Lagebeziehung von Geraden fehlende Angaben b… …w. Rechnunge…

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

1. U… ______________________

…1… …−3) … = (2, −1, 3) ⇒ $-2r = 2 \Rightarrow r = -\ldots$; $r = -1 \Rightarrow r = -1$; $-3r = 1 \Rightarrow r = -1$

…ier muss man nicht …dingt ausführlich …n, da die lineare …keit schon …ues Hinsehen

Die Richtungsvekt… ______________________.

2. Punktpr… …h einsetzen

(5… …5 …−4) ⇒ … $r = 1$ $r =$ __; $3 + r = 5$ ⇒ $r =$ __; $2 + -3r = -4$ $r =$ __

…: Kein Widerspruch ⇒ g ist ______________ h.

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\\ldots\end{pmatrix}$ un… $\vec{x} = \ldots s\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$

1. Wie bei a) erkennt man auch ohne Rechnung, dass di… Richtu… …ve… …inear abhängig sind.

Zur Erinnerung: Sowie ein Widerspruch auftauch… wird nicht weiter-gerech…

2. Punktprobe

$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ $5 + -2r =$ ___ … $-2r =$ …; $3 + r =$ ___ ⇒ … $= 0$; $2 + -3$… ___ ⇒ Wider…ch

3. Ergebnis: Widerspruch … ______________ k. (kur… …)

c) …Int… …chen S… …e Lagebezie… …der Gerade… …: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $n: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

…Durch genaues Hinse… …erkennt ma… …e Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear ______________ sind.

2. Gleichsetzen g = n ergibt: $\begin{pmatrix}\ldots\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

LGS … 7 + 3s … 2s

… ⇒ −3r = 3 ⇒ r = ____

r in II ⇒ __ = 2 …

r und s in I ⇒ 7 = 7

Kein Widerspruch ⇒ die Geraden______________

3. Sch… …r s in n einsetzen.

…n, dass so …naufwand w… …ntsteht; hie… …ie Gerade n ein…

…nittpunkt: S(___ /___ /___)

…0) …5)

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $m: \ldots \begin{pmatrix}1\\0\\ \ldots\end{pmatrix} + s \ldots$

1. Untersuchung der Richtungsvektoren auf ______________________

$r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 0,5 \\ r = 2 \end{matrix} \Rightarrow$ Wider...

... Widerspruch erkennt man auch durch genaues Hinsehen.

2. Gleichsetzen g = n ergibt: $\begin{pmatrix}5\\ \ldots\end{pmatrix} + r \ldots = \ldots \begin{pmatrix}\ldots\\ \ldots\\-3\end{pmatrix}$

LGS lösen:

I	5 – ... =	1 – ...	
II	... + r =	0 ... s	
...	3r =	... 3s	
I	–2r + s =	–4 –	...
II	r – ... =	–3	
III	3r + ...s =	0	...II–III
IV	__s =	...	
	s =	...	

s in II $\Rightarrow$ r ... 2 = –3 $\Rightarrow$ r = –1

r und s in I $\Rightarrow$ ______ = ___

= ___ Widerspruch

Di... ______ .

...albüchern gibt es eine große Anzahl von Aufgabe... von Lagebeziehungen ...aden. Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe der Beispiele ...

Ergänz... ______________________

____

____

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru... ...alarpro...

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z... ...er V... ...n eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass ... die A... ...Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch ... unter ... Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond...ll de... ...charakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücks... ...dass ...rößen F und s Vektoren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö...n. Man schrei... ...e Formel ...n wie folgt:

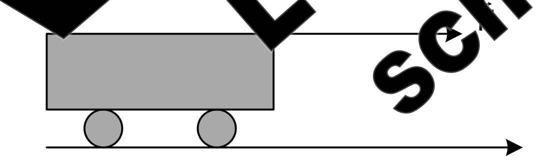
...rbeit: $\ldots = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Das Produkt der beiden Ve... ...en in d... ...ungsfa... ...bt keinen Vektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A... ...Richtung hat. A... dieser Eigens... ...bei der Multiplikation zweier Vektoren leite... ...n den Ausdru... **Skalarprodukt** ab.

2. Eigenschaften ... ...dukts veran...aulicht am Beispiel der Kraft

Die f... ...bbil... ...n zeigen jew... ...inen Wagen, ... waagerecht nach rechts in Richtung des ...eges $\vec{s}$ ...egt u... mit der Kraft $\vec{F}$ gezogen w... Die Wirkung der Kraft für die gewünschte Bewe...ung ist in ...n drei Fällen ...rdings unterschiedlich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

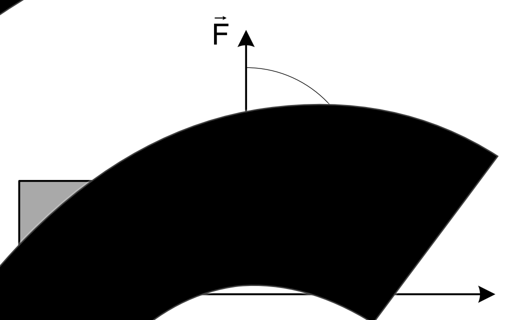
...1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$



$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, wenn $\vec{F} \parallel \vec{s}$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



Mit eine... ...echt nach oben zeigt, kann man den W... ...e Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh... ...hochheben. Damit ist die Kraft für die gew... ...gung nicht wirksam und es wird in physikali... ...eine Arbeit verrichtet.

Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} =$ _____ ... $\perp \vec{s}$

Dieses Anwendungsbeis... ...ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft ... ...rodukts:

Das Skalarprodukt zweier or... ...oren ist immer

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]ra
selbstorganisiert [illegible]rlernen

Ka[illegible]

Skalarproduk[illegible]

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i[illegible] Ra[illegible]

Eben[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru[illegible] [illegible]alarpro[illegible]

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z[illegible] [illegible] eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass [illegible] die A[illegible] [illegible] Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch [illegible] unter [illegible] Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond[illegible]ll de[illegible]ielle[illegible] Charakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücksi[illegible], dass [illegible]rößen F und s Vektoren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö[illegible]n. Man schreib[illegible] Formel da[illegible] wie folgt:

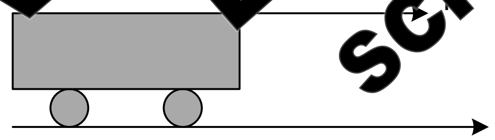
[illegible]rbeit: $[illegible] = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Das Produkt der beiden Vek[illegible]en in di[illegible] [illegible]ndungsfall [illegible] keinen Vektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A[illegible] Richtung hat. A[illegible] dieser Eigens[illegible] bei der Multiplikation zweier Vektoren leite[illegible] [illegible] Ausdru[illegible] **Skalarprodu[illegible]** ab.

2. Eigenschaften [illegible]dukts veranschaulicht am Beispiel der Kraft

Die f[illegible]bil[illegible]n zeigen jew[illegible] [illegible]inen Wagen, [illegible] sich waagerecht nach rechts in Richtung des [illegible]eges $\vec{s}$ [illegible]egt und mit der Kraft $\vec{F}$ gezogen wird. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte Bewegung ist in [illegible]n drei Fällen [illegible]dings unterschiedlich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

[illegible]1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$

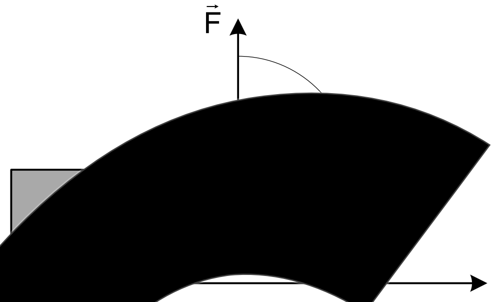


$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.

Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, wenn $\vec{F} \parallel \vec{s}$

[illegible] $\vec{F} \perp \vec{s}$



Mit eine[illegible] [illegible]echt nach oben zeigt, kann man den W[illegible] [illegible] Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh[illegible] [illegible] hochheben. Damit ist die Kraft für die gew[illegible]gung nicht wirksam und es wird in physikali[illegible] [illegible]eine Arbeit verrichtet.

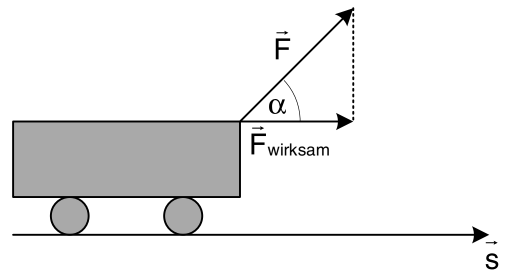
Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} =$ ____ [illegible] $\perp \vec{s}$

Dieses Anwendungsbeis[illegible] [illegible]ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft [illegible]produkts:

Das Skalarprodukt zweier or[illegible] [illegible]oren ist immer [illegible]

Allgemeiner Fall:

Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen beliebigen Winkel ein



Nur der Teil der Kraft, der in die [illegible]ung de[illegible]eges $\vec{s}$ zeigt, also $\vec{F}_{wirksam}$ is[illegible] Bewe[illegible] damit für die verrichtete Arbe[illegible]m und es gilt somit entsprechend z[illegible] Fall [illegible] $\vec{s}$

Der wirk[illegible]me Te[illegible] Kra[illegible]wirksam hängt vom ________ [illegible] dem Weg [illegible] und der Kraft [illegible]

[illegible]Winkelbezi[illegible]hun[illegible]ür α:

cos[illegible] $\frac{|[illegible]irksam|}{|\vec{F}|}$ [illegible] $\vec{F}_{wirksam} =$ ________

Für die [illegible]chnung der A[illegible]eit gilt daher allgemein:

$$W = [illegible] \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \alpha$$

Aufgabe[illegible]

Erlä[illegible] S[illegible] [illegible]ormel $W = [illegible] \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos$[illegible] [illegible]r Berechnung der Arbeit hergeleitet werden [illegible]ann.

____

____

____

Aufgabe 10.[illegible]

Ze[illegible] Fälle 1 und 2 in der Formel für den [illegible] sind.

[illegible] $\Rightarrow W =$ ______________________________

$\alpha = 90° \Rightarrow W =$ ______________________________

3. Die Definition[illegible]

Ersetzt[illegible] [illegible]bige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, gilt für das S[illegible]

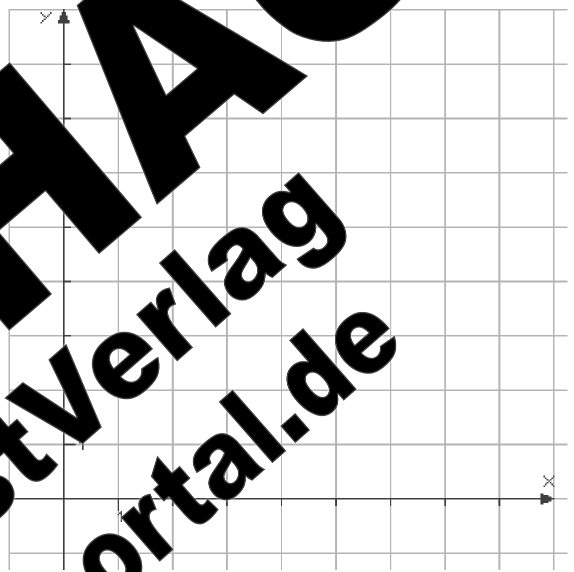
Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$

4. Die Koordinatenform des Skalarprodukts

Aufgabe 10.3

In der Ebene sind die Ortsvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.



a) Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ … m Lineal in das Koordinatensystem ne… an ein.

b) Messen Sie den von den V… n $\vec{a}$ … eingeschlossenen Winke… ge… ie mit dem Geodreieck:

α = ________

c) Berechn… de… ag (Länge) de… ekt… n.

$|\vec{a}| =$ ________

… $=$ ________

… Be…hnen Sie das S…arprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe der berechneten Längen und des …ssenen W…kels:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha =$ ________________________________

e) Berechnen Si… … Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die folgende Summe:

____

…ie das Ergebnis mit dem un… …arprodukt.

…e Ergebnisse sind ________________________________

f) Begründen Sie auf Basis des Ergebnisses in e), warum das S… …ch wie folgt berechnet werden kann: …

____

____

____

____

5. Überblick zur Definition des Skalarprodukts

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren mit Hilfe des eingeschlosse… Win…:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren in Koordi… form…

Ebene: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ **Raum:** … $\begin{pmatrix} \ldots \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + \ldots_2 + a_3 \cdot b_3$

Aufgabe 10.4

a) Lesen Sie in einer geeignete… Quelle … Bew… … die Gültig… der Regel im Kasten oben nach.

b) Informieren Sie sich m… …fe einer geeig… en Quelle ü… die Rechen…setze für das Skalarprodukt.

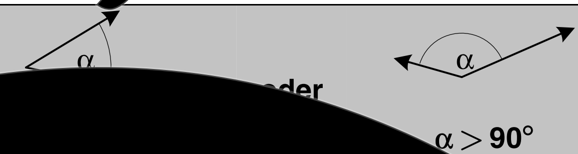
6. Folgerungen … dem …arprodukt

a) Mit Hil… es Ska… …dukt… kann man … berprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal sind.

W…n … ist, dann …ilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ … $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

b) … an die Formel z… Definition d… …alarprodukts nach cos α um, so kann man den eing…chlossenen W…kel zwische… … Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen. Die berechneten Werte für die Winkel liegen im Intervall [0°; …°]

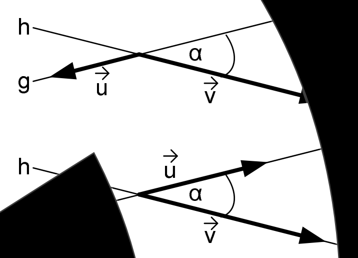
Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

… …chnittwinkel von Geraden:

…hnittwinkel von Geraden berechnet man mit … …ektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der …den Geraden. Beim Schnitt von zwei Geraden g und h … …inkel, von denen einer größer als 90° und einer kleiner als 90° ist. Den kleineren Wi… **…chnittwinkel von Geraden** bezeichnet wird, erhält man, wenn man im Zähler den … …alarprodukts verwendet. Ohne Betr… …erhält man den von den Vektoren … …enen Winkel, und der kann dann…



… liefert in beiden Fällen α

…$|\vec{v}|$

Aufgabe 10.5

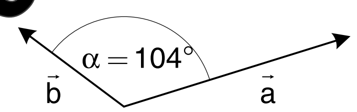
Die folgenden Beispiele zeigen grundlegende Anwendungen und den Umgan... den A...endungen des Skalarprodukts. Ergänzen Sie fehlende Anmerkungen und Re... ...schritte.

1. Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ...d $\vec{b} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$

Man setzt beide Vektoren in die Formel für die Be... ...inkels ein.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\ldots}{\sqrt{\ldots} \cdot \sqrt{\ldots + \ldots}}$$

$$= \ldots -0{,}24$$



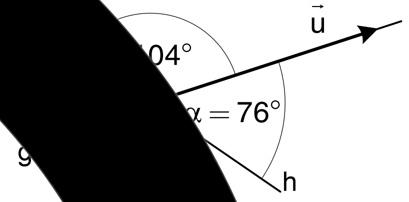
$= \ldots (-0.24) \approx 104$

...hnen des Schnittwinkels zw... den Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Man setzt die Richtungsvek... der Geraden in die Formel ein. (Beachten Sie dabei, dass die Richtungsvektoren mit den Vektoren aus 1. übereinstimmen.)

$$\sqrt{\_\_ + \_\_ + \_\_} \cdot \sqrt{\_\_}$$

$$= \frac{|\_\_ + \_\_ + \_\_|}{\sqrt{\_\_}} = 0{,}24$$



...e die Wirkung de... Betragsstriche im Zähler des Bruchs:

____

____

3. Prüfen, ob zwei Vektoren oder zwei Geraden orthogonal sind.

a) Erläutern Sie folgende Rechnung:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{0}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \cos^{-1}(0) = 90°$$

____

____

4. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \ldots \begin{pmatrix} 1 \\ \ \\ -1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \ \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + r \ldots$ und die Gera... $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Alle drei Geraden lie... ...en E...be... ...haben jeweils ...inen Schnittp...kt. Geben Sie an, welche der Geraden orthog... ...ind, ...em Sie die folgende... ...echnungen u... den Text ergänzen:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \_\_ + \_\_ + \_\_ = 8$ Die Geraden ___ und ___ sind ________________

$\ldots = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \_\_ + \_\_ + \_\_ = 0$ Die Geraden ___ und ___ sind ________________

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \_\_ + \_\_ + \_\_ = 3$ Die Geraden ___ und ___ sind ________________

Er...

____

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap…

Vektor- oder Kreuzp…

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und … Ra…

Ebe… …un…

Lineare Abbildungen

Gesa… …ebra selbstorganisiert erlernen (… …031-266)
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 11: Vektor- oder Kreuzprodukt

Neben dem Skalarprodukt, bei dem das Ergebnis der Multiplikation ein Skalar ... gibt es ... e weitere Möglichkeit Vektoren miteinander zu multiplizieren. Wie der Name V... produ... , ist das Ergebnis dieser Multiplikation ein Vektor.

Eine Anwendung dieser Multiplikation ist in der Physik bei ... chnu... ...zkraft, die bei der Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld auftritt, zu find...

Die Definition des Vektor- oder Kreuzprodukts zweie... ... aums $\vec{a} \times \vec{b}$ (s... rich: a kreuz b) kann in jedem Tafelwerk nachgeschlagen w... ... nd ...

Definition Vek... odukt: $\ldots = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Neben der Anwend... ... Form... man a... ...geeignete Taschenrechner einsetzen, um das Vektorprodukt zu ...tteln. ... besteht zudem die Mö...keit dies... Produkt manuell zu berechnen. Hierbei wird ersicht... ... dieses Pro...kt ...uch als Kr...produkt bezeichnet.

Berech... ... Kreu...dukts ohne Verwendung der ... oder des Taschenrechners:

1. Sch... ... e K...mponente ... en unten an...ängen.

2. Schritt
x-Komponente berechnen:
$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 3 $\Rightarrow -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1$
y- und z-Komponenten werden ... ...ltipliziert.

3. Schritt
y-Komponente berechnen:
$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 3 $\Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1$
z- und angehängte x-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

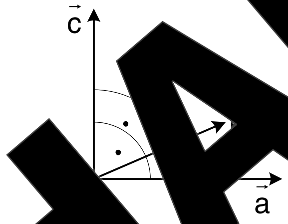
$\ldots = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ \ldots 3 - 2 \cdot 1 \\ \ldots -(-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 9 - 2 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

2

4. Schritt
z-Kom... ...en:
3
2 3
x- und y-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

Eigenschaften des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

1. Der Vektor $\vec{c}$ ist orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



Aufgabe 11.1

Ergänzen und erläutern und Sie die folgende Rechnun...

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \_\_\_ + \_\_\_ \ldots$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \_\_\_ + \_\_\_ \ldots 0$

2. Das ...ktor... ... ein Recht...ystem.

Der Vektor an der ersten Position, hier $\vec{a}$, zeigt in Richtung Daumen.

D... Vektor an der zweit...n Position, hier ... zeigt in Richtung Zeigefinger.

$\vec{c}$ zeigt in Richtung Mittelfinger.

Vertauschen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bewirkt Umkehrung von $\vec{c}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

Die Richt... ab... ...net, und kann m... ...and-Regel** ermittelt werden.

Aufgabe 11.2

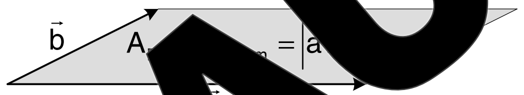
Weisen Sie dur... ...h, dass gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \ldots \end{pmatrix}$

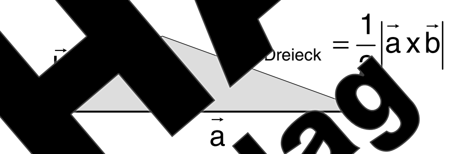
=

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Flächen berechnen.

Für die Fläche eines Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:

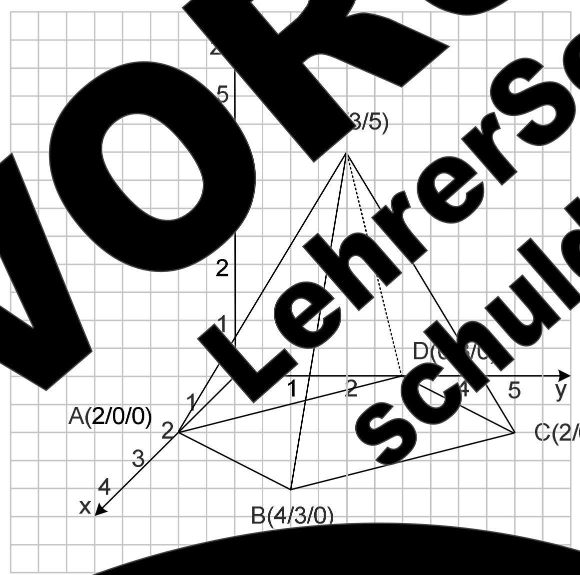


Für das markierte Dreieck gilt demnach:



Aufgabe 11.3

Zeigen Sie, dass die Grund... ebildeten Pyram... eine Raute ... und ergänzen bzw. erläutern Sie die B... ng der nachf... enden drei B... chnungen:



Berechnung 1:

Erläu...

$\_\_\_\_ = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ \\ \end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{144} = 12$

Berechnung 2:

Erläuterung:

$\_\_\_\_ = 4 \cdot \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right|$

$= 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix} \right| = 2 \left| \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \right|$

$= 2\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} = 2\sqrt{361}$

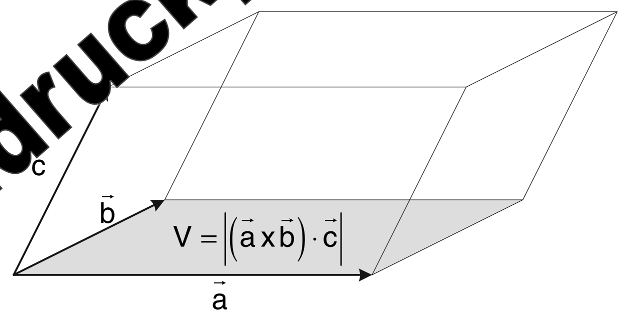
Berechnung 3:

...äuterung

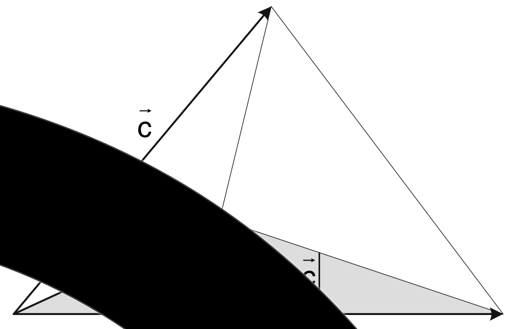
A = 12 + 38 = 50

3. Mit dem Vekto... produk... n ma... olume... be... hnen

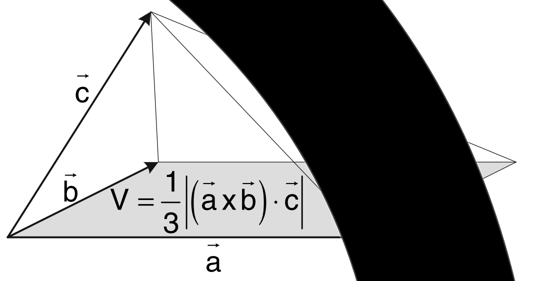
a) Vol... n eines Spats



b) Volume...
Gr...



c) Volumen einer beli... ...deren Grundfläche ...
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ ...
Paral... ...ein
Qu...



Er... ...ungen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge…
selbstorganisiert …rle…en

Kap…

Darstellung von E…

02-031-266

Gesa… …ebra selbstorganisiert erlernen (… …-031-266)
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 12: Darstellung von Ebenen

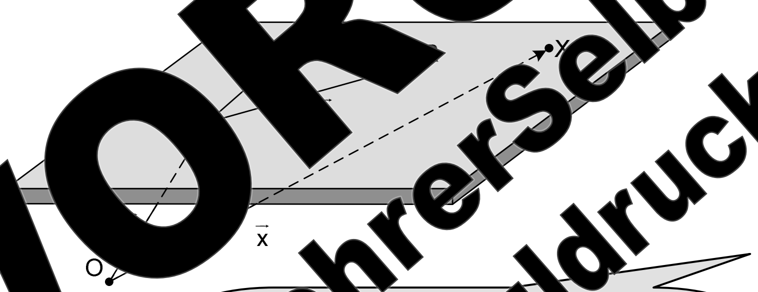
Aufgabe 12.1

Während Geraden im Raum in der linearen Algebra nur mit Hilfe d… …tergle… …g angegeben werden, kann man Ebenen mit drei verschiedenen Darstellungsform… …bes… …n. Erarbeiten Sie sich mit Hilfe der folgenden Informationen und Aufgabenstellun… …die Eb… …ung im Raum.

1. Ebenen in Parameterdarstellung

Sie wissen bereits, dass eine Gerade durch zwei P… …und… …it Hilfe de… …arametergleichungen g: $\vec{x} = \vec{p} + s\overline{PQ}$ oder g: $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}$ ange… …wird. … …an aus der folg… …bbildung erkennt, kann durch Hinzufügen eines dritten P… …tes R und dan… …rch Hinz… …eines zweiten Vektors von P nach R eine Ebene festgelegt w… …n (vgl. … …itel 7 Lineare U… …bhängigkeit… …urch Linearkombination der beiden… …ren … …d $\vec{v}$ … …steht ent… …end zur Ge… …gleichung eine Ebenengleichung in Param… …darstellung.

E: … $\vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$



Bezeichnun…

$\vec{x}$: … …ektor zu einem beliebigen Punkt … der Ebene

$\vec{p}$: Stützvektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt P

$\vec{u}$: Spannvektor $\vec{u} = \overline{PQ}$

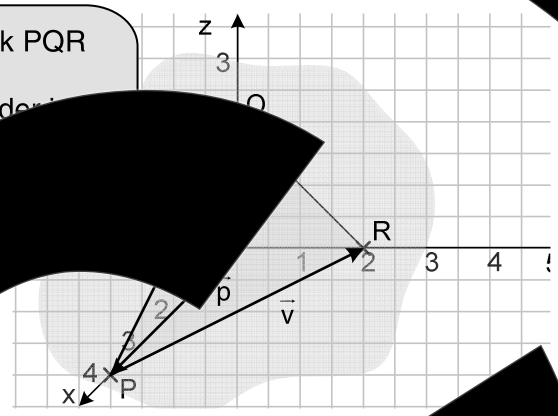
$\vec{v}$: Spannvektor $\vec{v} = \overline{PR}$

Man … …icht bei Eben… …icht mehr von einem Richt… …vektor, sondern von zwei Spa… …toren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, welche die … …ne aufspannen.

Um die … …darzustellen, werden Ebenen, wie im folgenden … …atensystem dargestellt.

…geben ist eine Ebene, welche die folgenden Pu… …/0), Q(0/2/0) und R(0/0/2)

Das Dreieck PQR ist nur ein Ausschnitt de… unendli… aus… E…



… $\overline{PQ}$ $+ s\overline{PR}$

E: … $\begin{pmatrix} -4 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

oder mit g… …annvektoren

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ … $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Ebenen in Normalendarstellung

Für die Normalendarstellung der Ebene benötigt man einen Stützvektor $\vec{p}$ und … …belie… …n Repräsentanten des Vektors, der orthogonal zur Ebene E verläuft. Di… …Vektor … **Normalenvektor $\vec{n}$** der Ebene bezeichnet. Wie man den folgenden A… …n ent… …en kann, legen der Stützvektor die Position der Ebene und der Normalenvektor … …La… …Ebene im Raum fest.

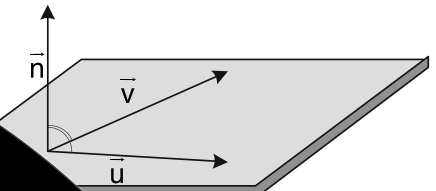
Der Stützvektor $\vec{p}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen bekannten Punktes auf E.

Die Lage der … …wird … …n den Nor… …vektor best… …Ände… …Normalenvekto… …ine… R… …ung, verände… …h auch die… …der Ebene.

Begr… …n Sie, waru… …n den Norm… …vektor einer Ebene mit Hilfe des Vektorprodukts bestimmen kann, in dem Sie den fo… …den Satz vervollständigen:

Das Vektorprodukt aus zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

erzeugt einen Vekt… …zu den beide… sen… …gespannt wird. Damit gilt für d… …vektor $\vec{n}$ der Ebene:



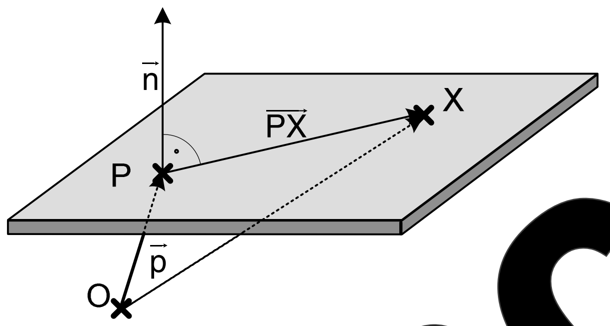
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

…nvektoren …genau …vektoren

Für di… …gilt damit:

$\begin{pmatrix} \ldots \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \ldots \end{pmatrix}$

Anhand der folgenden Abbildung wird nun die Überlegung, die der Ebenendarstellung in Normalenform zugrunde liegt, erläutert:



Bezeichnungen:

$\vec{x}$: Ortsvektor zu einem beliebigen unbekannten Punkt auf der Ebene

$\vec{p}$: Stützvektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt P

$\vec{n}$: beliebiger Repräsentant des Normalenvektors der Ebene E

$\overline{PX}$: Vektor vom Punkt $P(p_1 / p_2 / p_3)$ zum Punkt $X(x_1 / x_2 / x_3)$

Die Ebenengleichung ergibt sich aus der Zusammenfassung der drei Überlegungen:

1. Der Vektor $\vec{n}$ und der Vektor $\overline{PX}$ sind orthogonal.

2. Bei orthogonalen Vektoren ist das Skalarprodukt Null: $\overline{PX} \cdot \vec{n} = 0$

3. Für den Vektor $\overline{PX}$ gilt: $\overline{PX} = \vec{x} - \vec{p}$

$$E_N: \ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

Für das Beispiel 1 gilt damit:

$$E_N: \ \left[\ldots \right] \quad \text{oder} \quad E_N: \ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

3. Darstellung einer Ebene in Koordinatenform

Multpliziert man das Skalarprodukt der Ebene aus der Normalendarstellung aus, so erhält man die Ebene in Koordinatendarstellung.

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_1x + n_2y + n_3z - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_1x + n_2y + n_3z = d$$

Wichtig: Die Vorfaktoren von x, y und z entsprechen den Komponenten des Normalenvektors.

Da man die Zahlenwerte von n_i und p_i kennt, ergibt diese Summe einen Zahlenwert, den man mit d bezeichnet.

In Tafelwerken findet man die Koordinatendarstellung in der Regel in der folgenden Form:

$$\mathbf{E_K: \ ax + by + cz = d \quad mit \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren der Normalendarstellung, dass sich die Ebene aus Beispiel 1, wie unten angegeben, darstellen lässt:

$$\left[\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} - \ldots\right] \ldots$$

$$\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \_\_\_\_ + \_\_\_\_ \ldots \_\_\_\_ + \_\_\_\_) = 0$$

$E_K: \ x + 2 \ldots$

Aufgabe 12.2

Eine Ebene F ist durch die Punkte A(–4 / 1 / 3), B(1 / 0,5 / 1) und C(2 / –3 / [illegible]) gegeben.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich bei der Wahl von Punkt A als Stützpunkt für die Ebene die folgende Ebenengleichung in Parameterdarstellung ergibt: $E_P: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Ermitteln Sie die Normalendarstellung der Ebene F. (Zur Kontrolle: $E_N: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ 34 \end{pmatrix} = 0$)

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene F in Koordinatendarstellung und zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Koordinatendarstellung der Ebene E im Beispiel 1 von Aufgabe 12.1 übereinstimmt.

Aufgabe [illegible]

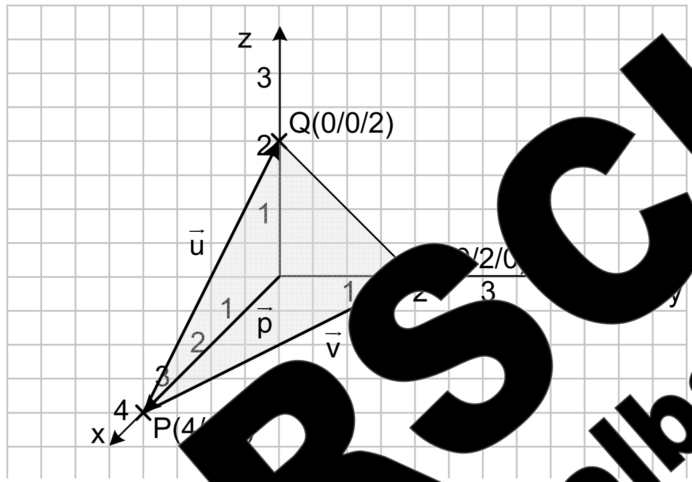
Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Aufgaben 12.1 und 12.2 und ergänzen Sie:

- Die Parameterdarstellungen der Ebenen E und F weisen _______________ Gemeinsamkeiten auf und man kann _______ erkennen, dass es sich um die gleichen Ebenen handelt.
- D[illegible] ___________________________
  [illegible] die Normalenvektoren sind _______________.
- Die Koordinatendarstellung der Ebenen E und F ist ____________________.
- Wenn man über[illegible] zwei Ebenen identisch sind, gi[illegible]
  Die ______________ ist dafür ungeeignet, da ein un[illegible]ene
  v[illegible] kann.
  [illegible] ______________darstellung ist am besten geeignet, da gleiche [illegible]tische
  [illegible]ngen haben.

Aufgabe 12.4

Zusammenhang der Koordinatendarstellung einer Ebene und ihrer Achs... eschn...

Die Ebene aus dem Einstiegsbeispiel in Aufgabe 12.1 soll hier erne... rstellu... er Zusammenhänge herangezogen werden.



...dina... leichung in der einfachsten ...Da... llung:

E_K: x + 2... + 2z = 4

Umfor... g der K... dinatengleichung

W... ma... elte Koordi...tendarstellu... Ebene E so umformt, dass auf der rechten Seite de... eichn... eichens ei... teht, erhäl... ie Gleichung:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Nennern der umgeformten Koordinatendarstellung der Ebene E sowie den Koordinaten der Achsenabschnitte, indem Sie die folgenden Lücken vervollständigen:

... $\frac{z}{\;}=1$

...abschnitt auf der- ___-Achse P(4/0/0) Achsen... ___-Achse ... ...chsenabschnitt auf der- ___-Achse Q(0/0/2)

Stellt man eine Ebene in der Koordinatendarstellung so dar, dass ... leichheitszeichen eine 1 steht und im ... he links vom Gleichheitszeichen ... z ohne Vorfaktoren erscheinen, s... ________________ der Ebe... Nenner bestimmen.

Di... Koordinaten... tellung einer Ebene wird auch als **Achsen... form** bezeichnet.

4. Eine Ebene – Drei verschiede Darstellungen – Zusammenhänge am Beispi... aus A... be 12.1

Die Ebene E enthält die Punkte:

P(4/0/0) Q(0/2/0) R(0/0/2)

Ortsvektor von P als Stützvektor wählen

Spannvek... $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$ und ... den

Zu ein... gibt es je na... ahl der drei P...kte unendlich viele ...terschiedlich... ...eterdarstell...n.

Spann...ren darf ma... zen.

Parameterdarstellung

... : $\vec{x}$ ... r$\overrightarrow{PQ}$ ... $\overrightarrow{PR}$

E_P : $\vec{x}$ ... $\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$ + s $\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$

...er Stützvekt... von E ist der ...kannte Pun... P auf der Ebene

Das V...produkt ... ergibt den ...ormalenvektor

Normalenvektoren darf man kürzen.

Gleiche Ebenen haben gleiche gekürzte Normalenvektoren.

...m...ndarstellung

$E ... \left[\begin{pmatrix}x\\ \cdot\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$

...larprodukt

Gleiche Ebenen haben in Koordinatendarstellung iden... ...che Gleichungen.

E_K : x + 2y + 2...

...natendarstellung

Koeffizienten bilden den Norma...

$$\frac{x}{\;}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

Achtung
Im Zä...
un...
Z...
...s ein +
... auf der
...eite eine 1.

...er liefern die Achsenabschnitte der Ebe...

Aufgabe 12.5

Vertiefendes Beispiel

Die Punkte P(1/1/0), Q(2/0/1) und R(0/1/2) liegen in einer Ebene E.

a) Ermitteln Sie eine Parameter-, eine Normalen- und eine Koordinatendarstellung der Ebene.
(Kontrollergebnis: E: 2x + 3y + z = 5)

b) Erläutern Sie, warum es sinnvoll ist, ein Kontrollergebnis in der Koordinatendarstellung oder in der Achsenabschnittsform anzugeben.

c) Zeichnen Sie die Ebene anhand ihrer Achsenabschnitte so, dass ein räumlicher Eindruck von der Lage der Ebene entsteht.

5. … Zusammenfassung der Ergebnisse zur Darstellung von Ebenen

Parameterdarstellung: $E_P: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$

Normalendarstellung: $E_N: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Koordinate… mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

…itte

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

Achsenabschnitt x – Achse:

Achsenabschnitt y – Achse: Y(0…

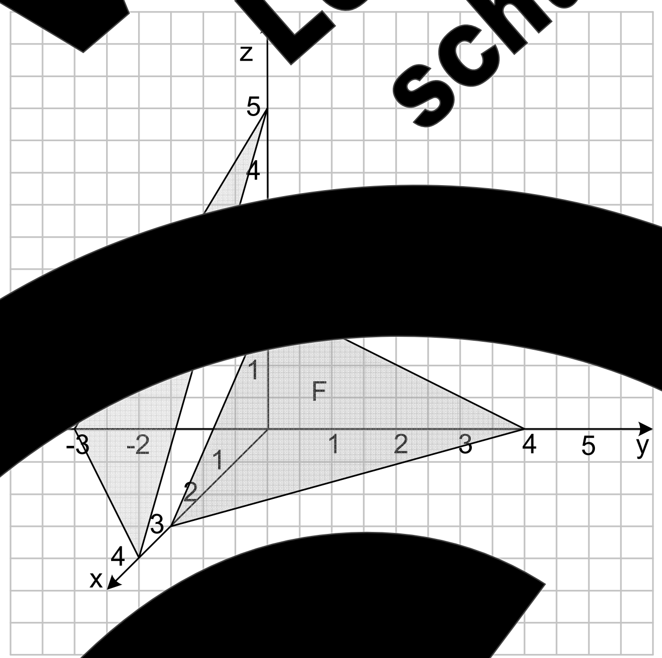
…chnitt z – Achse: Z(0/0/…

Aufgabe 12.6

Zeichnen Sie die Ebene E: $3x + 2y + 6z = 6$ mit Hilfe der Achsenabschnitte a… …rägbi…

A… …gab… …2.7

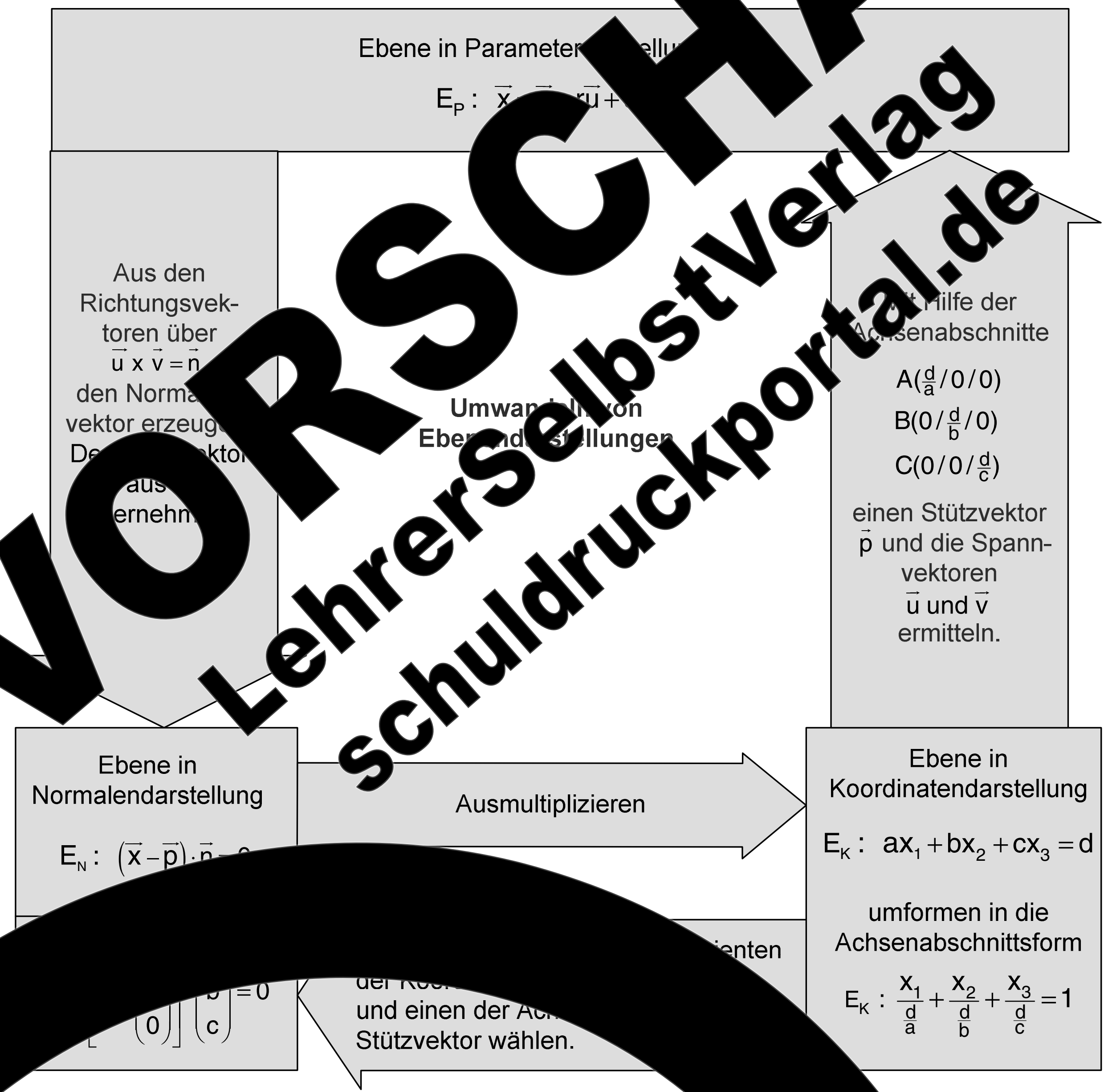
Er… …eln Sie … Gleichung… … Ebenen … in Koordinatenform mit dem geringst möglichen Rec… …aufwand.



…ungen:

6. Überblick Umwandeln von Ebenen

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, eine Ebene von einer Darstellung in ei… …dere umzuwandeln. Die in der folgenden Abbildung dargestellten Verfahren … …ben in … …chtu… …elesen eine begrenzte Auswahl an Varianten an, mit der man jede Darstellu… … Ebene… …andere umwandeln kann.



Ergä… …ngen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge...
selbstorganisiert ...

Kap...

Besondere Ebe...

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i... Ra...

Ebe... un...

Lineare Abbildungen

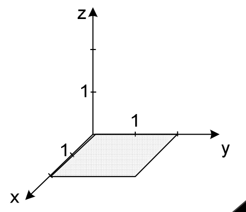
...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 13: Besondere Ebenen

Aufgabe 13.1

In den folgenden Abbildungen sind die Koordinatenebenen abgebil[illegible] [illegible]teln Sie [illegible] jeder Koordinatenebene eine möglichst einfache Gleichung in Parameter[illegible]stell[illegible] [illegible]rmalendarstellung und Koordinatendarstellung.

x,y-Ebene

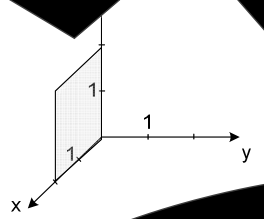


Parameterdars[illegible]:

No[illegible]ale[illegible]stellung:

[illegible]tendarstellung:

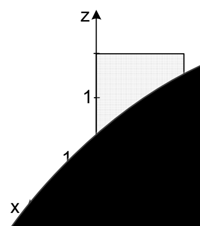
x,[illegible]ebe[illegible]



[illegible]rameterdars[illegible]ung:

No[illegible]alendarstellung:

[illegible]ene



Parameterdarstellung:

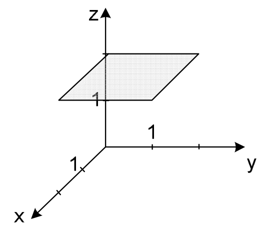
[illegible]darstellung:

Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.2

In den folgenden Abbildungen sind zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen a[illegible]ldet. E[illegible]teln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einfache Gleichung in Pa[illegible]terdars[illegible] Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.

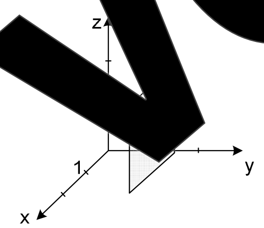
Zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen



Parameterdarstellung:

Normalendars[illegible]llung:

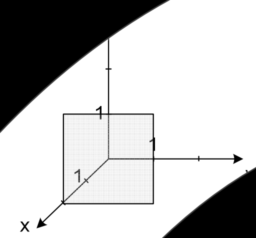
[illegible]tenda[illegible]g:



[illegible]arameterda[illegible]ung:

Nor[illegible]alendarst[illegible]g:

Koordinatendarstellung:



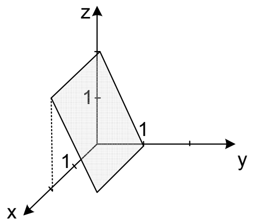
Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

[illegible]arstellung:

Aufgabe 13.3

In den folgenden Abbildungen sind Ebenen dargestellt, die zu jeweils einer Ko… atena… e parallel sind. Ermitteln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einf… Gleich… Parameterdarstellung, Normalendarstellung und Koordinatendarste… g.

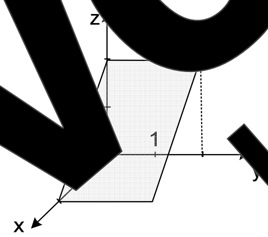


Parameterdarstellung:

Normalendars… ng:

…oordinatenda… ellung:

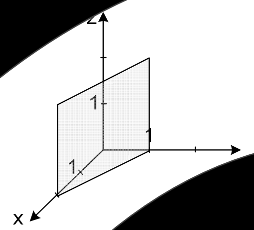
…arameterd… stellung:



…ormalendar… ung:

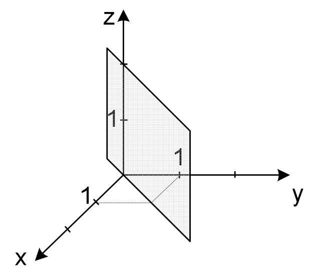
Koordinatendarstellung:

Parameterda…



Normalendarstellung:

…endarstellung:



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstell…

Aufgabe 13.4

a) Formulieren Sie eine R… …che be… …, wie man … de… Koordina… …stellung einer Ebene erkennen kann, dass … zu e… der … nateneb… …arallel verl…ft.

____

____

____

…Formu… …en Sie eine Regel, w… …ch… beschreibt, w… man an der Koordinatendarstellung einer Ebene … kann, dass sie zu … der Koordin… …achsen parallel verläuft.

____

____

____

c) Formuli… …en erkennen kann, dass die Ebene durch de…

…tellung: ____

…alendarstellung: ____

Koordinatendarstellung: ____

Ergänze… ____

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen

Kap...

Lagebeziehungen be...

02-031-266

Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 14: Lagebeziehungen bei Ebenen

In der linearen Algebra gibt es für die Untersuchung der Lagebeziehungen zw… Eb… im Raum und Punkten sowie Geraden und anderen Ebenen eine Vielzahl vo… lichkei… edoch völlig ausreichend eine Methode zu beherrschen. Daher wird in den folg… schnitt… die verschiedenen Aufgabentypen jeweils nur eine Variante vorgeschlag…

1. Lagebeziehung Ebene E und Punkt R

Prinzipielle Vorgehensweise:

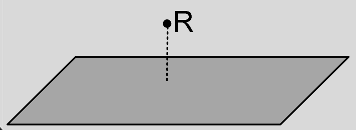
Die Koordinaten bzw. Komponenten d… rtsvektors z… unkt R, als $\vec{r}$ $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ werden unabhängig von der Darstellung der Eben… er E… ngle… ng für d… mponenten x, … nd z eingesetzt.

Ebene in Paramete… tellung	Ebene… Normale… stellung	Ebenen in …oordinatendarstellung
$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ … p_3 … v_1 … v_3 …e Pa… s und t mit Hil… eines …S berechnen. D… Berechnung des …S ist oft …ändig. Dah… ist es günstige… di… Ebene in die Koo… inatendars… ellung umzurechnen.	E… e in …ordinatend… tellung …mformen und dann wie rechts ne… beschr… en.	Komponenten von r für x, y und z einsetzen. $ar_1 + br_2 + cr_3 = d$ Linke Seite der Gleichung berechnen.

Interpretation der Ergebnisse

Rechnung ist wi… ⇒ R liegt in E

…echung liefert Widerspruch ⇒ …

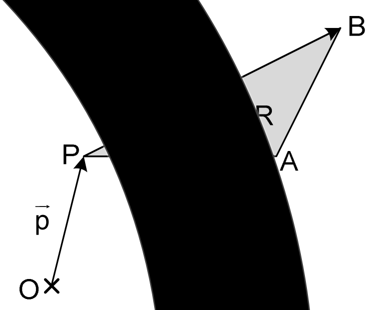


Zusatzinfo:

Bei Frag… …em Dreieck PAB liegt, (s. A… …meterdarstellung g… …mittelt zu können.

… Dre… …, wenn für s und t …, die folgenden drei Bedingungen gelten:

… t < 1 und
… ≤ s < 1 und
… ≤ t + s < 1



Aufgabe 14.1

Zeigen Sie, dass der Punkt R(6/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ … \\ … \end{pmatrix}$ liegt. … die beiden Rechnungen und beurteilen Sie, bei welchem Weg der R…chenau… nd… ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten und das … lösen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS erstelle…

I … t = …
II … …
… s … t = −1
IV … −2t = 2
t = −1
t in III: −s + 1 = −1
…
−5 = −5

…as LGS widerspruchsfrei gelöst werden kann, …egt R auf E.

W…

Ebene… …ichung in K…ordinatendarstellung u…form…

…malenve… …estimmen:

$$… \times … = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

E: ____________________

$E: -2x - 3y + 7z = 2$

Koordinaten von R einsetzen:

…12 + 0 + 14 = 2
2 = 2

…uch ⇒ R liegt in E

Beurteilu…

____

____

____

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Aufgabe 14.2

Prüfen Sie, ob der Punkt R(1/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\ \ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\ \ \end{pmatrix}$ lie… …en Sie beide Wege mit Hilfe des vorherigen Beispiels und geben Sie … Begrü… …cher Rechenweg einfacher für Sie ist.

Weg 1	**…g 2**
Mit der Parameterdarstellung arbeiten … das LGS lösen.	E… …ngleichung in Koordinatendarstellung um… …men.
$\vec{r}$ in E einsetzen:	Normale… …r bestimm…
$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\ \ \end{pmatrix} + \ldots\begin{pmatrix}1\\ \ \\0\end{pmatrix}$	… x … = … $= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
LGS e…	$E: \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$
I … = … $\Rightarrow t = \ldots$	
… s … = 1	
–s = … $\Rightarrow s = 1$	E: ____________________
	$E: x + y - z = 1$
s,t in II: – … $\neq$ 1	R in E einsetzen: $1 + 0 - 2 = 1$ $-1 \neq 1$
Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E	Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E

…g:

____

____

____

…Übungen:______________________________

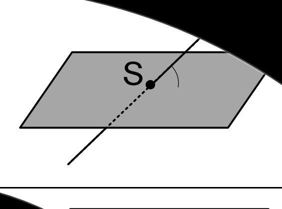
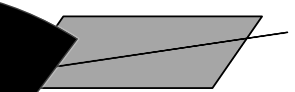
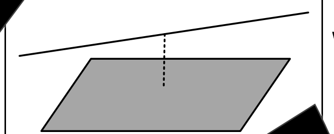
____

2. Lagebeziehung Ebene E und Gerade g

Prinzipielle Vorgehensweise:

Die Komponenten x, y und z des Vektors $\vec{x}$ der Ebenengleichung E: … $s\vec{u} + t\vec{v}$ … …urch die entsprechenden Komponenten der Geradengleichung $g: \vec{x} = \vec{q} + r\vec{w}$ e… …zt.

Gegeben: $E: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ und … $\begin{pmatrix}x\\ \ \\ \ \end{pmatrix} = \ldots q_3 \ldots \begin{pmatrix}w\\w_2\\ \ \end{pmatrix}$ bzw. $x = q_1 + rw_1$, $y = q_2 + rw_2$, $z = q_3 + rw_3$

Ebene in Parameterdarstellung	…ene in N…alen-da…	Ebenen i… Koordinatendarstellung
Die Ebenengleichung mit der Ge… gleichung gleichsetzen und … LG… nach r, s und t auflöse… $\vec{q} + r\vec{w} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$ oder $\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} + r \ldots w_3 = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\ \ \end{pmatrix} + \ldots\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\ \ \end{pmatrix}$ … Be… …nung des LGS mit … …st im Allgemeinen aufw… …daher bess… …t der Koordinatendarstellung arbeiten. Wenn geprüft werden soll, ob der Durchstoßpunkt in einem bestimmten Dreieck liegt müssen s und t bestimmt werden. (Vgl. Zusatzinf… Lagebeziehu…	… in Koo…natendar-… …g …formen … dann wie… neb… be…ben.	Kom…nenten vom … $\vec{x}$ der …dengleichung … $q_1 + rw_1$, q… und $q_3 + rw_3$ für x, y … z in der Ebenengleichung ax … z = d …setzen und nach r auflösen: $a(q_1 + rw_1) + b(q_2 + rw_2) + c(q_3 + rw_3) = d$
		…e
…ng für r, s und t. … von r in die …engleichung g liefert die …oordinaten des Schnittpunktes bzw. Durchstoßpunktes $S(s_1/s_2/s_3)$.		…der Gleichung liefert …ösung für r. Einsetzen von …ngleichung g liefert die … Schnittpunktes bzw. Dur… $S(s_1/s_2/s_3)$.
Das LGS ist unter… Lösungsmen…		Gleichun… allgemein… …der Form 0=0; Lösung… …ie Gerade.
Wid… …st parallel zu … g II E		Widerspruch … …llel zu E

Aufgabe 14.3

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Untersuch… die Lag… …ng von E zu

den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\-3\\1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-1\\ \end{pmatrix}$ und … $\begin{pmatrix} \\2\\-2\end{pmatrix}$ … $\begin{pmatrix} \\-1\\1\end{pmatrix}$, indem Sie die

folgenden Rechnungen vervollständigen. B…ünde… zunäc…, warum … …oll ist, hier mit der Koordinatendarstellung der Ebene zu a… …und ze… Sie durch R…chn…, dass sich für die Koordinatendarstellung die Gleichung: …x + 4y + 6z = … …gibt.

Begründung:

___

___

Berechnung de… …larstellung von E:

Lagebeziehung von E und g:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-2\\ \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\-3\\ \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: y… z =

Eins… ___ – ___) + ___(___ + ___) = 9

___ = 9

9 = 9

…rgebnis hat die Form 0 = 0, ist also allgem… ⇒ g liegt …

Lagebeziehung E und h:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: x = ___ y = ___ z = ___

Einsetzen in E ergibt: ___ + ___ + ___(___ – ___) + ___(___ …) = 9

___

___ = ___

= ___

Widerspruch ⇒ g is… …l zu E

Lagebezi…ng E … i

Aus … = $\begin{pmatrix} \\2\\-2\end{pmatrix}$ … $\begin{pmatrix} \\ \\1\end{pmatrix}$ erge… die Kompo…: x = ___ y = ___ z = ___

Eins… in E ergibt: ___ + ___ + ___(___ – ___) + ___(___ + ___) = 9

___ = 9

___ =

___ = ___

= 4

… eine Lösung gibt, existiert ein Schnittpunkt.
…punkt berechnen durch Einsetzen von r in die Gerade…

$\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + \_\_\_ \begin{pmatrix}1\\-1\\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\_\_\_\\ \\ \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix}5\\ \\ \end{pmatrix}$

Die G… …E im Punkt S(__ / __/ __).

3. Spurpunkte von Geraden

Def.: Spurpunkte S sind die Durchstoßpunkte der Gerade g durch die Koordinatenebenen

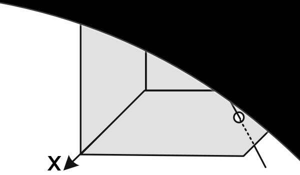
Aufgabe 14.4

Berechnen Sie die Spurpunkte für die Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 - r \\ y = 6 - 2r \\ z = -1 + r \end{matrix}$

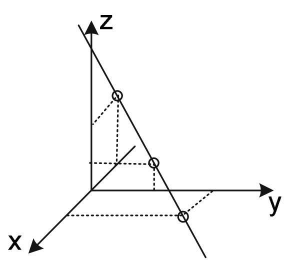
> Ermittelt man die Spurpunkte mit Hilfe der Koordinatendarstellung der Koordinatenebenen wird die Rechnung besonders einfach, da man die einzelnen Komponenten der Gerade nur Null setzen muss.

Spurpunkt x,y-Ebene	Spurpunkt x,z-Ebene	Spurpunkt y,z-Ebene
Koordinatengleichung: z = 0	Koordinatengleichung: y = 0	Koordinatengleichung: x = 0
z-Koordinate Null setzen:	y-Koordinate Null setzen:	x-Koordinate Null setzen:
$-1 + r = 0$ $r = 1$	$6 - 2r = 0$ $r = 3$	$2 - r = 0$ $r = 2$
r in g einsetzen	r in g einsetzen	r in g einsetzen
$\Rightarrow \vec{s}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \vec{s}_{xz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \vec{s}_{yz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Spurpunkt: $S_{xy}(1/4/0)$	Spurpunkt: $S_{xz}(-1/0/2)$	Spurpunkt: $S_{yz}(0/2/1)$

… der Spurpunkte kann man … räumliche Lage von Geraden besonders anschaulich darstellen:



… der



Übungen

Ü14.1 Berechnen Sie die Spurpunkte der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und zeichnen Sie die Gerade so, dass ein räumlicher Eindruck entsteht.

Ü14.2 Auf einen Turm, dessen Dach aus einer quadratischen Pyramide besteht (s. Abbildung), treffen Sonnenstrahlen auf.

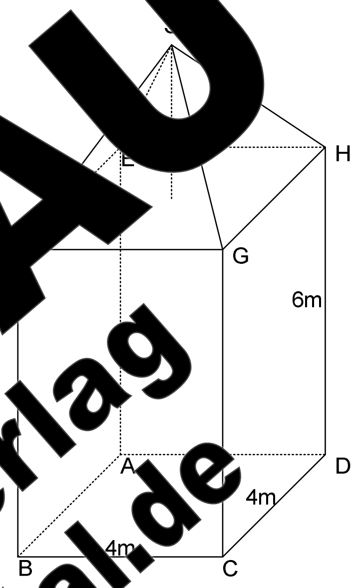
a) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Eckpunkte so, dass der Punkt A im Ursprung des Koordinatensystems steht.

b) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Turms.
(1m $\hat{=}$ 2 Kästchen)

c) Die Richtung der Sonnenstrahlen wird d… den …

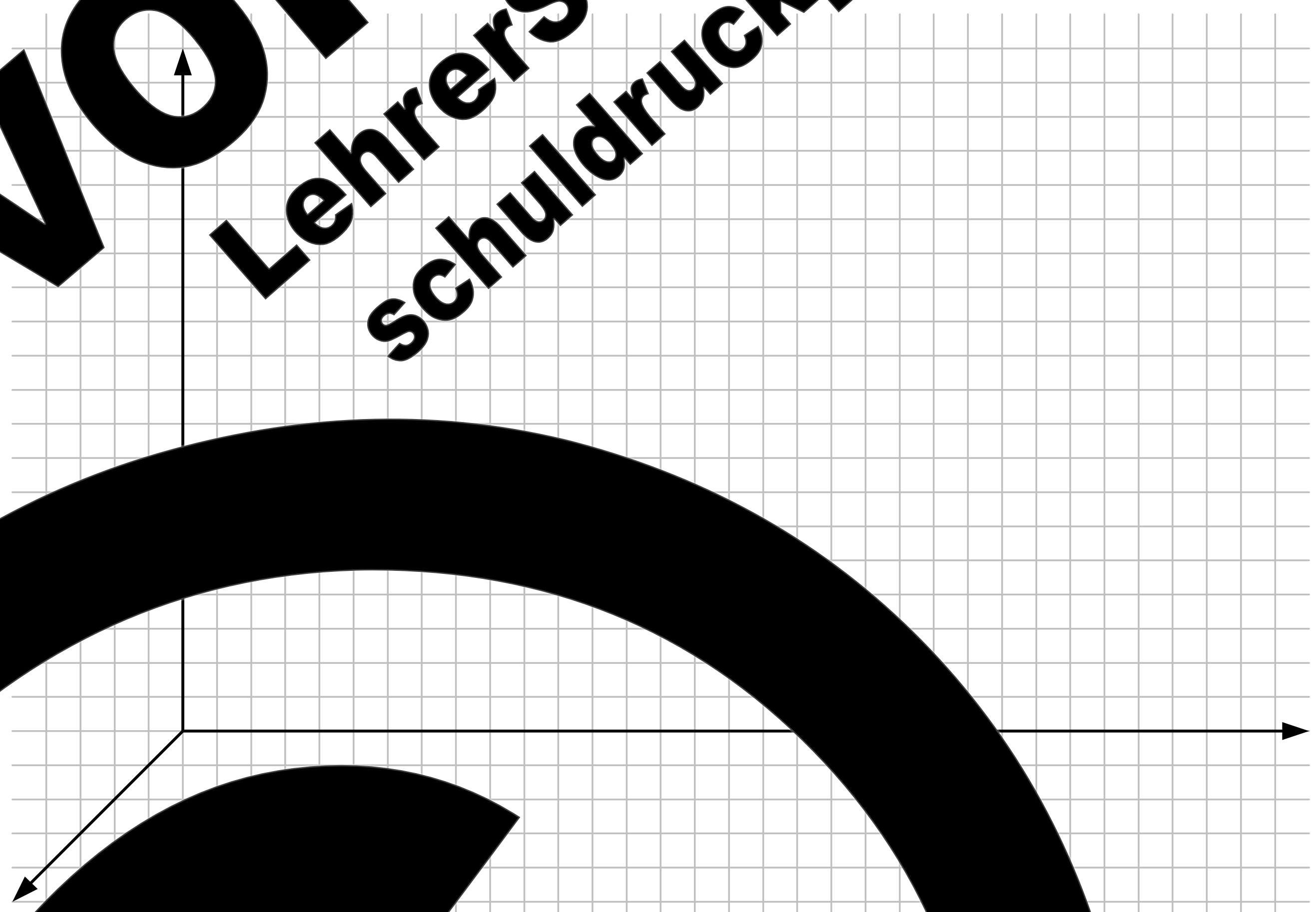
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben. Auf der … (x,y-…e)

entsteht dadurch ein Schatten… …itteln … Eckpunkte der Schattenfläche … Boden … kieren Sie di… gesamte Schatten…che.



A(/ /) B(/ /) C(/ /) D(/ /)

E(/ /) F(/ /) G(/ /) H(/ /) S(/ /)



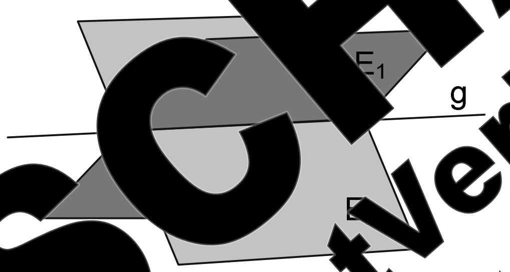
…chnungen auf der Folgeseite:

Ergänzen…

4. Lagebeziehungen bei Ebenen

Bei der Bestimmung der Lagebeziehung von zwei Ebenen sollte man aufgr... des Rechenaufwandes darauf achten, dass entweder eine Ebene in K...dinatend... oder beide Ebenen in Koordinatendarstellung vorliegen. Damit kann man die ...benste... vorliegen auf die beiden im Beispiel beschriebenen Fälle reduzieren.

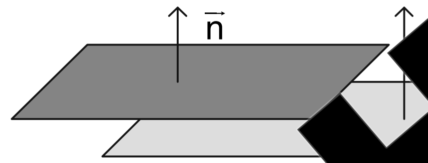
Zwei Ebenen schneiden sich → Es exist... eine ...nittgerade g



Ebene 1 in Koord...rstellung Ebene 2 in Pa...terd...tellung	Ebene ...n Koordinate...darstellung E...ne 2 in Koordinatendarstellung
E_1: ... 3y ... 36 ... $\begin{pmatrix}0\\0\\ \ldots\end{pmatrix}$ + ... $\begin{pmatrix}\ldots\\ \ldots\\-1\end{pmatrix}$ $+s\begin{pmatrix}3\\0\\ \ldots\end{pmatrix}$ $x = 3r + 3s$ a... E_2 folgt: $y = 2r$ $z = 3 - r - s$ Einsetzen der Komponenten x,y,z in E_1 ergibt: $4(3r+3s)+3(2r)+6(3-r-s)=36$ nach r oder ... s ... ... Ebene E_2 einsetzen $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9-6r\\0\\-3+2r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3r+9-6r\\0+2r\\3-r-3+2r\end{pmatrix}$ Zusammenfa... Summan... Schni... ... r ... $\Rightarrow$ g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$	Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren E_1: I $x + 2y + 2z = 6$ E_2: II $x - y + z = 3$ I-II III $3y + z = 3$ Da das LGS unterbestimmt ist, darf man eine Variable frei wählen. Hier z.B.: $z = 3t$ einsetzen z in III liefert y $y = 1 - t$ ...nd z in II liefert x $x = 4 - 4t$ Die Ausdrü... z werden als Vektor dargestellt un... t, dass sich die Parameterdarst... ...nittgeraden g ergibt. $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4t\\1-t\\3t\end{pmatrix}$ ... $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}$

Zwei Ebenen sind parallel zueinander → Es ergibt sich ein Wid...pruch

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle Verfahren erzeugen ei... Wide...uch bei der Lösung der entsprechenden Gleichun...



Ebene 1 in Koordinatendarstellung Ebene 2 in Parameterdarstellung	...ne 1 ...ordinatend...ellung Ebene 2 in ...rdinatend...tellung
E_1: $2x + y + z = 1$ E_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\ \ldots\end{pmatrix}$ $x = -2$... aus E_2 folgt: y ... $2r + s$ ... $- 5$... Einsetzen ... Kompo...ten x,y,z in E_1 erg...: $2(-2$...$s)$ ... $s +$ ... $2r - 5s = 1$ -4... $s + 2$... $2 + 2r -$ ... ... $2 = 1$	Durch ...ditionsve...ren x, y oder z ...ieren E_1: I $x -$ ... $+ 2z = 6$ E_2: II $2x$ ... $y + 4z = 8$ ...I-II 0 ...

Zwei Ebenen sind ide...sch → Es ergibt sich eine allgemeingültige Lösung

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle drei Verfahren erzeugen allgemeingültige Lösun... ...enen selbst sind dann Lösungsmenge.

Ebene ... Eb...	...Koordinatendarstellung ...rdinatendarstellung
... E1 ... $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$ x = ... aus E_2 folgt: ... Einse... ...enten x,y... ...E_1 ergibt: $2(-$ ... $+ s + 1 + 2r - 5s = 1$ ... $2r + s + 1 + 2r - 5s = 1$ $1 = 1$	D... ...en x, y oder z eliminieren E_1: I x ... E_2: II $2x - 4$... ...I-II 0 ...

Beispiel: Schnitt zweier Ebenen, die zu einer Koordinatenachse parallel verla...

Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x + y = 7$
E_2: $4x - y = 5$

Zur Er... Wenn d... z-K...ente in der Ebenengl... ist die ...ne zu... parallel.

Additionsverfahren: E_2: II $4x - y = 12$ | I

6x ...

x ...

x in I ...3 – y = 3

...3

z frei wählbar: ... z = r

Da die z-Komponente in keiner Gleichung vorkommt, ist das GS unabhängig von der Wahl für z lösbar. Daher kann man z frei wählen.

...ungs...: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 3+0 \\ 0+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Schnittgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da die beiden Ebenen parallel zur z-Achse verlaufen, ist auch die Schnittgerade parallel zur z-Achse

Ergä...

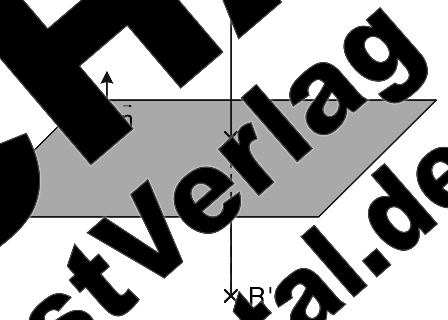
5. Orthogonale Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Aufgabe 14.3

Erarbeiten Sie sich das hier dargestellte Verfahren zur Spiegelung ein... ...ktes R ... Ebene E (es gibt auch andere Verfahren, die hier nicht behandelt werden) inde... ...m Beispiel dargestellten Rechenschritte erläutern.

Gegeben sind der Punkt R(4 / –3 / 6) und die
Ebene E: x – 2y + z = 4

Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes R'.



Schritt 1:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = ... + ...$

$g: \vec{x} = ... + t \begin{pmatrix} ... \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 2:

$4 + t - 2(-3 - 2t) + 6 + t = 4$

$4 + t + 6 + 4t + 6 + t ...$

$... + 2t\vec{n}$

$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ ... \\ ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$

Ergebni...

Erg... ...ungen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge… selbstorganisiert …rle…en

Kap…

Abstände

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i… Ra…

Ebe… …un…

Lineare Abbildungen

Gesa… …ebra selbstorganisiert erlernen (… …-031-266)
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

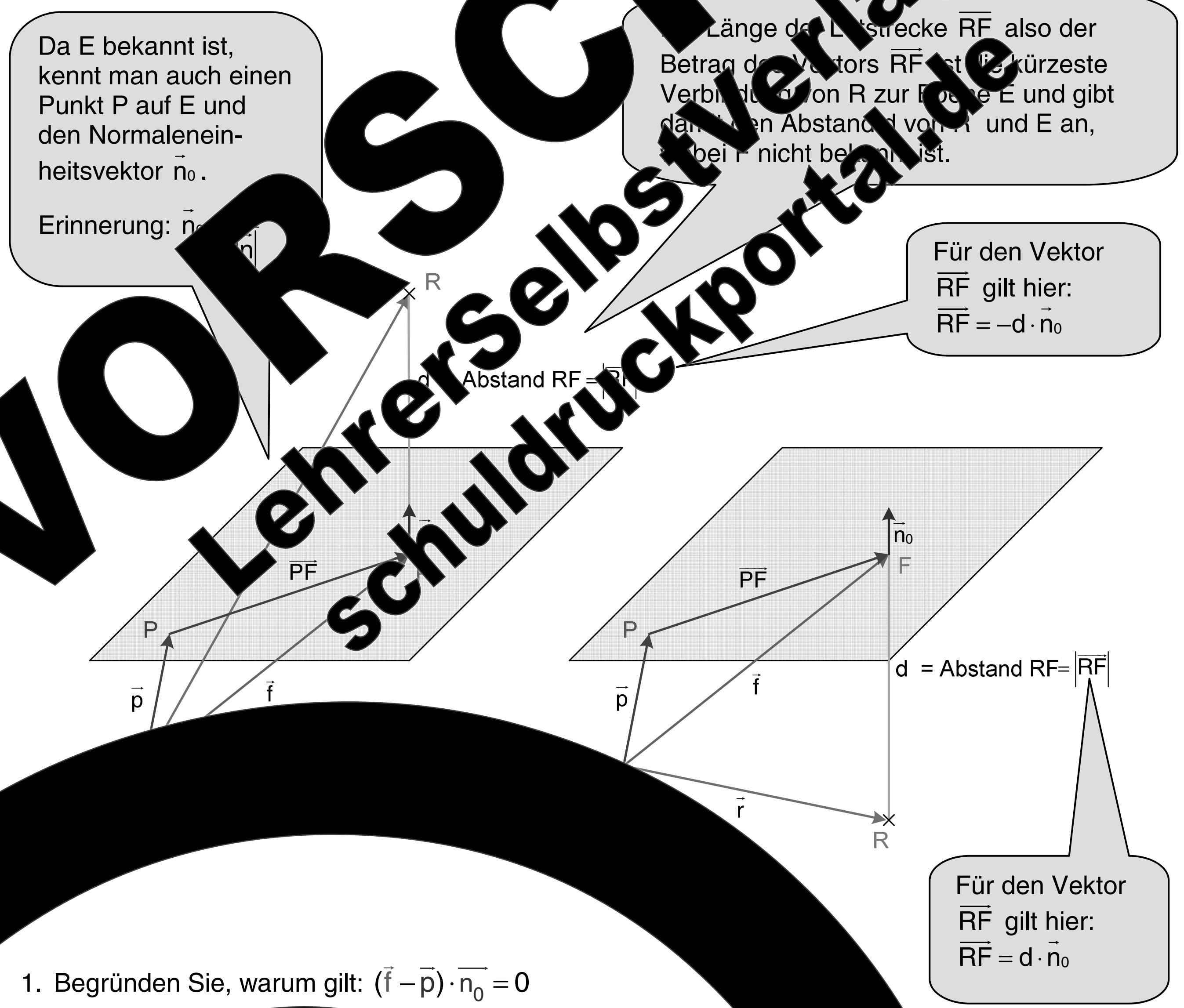
Kapitel 15: Abstände

1. Abstandsberechnungen Punkt–Ebene

Aufgabe 15.1

Herleitung der Formel zur Abstandsberechnung Punkt–Eben

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten den Abstand eine nktes von einer Ebene E zu berechnen. Die Betrachtungen sollen hier auf die erleitu Abs dsformel, die sich in den Tafelwerken befindet beschränkt werden. Verdeu ie Herleitung ieser Formel, indem Sie die geforderten Begründungen und Erläuterung mulier



1. Begründen Sie, warum gilt: $(\vec{f} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$

2. kannt. Begründen Sie, warum unabh r Lage des Punktes

3. Begründen Sie, warum gilt:

Wenn R und $\vec{n}_0$ auf der gleichen Seite von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r} - d\vec{n}_0$.	Wenn R und $\vec{n}_0$ auf unters chiedlichen ten von E lie ilt: $\vec{f} = \vec{r}$

4. Setzen Sie den unter 3. ermittelten Ausdruck nun ils in d Ausdru $\cdot \vec{n_0} = 0$ ein und zeigen Sie durch geeignete Umformu n, dass sich die beiden gegebenen Beziehungen ergeben:

R liegt oberhalb vo	R liegt unterhalb von
$d = (\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}$	$d = -(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}$

5. B en Sie, wa um man die beid Ergebnisse zu der folgenden Formel zusammenfassen kann.

Abstand ei es Punktes R von einer Ebene E:	$d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$

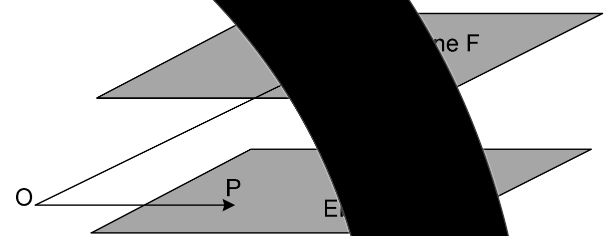
Begrün

e 15.2

bstandsprobleme, die sich auf den Abstand Punkt - Ebene lassen

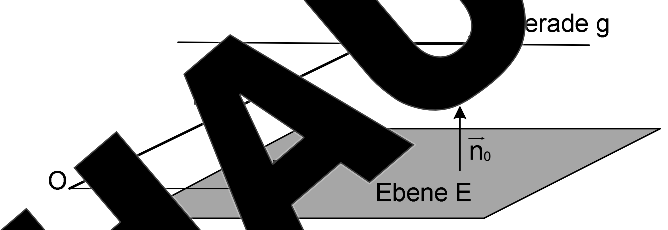
a) Abstand zweier Ebenen

Begründen Si hts, dass die nen E und F chnung zwi ene E ist u rmel $d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$ werden kann.



b) Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade

Begründen Sie anhand der Abbildung rechts, dass die Abstandsberechnung der Ebene E und Gerade g identisch mit der Abstandsberechnung zwischen dem Punkt R und der Ebene E ist und somit die Formel $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ angewandt werden kann.



c) Abstand zwischen wind... Ge...

Begründen Sie anhand ... dungen 1 bis 3, ... man den Abstand zwischen zwei windschiefen G... mit der Abst... sformel Punkt-Ebene $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ berechnen kann und geben Sie ... ie d... ormalen... heitsvek... berechnet wird.

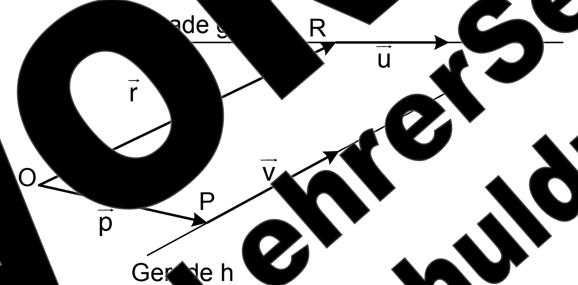


Abb. 1

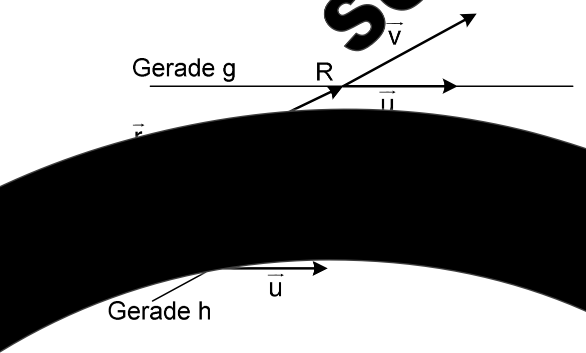
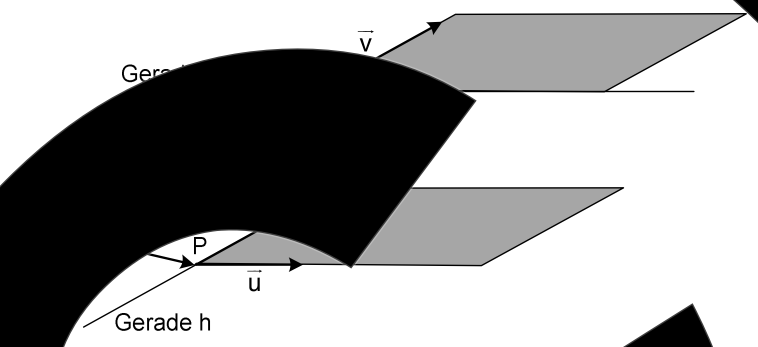


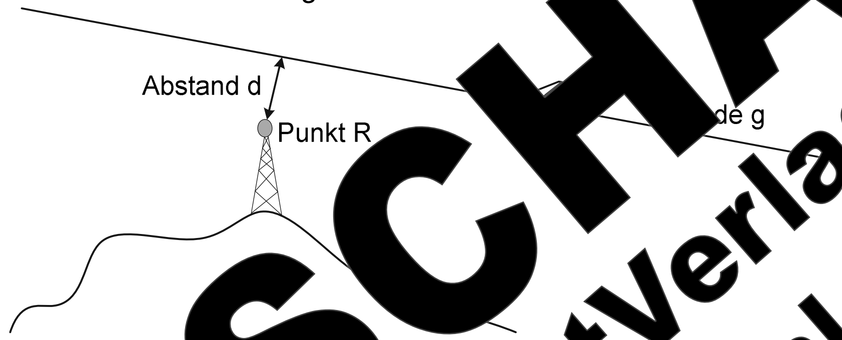
Abb. 2



3

2. Abstand Punkt–Gerade

Ein klassisches Beispiel hinsichtlich der Berechnung des Abstandes vo... Punkten ... findet sich im Bereich der Flugsicherung. Oft müssen Flugrouten, die im Ide... Gerad... sehen werden können, in einem bestimmten Abstand von wichtigen Einrichtu... ielsweise von Türmen verlaufen. Der Ort der Einrichtung kann dann als Pun... betrac...



Aufgabe 15.3

Erarbeiten Sie sich da... Verfahre... Bestimmung des Abstands eines bekannten Punktes R v... beka... Gerade g, in... as Beispi... ttweise durcharbeiten und die Texte erg...

Gegeben sind der Punkt R(3/4/4) und die Gerade

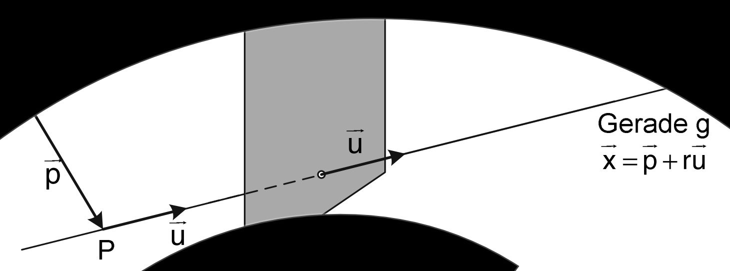
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Abstand des Punktes R von der Geraden g.

Schritt 1:

$\cdot \vec{u} = 0$

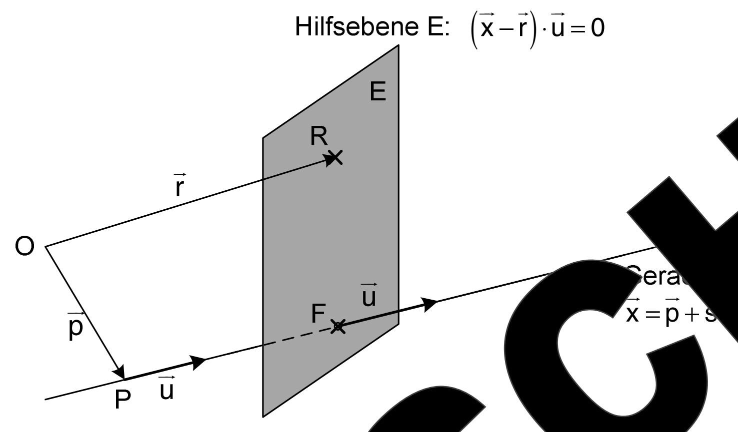
$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$



$x - 4y + z = -9$

Mit ... wird eine Hilfsebene E in __________ lung durch _____ ermittelt. Der Normalenvektor entspricht dem __________ ...mit verläuft die Gerade g __________ zur Ebene

Schritt 2:



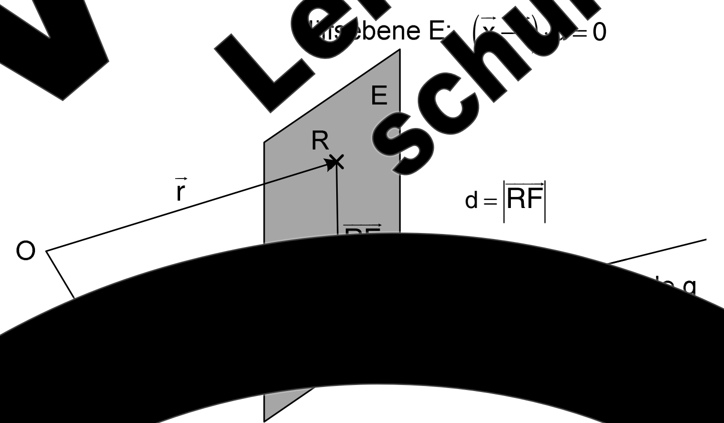
$$\ldots s-4(\ldots)\ldots+s=-9$$
$$\ldots 20+16s+4+s=-9$$
$$18s=-36$$
$$s=-2$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\-5+8\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Ermitteln des ______________________ F(3|…) der ____________________ g durch die

Hilfsebene E

Schritt 3:



$$d=|\overrightarrow{RF}|=\left|\begin{pmatrix}1-3\\3-4\\2-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+1+4}$$

$$d=3LE$$

Berechnen ______________________________ von … Betrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$

entspricht dem ________________________ des Punktes R … Gerade g.

Übungen:____

____

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap...

Schnittwinkel

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i... Rau...

Ebe... ...un...

Lineare Abbildungen

Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (...-031-266)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

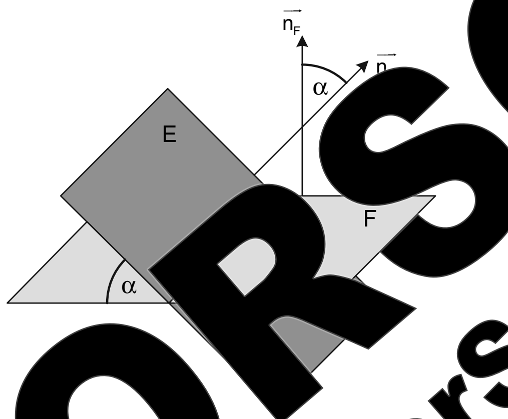
Kapitel 16: Schnittwinkel

Aus Kapitel 10 ist die Berechnung von Schnittwinkeln zwischen zwei Geraden ... its be... nt. Die Ermittlung von Schnittwinkeln bei Ebenen läuft in der Regel darauf ... die in ... werken angegebenen Formeln richtig anzuwenden.

Aufgabe 16.1

Verdeutlichen Sie sich die gegebenen Formeln anha... der A... ... d berechnen Sie die geforderten Schnittwinkel.

a) Schnittwinkel zwischen zwei Eben...

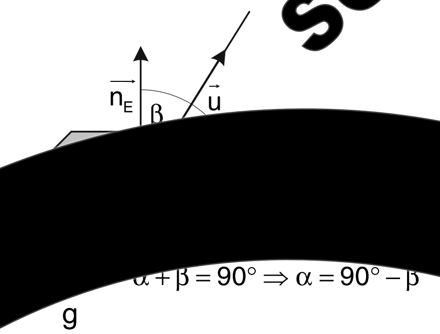


Der Schn...wi... zwische... de... Ebenen entspricht dem Schnittw...el der Normal...ektoren.

Schnittwinkel ...ischen Ebenen: ...s$\alpha = \frac{\left\lvert \vec n_E \cdot \vec n_F \right\rvert}{\left\lvert \vec n_E \right\rvert \cdot \left\lvert \vec n_F \right\rvert}$

B...echnen S... ...en ...chnittwinkel zwischen den Ebenen ...: 2x + y + ...4 und F: x – 5y = 3

...nittwink...l zw...en Gera... ...Ebene



Der Richtungsvektor der Geraden $\vec u$ schließt mit dem Normalenvektor der Ebene den Winkel β ein. Es gilt damit:

$$\cos\beta = \frac{\left\lvert \vec n_E \cdot \vec u \right\rvert}{\left\lvert \vec n_E \right\rvert \cdot \left\lvert \vec u \right\rvert}$$

...β = cos 90°–α = sin α , also cos β = sin α gilt, folgt:

... zwisch... Gerade:	$\sin\alpha = \frac{\left\lvert \vec n_E \cdot \vec u \right\rvert}{\left\lvert \vec n_E \right\rvert \cdot \left\lvert \vec u \right\rvert}$

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E: ... und der Geraden ... (2 ...) (4 ...)

...de Übungen:______________________________

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge
selbstorganisiert erlen en

Kap

Ebenenschare

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und im Rau

Eben

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 17: Ebenenscharen

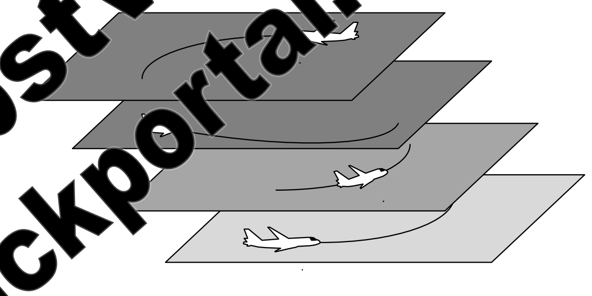
Der Begriff Ebenenschar

Die bisherigen Betrachtungen zu Ebenen haben sich bereits auf L… …hunge… …en Ebenen bezogen. Dieses Kapitel beschränkt sich auf Ebenen, die **parallel z… …na… liegen)** und auf Ebenen, welche **eine gemeinsame Schnittgerade** besitzen. Da es i… beiden … …lzahl von Ebenen mit den angegebenen Lagebeziehungen gibt, spricht man hie… **Ebene… …aren**. Man erkennt eine Ebenenschar anhand der Ebenengleichung. Die Ebe… …ngleic… …en e… …lten neben den Variablen x, y und z noch einen **Parameter**, wie z.B. den Parame…

Beispiel für eine Ebenenschar: E_a: ax + 2a² … = 12

Ebenenscharen bei paralleler… …en

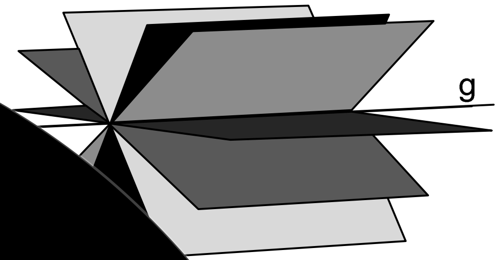
Zur Veranschaulichung findet … Beispiel aus dem Bereich der Fl… … Wen… …ch an einem Flugplatz meh… Landu… …ffende Flugzeuge in Wa… …nleif… …efinde… …d eine Kollision der Flugz… …lossen werde… soll, kann … den … …er … …euge a… Flugbah… …f pa… …en Ebenen l… interpr… …en. D… …ilme… … der Ebene… … de… … Flugbah… …n verlaufen kö… …bildet … ei… …genau… …e Ebenens… …h., aus de… u… …lich… …der möglich… parallelen Eb… …n gehören nur die Eb… …zur Ebene… …, … …ie Flugbahnen z… …lassen sind.



Kollisionsfreie Flugbahnen befinden sich auf einer Schar paralleler Ebenen.

Ebenenscharen bei sich schn… …denden Geraden

Alle Ebenen, die als besondere Eigenschaft eine gemeinsame Gerade als S… …de haben, werden als E… gemei… …



… parallelen Ebenen bei den …en, unter den unendlich vielen Ebenen im …chel einen Teil von Ebenen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen. Diese Teilmenge von Ebenen bezeichnet man dann, wie bei den parallelen Ebenen, als Ebenenschar.

Das Ver… …hörigkeit zu einer Ebenenschar e… …, wird in den folge… …d von parallelen Ebenenscharen ve…

Aufgabe 17.1

Ebenenscharen bei parallelen Ebenen

Die Ebenengleichungen bei einer Ebenenschar haben in der Regel folgendes charakteristisches Aussehen:

E_a: (1 + 2a)x + (2 + 4a)y – (3 + 6a)z = 1 + a mit $a \in$ IR

Für jedes $a \in$ IR erhält man eine Ebene, die zur Ebenens… gehört, wobei man für a = 0 die besonders einfach … …rec… …e Ebene E_0 erhält.

E_0: x + 2y – 3z = 1 oder x + … 3z – 1 …

Erläutern Sie für die Ebenenschar E… …2 + 4a)y – (3 + …)z = 1 + a di… …genden Rechenschritte bzw. ergänze… … Lücken im T…

a) E_a: (1 + 2a)x + (2 + … …y – (… …6a)z = … a

(1) x … + 4a… …z – 6az – 1 … 0 ______________

(2) … + 2y – 3z – 1 + 2ax … 4a… – 6az – a … ______________

(3) $\underbrace{x + 2y - 3z - 1}_{E_0} + a(\underbrace{2x + 4y - 6z - 1}_{E^*}) = 0$ ______________

… …e Ebenenschar E_a als …ion aus der Ebene E_0 und … …ne E* auffassen. Hier gilt: … E*

… Ebene E* gilt: 2x + 4y – 6z = 1

(4) n… … × $\overrightarrow{n_{E_0}}$

Da die Normalenv… … E_0 und E* ______________ …en die Ebenen E_0 und E* nur ______________ oder ______________

(5) $x + 2y - 3z = 1$
$\underline{2x + 4y - 6z = 1}$
$0 = -1$

Prüfen, ob die Ebe... parallel...
Aus dem Widerspruc... gibt sic...

E_0 und E^* ...

Zur Information:

Die Ebene E_0 gehört zur Eb...nschar E_a, da man durch Einsetzen von a = 0 die Ebene E_0 erzeugen kann. Di... ene E^* ... zwar parall... allen Eben... Ebenenschar, geh... och n... enschar E_a, ... es kein a... gibt, mit dem sich durch ...setz... E_a d... ene E* bere... en lässt.

Aufgabe 17.2

Rechner... erp... g der Zugeh... einer Eb... M zu einer parallelen Ebenenschar

Wie in ...gabe 1... verdeutlicht wurde, gehört jede E... , die sich durch Einsetzen einer Zahl $a \in IR$ i... e E...engleic... g E_a ergibt, z... dieser Ebenen...ar. Um zu prüfen, ob eine Ebene M ebenfalls zu d... r S... muss man... ne Ebene M ... formen können, dass sie der Berechnungsvorschrift de... har ge... . Das kann m... dem folgen... Ansatz überprüft werden:

$E_a = b \cdot M$ mit $b \in IR$

Beispiel 1:

Die Ebene M: $3x + 6y - 9z = 2$ bzw. $3x + 6y - 9z - 2 = 0$ entsteht durch Einsetzen von 1 in die Ebenenschar E_a aus A... ...hört damit zur Ebenenschar E_a. Damit muss der Ansatz ...

... nf Unbekannten, nämlich mit den ... sowie den Parameter...

...eichung: $\underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = \ldots 2b$

Die Lösung einer derartigen Gleichung kann mit Hi... ...zientenvergleichs ... rden.

Sch... ...gen E_a und $b \cdot M$ übereinander schreib...

E_a: $(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a) = 0$
$b \cdot M$: $3bx + 6by - 9bz - 2b = 0$

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identisch sind, dann m... sen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem ...

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 3b$
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 6b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 9b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$1 + a = 2...$

Schritt 3: LGS lösen:

I – 2IV $\Rightarrow$ $-1 = -b$ $\Rightarrow$ b...

b in IV $\Rightarrow$ $a = 1$

a, b in II $\Rightarrow$ 6 = ...

a, b in III $\Rightarrow$ 9 ...

Ergebnis: Das LGS ...t sic... widerspr...sfrei löse... ...it ist der Ans... $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechneri... ...en, dass d... ...ne M zur E...nschar E_a gehört.

Beispi... 2:

Hier wir... ...t de... ...spiel 1 e... ...n Verfahre... ...s Koeffizientenvergleichs gezeigt, dass die ...e E... ...ht zur Ebenenschar ... gehört, da der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleich... $\underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = \underbrace{2bx + 4by - 6bz - b}_{b \cdot E^*}$

Auch hier wird die Lösung mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs schrittweise ermittelt.

Schritt 1: Die Ebenengleichungen E_a und $b \cdot E^*$ übereinander schreiben:

... $(1 + a) = 0$
... $b = 0$

...eide Seiten der Gleichung ... ...ind, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizienten... ...em LGS.

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 2...$
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 4b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 6b$
Ausdruc...	IV	$1 + a = b$

Schritt 3: ...

... Widerspruch

Erg... ...as LGS lässt sich nicht widerspruchsfrei lösen. Damit ist der Ansa... ...E* nicht erfüllt und es ist rechnerisch nachgewiesen, ... die Ebene E* nich... ...nschar E_a gehört.

Wenden Sie das Verfahren aus Beispiel 1 und 2 an, um zu zeigen, dass die Ebene … 2y + 3z = 0 zur Ebenenschar E_a aus Aufgabe 17.1 gehört:

Aufgabe 17.3

Prüfen Sie, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar aus parallelen Eb… hand…

Erläutern Sie für die Ebene E_a: $(2 + 2a)x + (2 + 2a)y - (3 + 3a)z = 1 + 2a$ … den …rmungs- und Rechenschritte.

(1) E_0: $2x + 2y - 3z = 1$ ______________________

(2) E_1: $4x + 4y - 6z = 3$ ______________________

____

(3) $\overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

Da d… N…malenvektor… von E_0 und E_1 ____________ sind, können die Ebenen E_0 …nd E_1 nur ____________ oder ____________ sein. Damit ist E_a eine Schar pa…lleler Ebenen.

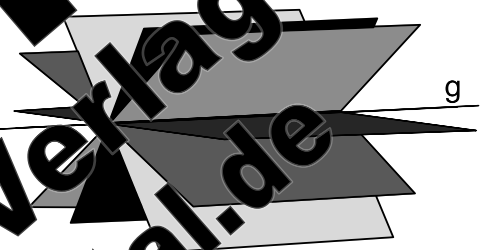
Ergänzen Sie: Man prüft, ob es sic… …i einer Ebenenschar um eine Schar paralleler Ebenen handelt, indem man die ____________vektoren von zwei beliebigen Ebenen der Schar auf …

Aufgabe 17.4

Ebenenscharen bei Ebenenbüscheln

Grundlegend kann man die bei den parallelen Ebenenscharen erfo[illegible]legung[illegible] auch auf Ebenenbüschel übertragen.

Die Struktur der Gleichung für ein Ebenenbüschel is[illegible] vergleichbar mit der Gleichung für eine Ebenenscha[illegible] parallelen Ebenen. Für $a \in \mathbb{R}$ soll folgendes B[illegible]spiel betrachtet werden.



E_a: (1 – 2a)x + (1 – 3a)y + (1 + a)z = 1 + 2[illegible]

oder

E_a: (1 – 2a)x + (1 – 3a) y + (1 + [illegible] (1 + [illegible] =0

Zeigen Sie durch [illegible]spre[illegible]de U[illegible], dass [illegible]an auch bei Ebenenbüsch[illegible] [illegible]schar E_a in die Form $E_a = E_0 + aE^*$ umfor[illegible]ann[illegible]ich damit f[illegible]gender Ausdruck[illegible]

E_a: x [illegible] + z – 1 [illegible]–2x – 3y + z – 2) [illegible]

E[illegible] + y [illegible]

E*: [illegible] – 3y + z = 2

> **Info[illegible]:**
> Wi[illegible] parallelen Ebenen gilt auch hier:
> D[illegible]bene E* gehört zwar zum Büschel mit d[illegible] Trägergeraden g, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a.

Raum für Umformungen:

Aufgab[illegible]

R[illegible]pr[illegible] Zugehörigkeit einer Ebene E zu einer [illegible]ar

[illegible]berlegungen hinsichtlich der Überprüfung, ob eine Ebene zu ei[illegible]char gehört, [illegible]n der Betrachtung bei den parallelen Ebenen[illegible]aren auf Ebenenb[illegible]rtragen werden. [illegible]d für die Überprüfung auch hier der Ansat[illegible] · **M** verwendet [illegible]tehende [illegible]g mit Hilfe eines Koeffizientenvergleic[illegible]

Beispiel 1:

Prüfen Sie, ob die Ebene

M: –x – 2y + 2z = 3 bzw. –x – 2y + 2z – 3 = 0

zur Ebenenschar E_a gehört.

Der Ansatz $E_a = b \cdot M$ führt, wie bei Scharen paralleler Eb[illegible]n, z[illegible] Glei[illegible]ung mit fünf Unbekannten, nämlich mit den Variablen x, y und z sowie [illegible] und b, die[illegible]nfalls wieder mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs gelöst werde[illegible]n.

Gleichung: (1 – 2a)x + (1 – 3a) y + (1 + a)z [illegible] + 2a) = [illegible] – 2by + 2bz [illegible]

Schritt 1: Die Ebenengleichung[illegible] M übereinande[illegible]chreiben:

E_a: (1 [illegible] – 3a)[illegible] + a)z [illegible] 2a) =0
b · M: [illegible]–bx [illegible] 2by [illegible] 2bz [illegible]3b =0

Schritt 2: [illegible] Gleichung E_a = b · M identis[illegible] sind, dann müssen die [illegible]oeffizie[illegible] ide[illegible]isch sein. K[illegible]ffizientenvergl[illegible]ch führt zu einem LGS:

Koeffizi[illegible] von x	I	[illegible]2a = –b
K[illegible]ten von [illegible]	II	[illegible]3a =–2b
Koeffizienten von z	III	[illegible]1 + a = 2b
Ausdruck ohne [illegible]ariable	[illegible]	–1 – 2a =–3b

Schritt 3: LGS lösen:

I – IV ⇒ 2 = 2b ⇒ b = 1

b in I ⇒ a = 1

[illegible] Das LGS lässt sich widerspruchsfrei lösen. Da[illegible] E_a = b · M erfüllt, und es ist rechnerisch nachgewiesen, dass die Ebene M z[illegible] E_a gehört.

Beispiel 2:

Die Ebene E* von Aufgabe 17.4 gehört zwar zum Ebenenbüschel mit der Trä… …rade… …jedoch nicht zur Ebenenschar E_a, da man durch Einsetzen einer Zahl a die Ebe… …nicht e… …nn. Zeigen Sie, dass der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleichung: $(1-2a)x + (1-3a)\,y + (1+a)z - (1+2a) = -$ … $3by$ … $z - 2b$

Schritt 1: Gleichungen übereinander sch…n:

E_a: $(1-2a)x + \ (1-3a$ … $+ (1+a)z -$ (… $2a) = 0$

$b \cdot E^*$: ____x ____y … ____ 0

Schritt 2: Wenn beide Se… …ung $E_a = b \cdot E^*$ …entisch sind, d… müssen die Koeffizie… identisch sein. …oeffizienten… …leich führt z… …n LGS.

Koe…ente… von x I 1 … 2a = –2b
Koe… … – 3a = –3…
…effizi… …n von … 1 + a = …
…uck… Variable IV –1 – 2a = … 2b

S…rit… LGS …sen:

IV ____ = ____ IV

2 … ⇒ Widerspruch

Ergebnis: Das LGS führt zu einem Widerspruch. Damit ist der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ nicht erfüllt, und die Ebene E* gehört (wie oben schon erläutert) nicht zur Ebenenschar.

…17.6

…rägergerade bei einem Ebenenbüschel bestimmen

Für die Bestimmung der Trägergeraden gibt es zwei Verfahren.

Verfahren 1: … …erade von zwei möglichst ein… …sentanten einer … …sweise die Schnittgerade von E…

Ver… …enschar wie in Aufgabe 17.5 in $E_a = E_0$ … …rmittelt die …chnittgerade … E_0 und E*.

Übungen

Ü17.1 Bestätigen Sie durch Rechnung mit Hilfe von Verfahren 1, dass … Ebenens…

E_a: $(1-2a)x + (1-3a)\,y + (1+a)z = 1 + 2a$ die Träge…erade … $\begin{pmatrix} \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ besitzt.

Ü17.2 … …en Ebe… 2x + 3y – z = 1 und F: x – 2z = 2 eine E… … G_a, zu der … nicht gehört, und eine Ebenenschar H_a, zu der die Ebene E… …t.

Ü17.3 Ermitteln Sie die Trägergerade g zur Ebenenschar E_a: (a – 1)x + 2y … (2a + 3 … a – 2 mit Hilfe von Verfahren 2, und geben Sie eine Ebene an, welche die Träger… de g en … jedoch nicht zur Ebenenschar E_a gehört. (Zur Kontrolle: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots$

… Übungen: ____________________

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge...

selbstorganisiert ...erle...en

Kap...

Grundlegendes zu M...

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i... Rau...

Ebe... ...un...

Lineare Abbildungen

Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (...-031-266)
St...

...rSelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 18: Grundlegendes zu Matrizen

Der Begriff der Matrix und die Rechenregeln für den Umgang mit Matrizen wa… bereits … 19. Jahrhundert bekannt. Die Bedeutung der Matrizen für die Anwendung w… jedoch … deutlich. Man kann Matrizen beispielsweise bei der Verschlüsselung bzw. Kodier… …ten, … Beschreibung von Produktions- und Transportprozessen sowie für die Transformation … Ko… …tensystemen bei der Programmierung von Robotersteuerungen und vielem me… …rwend… … …en dieser Unterlagen wird der Einsatz der Matrizen auf die Anwendung bei lineare… …bildu… …n und den dazu notwendigen Rechenoperationen für Matrizen beschränkt. Darüb… …inau… …de … …eln und Verallgemeinerungen können Tafelwerken und Schulbüchern entnommen …

Begriff Matrix

Als Matrix bezeichnet man ein Zahlenfeld … m Zeil… …nd n Spalten. Bei linearen Ab… …dungen kommen nur Matrizen mit gleiche… …ahl … …eilen … …d Spalte… … …Man nennt d… …atrizen **quadratische Matrizen**.

Quadratische Mat… … Ebene, als… … R^2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Quad… …atri… …Raum, also i… …: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Die Elemente einer Matrix A werden mit a_{mn} oder für eine Matrix B mit b_{mn} angegeben.

Die **erste Ziffer** gibt die **Zeile** m an.

Die **zweite Ziffer** gibt die **Spalte** n an.

Au… …be 18.…

…tion und Subtrakt… von Matrizen

Ergänzen Sie im folg… …den Beisp… … fe… …ende Zahlenwerte, erläutern Sie anschließend, wie man zwei Matrizen addiert.

Addition im R^2 … $\begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ \ldots & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & \_\_ \end{pmatrix}$

…im R^3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \_\_ \\ 3 & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & 2 & \_\_ \end{pmatrix}$

Subtraktion im R^3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \ldots 0 & 0 & 1 \\ \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-4 & \ldots \\ \_\_\_ & \_\_\_ & 1-\ldots \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & -4 & \_\_ \\ \ldots & & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$

Ergä…

… werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die an den entsp… … Stellen …en ____________________ addiert bzw. sub… …ert.

Aufgabe 18.2

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl r

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel und ergänzen S… … der R… …und im Text fehlenden Angaben:

Multiplikation im R^2 $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ oder im R^3 $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ \ldots & 5 & \ldots \\ \ldots & & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ 21 & \_\_ & -27 \end{pmatrix}$

Man multipliziert eine Matrix mit einer reellen Zah… … man ____________ …ement der Matrix mit der Zahl r __________________.

Aufgabe 18.3

Multiplikation einer Matrix … …inem Vektor

a) Verdeutlichen Sie si… …e Vo… …ehensweise am Beis… …, …d ergänze… …ie die in der Rechnung und im Text fehlenden Ang…

Die Multipli… …von Matrizen mit einem Spalten… …ktor entspricht dem Skalarprodukt jeder …eile der Matrix mit dem Spaltenvektor.

…ultipl… …ion im R… $\begin{pmatrix} 2 & \ldots \\ 3 & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + \ldots \\ 3 \cdot 4 + (-5) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+6 \\ 12-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \end{pmatrix}$

Multiplikation im R^3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \ldots \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) + \_\_ \cdot 4 + 6 \cdot \_\_ \\ 7 \cdot (-1) + \_\_ \cdot 4 + \_\_ \cdot \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 8 + \_\_ \\ \_\_ + 20 + 18 \\ \_\_ - \_\_ + \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ -2 \end{pmatrix}$

Eine Matrix A wird mit einem Vekt… $\vec{\ }$ …multipliziert, indem man jedes Element in einer _________ der Matrix m… … …ie drei Produkte anschließend zeilenweise …

… …tlichen Sie sich durch Berechnung des folgenden Pr… … …der Multiplikation der Matrix mit einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \end{pmatrix}$ ein lineares Gleichungssystem …

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \ldots \\ 3 & \ldots \end{pmatrix} \cdot \ldots = \begin{pmatrix} \ldots + z \\ \ldots y + 2\_\_ \\ \ldots \_\_\_ + \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x + \ldots \\ x + 4y + 2\ldots \\ 3x + y + 2z \ldots \end{matrix}$

…urch die Multiplikation entsteht ein Vektor.

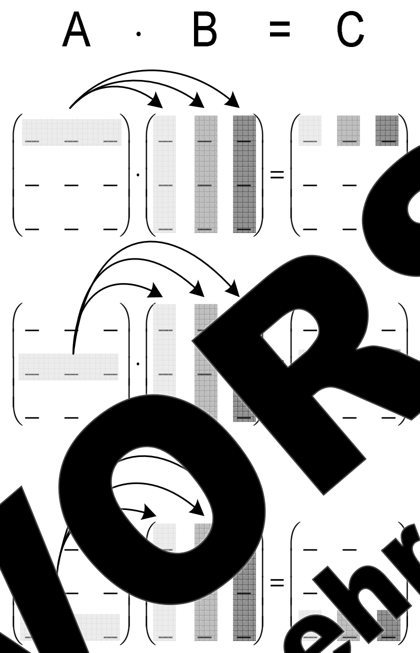
D… …chung wi… …nten- we… …t.

Aufgabe 18.4

Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix

Verdeutlichen Sie sich anhand der Graphik die Vorgehensweise be[...]plikati[...]n quadratischen Matrizen mit drei Zeilen und 3 Spalten und ergänzen Sie im Text fe[...]de[...]en.

a)



– Das 1. Element de[...] Zeile [...]C entsteht durch Multiplikation der __ Zei[...] Spalte vo[...]

– D[...]lemen[...]1. Zeile vo[...]C [...]durch Multiplikation [...] von A mit der ______________ von B.

– Da[...]ent de[...]Zeile von C entste[...]urch Multiplikation [...]n A mit der ______________ von B.

– Das 1. Ele[...]der 2. Zeile [...]n C entsteht durch Multiplikation der ______________ [...] mit der ______________ von B.

– Das 2. Elemen[...]2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der ______________ von A mit der ______________ von B.

⋮

– Das 3. Element der 3. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der ______________ von A mit der ______________ von B.

b) Übertragen Sie das Verfahren zur Multiplikation auf 2x2 Matrizen und bestätigen Sie das angegebene Ergebnis für die folgende[...] durch Nachrechnen:

[...] 4 9

[...]gen Sie die angegebenen Ergebnisse d[...]d begründen Sie damit, dass für [...] Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz ni[...]

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&0&2\\4&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&3\\-1&4&1\\ \ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&6\\10&2&11\\7&4&13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&\ldots\\ \ldots\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\ldots\\4&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&7&2\\15&-1&7\\9&5&4\end{pmatrix}$$

[...]trizenmultiplikation ist nicht kommutativ, [...]ie Produkte $A\cdot B$ [...] ______________

____.

d) Bestätigen Sie mit Hilfe der Matrizen A, B und C, dass das Assoziativgesetz $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ für die Matrizenmultiplikation gültig ist:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-1\\3&4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_\end{pmatrix}=\ldots$$

$$(A\cdot B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\ldots\\ \ldots&4\end{pmatrix}=\ldots$$

Kontrollergebnis: In beiden Fälle[...]ie Matrix: $\begin{pmatrix}19&\ldots\\ \ldots\end{pmatrix}$

Aufgabe 18.5

Berechnen [...] Deter[...]nte [...]er Matrix

Durch [...] Be[...]ung [...] Determinante [...]er Matri[...] dieser ein Skalar bzw. Zahlenwert zugeor[...] De[...]te Skala[...]haltet vielse[...]verwendbare Informationen, auf die an dieser [...]le jed[...] nicht ausführlich ein[...]gangen werde[...]. Es wird hier jedoch jeweils an einem Beispiel be[...] wie man bei ein[...]2x2-Matrix un[...] 3x3- Matrix die Determinante berechnen kann.

a) Determ[...]nte bei einer [...]-Matrix

Anstatt den Ausdruck Det vor die Matrix mit runden Klammern zu schreiben, kann man die Matrix auch mit [...]en darstellen. Die Elemente [...]ender multipliziert.

$$\ldots\begin{pmatrix}\ldots\\c&d\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$-bc$ ad

Zeigen Sie, dass sich für die Determinante der Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ der[...]t.

b) Determinante bei einer 3x3-Matrix

Auch hier kennzeichnen die beiden senkrechten Striche, dass die Determinante der Matrix berechnet wird.

Die ersten beiden Spaltenvektoren d Matrix werden hinte angehängt

$$\text{Det } A = \text{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$-ceg \quad -afh \quad -bdi \quad aei \quad bfg$

Eleme e unter den g nalen Linien n multipliziert.

Das Produkt erhält ein **positives** Vorzeichen, von obe links nach unten rechts multipliziert wird.

Das Produkt erhält ein **negatives** Vorze nen, we ben rechts nach unten links multipliziert wird.

$\text{Det } A = aei + bfg + cdh - ce\ldots - afh \ldots$

Zeig Sie, das ie Determina der Matrix $D = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & [illegible] & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ [illegible] & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ den Wert 1(*) hat.

ng: Sie werden später in Übung 22.1 lernen, dass die Matrix D ei nte Drehmatrix ist. Bei einer linearen Abbild at die Determina ehmatrix immer den Wert 1. (vgl. auch Kapit lick zu Drehung)

Aufgabe 18.6

Besondere Matrizen

a) Die Einheitsmatrix

Die Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird als **Einheitsmatrix E** bezeichn

Weisen Sie am folgenden Beispiel nach, dass für die Mul tion ei Matrix A mit der Einheitsmatrix E gilt: $A \cdot E = A$ und auch $E \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeige S urch Re ung, dass für die folgenden Matri jeweils gilt: $A \cdot B = E$

$$\begin{pmatrix} 3 & [illegible] \\ [illegible] & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & [illegible] \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & [illegible] \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 4 & [illegible] \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Die Matrix B wird als **invers** Matrix A bezeichnet. Man schreibt für B auch A^{-1}.

Für inv

zenoperationen, hier vor allem das Berechnen von inv vertieren von Matrizen), Regel eines umfangreichen Rechenaufwands bedürfen, ist Taschenrechner zu wenden. Erarbeiten Sie sich ggf. mit Hilfe der Bedienungsanleitung er Multiplikation von Matrizen Ihren Taschenrechner einsetzen können und wie Sie mit Hilfe rechners eine Matrix invertieren kön

Er ungen: ____

____

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i... Ra...

Ebe... un...

Lineare Abbildungen

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 19: Projektion

Was man in der linearen Algebra unter einer Projektion versteht, kann man sich sehr anschaulich verdeutlichen, wenn man an die Programmierung von Computerspielen denkt. Hier werden beispielsweise Spielabläufe, die im dreidimensionalen Raum stattfinden, auf dem Bildschirm eines Monitors dargestellt werden. Das bedeutet unter Verwendung der Fachterminologie, dass der dreidimensionale Raum R^3 auf die zweidimensionale Fläche des Bildschirms, also den R^2, projiziert wird. Um ein möglichst hohes Maß an Anschaulichkeit zu erhalten, werden in den ersten Aufgaben nur Projektionen in der Ebene betrachtet.

Aufgabe 19.1

Projizieren Sie die Punkte in der x,y-Ebene in Richtung der zweiten Winkelhalbierenden auf die

Gerade g_B: y = 0,5x oder in vektorieller Darstellung: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

a) Erläuterung der Aufgabenstellung

Umgangssprachlich bedeutet das, wie man der Abbildung 19.1 entnehmen kann, dass alle Punkte der Ebene in Richtung der zweiten Winkelhalbierenden, auf die **Bildgerade g_B** "geschoben", also projiziert werden. Die Richtung der Projektion bzw. "Verschiebung" gibt man über eine durch eine Gerade an, die **Projektionsgerade g_P** bezeichnet wird.

Der Punkt A hat beispielsweise den Bildpunkt A'. Punkte, welche bereits auf der Bildgeraden g_B liegen werden auf sich selbst abgebildet, hier z.B D = D'. Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden, nennt man **Fixpunkte**.

Geben Sie jeweils die Koordinaten der eingezeichneten Punkte an.

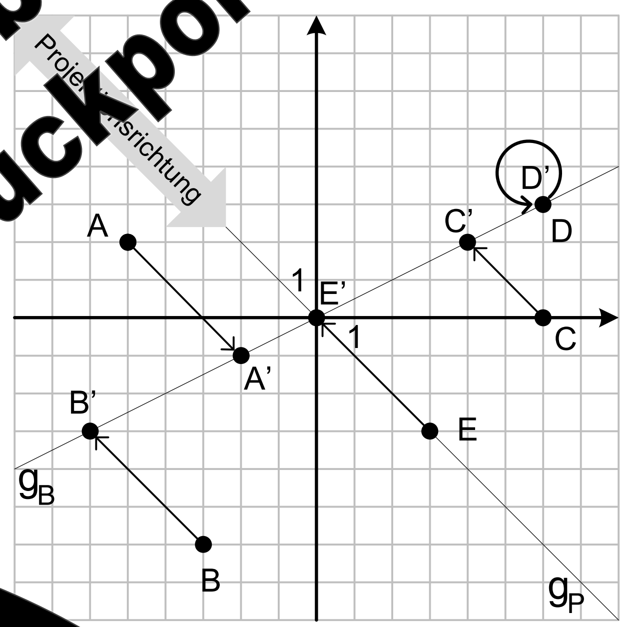


Abb. 19.1

B(__ /__) ⟶ B'(__ /__)

C(__ /__) ⟶ C'(__ /__)

D(__ /__) ⟶ D'(__ /__)

E(__

... (x/y) der Ebene durch Projektion in Richtung der Geraden g_P ein ... (x'/y') auf der Geraden g_B zugeordnet. Man nennt eine solche ... eine Abbildung ... (also des zweidimensionalen Raumes R^2) auf eine Gerade (also ... eindimensionalen ... R^1)

b) Ermittlung der Abbildungsvorschrift in Form einer Projektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Geradengleichung der Projektionsgeraden g_P, welche die Richtung der Projektion vorgibt

$$g_P: \quad \vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$g_P: \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ wird auf die Bildgerade projiziert (geschoben), wodurch man den Bildpunkt X' mit dem Ortsvektor $\vec{x'}$ erhält.

Schritt 2: Die in Abb. 19.1 eingezeichnete Projektionsgerade verläuft durch den Punkt E. Der Bildpunkt von E liegt im Schnittpunkt der Projektionsgeraden g_P mit der Bildgeraden g_B, hier also im Ursprung. Wenn Sie die Projektionsgerade durch den Punkt B zeichnen, erkennen Sie, dass der Bildpunkt B' ebenfalls im Schnittpunkt der Bildgeraden mit der Projektionsgeraden liegt.

Ergänzen Sie:
Für alle Punkte der Ebene gilt: Der Bildpunkt X' eines beliebigen Punktes X liegt im

________________________ der Geraden g_P und g_B. D.h. man berechnet

X' durch Gleichsetzen der Geraden ____ und ____.

Schritt 3: Gleichsetzen und Berechnen des Parameters s der Projektionsgeraden. Verdeutlichen Sie sich die Rechenschritte und die Unterschiede zur bisherigen Schnittpunktsberechnung ...

$g_B = g_P$

$$r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Neu:
In der Geradengleichung hat der Stützvektor keine eindeutigen Zahlenwerte, sondern ist variabel.

I $\quad 2r = x + s \quad$ | I – 2II
II $\quad r = y - s$

Neu:
Der Parameter s nimmt nun keinen Zahlenwert an, sondern ist von x und y abhängig.

... Berechnen des von x und y abhängigen ... durch Einsetzen von s in die Projektionsgerade g_P.

... fassen

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\ldots \begin{pmatrix}\ldots x + \tfrac{2}{3}y\\ \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y\\ y + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y\end{pmatrix}$$

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}\ldots x + \tfrac{2}{3}y\\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y\end{pmatrix}$$

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}\tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3}\\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Die Matrix ...
A= ...
... **matrix** ... speziell als ... **smatrix** ... t.

Der ... der Klammer ... mit dem Produkt ... Matrix und der ... Der Vektor ... ausgeklammert werden.

c) Anwenden einer Abbildungsmatrix

Die folgende Aufgabenstellung verdeutlicht die Anwendung der unter b) er... lten P... ktionsmatrix in Bezug auf die in Abb. 19.1 dargestellten Punkte. Verdeutlichen ... die Vo... se am Beispiel von Punkt A, berechnen Sie anschließend analog dazu ... dinaten ... Bildpunkte von B, C, D und E und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Ab... 9.1.

A(−5/2) $\Rightarrow$ $\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} + \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A'(.../1)

B(__/__) $\Rightarrow$ $\vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ B'(__/__)

C(__/__) $\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ __'(__/__)

__(__/__) $\Rightarrow$ __ = ... $\Rightarrow$ __'(__/__) (Fixpunkt)

E(__/__) $\Rightarrow$ __ = ... $\Rightarrow$ __'(__/__)

Vergl...

____

____

Zusammenfassung: Projektion auf eine Gerade im R^2

Mit Hilfe der Gleichun... kann man bei der Projektion eines ...) die Koordinaten des Bildpunktes X'...

De... ng, die man mit einer Gleichung der Form $A\vec{x} = \vec{x}'$ besc... nn, wird als ...bildung bezeichnet. Bei einer linearen Abbildung auf eine Ge... n die ...te immer auf einer Ursprungsgeraden.

Aufgabe 19.2

Eigenschaften der Projektionsmatrix

Anhand des Beispiels von Aufgabe 19.1 sollen nun wichtige Eigenschaft... Projek... zen dargestellt und neue Begriffe wie Fixpunkt- und Bildmenge sowie Kern ei... A... g erläutert werden. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Ausführungen und ergänzen Sie ggf. ... len ... ben.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass gil... A

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

Geometrische Erläuterung:
Eine einmalige Anwendung der M... en Punkt projiz...t bzw. verschi...t ...esen Punkt auf die Bildgerade. Alle Punkt... der Bildgerad... (vgl. Punkt... in Abb. 19.1) sind Fixpunkte und werden nicht verschob... edeute... man d... Matrix A zweimal hintereinander erst auf den Punkt und danach a... n Bi... unkt an...det, wird das Ergebnis der ...ten Abbildung nicht mehr verändert.

b) Vergleich... Sie de... htun... vektor der Bildgeraden mit den Spaltenvektoren der Matrix A und ergä... en ... den fo... den Satz.

Bildge...e: $g_B: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Abbildungsmatrix: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Die Spa...envektoren de... bbildungsmatrix sind linear abhängig und entsprechen dem

______________________ der Bildgeraden.

c) Fixpunktme... n

Di... Bedeutung der Begriffe bei einer ... and des Beispiels von ...

...atz Fixpunktmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

...**unktmenge** liefert ... die bei der ... sich selbst ... den.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = x \\ \text{II} & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = y \\ \hline \text{I} & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \text{II} & \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \end{array}$$

Beide Gleichu... ntisch. $\Rightarrow x - 2y = 0$

Inte... Ergebnisses: Das Ergebnis ist die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ o... $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit entspricht di... xpunktmenge der ... n.

Ansatz Kern: $A\cdot\vec{x}=\vec{0}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix}\frac23 & \frac23\\ \frac13 & \frac13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Der K… liefert a… gebnis die Menge … Punkte… e auf den …sprung … bil… werden.

Zu lösendes LGS: I $\frac23x+\frac23y=0$ II $\frac13x+\frac13y=$… Beide … eich… sind identisch. …mgef… x … $y = 0$

Interpretation des Ergebnisses: Das Erge… ist d… ktio… gerade $y=-x$ und damit die 2. Winkelha… e. … lle Punkte … der Proj… sge… n werd… in der R… der Projektion auf … Ursprung a… bildet.

Ansatz Bildmenge: $A\cdot\vec{x}$ … $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Die **Bild…** ist hier nur bes…bar, weil alle abg…bildeten Punkte auf … Geraden liegen, a… eine einheitlich beschreibbare Bildmenge haben.

Zu lösendes LGS: $\frac23x+\frac23y=x'$; $\frac13x+\frac13y=y'$ … 2II ; $0=x'-2y'$

Das LGS mus… umformen la…, da… auf der linken Se…

Inte…tatio… Erg…sses: Das Ergebnis … zu $y'=\frac12x'$ umgeformt werden und entspricht de… Fixpunktmenge oder der Menge aller Bildp… e a… der Bildgeraden.

Üb…en

… Projizieren Sie … Punkte der x,y-Ebene in Richtung der Geraden $y=-\frac13x$ auf die x-Achse. Führen Sie d… Berechnun… im Heft durch.

a) Zeigen Sie anha… er Zeichnung, dass der Punkt P(–1/2) auf den Punkt P'(5/0) abgebildet wird.

b) Zeigen Sie durch Rechnung analog zur Aufgabe 19.1, dass sich als Projektionsmatrix die M…

… gsmatrix A linear abhängig sind und …m Richtungsvektor der Bildger…

e) Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19.… e, den Kern und die Bildmenge bei der Projektion und interpretieren Sie die …

Ü19.2 Projizieren Sie die Punkte der x,y-Ebene in Richtung … $=-x$ auf die Gerade $y = x$ (orthogonale Projektion). Führen Sie die Berechnungen …

a) Zeigen … r Zeichnung, dass der Punkt P… unkt P'(6/6) abgebildet w… n Fixpunkt ist.

b) … g analog zur Aufgabe 19.1, das… jektionsmatrix die … bt.

c) Überprüfen Sie, ob gilt: $A\cdot A=A^2=A$

d) Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix A … ngig sind und dem Richtungsvektor der Bildgeraden ents… hen.

e) Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19… punktmenge, de… die Bildmenge bei der Projektion und interpretier… bnisse.

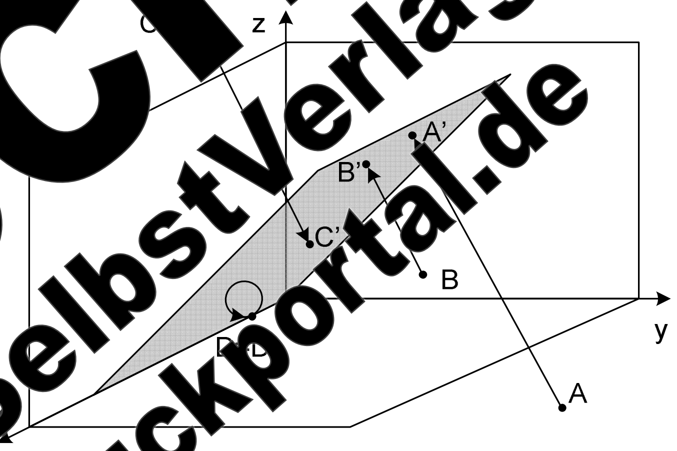
Aufgabe 19.3

Projektionen im Raum

Die Erkenntnisse zur Projektion in der Ebene können im Wesentlichen a… um üb…gen werden. In der folgenden Aufgabe werden die Punkte des Raumes in Ric… g e… rojektions-geraden g_p auf eine Projektionsebene bzw. Bildebene E_B projizi… Wie be… en" Abbildungen ist die Projektionsebene eine Ursprungsebene.

Projektionsebene: $E_B:\ \vec{x}=r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ oder $E_B:\ y-z=0$

Veransch… de… bildung im 1. …adranten:



Projektionsrichtung: g_p: … 2

a) Erm… d… ektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Ge…engleichung … Projektionsgeraden g_P. Diese Gerade gibt die Verschiebungs…ung bzw. Pro…onsrichtung an, in der ein beliebiger Punkt X(x/y/z) auf die Bi…ebene bzw. Proj…sebene projiziert (geschoben) wird.

$$g_p:\ \vec{x'}=\vec{x}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\quad\text{oder}\quad\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Schritt 2: … rchstoßpunkten der Geraden g_p durch die … e. Einsetzen von g_p in E_B liefert den …

$$\begin{aligned} y-s-z-2s &= 0\\ 3s &= y-z\\ s &= \tfrac13y-\tfrac13z \end{aligned}$$

Schritt 3: Einsetzen von s in die Gerade g_p:

$$\vec{x'}=\begin{pmatrix}x\\ \ldots\\ \ldots\end{pmatrix}\ \ldots\ \begin{pmatrix}x+0\\ \ldots\tfrac13y-\tfrac13z)\\ \ldots+2(\tfrac13y-\tfrac13z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y-\tfrac13y+\tfrac13z\\ z+\tfrac23y-\tfrac23z\end{pmatrix}\ \ldots$$

$$\ldots=\begin{pmatrix}\ldots & 0 & 0\\ 0 & \frac23 & \frac13\\ 0 & \frac23 & \frac13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \text{Abbildungsmatrix: } A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac23 & \frac13\\ 0 & \frac23 & \frac13\end{pmatrix}$$

b) Anwenden der Abbildungsmatrix auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(3/9/6) auf den Punkt P'(3/8/8) abgebildet wi… wie de… unkt Q(3/1/1) und alle Punkte R(r/0/0) auf der x-Achse Fixpunkte bei der Abbil… sind.

P(3/9/6) $\Rightarrow \vec{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow$ …(__/__/__)

Q(__/__/__) $\Rightarrow \vec{q}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & … \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow$ Q'(__/__/__) = Q

R(__/__/__) $\Rightarrow$ … $\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow$ R'(__/__/__) = R

Au… be 19.4

…haften de… Projektionsma…

Analog zu den Untersuchungen z… den Eigenschaften von Projektionsmatrizen in der Ebene wird nun die Projektionsmatrix aus Aufga… 19.3 untersucht.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass auch bei einer Projektion im Raum der Zusammenh…

… $= \begin{pmatrix} … \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} … \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$

b) Vergleichen S… der Projektionsebene mit de… …ren der Matrix A und ergänze… …z:

…ene: E_B: $\vec{x} =$ … $+ t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Projektionsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & … \\ 0 & \frac{2}{3} & … \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ … $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ … & 1 \\ … & 1 \end{pmatrix}$

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix lassen sich in der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ u… $\begin{pmatrix} 0 \\ … \\ … \end{pmatrix}$ darst… und

sind linear ________________. Die Spaltenvektoren entsprechen de… …ren der

______________________________ .

c) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei eine… …ktion

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern u… Bildmen… erfolgt nach de… gleichen Verf… en wie bei der Abbildung in der Ebene. Arb… Sie … eispi… durch, u… …den Sie die …ren auf nachfolgende Übungsaufgaben a…

Ansatz Fixpunktmen… $A \cdot \vec{x}$ … $\begin{pmatrix} 1 & 0 & … \\ … & … & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Zu lösendes …:

I $x = x$
II … $\frac{1}{3}z = y$
III $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z =$ …

I … $= 0$
II $-\frac{1}{3}y$ … $= 0$
III $\frac{2}{3}y$ … $\frac{}{3}z = 0$ } II und III sind identisch: $\Rightarrow y - z = 0$

Interpr… ion des Erge… ses: In diesem unterbestimmten LGS sind zwei Variablen frei wählbar. Wählt man x = r und z = s ergibt sich aus

$\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder nach Umrechnung die Ebene y – z = 0

…tspricht die Fixpunktmenge der Projektions-

… $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} … \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

…0

Zu lösendes LGS:

I $x = 0$ $\Rightarrow x = 0$
II $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 0$
… $\frac{1}{3}z = 0$ } Beide Gleichung… …sch: $\Rightarrow 2y + z = 0$

Interpretat… … unterbestimmten LGS ist eine Va… …hlbar. Wählt Ergebn… … r, folgt z = –2r. Als Lösungsvektor er…

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dies entspricht der Projektio… …durch den Ursprung des Koordina… …ns, d.h. die Bere… … Kerns liefert die Richtung…

Ansatz Bildmenge:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$A \cdot \vec{x} = \vec{x'}$

Zu lösendes LGS:

I $x = x'$ ⇒ x-Achs… …en abgebildet

II $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = y'$

III $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = …$ | II – I…

$0 = y' - …$

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich Null.

Interpretation des Ergebnisses: Die Bildm…ge entspricht … Fixpunktme…e. Damit handelt es sich bei der linea… Abbildu… um eine Projekt…n.

Aufgabe 19.5

Bedeutung der Einh…toren bei Pr…ktionen

a) Als Projektions…e … Ebene x + y + z = 0 gewählt. Zeig… Sie durch entsprechende Rechnung, dass … bildungs…rizen ergebe…

i) … , wenn man in Richtung des Ei…vektors $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert.

ii) $\begin{pmatrix} … & … & … \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des … $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ … \end{pmatrix}$ (y-Achse) projiziert.

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (x-Ac… projizie…

Ergänzen Sie:

Bei der Projektion in R…tung …r Ein…ktoren … allen drei Mat…en jeweils eine Spalte mit Nullen auf. Bei Projekt… des Einheit…ktors $\vec{e_1}$ ents… die ___ Spalte dem Nullvektor… …ion …htung des E…svektors ___ …pricht die 2. Spalte dem Nullvektor. Bei Proje…n in Ric…g des Einheitsve…rs ___ entsp… …ie ___ Spalte dem Nullvektor.

…Auf…e 19.4 wurde bei der …jektion auf d… …ene E: y – z = 0 in Richtung der …kt… geraden

g_p: $\vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Pr…jektionsmat…x $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ermittelt. Setzt man in der Projektionsgeraden für den Vektor $\vec{x}$ nacheinander die Einheitsvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ ein und berechnet die Durchsto… …ktionsebene E, erhält man deren Bilder $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$ und $\vec{e_3}'$. Führen Sie … ergänzen Sie den nachfolgenden Satz.

i) … $\begin{pmatrix} … \\ … \\ 2 \end{pmatrix}$ in E_B ⇒ $-s - 2s = 0$ … ⇒ $\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in E_B ⇒ $1 - s - 2s = 0$ ⇒ $s = \_\_\_$ … $+ \_\_\_ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

iii) $\vec{e_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ … \\ … \end{pmatrix}$ … ________ ⇒ $s = \_\_\_$ ⇒ … $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

…r Einheitsvektoren entsprechen den ______ … der …matrix. Damit kann man die Projektionsm… über die Abbildu… …toren ermitteln.

Aufgabe 19.6

Untersuchung auf Existenz einer inversen Matrix bei der Projektion

Aus Aufgabe 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A au[illegible] inverse[illegible]ix A^{-1} geben kann und dass gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 19.4 wissen Sie, d[illegible] bei P[illegible]tionen gilt: A^2=A.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zus[illegible] gewandt, u[illegible] untersuchen, ob zu einer Projektionsmatrix A eine inverse Mat[illegible] ex[illegible] Erläu[illegible] Sie die Ze[illegible]2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

(2) $A \cdot (A$ [illegible] $) = AE$ ______________________________

____

____

(3) [illegible] $A) \cdot A^{-1} = A$ ______________________________

____

____

[illegible] $A^2 \cdot A^{-1}$ ______________________________

____

____

(5) [illegible] ein Widerspruch zur Zeile (1), da das Produkt einer [illegible] inversen Matrix die ________________

________ [illegible]eben muss.

Ergebnis: Bei einer Pr[illegible] existiert zur Projektionsmatrix [illegible]___ inverse Matrix A^{-1}.

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen

Kap

Spiegelung

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und im Raum

Eben...

Lineare Abbildungen

Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (...-031-266)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 20: Spiegelung

Aufgabe 20.1

Im Rahmen dieser Aufgabe wird entsprechend zur Projektion eine Spiegelmatrix ermittelt und anschließend die Eigenschaften dieser Matrix untersucht.

Wie bei allen "linearen" Abbildungen ist die Ebene, an der gespiegelt wird, eine Ursprungsebene.

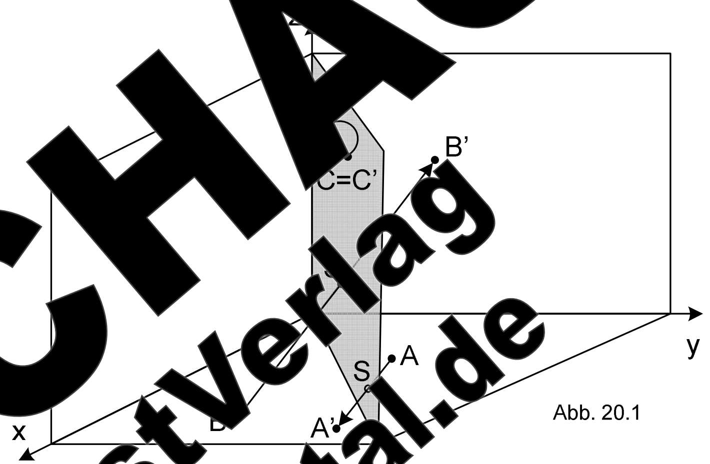


Abb. 20.1

Hier wird die Ebene E: x – y = 0 … hlt u…

in Richtung der Geraden g_S : x … $\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ -1 \end{pmatrix}$

gespiegelt.

a) Erm… der …gel… x

Schritt 1: Bestim…n der Gleichu… der Geraden g_S, welche die Richtung der Spiegelung vorgibt.

$$g_S:\ \vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Wie Sie bereits im Kapitel 14 Aufgabe 14.3 gelernt haben, benötigt man zur Berechnung der Koordinaten … Punktes die Koordinaten des Durchstoßpunktes S … die Ebene E. Die Berechnung liefert den Parameter s.

…: Koordinaten des Spiegelpunktes analog … berechnen.

$$\vec{x'} = \vec{x} + 2s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} x-2x+2y \\ \ldots \\ z+2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+0 \\ 0+y+0 \\ 2x-2y+z \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\Rightarrow \text{Spiegelmatrix: } S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Anwenden der Abbildungsmatrix S auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(–2/0/3) auf den Punkt P'(2/0/–1) abgebildet wird, s… der P… Q(2/2/3) und alle Punkte R(0/0/r) auf der z-Achse Fixpunkte bei der Ab…ng sind.

$$P(-2/0/3) \quad \Rightarrow \vec{p'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots(\_\_/\_\_/\_\_)$$

$$Q(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \vec{q'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \ldots \Rightarrow Q'(\_\_/\_\_/\_\_) = Q$$

$$R(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \vec{r'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \ldots \Rightarrow R'(\_\_/\_\_/\_\_) = R$$

Aufga… 20.…

…igensc…ten d… …egelmatri…

Ent… zu Projektionsm…rizen weisen a… Spiegelmatrizen charakteristische Eigenschaften auf.

a) Wenden Sie die Spiegelmatrix auf d… Punkt P' aus Aufgabe 20.1 b) an und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$P'(2/0/-1) \quad \Rightarrow \quad \vec{p''} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_ \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P''(\_\_/\_\_/\_\_) = P$$

…iche Matrix noch einmal … erhält man den ____________________

…aher gilt bei einer Spiegelung $S \cdot (S \cdot \vec{x}) = S \cdot S \cdot \vec{x} = S^2 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ u… …kt $S \cdot S = S^2$ muss daher der Zusammenhang $S^2 = E$ erfüllt sein.

Zeigen Sie d… …s $S \cdot S = S^2$ für die Matrix aus … dass bei einer Spiegelun… …g ist.

$$S^2 = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

b) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Spiegelung

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach den ... ahren wie bei der Projektion. Arbeiten Sie die Beispiele durch, und wenden ... die Ver... nachfolgende Übungsaufgaben an.

Ansatz Fixpunktmenge: $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \end{pmatrix} =$

Zu lösendes LGS:

I ... 2y
... y
... 2x −2y ... z = z

I ... = 0
... 0 = 0 ... und III sind identisch: $\Rightarrow x - y = 0$
2x−2y

Interpretation de... ses: ... diesem ... zwei Var... frei wählbar. Man erhält als Lösu... ktor eine Eb..., die der Ebene x − y = 0 entspr... amit entsp... die Fixpunktmenge der ... ene, d.h. alle Punkte auf dieser Ebene werden auf ... selbst abgebildet.

...atz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} & & \\ & 1 & 0 \\ & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & -x + 2y = 0 & & \\ \text{II} & y = 0 & \Rightarrow & y = 0 \\ \text{III} & 2x - 2y + z = 0 & & \end{array}$$

y in I $\Rightarrow$ x = 0

$\Rightarrow$ z = 0

...enge aller Punkte an, die auf den Urspr... uf den Ursprung gespiegelt werden. Da... piegelung jedoch nur der Ursprung selbs... dere Punkt einen vom Ursprung verschie... hat. Dieses Ergebnis ist daher charakteristisch ...lung.

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x'}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -x + 2y = x' \\ \text{II} & y = y' \quad \ldots -2\text{II} \\ \text{III} & 2x - 2y + z = z' \quad \ldots \text{III} \\ \hline \text{IV} & -x \ldots \\ \text{V} & x \ldots z = \ldots \quad | \ldots + \text{V} \\ \hline & z = 2x' \ldots z' \end{array}$$

Links vom Gleichheits-
zeichen ergibt sich
durch die Addition
nicht Null.

Interpretation des Ergebnisses: Da sich die ... seite des ... nicht so u... formen lässt, dass ... bei der Projektio... Null ergibt, als ... Ergebnis der Form ... 2x' − 2y' + z ... entsteht, exist... keine Bildmenge. Das ... uch Sin... bei einer Spiegelung jeder Punkt individuell auf ... Bildpunkt ... bildet wird und somit keine einheitlich ...reibende ... enge vorhanden ist.

Aufgabe 20...

Unters... Exi... nz einer inv... Matrix b... der Spiegelung

... Aufg... 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A auch eine inverse Matrix A^{-1} geben ka... s gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

Aufgrund der Überlegunge... aus Aufgabe 20.2 wissen Sie, dass bei Spiegelungen gilt: $S^2 = E$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zusammenhänge angewendet, um zu untersuchen, ob zu einer Spiegelmatrix S eine inverse Matrix S^{-1} existiert. Erläutern Sie die Zeilen (2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) We...

$S \cdot (S \cdot S^{-1}) = S \cdot E$ ____________________

(3) ____________________

(4) $S^2 \cdot S^{-1} = S$ ____________________

(5) $E \cdot S^{-1} = S$

oder $S^{-1} = S$

Ergebnis: Wenn eine invers... ...ert, gilt bei einer Spiegelung $S^{-1} = S$

Übungen

Ü20.1 Untersuchen Sie die orthogonale Spiegelung an der Ebene x – z = 0 in Ihrem Heft.

a) Zeigen Sie, dass sich als Spiegelmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt.
b) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $S^2 = E$ erfüllt ist.
c) Zeigen Sie, dass die Fixpunktmenge der Spiegelebene entspricht.
d) Zeigen Sie, dass der Kern der Abbildung dem Nullvektor entspricht.
e) Zeigen Sie, dass keine Bildmenge existiert.

Ü20.2 ... Sie durch Rechnung, dass es sich bei der ... um eine orthogonale Spiege... ...andelt, indem Sie die Fixpunktmenge, den Kern und die Bildme... ...suchen.

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap...

Zentrische Strec...
aus dem Ursprung

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und ... Rau...

Ebe... ...un...

Lineare Abbildungen

Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (L... ...-031-266)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 21: Zentrische Streckung aus dem Ursprung

Aufgabe 21.1

Eigenschaften von Streckmatrizen bei zentrischer Streckung a Ursprung

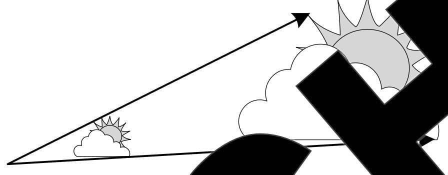


Abb. 21.1

Die Abbildungen 21.1 und 21.2 zeigen jew zentris Streckungen von Bildern und Vek Sie en bereits, dass man Vektoren durch Mul kation mit e en Zahl verlängern bzw. verkürzen un ng umkehren kann. Neu ist nun, dass an d ekan en Operation die Bedeutung einer Abbildung dnet und eine Abbildungsmatrix ttelt.

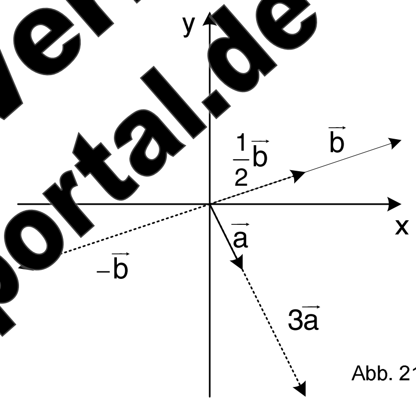


Abb. 21.2

Die folgende Umfor zeig erleitung Streckm Eb

a) Übe gen Sie Vorgehensweis uf Vektoren i um nd en Sie e entsprechen Streckmatri a

Streckmat d Ebene: $\vec{x'} = u\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}x+\ \\ \ +\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ux+0\\0+uy\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}u&0\\0&u\end{pmatrix}}_{\text{Streck–matrix Ebene}}\vec{x}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix}u&0\\0&u\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}u&\_&\_\\\_&u&\_\\\_&\_&u\end{pmatrix}$

zen Sie: Eine Streckmatrix erkennt man da gonalen drei ______________

Zahlenwerte stehen und in allen restlichen Feldern eine ___ int.

c) Eigenschaften

Verd olgenden Angaben, inwiefern da ergebnis bei einer ze rsprung von dem Zahlenwert u in de smatrix abhängt.

$\Rightarrow$ Streckung in Richtung des Vektors $\vec{x}$

u = 1 $\Rightarrow$ A entspricht der Einheitsmatrix nd bildet $\vec{x}$ auf si Damit liegt für u = 1 keine ze Streckung vor.

< u < 1 $\Rightarrow$ Verkürzung des Vekto

$u = 0 \Rightarrow$ Abbildung des Vektors $\vec{x}$ auf den Ursprung. In diesem Fa gt **kein** zentrische Streckung vor.

$-1 < u < 0 \Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung mit Verkürzung de tors $\vec{x}$

$u = -1 \Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung

$u < -1 \Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung mit Streck des V x

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei der zentrische kung, für $u \neq 1$ u $\neq 0$.

Fixpunktmenge: $A\vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix}u&0&0\\0&u&0\\0& & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\y\end{pmatrix}$ x

Lösen des LGS: ux x = 0 y = y $\Rightarrow$ x = $\begin{pmatrix}0\\0\\ \end{pmatrix}$ z = z

Interpretatio Ergebniss: Da die Fixpu alle Pu lie rt, die auf sich selbst gebildet werden kann, wie das Ergebnis zeigt, nur der Ursprung die Fixpunkt enge sein, d.h. r der Nullvektor wird auf sich selbst abgebil

Ke: $A\vec{x} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix}u&0&0\\0&u& \\0&0&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\0\\0\end{pmatrix}$

Lösen des LGS: $ux = 0$, $uy = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Inte uf den Ursprung abgebildet werden. ullvektor, da außer dem Ursprung selbst k den Ursprung abgebildet wird.

Bildmenge: $\begin{pmatrix}u&0&0\\ & &0\\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

Lösen des: uz = z' $\Rightarrow$ $ux = \bar{x}$, $uy = \bar{y}$, $uz = \bar{z}$ $\Rightarrow$ keine E n x, y und z auf der möglich

n des s: Jeder Punkt hat einen indi llen Bildpunkt. Da keine einheitlich anzugeben ge.

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Drehungen

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und im Raum

Eben...

Lineare Abbildungen

Gesa... ...ebra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 22: Drehungen

Aufgabe 22.1

Die Betrachtung von Drehungen beschränkt sich hier auf die Dreh[illegible] die Ko[illegible]achsen. In der folgenden Abbildung ist die Drehachse die z-Achse und zeigt nach [illegible] der Papierebene heraus. Die Position der Wolke vor und nach der Drehung [illegible] durch [illegible] des Punktes X bzw. X' angegeben. Verdeutlichen Sie sich die Herleitung der D[illegible]atrix b[illegible] Drehung um die z-Achse, indem Sie die Umformungen erläutern.

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \Rightarrow x = r\cos\alpha \qquad x' = r\cos(\alpha+\varphi)$

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \Rightarrow y = r\sin\alpha \qquad y' = r\sin(\alpha+\varphi)$

$z = z \qquad z' = z$

Mit [illegible] der Additionstheoreme (vgl. Tafel[illegible])

$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi$

$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$

ergeben sich folgende Umformungen bei der Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse. Erläutern Sie die Schritte (1) bis (4).

(1) [illegible] (1)____________________

(2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi \\ r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ ____________________

(3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x\cos[illegible] \end{pmatrix}$ (3)____________________

(4) $\begin{pmatrix} [illegible]\varphi - y\sin\varphi + 0 \\ [illegible]\sin\varphi + y\cos\varphi + 0 \\ 0 + 0 + z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix } M[illegible]} \vec{x} = M\vec{x}$ (4)____________________

Wenn man die Betrachtungen zur Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse auf D[illegible]hunge[illegible] die x- und y-Achse überträgt, ergibt sich folgender Überblick über Drehmatrizen:

Drehung um die x-Achse	Drehung um die y-Achse	[illegible]g um [illegible] Achse
$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$	$M_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & [illegible] \end{pmatrix}$	$[illegible] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 22.2

Berechnen Sie

a) die Drehmatrix bei einer Drehung [illegible] 90° [illegible] die [illegible]se: $M = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

b) die Drehmatrix bei ein[illegible] 45° um die [illegible]: $M = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

c) die [illegible] bei ei[illegible] Drehung u[illegible] 2[illegible]° um die z-Achse: $M = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

Aufgabe [illegible]

Eigenschaften von Drehmatrizen

Die Betracht[illegible] [illegible]oren von $M_z = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{matrix}}_{\vec{a_1}} & \underbrace{\begin{matrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0\end{matrix}}_{\vec{a_2}} & \underbrace{\begin{matrix}0 \\ 0 \\ 1\end{matrix}}_{\vec{a_3}} \end{pmatrix}$

[illegible] Spaltenvektoren

[illegible]eigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berech[illegible] [illegible]e bzw. der Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Drehm[illegible] [illegible]ie Länge 1**.

$|\vec{a_1}| = \sqrt{\cos^2\varphi + [illegible]}$

$|\vec{a_2}| = [illegible]$

b) Orientierung der Spaltenvektoren

Zeigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berechnung der …ige bz… der Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Dreh…rix sind … orthogonal.**

Def.: Orthonormale Matrizen

Matrizen, deren Spaltenvektoren normiert und pa…ise zu…nder orthogonal sind, nennt man orthonormale Matrizen

$$\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}=-\cos\varphi\sin\ldots\sin\varphi\cos\varphi=0$$

$$\overline{a_1}\cdot\overline{a_3}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\ \_\_\_\\ \_\_\_\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\_\_\_\\ \_\_\_\\ \_\_\_\end{pmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=0$$

$$\overline{a_2}\cdot\overline{a_3}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\ \_\_\_\\ \_\_\_\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\_\_\_\\ \_\_\_\\ \_\_\_\end{pmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=0$$

c) …rechn… Drehw…ls

D… Drehwinkel lässt … über die Sp… der Matrix berechnen.

Def.: Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix … die Summe der Elemente in der Diagonalen.

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & \ldots\\ \ldots & a_{22} & \ldots\\ \ldots & \ldots & a_{33}\end{pmatrix}$ Spur $A=a_{11}+a_{22}+a_{33}$

…er gilt: $\cos\varphi=\frac{1}{2}(\text{Spur}\ldots-1)$

Zeigen Sie, dass die Matrix $D=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ eine Drehun… die z-Achse bewirkt.

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei Drehmatrizen

Fixpunktmenge: Bei einer Drehmatrix werden nur die Punkte der Drehachse au… abge…et. Daher ergibt sich bei der Fixpunktmenge die Drehac… also die …z-Achse als Lösung.

Kern: Der Kern liefert alle Punkte, die auf den Urs…g abg……en. Daher liefert der Kern ebenfalls den Nullvektor, da außer d… Ursp… selbst kein weiterer Punkt auf den Ursprung abgebildet w…

Bildmenge: Eine einheitliche Bildmenge ist …t bes…bar, da … der Punkt i…uell auf einen eigenen Bildpunkt ab… wird.

Übungen

Ü22.1 Ermitteln Sie für die folgen… D…n die Drehmatri…n. …eben Sie die …erte ggf. in Vielfachen von $\sqrt2$ od… $\sqrt3$ …

a) 45… die z…se $D=\begin{pmatrix}\cos\_\_\_ & -\sin\_\_\_ & 0\\ \sin\_\_\_ & \cos\_\_\_ & \ldots\\ 0 & 0 & \_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}$

b) 90° um di… x-Achse $D=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}$

c) … $D=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}$

d) 270° um die z-Achse $D=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}$

e) … um die z-Achse $D=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}$

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen

Kapitel 23

Verkettung von linearen Abbildungen

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und im Raum

Ebenen

Lineare Abbildungen

Gesamtausgabe: Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen (02-031-266)

LehrerSelbstVerlag
Sowie Autoren & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
www.lehrerselbstverlag.de
Druck: www.f-druck.de

Kapitel 23: Verkettung von linearen Abbildungen

Aufgabe 23.1

a) Für ein Computerspiel soll die dreidimensionale Umgebung einer Burganlage auf 25% der ursprünglichen Größe verkleinert und auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden. Erläutern und ergänzen Sie die nachfolgenden Rechenschritte:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & [illegible] & 0 \\ 0 & [illegible]{,}25 & [illegible] \\ 0 & 0 & [illegible] \end{pmatrix}$ ______________________

(2.1) $E_P: \ x$ [illegible]

[illegible] $x + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ______________________

(2.2) $x + r = 0$

$r =$ ___ ______________________

(2.3) [illegible] ______________________

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______________________

(3) P(4/8/1[illegible]

[illegible] ${,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ______________________

$[illegible] = B \cdot \overrightarrow{p'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ______________________

(4) $M = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ ______________________

$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p''}$ ______________________

(5) $N = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ ______________________

(6) $M \cdot \vec{p} = N \cdot \vec{p} = \overrightarrow{p''}$ [illegible] $\Rightarrow$ [illegible] $B = B$[illegible] ______________________

b) Für e[illegible] ande[illegible] sequenz soll d[illegible] Burganlag[illegible] 45° um die z-Achse gedreht und dann in [illegible]ße in Richtung [illegible] Geraden $\vec{x} =$ [illegible] $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden.

Erläutern Sie die nachfolgenden A[illegible]en und Rechenschritte und ergänzen Sie fehlende Angaben:

(1) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ [illegible] & & \\ & & \end{pmatrix}$ ______________________

(2.1) $E_P: \ x = 0$ ______________________

$g_P: \ \overrightarrow{x'} = \vec{x}$ [illegible] $\begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ ______________________

(2[illegible] ___ ______________________

(2.3)

$$\vec{x'} = \vec{x} - x\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+0\\2x+y+0\\0+0+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) P(4/8/12)

$$\vec{p'} = A\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\ \\ 12\end{pmatrix}$$

$$\vec{p''} = B\vec{p'} = \cdots \begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\12\end{pmatrix}$$

(4)

$$M = B\cdot A = \begin{pmatrix}0&0&0\\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$M\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix}0&0&\\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ & & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\12\end{pmatrix} = \vec{p''}$$

$$N = A\cdot B = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

$A\cdot B \neq B\cdot A$

c) Ergänzen Sie anhand der Ergebnisse aus (6) in Aufgabenteil a) und (5) in Aufg…enteil … folgenden Sätze:

Bei einer linearen Abbildung werden, wie im Aufgabenteil a) und b), zw… Abbildung… nacheinander angewendet. Man bezeichnet das als **Verkettung** von A… …n. Da… gilt:

- Die Verkettung zweier linearer Abbildungen kann durch d… _______________ der beiden Abbildungsmatrizen berechnet werden.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Reihenf… der A… ungen … eine Rolle … In diesem Fall sind die Ergebnisse der Produkte A… und B · A _______________.
- Es gibt Verkettungen, bei den… die Ergebnis… Produkte A · B und B · A unterschiedlich sind. Bei diesen Verkettungen … die Reihenfolge der beiden Abbildungen ________ Rolle.
- Da es Verkettungen … bei … A · B … B · A … gilt, muss die _______________, in der die Abbildungen … angewendet werden, stets beachtet werden.
- W… die Abbildung A zuerst und die Abbildung B danach durchgeführt wird, gilt für die …te Abbildung:

$$\vec{x''} = B\vec{x'} = B(A\vec{x}) = B\cdot A\vec{x} = M\vec{x} \qquad \Rightarrow M \quad = \_\_\_\_\_$$

Aus dem Produkt $B\cdot A$ …rkennt man, dass zuerst …bbildung A und danach …ldung B …t wurde.

Ergänze…

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge…
selbstorganisiert …le…en

Ka…

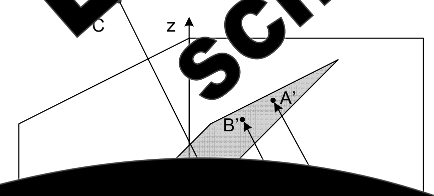
Überblick
…lineare Abbildungen A…

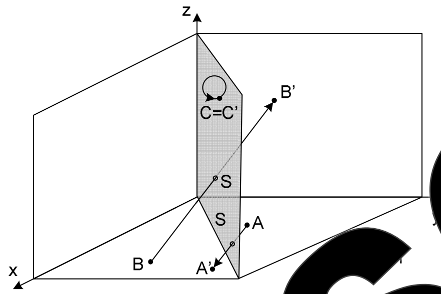
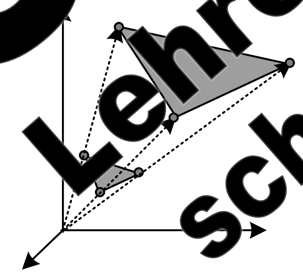
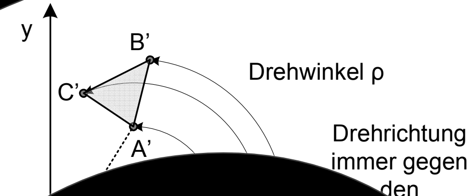
02-031-266

Gesa… …ebra selbstorganisiert erlernen (… …-031-266)
S…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 24: Überblick lineare Abbildungen $A\vec{x}=\vec{x}'$

Abbil-dungsart	Darstellung / Informationen	Eigensch... der A... matrizen
Allge-meines	Bei einer "linearen" Abbildung $A\vec{x}=\vec{x}'$ sind Projektionsgeraden und Projektionsebenen sowie Spiegelgeraden und Spiegelebenen immer Ursprungsgeraden bzw. Ursprungsebenen.	Grundlegend... zu ..., wobei E die Ein...matrix ... zu A inverse Matrix angib... $A \cdot E$ ... und $E \cdot A = E$ ... $= E$ ... und A^{-1} ... $= E$ ... E ...
Verkettung	Werden zwei Abb...ngen nacheinander a...efü... wird die gesamte Abbildu... ... Produkt der beid... ildungsmatri... besc...ben ... im A... nen A ... A ... uss die Reihenfolge der A... ...tet werde...	Es gilt ... Matr... A beschreibt d... te Abbildung, M... B beschreib... die zweite Abbildung, ...ann folgt f... die Verkettung M: $\mathbf{M = B \cdot A}$
		1. ...ein... einmalige Abbildung projiziert jeden P...unkt P im Raum auf die Projektionsebene. Alle Punkte P' liegen auf der Projektionsebene und sind Fixpunkte. Es gilt: **1. Abbildung:** $\vec{x}'=A\vec{x}$ **2. Abbildung:** $\vec{x}''=A\vec{x}'=A(A\vec{x})=A^2\vec{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{A^2=A}$ 2. Es existiert **keine inverse Matrix A^{-1}**. Beweis: Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$ $A(A \cdot A^{-1}) = AE$ $(AA) \cdot A^{-1} = A$ $A \cdot A^{-1} = A$ $\Rightarrow$ Widerspruch! 3. D... ...en von A sind linear abh... 4. Die Spa... ...n A liefern die Spannvekt... ...ktionsebene. 5. Die Bilder de... ...oren entsprechen den Spaltenve... Ansatz für 1. Sp... $+ s\vec{u}$ etc. 6. Ist ein Spaltenvek... ...r Nullvektor, so entspricht die Proj... ...ng der ...chtung des entsp... ...heitsvektors.

Abbil-dungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der A... ...zen
Spiegelung		1. Wendet man di... ...bildung... ...mal an, so wird jed... ...' wie... den ursprünglichen ...kt ... abgebildet bzw. zu...k vers... 1. Abbild... $\vec{x}' =$ ... ... $= A\vec{x}' = A($... $= A^2\vec{x} =$ ... $\boxed{A^2 = E}$ 2. W... ...n A... existiert, ...t b... der Spiegelung: ... $\boxed{A}$ Beweis ... $A^{-1} = E$ $A(A \cdot A^{-1})$ ... AE $(AA) \cdot$ ... $= A$ ... $= A$ ... $A^{-1} = A$ $A^{-1} = A$
Zentrisch... Streckung aus Ursprung		...ie ...treckmatrix hat immer die Form: $A=\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$ und $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$ Das Abbildungsergebnis ist abhängig von u: $u > 1$ $\Rightarrow$ Streckung in Richtung von $\vec{x}$ $0<u<1$ $\Rightarrow$ Verkürzung $-1<u<0$ $\Rightarrow$ Spiegelung mit Verkürzung $u = -1$ $\Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung ... $\Rightarrow$ Spiegelung mit Streckung
Drehung	 ...e heraus	...r für Drehung um die z... ...Form: $M_z=\begin{pmatrix} \cos & \ldots \\ \sin\varphi & \ldots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ... $=\begin{pmatrix} \cos-\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos-\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. Spaltenvektoren ... ...nge 1. 3. Spaltenvektoren si... ... orthogonal. 4. Drehwinkel $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1) =$ ... $+ a_{33} - 1)$ 5. Z... ...information: ... Determinante gil...

Die Ergebnisse der Berechnung der Fixpunktmenge, des Kerns und der Bild[illegible]enge li[illegible] für jede Abbildung charakteristische Ergebnisse.

Abbildungsart	Fixpunktmenge $A\vec{x}=\vec{x}$	Kern $A\vec{x}=\vec{0}$	Bild[illegible] $A\vec{x}=\vec{x}'$
Definitionen	Die Fixpunktmenge liefert alle Punke, die bei der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.	Der Kern liefer[illegible] Ergebnis die M[illegible] aller Punkte, [illegible] auf d[illegible] Ursprung [illegible] werden.	D[illegible]enge ist nur [illegible]stimmbar, wenn der Ort [illegible]er abgebildeten Punkte auf einer [illegible]eraden oder einer E[illegible]iegt.
Ergebnisse bei der Projektion	**Projektionsebene** Erläuterung: Bei der Projekt[illegible] ist [illegible] im R^3 die Eben[illegible] R^2 die G[illegible] auf welche die [illegible] Rau[illegible] bz[illegible] E[illegible] projiziert werd[illegible] auf [illegible] Pro[illegible]nsebene bzw [illegible]den[illegible]en auf sich se[illegible] abgebildet und bild[illegible] daher die Fi[illegible]ktmenge.	**[illegible]rojektionsge[illegible] durch [illegible]en Urs[illegible]g** [illegible] Alle [illegible]kte, die [illegible] [illegible]rojektionsgerad[illegible] durch [illegible]en Ursprung [illegible]gen, werden [illegible] Ursprung abgeb[illegible]	**P[illegible]tionsebene** Erläuteru[illegible] Das E[illegible]nis ist identisch mi[illegible] Fixpunktmenge, da [illegible] Menge aller Bildpunke auf der Projektionsebene liegen. Der Ansatz $A\vec{x}=\vec{x}'$ führt auf ein LGS, bei dem durch entsprechende Addition auf der linken Seite 0 entstehen muss. Auf der rechten Seite ergibt sich dann die Gleichung der Projektionsebene.
Ergebnisse bei der Spiegelung	**Spiegele[illegible]e** Erläut[illegible]ng: Alle Punkte auf [illegible] Spiegelebene werden auf sich selbst abgebildet und gehören damit zur [illegible]	**[illegible]rsprung O(0/0/0)** Erläuterung: Alle Punkte außerhalb von E werden auf einen individuellen Punkt außerhalb von E abgebildet. Die [illegible]kte auf E sind Fix[illegible] [illegible]it wird nur der [illegible]uf den [illegible]	**existiert nicht** Erläuterung: Jeder Punkt, außer den Fixpunkten auf der Spiegelebene, hat einen individuellen Bildpunkt. Damit kann man keine Ebene oder Gerade als Bildmenge bestimmen. Bei der Rechnung lässt sich die linke Seite des LGS nicht auf Null bringen.
Ergebnisse bei der zentrischen Streckung	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Nu[illegible]	**Ursprung O(0/[illegible]** Erläuterung: Nur der Ursprung wird a[illegible] den Ursprung abgebildet.	**[illegible]stiert nicht** [illegible]erung: [illegible]unkt hat einen [illegible]en Bildpunkt.
Er[illegible]	[illegible] Alle Punkte auf der Drehachse sind Fixpunkte.	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	[illegible]ht E[illegible] Je[illegible]t einen indi[illegible]ldpunkt.

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen