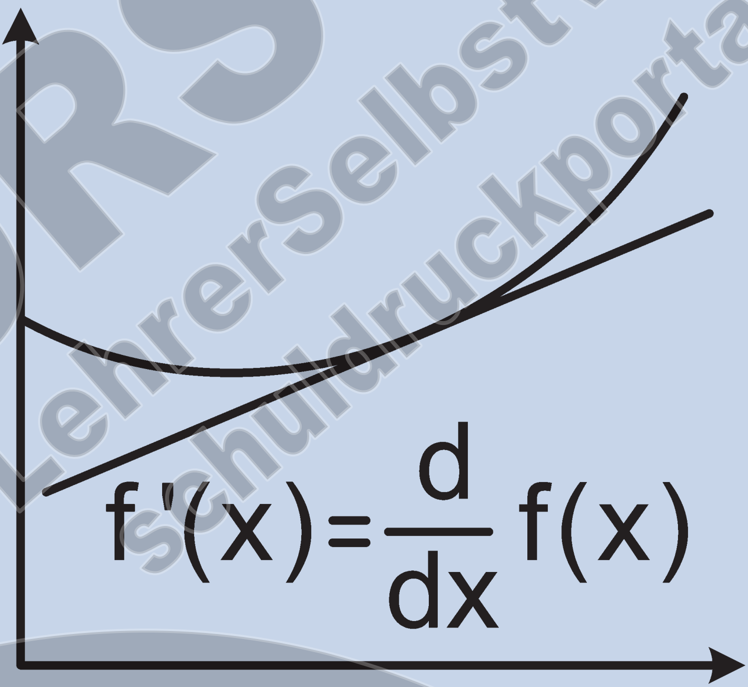
Differenzialrechnung
selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-036-288

Umschlag Vorderseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Gesamtw... ...hnung selbstorganisiert erle...
(Best...
St...

...rSelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F...

Differenzia... ...chnung

selbst...ganisi...rt erlern...

...e Mathematik

...estellnummer 02-036-288

LEHRER
SE...T...

Stand: 21.04.2015

L... ...g
...eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2015
...erselbstverlag.de

...www.f-druck.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Neben dem umfangreichen Angebot an Literatur zum Thema Einführung in die Differenzialrechnung kommt diesem Arbeitsbuch wohl ein besonderer Stellenwert zu, da die im Detail doch komplexen Zusammenhänge der Thematik auf der Basis selbst organisierter Lernformen sehr kleinschrittig nachvollziehbar erarbeitet werden können. Die Unterlagen sind dabei so konzipiert, dass die Lernenden bei ganz kleinen Lernfortschritten während der Bearbeitung der Aufgabenstellung bereits Erfolgserlebnisse haben [illegible] Bestätigung, etwas verstanden zu haben [illegible] das Selbstvertrauen. In meinem eigenen Unterricht an der Oberstufe von [illegible] Schulen in Hessen beobachte ich [illegible] bei Lernenden mit Zugangsproblemen [illegible] Mathematik, dass durch Erfolg[illegible] Motivation steigt [illegible] ter zu arb[illegible] Be[illegible] entsteht, durch weitere [illegible] Bestätigung zu erhalten. Mathe[illegible] Zusammenhänge begreifen zu können, [illegible] nicht selten eine neue Erfahrung [illegible] Art „Aha-Erlebnis“. Häufig [illegible] Lernende mit einer negativen Einstellung [illegible] ihre Haltung [illegible] begegnen dem ursprünglich ungeliebten Fach mit einer neuen positiveren Grundhaltung.

Um dem Ziel gerecht zu werden, für alle Lernenden den Zugang zur Differenzialrechnung so weit wie möglich zu vereinfachen, wird auch in diesem Band die Auswahl der Auf[illegible] auf unbedingt notw[illegible] Erarbeit[illegible] ge[illegible] [illegible] durch die Erläuterung von [illegible] [illegible] Umformungen. Dieser methodisch [illegible] Ansatz verlangt Textelemente sinnerfassend zu lesen und die Themen bis ins Detail zu durchdenken. Daher werden neben dem Erwerb von neuen mathematischen Kompetenzen auch sprachliche Kompe[illegible] mathematischen Ar[illegible] meinen Lesekompe[illegible] meinem Unterric[illegible] Büche[illegible] etw[illegible] Bezug hergestellt wird, das ve[illegible] den ist und wo man nachschlagen k[illegible] diesen Bezug scheinen sich weitere [illegible] enen, auf denen ein mögliches Zu[illegible] em zur Mathematik überwunden wer-

Komm[illegible] ein[illegible]

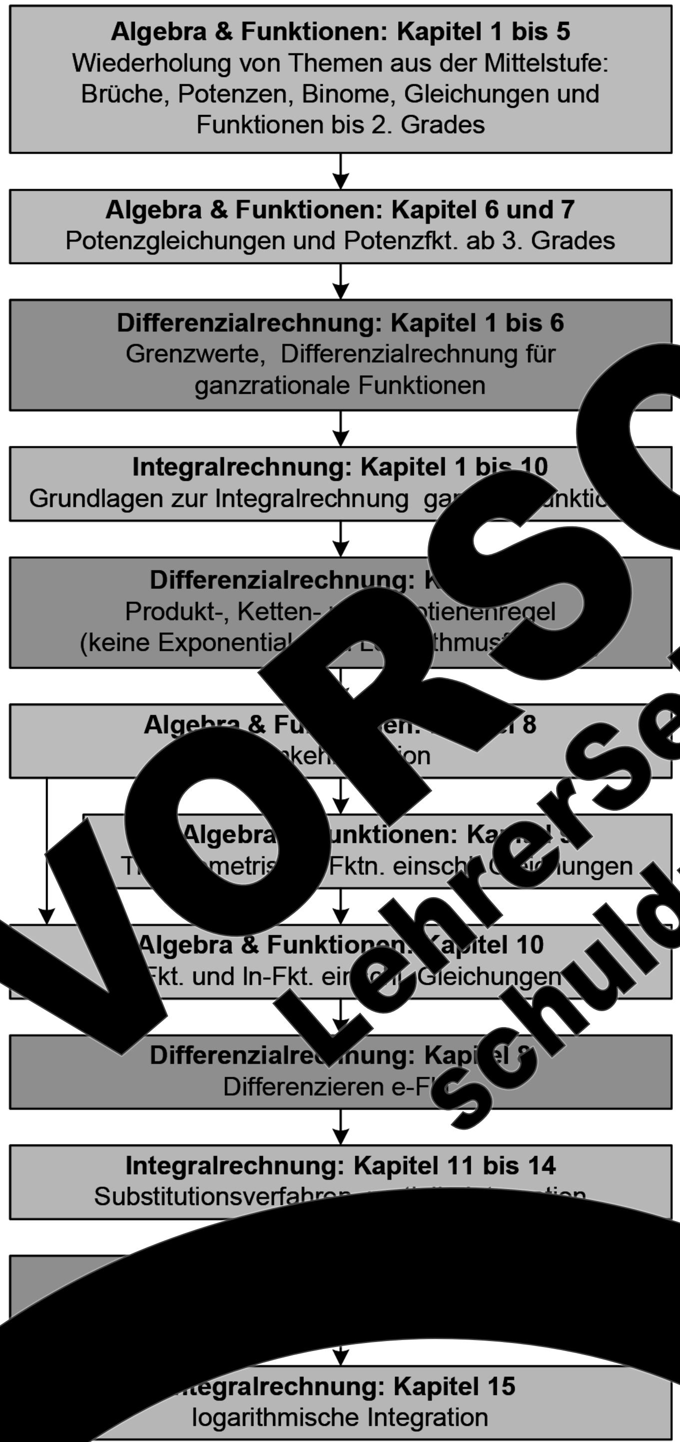
„Man arb[illegible] das [illegible] durch und merkt dabei, [illegible] Zusammenhänge erkennt un[illegible] richtigen Überblick hat. Das ist [illegible] Schleichweg in [illegible] Mathematik.“

Z[illegible] ruppe

[illegible] diese Materialien nicht [illegible] an gymnasialen Oberstufen eingesetzt werden können, sondern an [illegible] anderen Schulformen, die zu einem Hochschulabschluss führen, wie Fachoberschulen und Fachschulen für Technik, wird zunehmend erkennbar. Zudem zeigen erste Erfahrungen an der Hochschule Darmstadt, dass sich die Arbeitsbücher dieser Reihe hervorragend auch in der Studieneingangsphase bei der Kompensation von schulischen Mathematikdefiziten im Rahmen von Vor-, Stütz- und Brückenkursen integrieren lassen. Da die Buchreihe im Band „Grundlegendes zu Algebra und Funktionen“ mit der Kompensation von Mittelstufenunterricht beginnt, ist sie vor allem für Studierwillige geeignet, deren Schulzeit lange zurückliegt bzw. bei denen Kenntnisse zur Oberstufenmathematik fehlen. Das trifft beispielsweise auf Meister zu, die eine berufsqualifizierende Hochschulzugangsberechtigung haben.

Methodische und dikaktische Hinweise zur [illegible] bung der Arbeitsbücher

[illegible] Bände der Buchreihe sind inhaltlich [illegible] gestimmt, dass für die Lernenden [illegible] endes und vernetztes Wissen entst[illegible] dazu befähigt, zunehmend komplex[illegible] llungen zu bewältigen. Es ist einer[illegible] die drei Arbeitsbücher „Grundlegend[illegible] ra und Funktionen“, „Differenzialrech[illegible] „Integralrechnung“ jeweils vollständig [illegible] der durchzuarbeiten, andererseits la[illegible] ruktur dieser drei Arbeitsbücher zu, da[illegible] nen Kapitel auch in anderen Reihenfolg[illegible] rt werden können. Eine mögliche Ab[illegible] r allem für den Einsatz in der Schule im [illegible] Leistungskurs oder für Studienanfänge[illegible] nntnisse hinsi[illegible] der Oberstufen[illegible] geeignet ist, [illegible] folgt aussehen:



Weitere Vorschläge für [illegible] der Kapitel finden sich i[illegible] Adresse **schuldruckp**[illegible] [illegible]uch die Möglichke[illegible] [illegible]hlten Kapiteln [illegible] Arbeitsbuch indivi[illegible] optional dort eig[illegible] einzubinden.

[illegible]sis für das Verständnis infinitesimaler [illegible]gen zu erhalten, werden in Kapit[illegible] [illegible]enden Bandes „Differenzialrechnun[illegible] grundlegende Zusamme[illegible]hänge [illegible]sichtlich der Bedeutung und des Umg[illegible] mit G[illegible]werten bei Folgen erarbeitet. Die ge[illegible]enen [illegible]kenntnisse werden anschli[illegible] auf d[illegible]halten von Funktionen übe[illegible]amit [illegible] an das bereits im Band „Grund[illegible] Algebra und Funktionen“ e[illegible]bene[illegible]knüpft werden und die Unte[illegible]ung [illegible] ganzrationalen Funktionen h[illegible]sichtli[illegible]es [illegible]altens erweitert werden. [illegible] Verfügung [illegible]henden Kenntnissen [illegible] man [illegible] prinzipi[illegible] Verlauf von ganzratio[illegible] Funktionen [illegible]zieren. In der Regel komme[illegible] Fragen de[illegible] Lernenden auf, wie man b[illegible]en Graphen vo[illegible] Funktionen [illegible] exakte Lage d[illegible] Hoch- u[illegible] T[illegible]punkte ermi[illegible]ann. Es wird [illegible]ieser [illegible] erkannt, dass n[illegible] mathemtische Method[illegible] notwendig wer[illegible] Diese Erkenntnis kann für [illegible] Überleitu[illegible] die Differenzialrechnung genutzt werden.

Kapitel 2
In diese[illegible] Kapitel werden zunächst an einem einsichtigen Wachstumsproblem von Pflanzen grundlege[illegible] Zusammenhänge hinsichtlich der Bedeutung der Steigung einer Kurve sowie der Steigung der Tangente im Berührpunkt mit der Kurve erarbeitet. Es wird bereits an dieser Stelle gefestigt, dass die Steigung der Kurve und ihrer Tangente im Berührpunkt identisch ist und ein Maß für das Wachstum darstellt. Über die Steigungen von Tangenten bei der Normalparabel erfolgt anschließend der übliche Übergang zum Differenzialquotienten, die Einführung des Ableitungsbegriffs und die Formulierung von Ableitungsregeln.

Kapitel 3
[illegible]rachtungen in diesem Kapitel beziehen sich [illegible] auf rein formale Aufgaben bezüglich [illegible]hänge zwischen der Steigung von [illegible]angenten sowie der Ermittlung de[illegible]angente und Wendetangente bzw. N[illegible]denormale.

Kapitel 4
Hier wird das W[illegible]blem aus Kapitel 2 wieder aufgegriffe[illegible] die Zusammenhänge zwischen de[illegible]ner Funktion und Wachstumsprozessen [illegible] qualitativ und anschaulich untersuch[illegible] erfolgt nun die quantitative Betrachtu[illegible] Einsatz der neu erlernten Mittel der D[illegible]echnung. Dies führt [illegible]uf die rechnerisch[illegible]g von Hoch-, Ti[illegible]nde- und Sattelp[illegible]hand der not- [illegible] und hinreiche[illegible]gungen. Der [illegible] das Beispiel au[illegible] bewirkt, dass [illegible]dungsbezogene[illegible]er Differenzialrechnung neben dem rein rechnerischen Kalkül bei der Untersuchung von Kurven ein zentraler Gegenstand bleibt und dann auch auf andere Anwendungsprozesse problemlos übertragen werden kann.

Kapitel 5 und 6
Im Anschluss an die Untersuchung von Kurven in Kapitel 5 erfolgt die Behandlung von Aufgabenstellungen zur Rekonstruktion von Funktionen. Hier wird ebenfalls ein Schwerpunkt auf an[illegible]dungsbezogene Aufgabenstellungen bzw. M[illegible]lierungsprozesse, gelegt. Für die Ermittlu[illegible] Koeffizienten werden hier Möglichk[illegible] das Lösen von linearen Gleichu[illegible]systemen [illegible] umgehen. Dies ist insbesonde[illegible]voll, wenn den Lernenden Lösungsve[illegible]eare Gleichungssysteme mi[illegible]nd mehr Va[illegible]len nicht bekannt sind.

Da man bei Extrem[illegible] die Modellierung von Funktionen v[illegible] bietet [illegible] an, diesen [illegible]typ [illegible] nach dem [illegible] Rekonstru[illegible]on zu [illegible]

Kapi[illegible]7
Die E[illegible]terung [illegible] Differenz[illegible]hnung auf Pr[illegible], [illegible]otienten- und K[illegible]regel bezieht sich in [illegible] Kapitel ausschl[illegible]ch auf Poten[illegible]funktionen und einfache trig[illegible]ometr[illegible] Funktionen und kann daher direkt i[illegible]schluss [illegible]apitel 4, 5 bzw. 6, aber auch erst na[illegible]führ[illegible] der Integralrechnung be[illegible] wer[illegible]

Kapitel [illegible]nd 9
Vorauss[illegible] für [illegible] Bearbeitung dieses Kapit[illegible] ist d[illegible] der Zusammenhänge zwis[illegible]tion und ihr[illegible] Umkehrfunktion, so[illegible]gebra[illegible] Grundk[illegible]sse hinsichtlich des U[illegible]ngs mit de[illegible]al- und Logarithmusfu[illegible]en, wor[illegible] Arbeitsbuch „Grundlag[illegible] zu Algebra [illegible] Funktione[illegible] zielgerichtet ei[illegible]gangen [illegible]. Die Ableitu[illegible]geln bei der [illegible]funktion [illegible] ln-Funktion werden rein anschaulic[illegible] empirischen [illegible] gewonnen und anschlie[illegible] jeweils ex[illegible]arisch an einigen charakte[illegible]chen Beisp[illegible] veranschaulicht.

Dank
Für An[illegible]gen zur inhaltlichen und formalen Gestalt[illegible] danke ich meinem Mann, Dipl.Ing. Gerold Pi[illegible]ofessor Dr. Torsten-Karl Strempel von der H[illegible]schule Darmstadt, Frau Dr. Astrid Baumann von der Frankfurt University of Applied Science sowie langjährigen Freunden, wie Oberstudienrätin Renate Benz-Heinbücher und Dipl. Ing. Rudolf Maier.

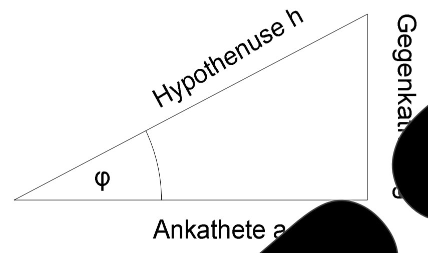
Kapitel 1: Zahlenfolgen und Grenzwertbetrachtungen

Aufgabe 1.1

Einführung des Begriffs Zahlenfolge und Grenzwert

a) Wiederholung der Winkelfunktionen und Anwendung [...] Fläche[...]gen

Ermitteln Sie mit Hilfe einer Formelsammlung oder a[...]erer [...]che[...]elche Beziehungen in einem **rechtwinkligen Dreieck** zwischen dem Wink[...]er[...]iecksseiten [...]tehen.



Al[...] Defi[...] von Sinus, Co[...] und Tangens:

$\sin \varphi = \frac{\text{Geg[...]athete}}{\text{Hyp[...]enuse}} = \frac{g}{h}$

$\cos \varphi =$ ________ = ____

$\tan \varphi =$ ________ = ____

Di[...] Ve[...]tnisse [...] sinφ und [...] ka[...]an je[...]s nach a u[...] g [...]öse[...] sie jeweils a[...] wa[...]ch für g bzw. a dabe[...]rg[...]t.

aus $\sin \varphi = \frac{g}{h}$ folgt g = ____________

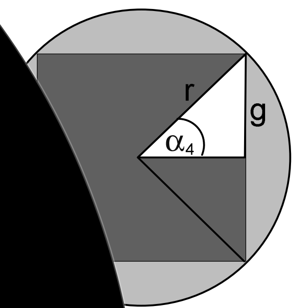
aus $\cos \varphi =$ ____ folgt a = ____________

Für die Fläche des oben links [...]ebildeten Dreiecks gilt: $A = \frac{a \cdot g}{2}$. Erläutern Sie unter Einbeziehung der Überlegungen aus Aufgabenteil 1 b), warum man diese Fläche auch folgendermaßen berechnen kann: $A = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \sin(\varphi) [...] \frac{h^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{[...]}$

____

____

[...]läche eines einbeschriebenen Quadrats



In der Abbildung ist ein Kreis mit dem Radius r und einem einbeschriebenen **Quadrat** [...]egeben. Da es sich bei einem Quadrat um ein[...] [...]it n = 4 Ecken handelt, soll die Fläche [...] [...]us dem gleichen Grund wird de[...] [...]chnet.

(1) [...] Winkel α_4 gilt: $\alpha_4 = 45°$. [...]gen Sie dabei, dass der Vollwinkel bei einem Kreis [...]agt.

____

____

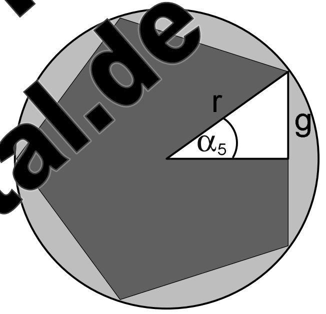
(2) Begründen Sie, dass man die Fläche des Vierecks, in Abhängigkeit eines beliebig… Radius r, mit folgender Formel berechnen kann:

$$A_4 = 8\cdot\frac{r^2\cdot\sin 45°\cdot\cos 45°}{2} = 2r^2$$

____

____

c) Fläche eines einbeschriebenen regelm… igen Fünfecks



In der Abbildung ist nun ein Kreis mit dem … dius r und einem einbeschriebenen **regelmäßigen … eck** g… ein Polygon mit 5 Ecken vorliegt, … mit A_5 und der markierte Winkel mit α_5 bezeic…

(1) Begründen Sie, … den W… gilt: α_5 = …

____

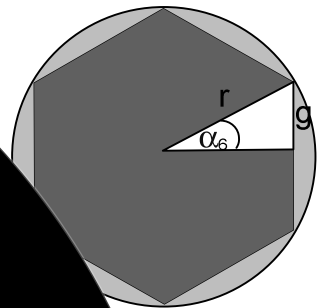
(2) Beg… den S… dass … die Fläche de… ünfecks m… folg… Form… berechnen kan… berechnen … die Fläc… entsprechend zur Fläche A_4 in Abhängigkeit von r.

A… $10\cdot\frac{r^2\cdot\sin 36°\cdot\cos 3…}{2}$ = ____________

____

____

d) Fläc… …cks



… **regelmäßigen Sechsec…** … n = 6 Ecken wird die Fläche nun mit A_6 … …el mit α_6 bezeichnet.

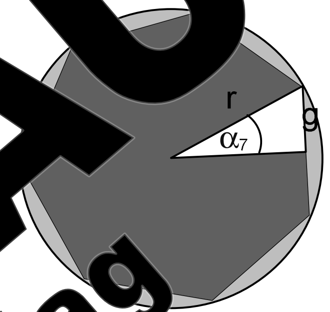
(1) Berechnen Sie den Winkel α_6: α_6 = ____________________

(2) Geben Sie di… …n die Fläche analog zum Vier- un… …nd ermitteln Sie die Fläch… …zwei Dezimalstellen g…

… ____· ________________

______________________ = …

e) Fläche eines einbeschriebenen regelmäßigen Siebenecks



In der Abbildung ist ein Kreis mit dem Radius r und einem einbeschriebenen **regelmäßigen Siebeneck** gegeben. Die Fläche in diesem Polygon mit n = 7 Ecken wird hier mit A_7 und der markierte Winkel mit α_7 bezeichnet.

(1) Berechnen Sie den Winkel α_7: α_7 = ________________

(2) Geben Sie die Formel an, mit der man die Fläche … zum Vier-, Fünf- und Sechseck berechne… und ermitteln Sie die Fläche A_7 in Abhängigk… von r auf zw… Dezimalstellen genau.

A_7 = _____· ________________

= ______________________________________

f) Fläche eines einb… …egelmäßig… …-Ecks

Berechn… ein …schriebenes … mit n = 100 … entsprechend zur Aufgabe 2 bis 5 den W… α_{100} … die … A_{100} in Abhängigkeit von r auf zwei Dezimalstellen genau.

… = ________ … A_{100} = ________________ = ____________

Be…nden Si…, warum ma… …es Vieleck, … in den Aufgaben oben, nicht mehr graphisch dars…en kann.

____

____

g) Fläche eine… …-ecken mit großen Werten für n

(1)… …60 Ecken entsprechend zur Aufgabe 2 bis … …lt A_{360} in Abhängigkeit von r auf zwei … genau.

…360 = ________ A_{360} = ______________________________

(2) Die Anzahl der Ecken des in den Kreis einbeschriebenen V… …er erhöht werden.

Wählen Sie dazu sel… …großen Wert für n aus und berec… …d A_n

α____________________ = ______________________________

(3)… …echneten Werte α_n und A_n, und formulie… Vermutung, …rten sich diese beiden Werte immer mehr annähern, wenn … …ahl der Ecken … größer werden lässt.

…ert für α nähert sich dem Winkel ________ …er Wert für A näh…

____

(8) Tragen Sie Ihre oben berechneten Ergebnisse für n = 4 bis n = 360 und … rgebnis… den selbst gewählten großen Wert von n in der Tabelle unten in den Zeilen 1 bis 7 ei…

h) Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse und Verallgemei… ung

Im Aufgabenteil g) haben Sie festgestellt, dass bei einer se… ßen … nzahl n der Winkel α fast den Wert 0 erreicht und sich die Fläche der Vielecke … uf 6 D… stelle… gerundet dem Wert 3,14159 r^2, also dem Wert πr^2 und damit der Fläche … is… it dem Radi… annähert. In Zeile 8 der Tabelle unten sehen Sie die Schre… eise, … er man … ese Annähe… g für sehr große Werte von n in der Mathematik darstellt.

- Das immer "Größerwerden" von n wir… ch die … eibweise n … (sprich: *n ge… unendlich*) ausgedrückt.
- Mit dem Ausdruck „$\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ … *…mes n gegen u… dlich von alph… st gleich*") gibt man den Wert an, dem … immer größ… n Werten fü… er Winkel … nähert.
- Mit dem Ausdr… lim … (sprich: "*Limes n… gen unendli… n A_n ist gleich*") gibt man den Wert a… sich … Fläche A der Vi… ecke … nähert.

Da de… nkel ni… iner … s 0° werde… kann und die Fl… der Vielecke nie größer werden kann als … Flä… πr^2 de… nkreises, bez… man sol… Werte auch als **Grenzwerte**. Tragen Sie die b… n G… we… r α und A … Zeile 8 der Tab… e ein.

	Anza… der … ken n	Größe des Winkels α_n	Größe der Fläche A_n
1	n = 4	α_4 =	A_4 =
2	n = 5	α_5 =	A_5 =
3	n = 6	α_6 =	A_6 =
4			A_7 =
	. .	. .	. . .
5	n = 100	α_{100} =	A_{100} =
6	n = …	α_{360} =	… =
7		α____ =	… =
		. . .	
	$n \to \infty$	$\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ =	

Informationen zu den Begriffen Zahlenfolge und Grenzwert

Die Werte für die Winkel α_n bilden eine **monoton fallende** bzw. abnehmende Zahlenfolge, da für je zwei Folgeglieder gilt:

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

Die Werte für … lächen … **monoton ste…** …w. zu… ende Zahlenfolge, da … je … olgeglieder gilt:

$$… \leq A_{n+1}$$

Wenn n sehr groß wird und damit gegen ∞ strebt, … Folgen ei… Wert, der bei α_n nicht unterschritten und … nich… rschritten werde… .

In unserem Beispiel ergibt si… ür die in … Kr… s einbesch… nen Vielecke:

α_n wird nie kleiner … ____ … A_n wi… nie größer a… ____

Man nennt diese … die … ht unterschrit… zw. übers… n werden,
… erte ei… ahlenfolge.
M… die Folge **konve…** gegen ein… **renzwert.**

Aufgabe…

Geg… n … e Za… folge $a_n = \frac{…}{(-5)^n}$. Durch … etzen von natürlichen Zahlen für n kann man die Folgeg… ler berechnen. Bere… Sie, wie i… piel, die angegebenen Folgeglieder. Geben Sie, … tiert, den Grenz… an:

Beispiel: $a_1 = \frac{1}{(…)^1} = … = -0{,}2$ (für n wird 1 eingesetzt)

$a_2 = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$ (für n wird 2 eingesetzt)

… (für n wird 3 eingesetzt)

a_5 = ____________________

a_6 = ____________________

____

a_{100} = ____________________

Grenzwert: $g = \lim_{n\to\infty} a_n$ = ______

Zusatzinformation:
Bei wechselnden Vor…eichen ist eine Folge … der monoton steigend … fallend. In diesem … richt man von …**renden** Folgen.

Aufgabe 1.3

Im Rahmen dieser Aufgabe sollen anhand von Beispielen für Zahlenfolgen weite... undle... de Begriffe und Zusammenhänge hinsichtlich des Grenzwertbegriffs erar... werden.

Sie finden dazu auf den folgenden Seiten Tabellen mit vorgegebenen Z... Füllen Sie diese Tabellen aus, indem Sie wie bei Aufgabe 1.2 zunächst jewei... Folg... c_n etc. für die angegebenen Werte von n mit Hilfe des Taschenrechners auf ... Dezi... ellen gerundet berechnen.

Bearbeiten Sie anschließend unter Verwendung der fo... nen die wei... en Aufgabenstellungen und vervollständigen Sie am Ende d... rksatz.

Information konvergente und divergente ... en

1. Monoton steigende oder falle... Folgen, di... renzwe... aben, nen... ma... **onvergente Folgen**. Man schreibt:

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

2. Monoton steigende ... olgen, die ... Grenzwe... ben, also gegen unendlich streben, ... an ... **gente Folgen** ... reibt:

   $\lim a ... \infty$

   Wenn eine Folge ... ∞ strebt, ... wendet ma... statt eines ... eichheitsze... s = einen Pfeil $\rightarrow$.

   ... *limes n g... en ... endlich ... geht gegen unendlich bzw. geht gegen minus unendlich.*)

3. Folgen, die den Grenzwert Nu... en, sind immer konvergent und werden als **Nullfolgen** bezeichnet.

4. Da eine Folge nur einen Grenzwert haben kann, sind alternierende Folgen nur konvergent, wenn es sich um Nullfolge... den Grenzwert g = 0 haben.

Tabelle 1

Index n	$a_n = n^2$	$b_n = \sqrt{n}$	... = (-...	$d_n = \frac{1-n^2}{n}$
a) Berechnen Sie die Folgeglieder der Zahlenfolgen a_n, b_n, c_n und d... Dez... gerundet.				
1	$a_1 =$	$b_1 =$		d...
2	$a_2 =$	$b_2 =$	c...	$d_2 =$
3	$a_3 =$		$c_3 =$	d_3
4	$a_4 =$		c_4	
5	$a_5 =$		... =	$d_5 =$
6	$a_6 =$	$b_6 =$	$c_6 =$	$d_6 =$
		⋮		⋮
10...	$a_{1...}$	... =	$c_{100} =$	$d_{100} =$
b) E... heiden Sie, ob die Za... folgen mo... steigend, monoton fallend oder alternierend sind.				
...ie				
c) Prüfen Sie ggf. mit dem Tas... rechner, ob die Folge konvergent oder divergent ist, und geben Sie ggf. den Grenzwert an. Beachten Sie bei der Schreibweise, ob Sie ein Gleichheitszeichen oder einen Pfeil verwenden müssen.				
Grenzver... halt...			$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} d_n$
... e Folge ein, ob sie ko... t				
...vergenz Divergenz				

Tabelle 2

a) Berechnen Sie die Folgeglieder der Zahlenfolgen e_n, f_n und g_n

Index n	$e_n = \frac{1}{n}$	$f_n = \frac{1}{(-2)^n}$	$g_n = \frac{\ldots}{n^2+1}$
1	$e_1 =$	$f_1 =$	
2	$e_2 =$	$f_2 =$	$g_2 =$
3	$e_3 =$		
4	$e_4 =$		$g_4 =$
5	$e_5 =$	f_5	$g_5 =$
6	$e_6 =$		
⋮		⋮	⋮
10			$g_{100} =$

b) Ents… den Sie, … die Zahlenfolgen monoton steig…, monoton fallend oder alternierend sind.

Monoto…			

c) Prü… Sie ggf. mit dem …schenrechn… ob die Folge konvergent oder divergent ist, und geben … den Grenzwert an. Beacht… …ie bei der Schreibweise, ob Sie ein Gleichheitszeichen oder einen Pfeil verwenden müssen.

Grenzverhalten	$\lim\limits_{n\to\infty} e_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} f_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} g_n$

d) Tragen Si… …t oder divergent ist.

…änzen Sie anhand der Untersuchung der Folgen a… …den Merksätze.

Merke: Ist bei einer Folge die Potenz von n im Nenn… … Zähler, so ist die Folge … und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ _____ … …t eine **Nullfolge**

…e Potenz von n im Zähler größer a… … so ist die Folge __________. Ist die Folge monoton steigend bz… …ilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to$ _____ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to$ _____

Tabelle 3

a) Berechnen Sie die Folgeglieder der Zahlenfolgen h_n, o_n und p_n

Index n	$h_n = \frac{n}{n+1}$	$o_n = \frac{8n}{4\ldots1}$	$p_n = \frac{2n^2}{5+n^2}(-1)^n$
1	$h_1 =$	$o_1 =$	$p_1 =$
2	$h_2 =$	$o_2 =$	$p_2 =$
3	$h_3 =$	$o_3 =$	$p_3 =$
4	$h_4 =$		$p_4 =$
5	$h_5 =$	$o_5 =$	
6		$o_6 =$	$p_6 =$
⋮	⋮		⋮
		$o_{100} =$	$p_{100} =$

b) Entsc… …en Sie, … die Zahlenfo… monoton st…end, monoton fallend oder alternierend sind.

Monotonie			

c) … Sie ggf. m… dem Taschenre… …, ob die Folge konvergent oder divergent ist, und geben Sie ggf. den Grenz… an. Bea… …Sie bei der Schreibweise, ob Sie ein Gleichheitszeichen oder einen Pfeil verwenden müsse…

Grenzverhalten	$\lim\limits_{n\to\infty} h_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} o_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$

d) Tra… …divergent ist. Ergänzen Sie anschließend

…z …genz			

Merke: Sind die Potenzen von n im Nenner und Zähle… …eine Folge, wenn sie … __________ u… … $a_n =$

Übung 1.1

Geben Sie, ohne den Taschenrechner zu verwenden, in Spalte 2 der Tabelle an

a) ob es sich um eine divergente Folge handelt, die gegen $+\infty$ oder $-$ ... bt.
b) ob es sich um eine konvergente Folge mit einem Grenzwert g hand ... hnen ... en Grenzwert ggf. mit den Taschenrechner.
c) ob es sich um eine Nullfolge mit dem Grenzwert g = 0 han

Folge	Divergenz/Konvergenz	...zwe...en
a) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$	❍ divergent ❍ konvergent ❍ Nullfolge	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
b) $a_n = \frac{2n^2}{n+1}$	❍ div... ❍ ko... ❍ Nul...	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
c) $a_n = \frac{-2n^3}{n+\ldots}$	❍ ...gent ❍ ...gent ❍ Nullfolge	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
d) ... $n+\ldots$	❍ diverge... ❍ konv...rgent ❍ ...lge	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
e) $a_n = \frac{2n+1}{n}$	❍ divergent ❍ konve...ent ❍ Nu...lge	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
f) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$	❍ ...	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
g) ... 3	❍ divergent ❍ konvergent ❍ Nullfolge	
h) $a_n = \frac{2}{3^n}$	❍ divergent ❍ ...ent	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
i)	❍ ...nt ❍ ko...rgent ❍ Nullfolge	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Ergänzende Betrachtungen zur Berechnung von Grenzwerten bei Zahlenf...gen

In den bisherigen Betrachtungen wurde das Grenzverhalten von Folgen für n→... ...rch Au... ...obieren mit dem Taschenrechner ermittelt. In der folgenden ergänzenden Aufg... ...stellung ...gt werden, welche Möglichkeiten es gibt, das Grenzverhalten auch mit rechneris... ...den ... ...tersuchen. Dies wird insbesondere relevant, wenn man Grenzwertbetrachtungen ... ...spie... ...auf gebrochen rationale Funktionen überträgt, und diese Funktionen anhand ... Ergeb... ...net bzw. skizziert werden sollen.

Aufgabe 1.4

Berechnung des Grenzwerts von Folgen, d... ...ähler ... Nenner de... glei... ...en Exponenten n besitzen.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+4}$

Berechnen des Grenzwert... durc... ...skla... ...ern der grö... ...otenz v... n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+\ldots} = \lim \ldots = \ldots \frac{2-\ldots}{1+\frac{4}{n}} = \frac{2-0}{1\ldots}$$

$\frac{1}{n}$ un... ...sind Nullfolgen, d.h. nach der Gre...zwertbildung ergibt sich für diese ...manden der Wert 0.

Berechnen des Grenzwerts mit ...e einer Polynomdivision.

$(2n-1):(n+4) = 2 \ldots \frac{9}{\ldots}$
$2n+8$

Da bei dieser Polynomdivision ...st bleibt, addiert bzw. ...n den Bruchterm

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{9}{n+4}\right) = 2-0 = 2$$

...e Nullfolge und nimmt ...n der Grenzwertbildung ...ert Null an.

...nnen Sie den Grenzwert der Folgen h_n u... ...Tabelle 3. ...n für Rechnung Folgeseite)

Aufgabe 1.5

Berechnung des Grenzwerts bei Folgen, deren die Potenz von n im Zähler … er als Nenner ist.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{n-1}$

Sie wissen bereits, dass diese Fo… divergent ist und für n … keinen Grenzwert hat, sondern g… ∞ g…

Die Kenntnis, dass … olge … en ∞ geht, rei… ch … s nicht aus. Man m… te vielmehr … n, **wie** die Folge … große W… e von n wächst. Man zerleg… iesem … den Bruch… ch P… on in eine S… me.

Untersuchen des Grenzver… tens … Zer… ung des Bru… terms in eine … e mit Hilfe einer Polynomdivision.

Für die Polynomdi… mu… der Su… it de… ßten Poten… m An… sten…

Gebrochen rationaler An… il der S… me

$(-2n^2 …):(n-…) … 2n-2- \frac{1}{(n … 1)}$

$-2n+2$

-1

gan… rationa-ler An… il der Summe

Der Summand $-\frac{3}{(n-1)}$ ist eine Nullfolge und fällt daher weg, wenn n sehr groß wird. Ersetzt man bei der Berechnung des Grenzwertes im nächsten Zwischenschritt … heitszeichen durch einen Pfeil, kann man einen … lassen, wenn er im Grenzfall den Wert 0 … mme keine Rolle mehr spielt.

$… = \lim\limits_{n\to\infty}(-2n-2-\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\text{Nullfolge}}) \to \lim\limits_{n\to\infty}(-2n-2-0) \to \lim\limits_{n\to\infty} …$

Die Zahlenfolge $\frac{1-2n^2}{n …}$ … für große Werte von x wie die Za… – 2 und geht gegen $-\infty$ …

Ergänzende Info:
In Aufgabe 1.6 werden Sie lerne… bei der Betrachtung von Grenzwerten im … funktionalen Zusammenhängen, d… e –2n + 2 als **Asymptote** bezeichnet…

… e das Grenzverhalten der folgenden Z… $= \frac{2-n^2}{n-1}$ und b…

... Übungen: ______________________________

Aufgabe 1.6

Grenzverhalten ganzrationaler Funktionen

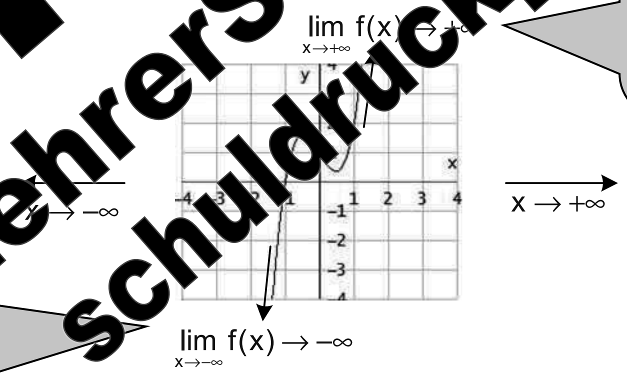
Zur Information

Bisher wurden bei Folgen a_n nur Grenzwerte für ganzzahlige ... te von ... betrachtet. Bezieht man in die Untersuchung von Grenzwerten auch Funktionen f(... w. ze... ängige Funktionen f(t) ein, so können die Werte von x auch rationale Zahlen sein ... auf ... chs... ch links gegen $-\infty$ sowie nach rechts gegen $+\infty$ streben.

Oft ist es in der Praxis wichtig, wie sich Funkti... erhalte... nn x gegen ... t gegen $+\infty$ strebt. In der Medizin werden dazu beispielsweise ... ktionen aufge..., die das Wa... tum von Bakterien beschreiben und man untersucht, wie sich d... s Wach... m entwickelt, w... n t sehr groß ... d, also gegen $+\infty$ strebt. Mathematisch aus... ückt ... utet ..., dass m... das Verhalten ... unktion für sehr große oder sehr kleine Wert... x unters...

Verdeutlichen Sie sich am folgen... spie... e Schreibwei...

Die Funktionswerte streben gegen $+\infty$, wenn x immer größer wird.
Umgangssprachlich: "Die Funktion geht nach rechts oben".



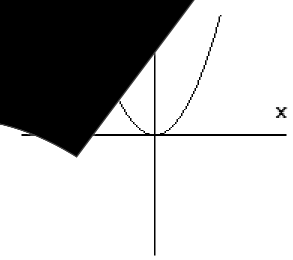
Die Funktionswerte streben gegen $-\infty$, wenn x immer kleiner wird.
Umgangssprachlich: "Die Funkti... von l...

...abe 1.6.1

...ntersuchung des Verhaltens von einfachen ganzrationalen ... r $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

a) Skizzieren Sie die angegebenen Funktionen. Notieren Sie entspr... eispiel, wie sich die Funktionen für x ... halten und ergänzen Sie die ... e.

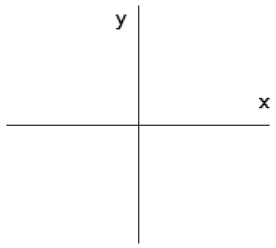
(1) f...



$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) \to +\infty$

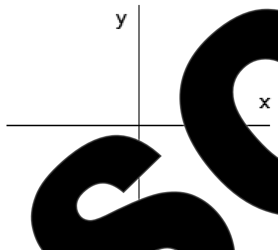
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) \to +\infty$

(2) $f_2(x) = -x^2$



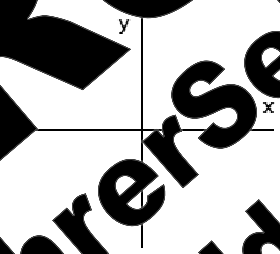
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) \to$ ____
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) \to$ ____

(3) $f_3(x) = x^3$



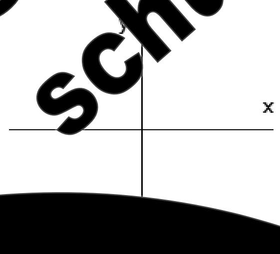
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) \to$ ____
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) \to$ ____

(4) $f_4(x) = -$…

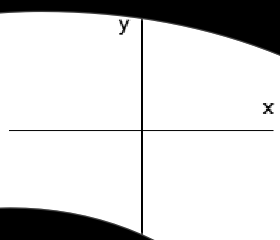


$\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) \to$ ____
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) \to$ ____

(5) $f_5(x)= x^4$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) \to$ ____
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x) \to$ ____



$\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x)$ …
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x)$ …

b) Die F… $x \to \pm\infty$ genauso wie die oben unte… ktion ________.

c) … (x) = $-x^5$ verhält sich für $x \to \pm\infty$ genauso wie die oben unter… tion _______.

… e eine umgangssprachlich formulierte Merkre… ür das Verhalten … nen … nalen Funktionen an, indem Sie die Sätz… olgenden Seite v… gen.

Für **geradzahlige** Exponenten von x verlaufen beide "Seiten" der Funktion b… positiv… Vorzeichen von x nach "______________ " und bei negativem Vorzeichen von x nach "______________".

Für **ungeradzahlige** Exponenten und einem positiven Vo… hen vo… e Funktion von "links _____________" und geht nach "rechts ______________".

Für **ungeradzahlige** Exponenten und ein… negativen Vo… hen von … mmt die Funktion von "links _____________" und geht … "re… ______________".

b) Begründen Sie, w… ma… B. b… unktio… f₂(x), $f_5(x)$ u… $f_6(x)$ anstatt der im Beispiel dargestellten aus… che… ibweise für das G… zverhalten e… abkürzende "±" Schreibweise in der Form

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ … bzw. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ …

verwe… n kann.

____

____

____

Aufgabe 1.6.2

Verhalten von ganzrationalen Funktion mit mehreren Summanden

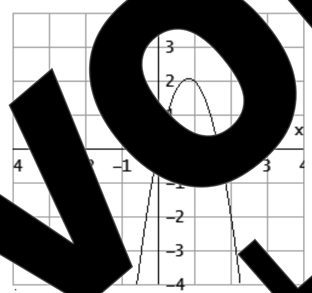
Wir haben bisher nur einfache ganzrationale Funktionen hinsichtlich ih… …rhalten… ∞ und $x \to -\infty$ untersucht. Meistens besteht der Funktionsterm jedoch aus ei… …em, in dem mehrere Potenzen von x auftreten. Anhand von Beispielen soll das Grenzverhal… …der… Funktionen nun untersucht werden.

In den Abbildungen unten sind Funktionen a(x), b(x), c(… und d… …rges… Beim einem Vergleich mit den Funktionen $f_1(x)$ bis $f_8(x)$ aus Aufgabe 1.6.1 kann m… …eiten hinsichtlich des Grenzverhaltens erkennen. Anhand der folgenden Aufga… …ellung … diese G… …samkeiten nun erarbeitet werden.

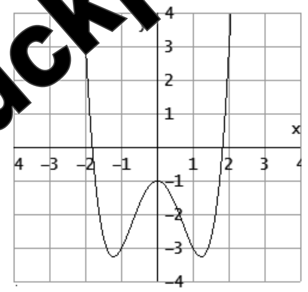
a) Ergänzen Sie bei der Grenzwertberechnu… …eweils f… …ende Angaben, und bestimmen Sie das Grenzverhalten der Funktionen au… …em V… …f der … …ebildeten G… …en.

b) Markieren Sie anschließend in… …er Fu… …sgl… …g den Su… …nden einschließlich seines Vorzeichens, der das Verhalte… für $x \to +\infty$ und … $-\infty$ bestim… rot. Markieren Sie alle Summanden, wel… …inen Einfluss … das Verhal… …der Funktio… …für … $+\infty$ und $x \to -\infty$ haben, in grün.

a(x) = 5x – 3x²



b(x) = x⁴ … – 1



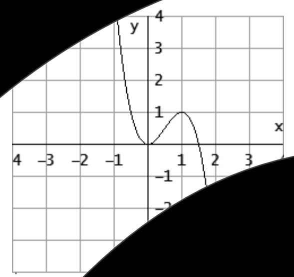
$\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (5x - 3x^2) \to -\infty$

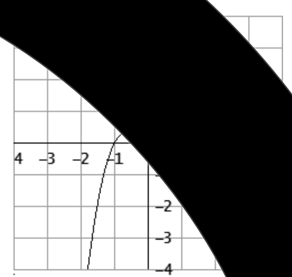
$\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (5x - 3x^2 …$

$\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - 3x^2 - 1) \to$ ____

$\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 - 3x^2 - 1) \to$ ____

… 3x³





… $(3x^2 - 2x^3) \to$ ____

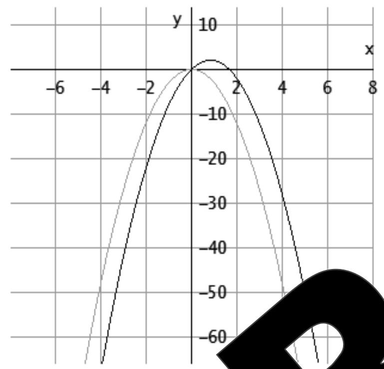
= ________ $(3x^2 - 2x^3) \to$ ____

$\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) =$ ________ → ____

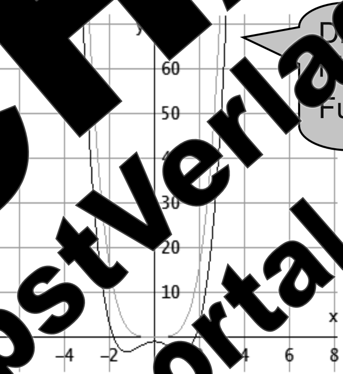
…d(x) = ________ → ____

c) In den folgenden Abbildungen sind die Funktionen aus Aufgabenteil b) in ein… …m grö… …Ausschnitt des Koordinatensystems erneut eingezeichnet worden. Zusätzlich wurde in … Abbil… …in grau die Funktion ergänzt, welche das Verhalten der Funktionen für $x \to \pm\infty$ besti… …also d… von Ihnen rot markierten Summanden entspricht. Diese Funktionen werden hi… …eils m… …ange über dem Funktionsnamen gekennzeichnet (z.B. $\tilde{a}(x)$ sprich: „a Schlang…

a(x) = 5x – 3x² und $\tilde{a}(x) = -3x^3$

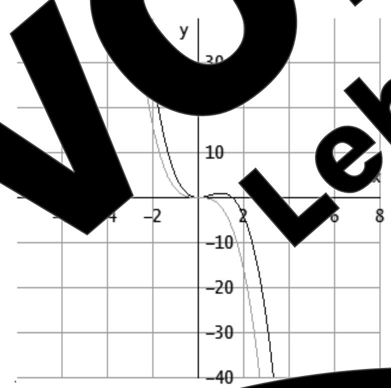


b(x) = x… – 1 … $\tilde{b}(x) = x^4$

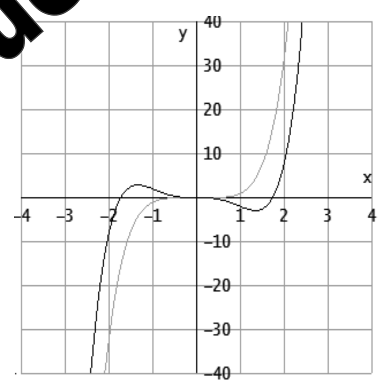


D… …ktion b(x) …hert sich der Funktion $\tilde{b}(x)$.

c(x) = 3… …2x… $\tilde{c}(x)$ … 2x³



d(… …x – 3x³ und $\tilde{d}(x) = x^5$



F… …Werte von x kann man deutlich … der Verlauf der Aus… …d der vorhandenen Hoch- und … von dem Verlauf der mit Schlange geke… …u eingezeichneten Funktionen, …terscheidet. Wenn die Werte von x ___________ wer… …auf der beiden Funktionen immer ähnlicher.

…n:

…Mathematik sagt man, dass sich …elsweise die Funktion b(x) an die …ktion $\tilde{b}(x)$ anschmiegt und man bezeichnet $\tilde{b}(x)$ als **Asymptote** von b(x).

Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Grenzwertberechnung, indem Sie d… Merks… …m Kasten vervollständigen.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\right) \to \lim a_n x^n$$

Merke: Bei ganzrationalen Funktionen wird das Verhalten für $x \to \pm\infty$ … urc…

Summanden mit der ______________________ P… von … stimmt.

Man kann das Verhalten einer ganzrationale… unkti… Gr… s daher aus dem

Verhalten der Funktionen **f(x) = ±xⁿ** mit **n ∈ IR** … teln, … m man nu… de

Summanden mit der ______________________ … trachtet.

Die Funktionen **f(x) = ±xⁿ** werden … ei als **A… pto… n** bezeic… net.

Aufgabe 1.6.3

Bestimmen Sie das Grenzverhalt… … en Funktionen … im Beispiel … (x).

…enn … n Te… … dem … weglässt, … anstatt … eichheitszeich… eine … eil.

…mmanden … für das Grenzve… lten keine R… … pielen, kan… … veglassen.

Der Zahlenwert des Vorfaktors von x^n spielt keine Rolle, sondern nur das Vorzeichen.

r(x) … 3x…

$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \lim \left(1-3x^2-4x^3\right) \to \lim_{x\to+\infty}\left(-4x^3\right) \to \lim_{x\to+\infty}\left(-x^3\right) \to -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim \left(1-3x^2-4x^3\right) \to \lim_{x\to-\infty}\left(-4x^3\right) \to \lim_{x\to-\infty}\left(-x^3\right) \to +\infty$

Di… Funktion r(x) hat das gleiche Grenzverhalten wie f(x)= –x³.

s(x) = 5x²–2x–10 $\lim_{x\to+\infty} s(x) = \lim_{x\to+\infty}$ ______________ $\to \lim_{x\to+\infty}$ __________ $\to \lim_{x\to+\infty}$ ____ $\to$ ____

______________ $\to \lim_{x\to-\infty}$ __________ $\to \lim_{x\to-\infty}$ ____ $\to$ ____

… lten wie f(x)= _____.

…3x³–2x²–1 $\lim_{x\to+\infty} t(x) = \lim_{x\to+\infty}$ ______________ … $\to \lim_{x\to+\infty}$ ____ $\to$ ____

$\lim_{x\to-\infty} t(x) = \lim$ ______________ $\to \lim$ … $\lim_{x\to-\infty}$ ____ $\to$ ____

…as gleiche Grenzverhalten w… .

p(x)… $\lim_{x\to+\infty} p(x)$ … ______________ $\to \lim_{x\to+\infty}$ __________ … $\to$ ____

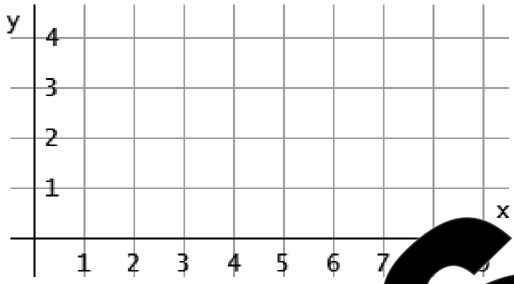
$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty}$ ______________ … $\lim_{x\to-\infty}$ __________ … $\to$ ____

Die Funktion p(x) hat das … halten wie f(x)= …

Aufgabe 1.7

Grenzverhalten der Wurzelfunktion

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x \ge 0$ in folgendes Koordinat… …nd e… …teln Sie das Grenzverhalten für $x \to \infty$.



$\lim_{x\to\infty} f(\ldots) \ldots \lim \sqrt{x} \to$ ____

Übung 1.3

Skizzieren Sie die Fu… … $|x-1|$ und $f(x) = \ldots|x| - 1$ mit x … eweils in einem geeigneten Koordinatens… und … tteln S… aus d… … das Gr… … rhalten für $x \to \pm\infty$.

Aufgabe 1.8

Grenzverhalten und Übersicht über den Verlauf von Exponentialfunktionen

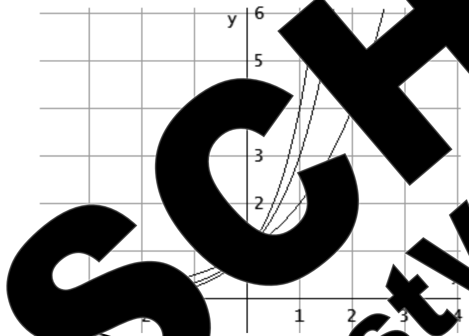
In den folgenden Abbildungen sind Repräsentanten der Funktion f(x) … > 1 dargestellt. Beschriften Sie jeweils die dargestellten Funktionsgraphen mit f, g und … n Sie anhand des Verlaufs der Graphen das Grenzverhalten für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = a^x$

Beispiele $g(x) = 2^x$

$h(x) = 3^x$

$k(x) = 4^x$



x = 0 ⇒ f(0)= ______

$x \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ ________

$x \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ ________

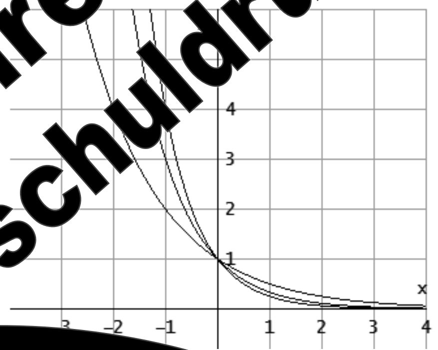
Die Funktion schmiegt sich an die x-Achse an. Daher ist die x-Achse **waagerechte Asymptote**.

b) $f(x) = a^{-x}$ …

$g(x) = 2^{-x} =$ ____

$h(x) = 3^{-x} =$ ____

$k(x) = 4^{-x} =$ …



x = 0 ⇒ f(0)= ______

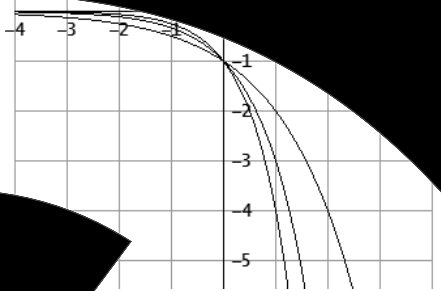
$x \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^{-x}$ ________

$x \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^{-x}$ ________

… Beispiele $u(x) = -2^x$

$v(x) = -3x$

$w(x) = -4x$



x = 0 ⇒ f(0)= ______

$x \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} -a^x$ ________

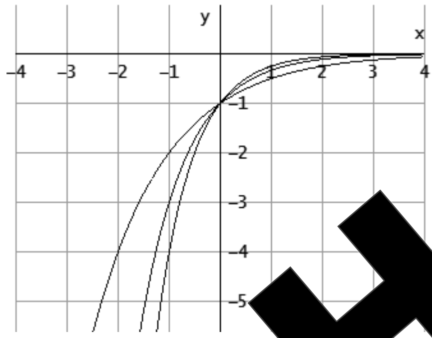
$\lim\limits_{x\to-\infty} -a^x$ ________

d) $f(x) = -a^{-x} = -\frac{1}{a^x}$

Beispiele $u(x) = -2^{-x} = -\frac{1}{2^x}$

$v(x) = -3^{-x} =$ ___

$w(x) = -4^{-x} =$ ___



x = 0 ⇒ f(0)= ______

$\lim\limits_{x\to+\infty} -a^{-x}$ ________

$\lim\limits_{x\to-\infty} -a^{-x}$ ________

Aufgabe 1.8.2

Berechnen der Grenzwerte von Exponentialfunktionen

1. Ermitteln Sie anhand der Kenntnisse des Verlaufs von $f(x) = \pm a^{\pm x}$ das Verhalten der Funktionen für $x \to \pm\infty$. Vereinfachen Sie dazu ggf. exponentielle Ausdrücke in geeigneter Weise.

a) $f(x) = \frac{2^x + 2}{\ldots}$ ________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ________

b) $f(x) = e$… ________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ________

c) $f(x) = e^{-x} + 1$ ________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ________

… ________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ________

e) $f(x) = 1 - 2^x$ ________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ________

… ________________

… $=$ ________ … $=$ ________

g) $f(x) = \frac{3^{2x}}{3^{x+2}}$ ____________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ____________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ____________

h) $f(x) = 2^{x+1} - 2^{x}$ ____________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ____________ lim ____________

i) $f(x) = 2^{-x} - 2^{1-x}$ ____________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ____________ lim f(x ____________

j) $f(x) = e^{-x} + e^{x}$ ____________________

lim f(____________ lim f ____________

k) = 2 ____________________

x) = ____________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ____________

l) $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$ ____________________

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ____________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ____________

____

f(x) = ____________ lim ____________

n) $f(x) = \frac{3^{-x}}{1+}$ ____________________

lim ____________ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ____________

Aufgabe 1.9

Grenzverhalten bei gebrochen rationalen Funktionen

Information 1.9.1: Gebrochen rationale Funktion

Gebrochen rationale Funktionen sind Funktionen, die sowohl Z ler als ch ner ein Polynom besitzen. In den Abbildungen der Tabelle 1 sind einige Beispie den uf von einfachen gebrochen rationalen Funktionen gegeben. Die einfac geb atio e Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird auch als **Hyperbel** bezeichnet. Wie man in der A dung n sieht, t diese Fun an der Stelle x = 0 nicht definiert, da das Einsetzen von Null n undefinierte sdruck $\frac{1}{0}$ er gt.

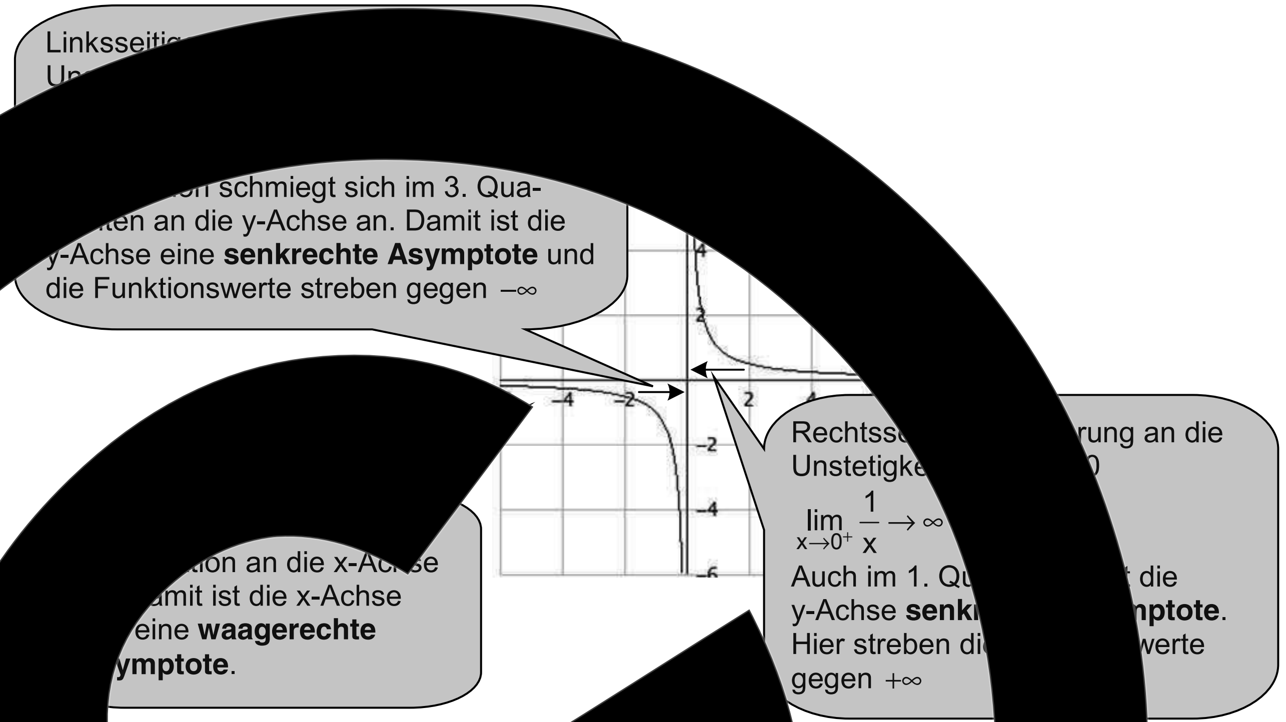
Information 1.9.2: Unstetigkeits llen bei Fu

Eine Funktion hat eine **Unstetig** n es auf dem aph der Funkt eine Stelle gibt an der man beim Zeichnen der F n den Stift ab zen muss, Funktion als nic an einem Stück durchzeichnen kann. F die d genscha , nennt ma auch **unstetige Funktionen.** In Tabelle 1 sind Fu nen ebildet, an diese tetigkeitsst n sehr steil nach oben oder nach unten verlaufen ionswerte f en, die bel groß oder klein werden. Damit streben die F swe ieser Funktion an **Unstetig elle** gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Man bezeichne tetig stellen auch als **efinitionsl** bzw. **Polstellen** oder einfach als **Pol.**

Aufg e 1.

Unter hung des Verhalten von gebroche rationalen Funktionen für $x \to \pm\infty$ und für $x \to x_0$ n stetigkeitsstell

a) Die bildung zeigt ie Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Verdeutlichen Sie sich anhand der Abbildung, wie sich die Funktion für $x \to \pm\infty$ und an de Unstetigkeitsstelle x = 0 verhält. Verdeutlichen Sie sich auch, wie man dieses Verhalten mathematisch beschreiben kann.

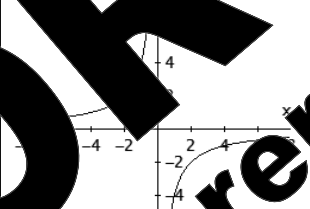
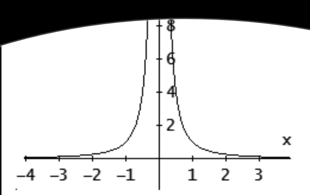


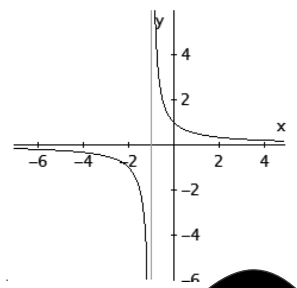
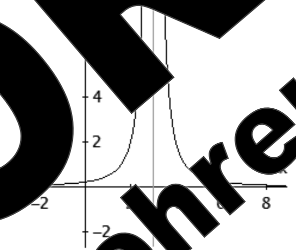
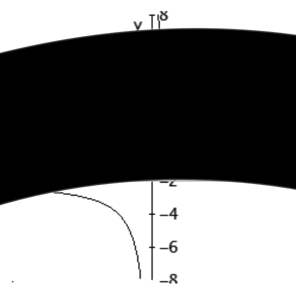
a) Bestimmen Sie in der ersten Spalte von Tabelle 1 für jede Funktion, wie in d[illegible] Beisp[illegible] 1 und 3 bereits dargestellt wird, den Definitionsbereich. Dabei schließt man die We[illegible]n x_0 au[illegible]r welche der Nenner der Funktionsgleichung den Wert 0 annimmt, die Funktion also in [illegible] Regel [illegible]tetig ist. Geben Sie daher auch die Unstetigkeitsstelle an.

b) Geben Sie wie im Beispiel 1 in der dritten Spalte der Tabelle anhan[illegible]s [illegible] der abgebildeten Funktion das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to \pm$ [illegible] (Hinw[illegible] Sie Ihre Kenntnisse über Nullfolgen an.)

c) Ermitteln Sie wie im Beispiel 1 anhand des gegeben[illegible] Funktionsgra[illegible]n, wie sich die Funktionswerte f(x) an den Unstetigkeitsstelle[illegible] verh[illegible] wenn [illegible]an sich dies[illegible]ellen x_o von links und von rechts nähert.

Tabelle 1: Beispiele für einfache ge[illegible]che[illegible]ional[illegible]unktion[illegible].

Funktion und Unstetigkeits-stelle	Graph der F[illegible]	[illegible]erhalten für $x \to \pm\infty$	[illegible]erhalten an [illegible] Unstetigkeitsstelle	
1. $f(x) = -\frac{4}{x}$ Unste[illegible]eit b[illegible] x [illegible] ID [illegible]R\{0}		lim [illegible] 0 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ [illegible]agerechte Asymptote: x-Achse	Nä[illegible]erung von rechts [illegible] Stelle x = 0 Näherung von links an die Stelle x = 0	$\lim_{x\to 0^+} f(x) \to -\infty$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) \to \infty$ senkrechte Asymptote: y-Achse
2. $f(x) = 1$[illegible] ____ ID = IR \ {__}		$x\to-\infty$ waagerechte Asymptote: ____	Näherung von rechts [illegible]an die Stelle x = ___ [illegible]g von links [illegible]lle x = ___	$\lim_{x\to 0^+} f(x) \to$ ___ $\lim_{x\to 0^-} f(x) \to$ ___ senkrechte Asymptote: ____

Funktion und Unstetigkeits-stelle	Graph der Funktion	Verhalten für $x \to \pm\infty$	Verhalten an d[illegible]stetig[illegible]tsstelle	
3. $f(x)=\frac{1}{x+1}$ Unstetigkeit bei x = –1 ID = IR \ {– 1}		$\lim_{x\to\infty} f(x)$____ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$__ w[illegible]erecht[illegible] As[illegible] ____	[illegible]herun[illegible]echts [illegible] Ste[illegible] x = –1 Näh[illegible] von links an die Stelle x = [illegible]	$\lim_{x\to 1^+} f(x) \to$ ___ $\lim_{x\to 1^-} f(x) \to$ ___ s[illegible]rechte Asymptote: ____
4. $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$ Unste[illegible] [illegible] x [illegible] ID [illegible]R \ {__}		lim f[illegible]___ $\lim_{x\to-\infty}$ f(x)___ waagerechte Asymptote: ____	Nä[illegible]rung von rechts an [illegible] Stelle x = –1 Näherung von links an die Stelle x = –1	$\lim_{x\to 3^+} f(x) \to$ ___ $\lim_{x\to 3^-} f(x) \to$ ___ senkrechte Asymptote: ____
5. $f(x)=\frac{4-2x}{x}$ Unste[illegible] [illegible]IR \ {__}		lim f(x)___ waagerechte Asymptote: ____	Näherung von rechts an die Stelle x = –1 Näherung von links [illegible]die Stelle x = –1	$\lim_{x\to 0^+} f(x) \to$ ___ $\lim_{x\to 0^-} f(x) \to$ ___ senkrechte Asymptote: ____

Aufgabe 1.9.2

Verallgemeinerungen zur Untersuchung des Verhaltens gebrochen rationa… Funkti…n.

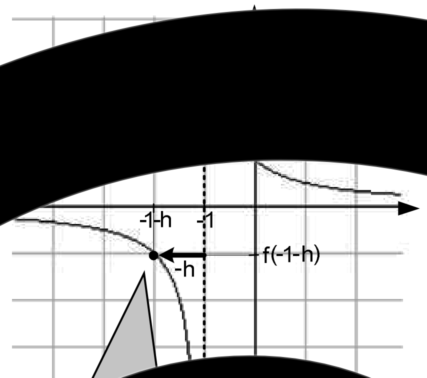
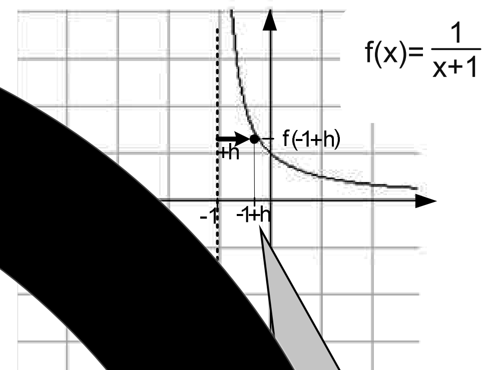
Bei der Untersuchung einer Funktion für $x \to \pm\infty$ erkennt man aus d… …ützen … …d $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ auf welcher Seite des Koordinatensystems man das Verhalten der Fun… …cht und kann das Grenzverhalten der Funktion mit den in Aufgabe 1.1 erlernten …thoden … …chnerisch ermitteln.

Untersucht man das Grenzverhalten einer Funktion an …stetig… …stelle… …t es möglich, durch die Schreibweise $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ bzw $\lim\limits_{x\to x_0^-}$ anzugeben, von welch… … de… Unstetig…itsstelle nähert.

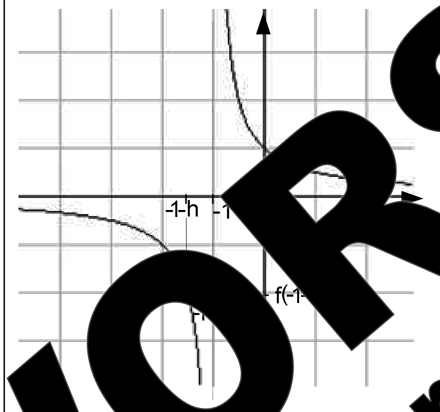
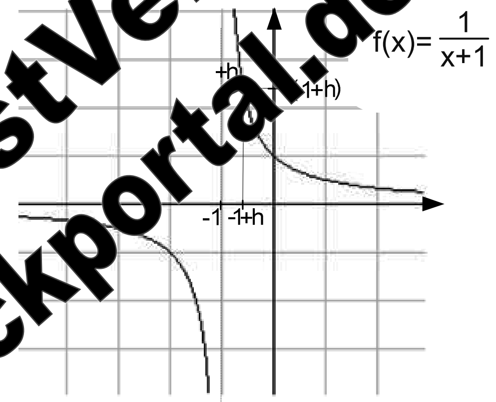
Sofern eine Abbildung der Funktion vorliegt, ka… … das …halten …ann, wie… …ufg…be 1.9.1, aus dem Verlauf des Graphen bestimmen. Wenn … jedoch kei… …formation… …u… Verlauf des Graphen hat und eine Aussage zum Grenzverhalten a… …iner Un…tigke…stelle ma…n soll, ist es notwendig, auf rechnerische Verfahren zurückzugreifen. …che Mö…hkeit es da… …, wird in… …lgenden Aufgabenstellungen gezeigt.

a) Anhand von Funktion 3: f(x)= … …belle 2 beispie…aft gezeigt, wie ma… …echnerisch ausdrücken kann, dass … sich von links … …d rechts de… …stetigkeitss… …nähert. Verdeutlichen Sie sich mit Hilfe de… …n Abb… …n das V… …für die Annäherung von links und übertragen Sie a… …ieß… …analoge Überlegung… … die Annä…ung von rechts, indem Sie die Lücken im Text aus… …Abbildunge… …prechend e…zen.

Tabell…

…nähe… von links an die Stelle $x_0 = -1$	**Annäherung von rechts an die Stelle $x_0 = -1$**
1. …gehend von der …stetigkeitsstelle … –1 geht m… um die Strecke … nach links. Dadurch befindet man s… …n der Stelle x = –1 – h. 	1. Ausgehend von der Unstetigkeitsstelle x_0 = ____ geht man um die Strecke h nach ____________. Dadurch befindet man sich an der Stelle x = –1 + h. 

Die Ste… …n liegt rechts v… …tig-keitsstelle…

2. Nun lässt man h immer kleiner werden, also nähert man sich von links wieder an die Unstetigkeitsstelle $x_0 = -1$ an. Die Funktionswerte wandern dabei auf dem Funktionsgraphen nach unten, werden also immer kleiner und streben daher gegen –∞. 	2. Nun lässt man h imm… …iner w…n, also nähert man …on ____________ wieder an die Unste… … x_0 = –1 an. Die Fu…nswer… …abei auf dem Funkt…raph… …nach ______________, … a… …mer _____________ und s…n daher gegen … 
3. …thema… …e Formul… …der …äherung von links Ansatz: $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim …(-1-h)$ Einsetzen in die F… Vereinfachen und Grenz… bestim… … –∞	3. Mathematische Formulierung der Annäherung von rechts Ansatz: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(-1+h)$ Einsetzen in die Funktions-…ung. $\lim\limits_{x\to-1^+} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{(-1\_\_h)+1}$ Vereinfachen und Grenzwert bestimmen. $\frac{1}{\_\_} \to$ ____

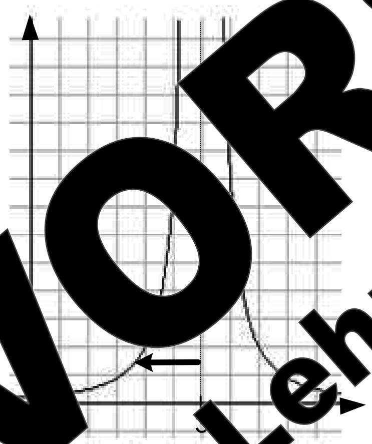
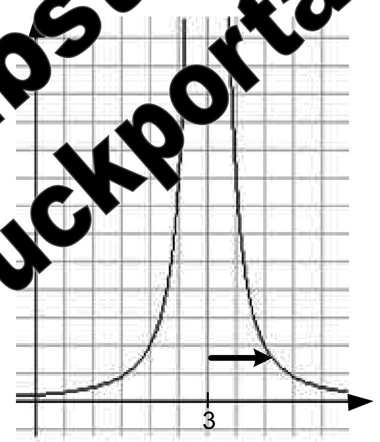
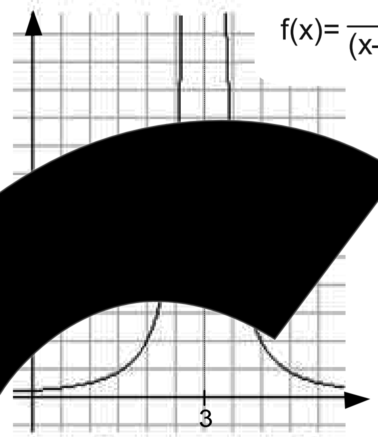
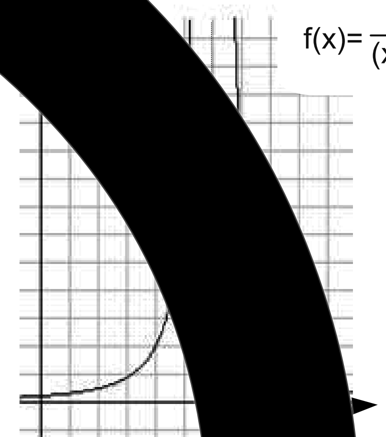
…all steht …setzt man für x nun (–1 – h) ein.

…rall wo x steht …an für x …h) ein.

…e kleiner de… …ner des Bruchs wird, desto größer wird der Wert des gesamten Bruchs.
Bsp.: $\frac{1}{0{,}1} = 10$ $\frac{1}{0{,}01} = 100$ $\frac{1}{0…} …1000$

b) Führen Sie in Tabelle 3 für die Funktion 4: $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$ die zur Aufgabenste... b) an... Untersuchungen durch. Ergänzen Sie dazu in den die graphischen Darstellung... uno sowie f(–h) und f(h).

Tabelle 3:

Annäherung von links an die Stelle x_0 = ___	**Annähe... von ...hts an die Stelle x_0 = ___**
1. Ausgehend von der Unstetigkeitsstelle x_0 = ___ geht man um die Strecke ___ nach links. Dadurch befindet man sic... der Stelle x = _______.  $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$	1. ...ehend ... der Un...itsstelle x_0 ... geht ma... die Strecke _____ ...ach _________. Dadurch be...indet man ...sich an d... Stelle x = ___  $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$
2. Nun lässt man h immer kleiner werden, also nähert man sich von links wieder an die Unsteti... ...also immer ___  $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$	2. Nun lässt man h immer kleiner werden, also nähert man sich von _____________ wieder an die Unstetigkeitsstelle x_0 = ___ an. Die ...ktionswerte wandern dabei nach ... werden also immer __________.  $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$

3. Mathematische Formulierung der Annäherung von links	3. Mathematische For...rung d... Annäherung von rech...
Ansatz: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(3-h)$	Ansatz: $\lim\limits_{x\to ...} f(x)$ ______
Einsetzen in die Funktionsgleichung $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2}{(3-h-3)^2}$	Einset... ...e F... ...ng $\lim\limits_{h\to 0}$ ______
Vereinfachen und Grenzwert bestimmen $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{(-h)^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}$ ...	Vere...chen ...d ...enzwer... ...estim...n ______

Mathematische Formu... der Gr... ...berechnung für $x \to x_0$

Die rechnerische Ann... ...s und rechts ...ine Unsteti...stelle durch die h–Methode kann man wie folgt f...l da... ...n.

An...he... von lin... $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0-h)$	Annäherung von rechts: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$

...gab... ...9.3

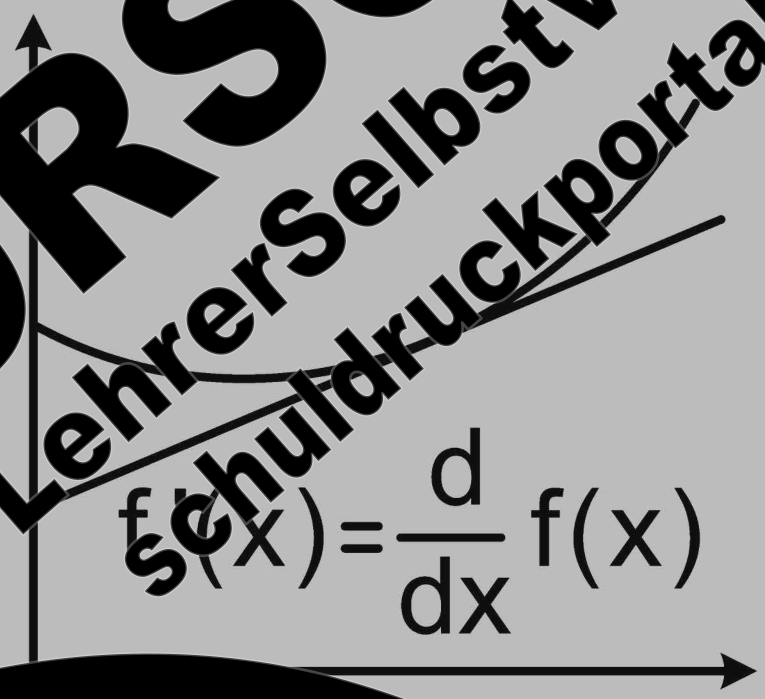
Unte... ...n Sie das ...rhalten der Fun... $f(x)=\frac{1}{1-x}$ für $x\to\pm\infty$ und an der Unstetigkeitsstelle.

...e Übungen: ______________________

Raum für Notizen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrech... selbstorganisiert ...rle...en



Kapit...

Einführung in die ...enzialrechnung

02-036-288

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 2: Einführung in die Differenzialrechnung

Grundlegende Betrachtungen

Viele Zusammenhänge in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften s[illegible] Techn[illegible]sen sich durch Funktionen darstellen. Es ist dabei wichtig, die Funktionswerte, also die[illegible] We[illegible] kennen, aber auch die Information, ob eine Kurve fällt oder steigt und wie stark si[illegible]llt ode[illegible] [illegible] von Bedeutung.

Die Untersuchung d[illegible]kti[illegible]n Zusammenhänge [illegible]tlich des [illegible]gungsverhaltens von Kurven und ihren Funktionsgle[illegible] [illegible]er ein zent[illegible] Thema in d[illegible] Mathematik und Gegenstand der so genannten **Di[illegible]ialre[illegible]ung**. Anhand [illegible]lemstel[illegible] a[illegible] dem Bereich Wirtschaft sollen Sie sich nun in[illegible]gab[illegible] zu[illegible]t einige Zusammenhänge e[illegible]ten, die für das grundlegende Verständn[illegible]er The[illegible]k wichtig sind.

Aufg[illegible] 2.

[illegible]fga[illegible]stellung

Um d[illegible]chstum be[illegible] Anbau von Bla[illegible]se im Gewächshaus zu optimieren, sollen die Pflanzen abhängig vom Wachstumszuwachs bewässert werden. Dies bedeutet, dass man am meisten Wasser zugeben muss, wenn die Pflanzen am stärksten wachsen. Um herauszufinden, zu welchem Zeitpunkt diese Zuwachsrate der Pflanzen am größten ist, wird in einer Versuchsreihe vom Zeitpunkt des Keimens am Tag 0 bis zur Ernte nach dem 10. Tag an jedem Tag die durchschnittliche Pflanzengröße bestimmt und in der Tabelle unten eingetragen.

Zeit [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6	7	8	9	10
[illegible]	0	0,25	1,75	4,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]5	18,25	19,75	19,99	20

Tabelle 2.1.1

a) Tragen Sie die Messdaten für die absolute Größe der Pflanzen i[illegible]m in Abb 2.1.1 im Anschluss an Aufga[illegible]au wie möglich ein und verbin[illegible]nkte so, dass eine Kurve entsteh[illegible]

b) Begrün[illegible] Diagramm in Abb. 2.1.1 entnehme[illegible] die Pflanzen im betr[illegible]äßig schnell wachsen, sondern der Z[illegible]en ve[illegible]gen unter[illegible]ich groß ist, indem Sie den folgenden Sa[illegible]ndigen.

[illegible]äßiges Wachstum würde bedeuten, dass die Pflanzen jeden Tag ______

[illegible]bei der Größe haben. Da es sich in diese[illegible] eine proportiona[illegible]g handeln

[illegible]üsste sich im Diagramm eine ______ [illegible]geben.

In den ersten und in den letzten beiden Tagen steigt der Graph nur wenig an, d.h., die Funktionswerte von g(t) nehmen nur ____________________ zu. Da die Funktionswerte die ____________ der Pflanze angeben, ist der tägliche Zuwachs der Pflanzen hier gering. ... verläuft die Kurve am steilsten, d.h. die Funktionswerte von g(t) nehmen hier am ____________ zu. Das heißt, dass die Pflanzen hier den ____________________ ...wachs haben.

c) Die Zuwachsrate der Pflanzen soll nun genauer untersucht werden. Ermitteln Sie dazu aus den gegebenen Messwerten der Tabelle 2.1.1 den täglichen Zuwachs bzw. die Zuwachsrate z(t) der Pflanzen, also den Wert, um den die Größe der Pflanzen jeweils im Zeitintervall von einem Tag zunimmt und tragen Sie die Werte in der folgenden Tabelle 2.1.2 ein. Bestätigen Sie anschließend durch Vergleich mit den bereits ... im z(t) Diagramm, dass ihre berechneten Werte richtig sind und verbinden Sie ... die Punkte zu einer Kurve.

Messzeitpunkt t	0	1	Tag 2	3	Tag 4	Tag 5	Tag 6	Tag 7	Tag 8	Tag 9	Tag 10
Zuwachsrate der Pflanzen z(t) in [cm]											

Tabelle 2.1.2

d) Begründen Sie, warum der Verlauf dieser Kurve für die Zuwachsrate z(t) zeigt, dass die Pflanzen ... am stärksten wachsen, also am Tag 5 den größten Zuwachs haben und am meisten Wasser benötigen.

____

____

e) Wenn Aufgabenteil d) richtig beantwortet wurde, haben Sie sicherlich erkannt, dass die Pflanzen die größte Zuwachsrate haben, wenn die zugehörige Kurve z(t) in Abb. 2.1.2 ihren höchsten bzw. maximalen Punkt ... qualitativen Zusammenhang zwischen dem Zuwachs der Pfla... der Pflanzen g(t) dar, indem Sie die folgenden Sä...

...schreibt, wie ____________ ... Zeitpunkt t sind.

...ler die Kurve g(t) verläuft, desto größer ist der täg... ____________ der Pflanzen und um so ________________ sind die Funktionswerte von z(t). Je flache... verläuft, desto ________________ ...wachs der Pflanzen und um so ... die Funktionswerte von z(t). ... elle der Kurve g(t) ist der Zuwach... ...en und damit der Fun...

f) ... Sie, warum es sinnvoll ist, diese Pflanzen nach dem 10. Tag zu e...

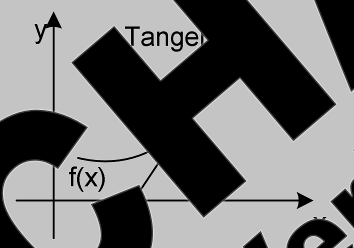
____

____

g) Zeichnen Sie auf der folgenden Seite in der Abb. 2.1.1 so genau wie möglich jeweils ... Tangente an den Stellen $t_1 = 1{,}5$ und $t_2 = 4{,}5$ sowie an der Stelle $t_3 = 9{,}5$.

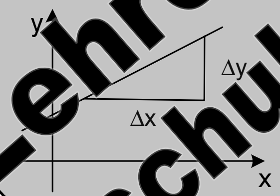
Zusatzinformation:

Die Gerade an der Stelle $t_2 = 4{,}5$ wird ebenfalls als Tangente bezeichnet, obwohl sie die Kurve schneidet. Entscheidend ist, dass diese Gerade tangential zur Kurve verläuft.



Ermitteln Sie anschließend die Steigung m der folgenden drei Tangenten auf zeichnerischem Weg, indem Sie die Länge von ... und ... eines Steigungsdreiecks möglichst genau, beispielsweise durch Abzählen von Kästchen, ermitteln.

Zur Erinnerung:



Definition der Steigung m ... einer Geraden:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Steigung ...: $m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta t} =$ ____________

____

Steigung m_2 der Tangente an der Stelle $t_2 = 4{,}5$: $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta t} =$ ____________

$m_2 =$ ____________

St... Tangente an der Stelle $t_3 = 9{,}5$: $m_3 = \frac{\Delta y}{\Delta t} =$ ____________

____

Diagramm zu Tab. 2.1.1

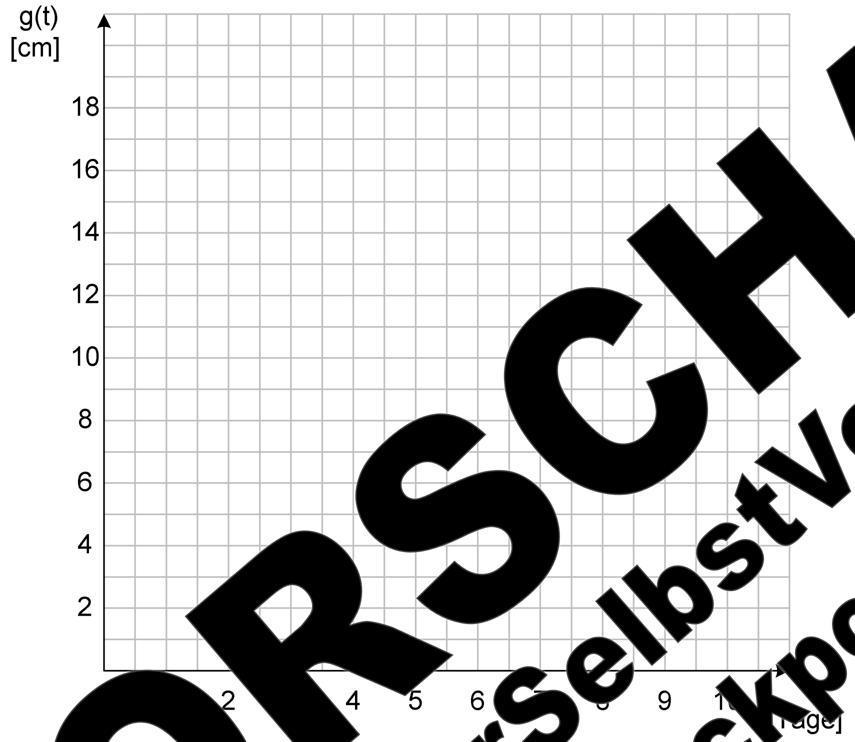


Abb. 2.1.1

D… ammi… Ta… 2.1.2

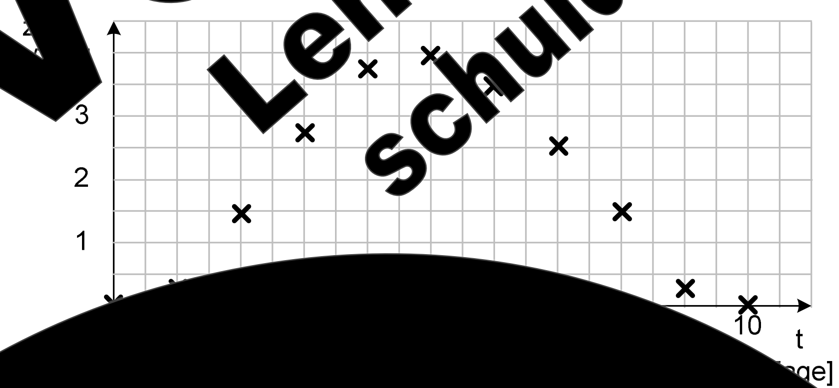


Abb. 2.1.2

…) Vergleichen Sie die aus der Messung ermittelten Werte für m_t … den in Tabelle 2.1.2 berechneten Zuwachsraten an den entsprechenden Tagen, und … n Sie den folgenden Satz.

Die Ste… echen, wenn man Zeichenungenau… ücksichtigt, den

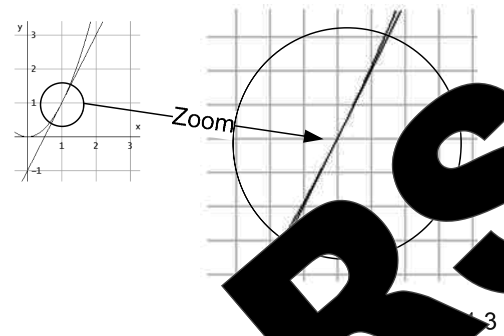
W… ______________________________ Tabelle 2.1.2.

Zusammenfassung der Erkenntnisse aus Aufgabe 2.1

Formulieren Sie nun, unter Einbeziehung der nachfolgend angegebenen ergänz… n Infor… on, eine Zusammenfassung der Erkenntnisse aus Aufgabe 2.1, indem Sie den T… im Kas… erv… ändigen.

Ergänzende bzw. wiederholende Information über den Zus… menh… … genten und Kurven

Begründen Sie anhand der Abb. 2.1.3, warum die Steig… g der … in e… n Punkt immer mit der Steigung ihrer Tangente in diesem Punkt identisch ist, … ickentext ergä… zen.



…3

Wenn ma… n Berührpu… … Kurve und Tan… te in das Bi… inzoomt, … man, dass … de Funktion … n einem kl… en Bereich ______________________________.

… erkennt ma… dass die Steigung der Kurve … nd der Ta… e im ____________________ identis… ist.

Eine … e und ihre T… nte haben im ______________________ die gleiche Steigung. Wenn die Steigung der Tangente im B… punkt bekannt ist, kennt man daher auch die Steigung der Kurve. Dort in diesem Punkt, wo die Steigung der Tangente am ____________________ ist, steigt auch die Kurve am stär… … steigt, hat auch die Tangente eine … ve nicht ansteigt, hat die Tangente die ______. Die Steigung der Kurve bzw. … Kurvenpunkt ist das Maß für ______________________ der Funktionswerte in die… … An der Stelle mit der ______________________ Zuwachsrate verlaufen die Kurve u… … am steilsten und die Kurve, welche die … t hier ihren ______________ … An Stellen mit ______ … haben die Kurve und die Tangen… … ng m = 0. An diese… … e der Funktionswerte ebenfalls den We… ______ an.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Aufgabe 2.2

In Aufgabe 2.1 haben Sie sich mit den Zuwachsraten beim Wachstum von Blat[illegible] [illegible]üse bes[illegible]ftigt und festgestellt, dass die Zuwachsrate der Funktion g(t) der Steigung der Funktion bz[illegible] [illegible]er Ta[illegible]nte im Berührpunkt entspricht. Da die Beschreibung von Wachstumsprozess[illegible] [illegible] die Z[illegible]e, in vielen Anwendungsfällen eine wichtige Rolle spielt, sollen nun mit Hilfe der N[illegible]bel u[illegible]rer Tangenten allgemeine Zusammenhänge hinsichtlich der Berechnung der Steigung [illegible] Ku[illegible] [illegible]arbeitet werden.

Die Parabel und ihre Tangenten

Die Abbildung zeigt die Normalparabel f(x) = [illegible]chließlich [illegible]hrerer Tang[illegible] [illegible]it den zugehörigen Steigungsdreiecken. Füllen Sie die Tabelle u[illegible] aus, indem S[illegible] den ange[illegible]benen Stellen die Funktionswerte berechnen und zusätzlich mi[illegible]fe der be[illegible]ts eingetragene[illegible] Steigungsdr[illegible]cke die Steigung der Tangente und damit d[illegible]bel [illegible]iesen [illegible]llen ang[illegible].

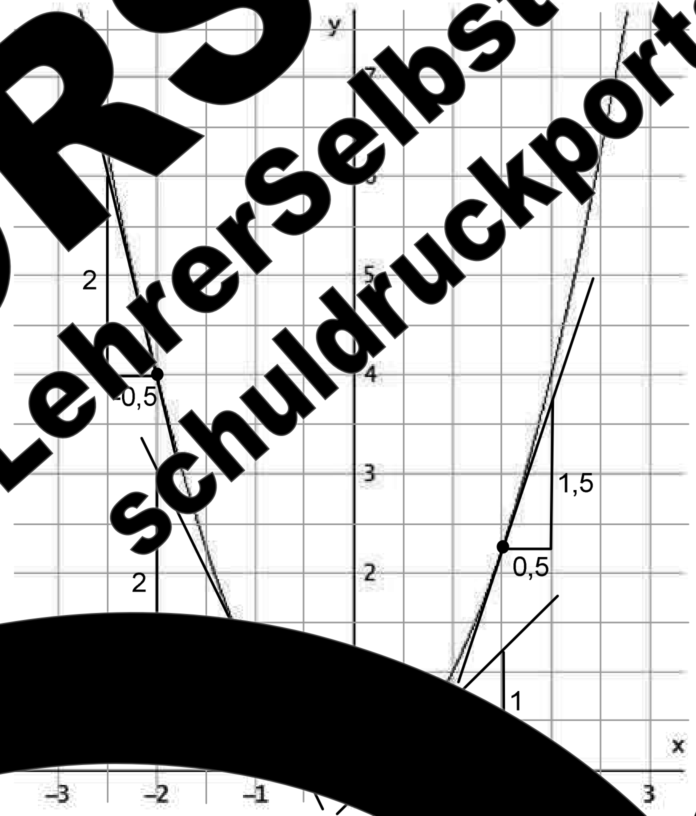


Abb. 2.2.1

Stelle x	y-Wert von $f(x) = x^2$ an der Stel[illegible]	Steigung m_t der Tangent[illegible] von f(x) an der Stelle x	[illegible]g der Funktion f(x) [illegible]n der Stelle x
x = – 2		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	
x = – [illegible]		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	
x[illegible]		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	
[illegible]		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	

Tabelle 2.2.1

Vergleichen Sie in Tabelle 2.2.1 in jeder Zeile den gegebenen Wert der Stelle x i[illegible] der e[illegible] Spalte mit dem ermittelten Wert für die Steigung der Kurve in der letzten Spalte. Sie wer[illegible]icher fe[illegible]llen, dass zwischen den Ergebnissen für die Steigung der Tangente bzw. der Kurve und d[illegible]ert vo[illegible] [illegible]ein Zusammenhang besteht, der auf eine **Gesetzmäßigkeit** schließen lässt[illegible]

- Welche Vermutung haben Sie auf Grund der Feststellung für die St[illegible] [illegible]angente und der Kurve an der Stelle x = 10?

  Die Steigung hat den Wert _____________.

- Formulieren Sie eine Rechenvorschrift, wie man die S[illegible]g m b[illegible]er Funktio[illegible] [illegible]= x² an einer beliebigen Stelle x berechnen kann.

Ergebnis Aufgabe 2.2: **m = _____**

Ausblick

Da es für die Normal[illegible]bel a[illegible]chein[illegible] [illegible]öglich is[illegible] [illegible]teigung m_t [illegible]angente bzw. die Steigung m der Kurve an einer be[illegible] [illegible] über den Ansatz [illegible] = 2x zu be[illegible]chnen, entsteht die Frage, ob es solche Rechenvorschrift[illegible] [illegible]r E[illegible]g der Ste[illegible] bei Kurven [illegible] für andere Funktionen gibt und welchen Ge[illegible]keit[illegible]ese Berechn[illegible] folgen. Anh[illegible] der Parabel, für die wir diese Gesetzmä[illegible]keit n[illegible]hon [illegible] Hilfe von z[illegible]rischen M[illegible]den erarbeitet haben, wird mit den folgen[illegible]fgaben [illegible]Verfahren herg[illegible], mit dem [illegible]ie Steigung anderer beliebiger Funktionen bere[illegible]et [illegible]en ka[illegible] die sog. Diff[illegible]alrechnung.

Aufga[illegible]3

Berechnen der Steigung von K[illegible]n

In Aufgabe 2.1 haben Sie mit Hilfe von zeichnerischen Methoden festgestellt, dass die Steigungen der Tangenten an die Funktio[illegible] [illegible]formelmäßigen Zusammenhang genügen, nämlich mit der Rechenvorsch[illegible] [illegible]Wie Sie jedoch wissen, besteht bei zeichnerischen Method[illegible] [illegible]blesen von Δx und Δy aus einem St[illegible] [illegible]en zu Ablesefehlern führen können. [illegible]nerischer Weg entw[illegible] [illegible]bigen Funktionen die Steigung der [illegible]amit der Kurve im Berührpunkt zu be[illegible] [illegible]trachtungen so einfach wie [illegible] gestalten, wird auch hier die Funktion f(x) = x[illegible]

Für die Berechnung der Tangentensteigung soll hier beispiels[illegible] $x_0 = 0{,}5$ verwendet werden. Durch Einsetzen von $x_0 = 0{,}5$ in die Funktionsgleichung [illegible]die Tangente den Berührpunkt B(0,5 / 0,25[illegible] [illegible]n Sie unter Einbeziehung des be[illegible]n rechnerischen Ansatzes für di[illegible] [illegible]g einer Geraden (vgl „Arbeit[illegible]egendes zu Algebra & Funktion[illegible] [illegible]g der Tangente nicht ermitteln [illegible]ur ein Punkt auf der Kur[illegible]

F[illegible]erechnung de[illegible]eradensteigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - [illegible]}{x_1 - [illegible]}$

b) Um mit der unter a) angegebenen Formel die Steigung berechnen zu können, benöt... n also mindesten zwei Punkte auf einer Geraden. Bei der Tangente ist jedoch nur ... Stelle x_0 ... der die Kurve berührt wird, bekannt. Somit kann diese Formel nicht direkt verwendet ... den. Da ... jedoch keine Alternative zu dieser Formel gibt, an einer beliebigen Stelle die ... eigung ... w. der Tangente zu berechnen, verwendet man die Formel bei einem **Nä... erfah...** ... deutlichen Sie sich die Vorgehensweise und ergänzen Sie fehlende Angaben u... Tex... n.

(1) Verdeutlichung des Näherungsverfahrens anhand ... orma... el f(x) = x^2

Näherung 1

Man wählt rechts von x = x_0 an der Stelle x_1 = x_0 + ... n wei... n Punkt au... Parabel aus und zeichnet möglichst genau eine **Sekant...** ... diese... eiten Punkt. Er... ... für das Beispiel x_0 = 0,5 und h = 1,5 die Steigung der ... ante, indem ... hlende An... b... ergänzen und zeichnen Sie die Sekante im folgende... iagram... n.

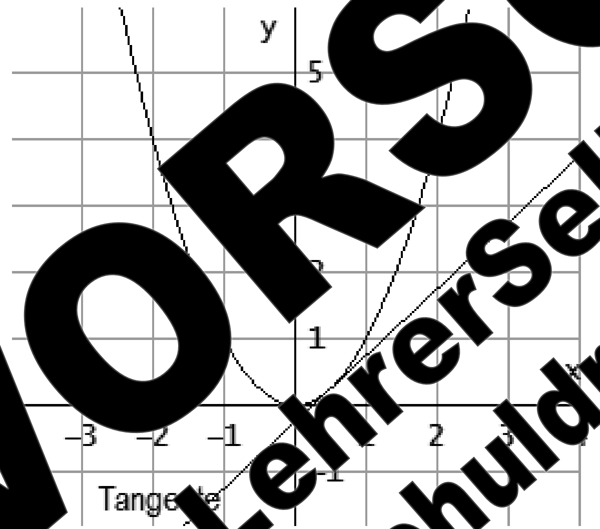


Abb. 2.3.1

Stelle x_0	**Ste... x_1**
x_0 = 0,5	x_1 = 0,5 + h = 0,5 + 1,5 = 2
f(0,5) = ...	f(2)= ____
...(0,5/0,25)	**P_1(2 / 4)**

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

m_s = 2,5

Näherung 2

Da die Sekante ... der Tangente abweicht, verkleinert man den Wert von h. Ermitteln Sie für das ... der Sekante, indem Sie fehlende Angaben ergänzen ... mm ein.

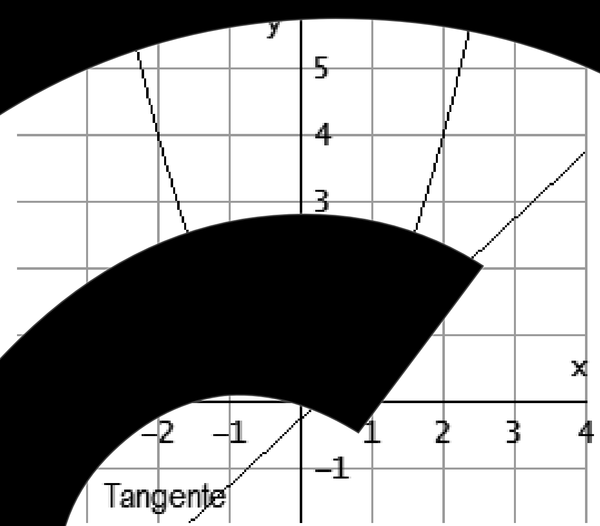


Abb. 2.3.2

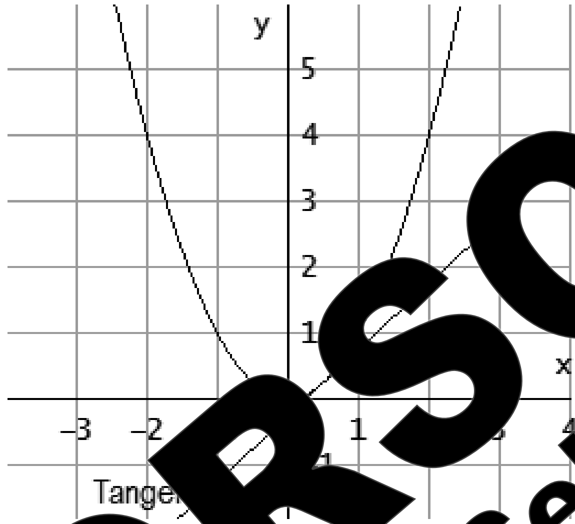
	Stelle x_1
	x_1 = 0,5 + h = 0,5 + 1 = 1,5
f(0,5) = 0,...	f(1,5)= ____
P_0(0,5/0,25)	...,5 / ______)

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(\ldots}{x_1 - x_0}$$

... = 2

Näherung 3

Auch die Sekante aus Schritt 2 weicht sehr stark von der Tangente ab. ... er verk... ert man den Wert von h weiter. Ermitteln Sie für das Beispiel x_0 = 0,5 un... h = 0,5 ... Steig... der Sekante, indem Sie fehlende Angaben ergänzen und zeichne... iese S... enfalls so genau wie möglich im folgenden Diagramm ein.



St... x_0	**Stelle x_1**
	x_1 = 0,5 + h ... 0,5 + ___
f(0,... = 0,25	f(1)= ___
P_0(0,...	**P_1(... ______)**

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\ldots - x_0} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

m_s = 1,...

(2) Ve... emein... ng des Nähe... sverfahrens

... man ... drei Be... in (1) er... nähert sich die Sekante der _______________, w... h immer kleiner wird. Im Folgenden ... die am Zahlenbeispiel verdeutlichte Annäherung nun ... e beliebige Ste... und eine re... davon liegende Stelle x_1 = x_0+h verallgemeinert werden.

Ze... nen Sie in Ab... 2.3.4 an d... Stelle x_0 so genau wie möglich eine Tangente farbig ein. Verdeutlichen Sie sich ansch... nd die Herleitungsschritte für die Berechnung der Sekantensteigung m_s anhand ... er Abb. 2.3.4, indem Sie auf der nächsten Seite die Bedeutung von Zeile (1) sowie die angegebenen Umformungsschritte (2) bis (4) beschreiben.

... die Stelle x_0 und x_1 = x_0+1 erhält man für die ... m_s der Sekante die folgenden Ausdrücke. ... die Umformungsschritte auf der ...

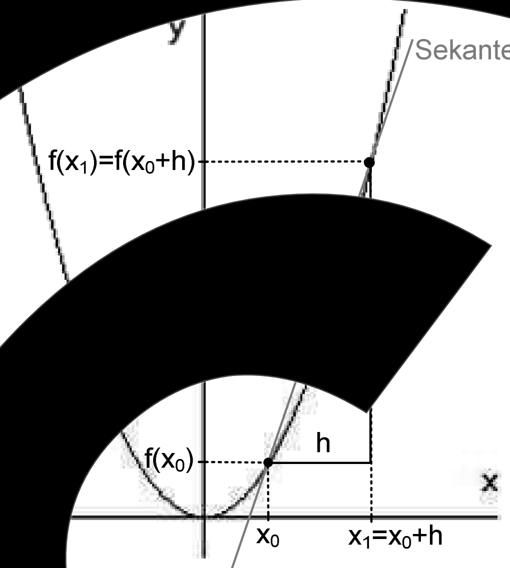


Abb. 2.3.4

(1) m_s ... $f(x_0)$

(2) $m_s = \frac{f(x_0 \ldots}{(x_0 + \ldots}$

(3) $m_s = \frac{f(x_0+h) - \ldots}{x_0 + h - \ldots}$

(4) $m_s = \frac{f(x_0+h) - f(\ldots}{h}$

Infor...
Diese ... wird als **Differ... ent** bezei...

Erläuterung von Zeile (1) und der Umformungsschritte.

(1) ______________________________

____

(1)→(2) ______________________________

____

(2)→(3) ______________________________

____

(3)→(4) ______________________________

____

(3) Gren… …lung

W… h nun i… r kleiner wird … chließlich als … zwert den Wert Null annimmt, wird im Gre… ll aus … Sekante die T… ente. Man … dieses „Hineinrutschen“ der Sekante in die … ang… namischen Geometrieprog… en am PC oder Tablet auch visualisieren. Damit … ibt sich aus dieser A… enstellung … **nzwertproblem**.

… ematisch wird d… berechn… angentensteigung als Grenzwert der Steigung der … ante wie folg… muliert.

$\frac{\mathbf{f(x_o+h)-f(x_o)}}{}$ Differenzialquotient

… ng der … angente an.

Im Grenzfall $h \to 0$ wird aus der Steigung m_s der Sekante die Steigung m_t der … ente.

… gentensteigung zu … mittelt man für $h \to 0$ … es Ausdrucks $\lim_{h\to 0}$ … Dieser Ausdruck wird als … **quotient** bezeichne…

M…

… nsteigung erhält man als Grenzwert der Seka… nsteigung, wenn … bstand der … der Kurve gegen Null führt. Man geht dabei … ifferenzenquotien… quotient über.

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 2.4

Anwenden des Differenzialquotienten

In der rechten Sprechblase der vorangegangenen Grenzwertbildung u… wird a… n, dass man mit Hilfe des Differenzialquotienten die Steigung der Tangente berechn… ka… se Rechnung wird nun anhand der Normalparabel exemplarisch gezeigt. Erläutern Si… nsätze … ie Umformungen.

Rechenschritte für $f(x) = x^2$ — Erläut… n der … ze b… Umformungen:

(1) $f(x_0) = x_0^2$ ______________________________

$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2$ ______________________________

(1)→(2) ______________________________

(2) $m_t = \lim_{h\to 0} m_s = \lim_{h\to 0} \frac{f(x…}{h}$ … $f(x_o)$ ______________________________

$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{(x_o+h)^2 …}{h}$ ______________________________

(2)→(3) ______________________________

(3) … $= \lim_{h\to 0}$ … $^2 + 2x$ … $h^2 - x_o^2$ … ______________________________

(3)→(4) ______________________________

(4) $m_t = \lim_{h\to 0} \frac{2x_oh+h^2}{h}$ ______________________________

(5) m… …5) ______________________________

____

$m_t = \lim_{h\to 0}(2x_o + h)$

Im Grenzfall nimmt h den Wert Null an und fällt in der Summe weg.

(5)→(6) ______________________________

(7) $m_t = 2x_0$

(6)→(7) ______________________________

____

m…

Da die Stelle x_0 beliebig wählbar ist, kann allgemein x_0 durch x ersetzt werden.

… Sie dieses Ergebnis mit dem Ergeb… 2.2 und ergänze… olgenden Satz … sten Seite.

Die Ergebnisse bei der zeichnerisch und rechnerisch ermittelten Rechenvorschrift für di… echnung der Tangentensteigung bei einer Normalparabel an einer beliebigen Stelle x ____________________ ____________________. Für die Rechenvorschrift zur Berechnun… igung … er Stelle x ergibt sich bei der Normalparabel: m_t = _____

Aufgabe 2.5

Berechnen von Steigungen bei der Normalpa…

Berechnen Sie nun exemplarisch für die Nor… parabel die Fu… nswerte … Steigung der Tangente an den folgenden Stellen und ergänzen Sie die A… ortsätz…

Stelle x	…	x = … 5	x … 4	x = – 5
Steigung m der Funktion … Steigung m_t der Tangente an der S…				
Funktionswert y an d… Stelle x				

Im P… rt A(… / ____) … ben die Funk… f(x) = x^2 und … Tangente die Steigung m_t = _______

Im Pu… A(– 2/ _____) hab… unktion f(x) … und ihre Tangente die Steigung m_t = _______

I… 4 / ____) habe… die Funktion f(x) … x^2 und ihre Tangente die Steigung m_t = _______

Im Punkt A(– 5 / ____) haben die Fu… tion f(x) = x^2 und ihre Tangente die Steigung m_t = _______

Übung 2.1

Bisher wu… arabel angewendet. In den folgenden Aufgaben wird … nen Rechenvorschriften zur Bestimmung … dazu in den beiden Beispielen … und bearbeiten Sie die ansch… ufgaben.

…: Im Band „Grundlegendes zu Algebra und Funktio… sbuchreihe wird im Kapitel 1 Aufgabe 1.6 beschrieben, wie man Binome höherer … oßen Rechenaufwand berechnen kann und in Übung 1.11 finden sich weitere … echnung des Differenzialquotienten.

a) Ermitteln … e Berechnung der Steigung bei … f(x) = x^3, indem Sie di… zen.

f…

… ______________)^3

$$\ldots_s = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\_\_\_\_\_\_)^3 \ldots x_0^{\square} + 3x_0^{\square}h + \ldots \square - x_0^{\square}}{}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + \_\_}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(\qquad\qquad)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x_0^{\square} + 3x_0h \ldots$$

$m_t = 3x_0^2$ oder allgemein für beliebige x: $m_t = 3x^2$

b) Ermitteln Sie die Rechenvorschrift für die Berechnu… r S… bei … Funktion f(x) = $3x^2$, indem Sie die folgenden Rechnungen ergänzen.

$f(x_0) = 3x_0^{\ 2}$

$f(x_0 + h) = 3(\_\_\_\_\_\_\_)^2$

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_s = \lim_{h\to 0}\frac{f(\quad)-f(\ldots}{h} \ldots \frac{\ldots) - 3x_o^{\ 2}}{h} \ldots \lim \frac{\ldots x_o^{\ 2} + 2x_oh + h^2) - 3x_o^{\ 2}}{\ldots}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\_\_x_o^{\ 2} + \_\_x \ldots - 3x_o^{\ 2}}{\ldots} \ldots \frac{\ldots x_oh + \ldots}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(\_\_x_o + \_\_)}{\ldots} = \lim_{h\to 0}(6x_0 + 3h)$$

m_t = ____ … für … allgemeine Ste… einfacher: …

c) E… tel… die R… envorschrift … de Berechn… r Steigung bei der Funktion f(x) = $x^3 + 1$, in… Sie … den Überleg… gen und Um… ungen in Stichworten beschreiben.

(1) …) $= x_0^{\ 3} + 1$

(2) … + h) = $(x_0 \ldots h)^3 + 1$

(3) $= x_0^{\ 3} + 3x_0^{\ 2}h + 3x_0h^2 + h^3 + 1$

(4) $m_t = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

(5) m…

… h

(7) $m_t = \lim_{h\to 0}\frac{3x_0^{\ 2}h + 3x_0h^2 + h^3}{h}$

(8) $m_t = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x_0^{\ 2} + 3x_0h + h^2)}{h}$

(9) $m_t = \lim 3x\ldots$

(10) m…

(1) f(x_0) = x_0^3 + 1 ist der Funktionswert von f(x) = x^3 + 1 an der Stelle ____

(2) f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 + 1 ist der Funktionswert von f(x) = x^3 + 1 an der Stelle ________

(2)→(3) ______________________

… Berechnung der Steigung einer Tangente

____

____

____

(5)→(6) ______________________

____

(6) ______________________

____

____

____

d) Zeigen Sie, analog zu den Berechnungen für die Funktionen in Aufgabenteil a) bis c), ... die Anwendung des Differenzialquotienten, dass sich für die Rechenvorschrift ... berechn... der Steigung der Tangente jeweils der angegebene Ausdruck ergibt. Führen Sie ... echnu... im Heft durch.

(1) Bei **f(x) = x⁴** lässt sich die Steigung m_t der Tangente an der Stelle ... über ... Rechenvorschrift **$m_t = 4x^3$** berechnen.

(2) Bei **f(x) = 5x²** lässt sich die Steigung m_t der Tang... an ... le x über die Rechenvorschrift **$m_t = 10x$** berechnen.

(3) Bei **f(x) = 4x³** lässt sich die Steigung m... er Tangente an ... Stelle x über die Rechenvorschrift **$m_t = 12x^2$** berechnen.

(4) Bei **f(x) = 2x** lässt sich die ... igung ... der Ta... gente an der ... le x über d... Rechenvorschrift **m_t = 2** be... n. D... teigung einer Ge... den ist eine K... stante.

(5) Bei **f(x) = 3x²+...** sst s... die S... g m_t der Tangente an der Stelle x über die Rechenvorschri... rechnen.

Info... tio... 1

In den ... angeg... gen Aufg... wurde zu j... Funktion f(x) angegeben, wie die Steigung m_t der ...ktion ... zw. ihrer Tangente ... einer Stelle x mit Hilfe des Differenzialquotienten bestimmt werden ka... erkennt hier, dass die Vorschrift zur Berechnung von m_t, genau wie das normalerweise bei Funkt... ist, eine Va... x enthält. Um diesen funktionalen Charakter der Rechenvorschrift zur Ermittlung der Steigung einer Funktion bzw. ihrer Tangente zu berücksichtigen, ordnet man dem Ausdruck m_t eine neue Funktion z...

Die Ablei... ... fferenzieren oder Ableiten

... nten Funktion f(x) bzw. die Steigung m ... eichnet man als ... ur Funktion f(x)

Man berechnet f '(x) mit Hilfe des **Differential...** $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Die Berechnung des Differentialquotienten bezeichne... **Ableiten einer Funktion** oder das **Differenzieren einer Funktion**.

Ergänz... alrechnung

Da... lquotienten der S... Ermittlung d... Ableitungsfunktion ... die Berechnung der Steigung von ... ist, bezeichnet man den gesamten ...ereich mit dem Begriff ...ialrechnung.

Ergänzung ... iff 1. Ableitung

Wenn eine Fu... l abgeleitet wurde, spricht ... n der ersten Ableitung. Man ... an dem Strich am f. Wen... tion ein zweites Mal abge... spricht man von der zweiten A... wei-Strich ...n-x“ und kennze... f mit zwei ...ichen (vgl. Aufg...

Zusammenfassung zur mathematischen Formulierung des Begriffs differenzieren

Steigung der Sekante m_s	$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta ...} ... - y_0 ... = ... (x_0)$
Steigung der Tangente m_t	$... \lim\limits_{... \to 0} \frac{...}{\Delta ...} ... \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Ableitungsfunktion f‘(x) Die Ermittlung der Ableitungsfunktion ist vom ... weg (s. Aufgabe 2.4) identisch mit der Berechnu... der Tangentensteigung über den Differenzialq... enten, d... die Steigung der Tangente in einem Kurve... kt mit d... Steigung der Kurve in diesem Pu... ntisc... Berechnung des Differenzialqu... nten ... als **Differenzieren** oder auch **Able**... t.	$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(... + ...)-f(x_0)}{h}$

Ergänzungen zur S... hw...

Oft, beispiels... ch b... r Tastenbelegung von Taschenrechnern, wird für f '(x) die nachfolgende dargestellt... chreib... e v... ndet.

Ablei... g ... x: $f... = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{d...} f(...)$

Mit dies... chreibweise sprich: „*df von x nach dx*“ wird fol... es verdeutlicht: Das d entspricht bei der Sekan... ...gung dem Δ im Steigungsdreieck. Da nach der ...dung des Grenzübergangs $h \to 0$ der Abstand Δx praktisch Null wird, und diese Berechnung auch als Differenzieren bezeichnet wird, verwendet man anstatt des großen griechischen Delta Δ das kleine d.

Ableitung nach t: $v'(t) = \lim ... \frac{\Delta v}{...} = \frac{dv(t)}{...} = \frac{d}{...} v(t)$

Mit dieser Schreibweise kann man gut verdeut... nach welcher Variablen abgeleitet bzw. ... t wird. Bei der Ableitung nach t wird ... Funktion oft anstatt mit einem ... mit einem Punkt über dem Funk... stellt. $v'(t) = \dot{v}(t)$

Verwendung des T...

Sollten Sie ... wenden, mit dem man Ableitung... oder auch symbolis... n Sie die folgende Tastenbelegung.

Tas... schenrechner : $\frac{d}{dx}\square$

Die Angabe auf dem Tascher... t, dass eine Funktion nach der Variab... itet bzw. differe... iert wird. Daher m... k-tionst... m Kasten eingeg... mmer di... erwendet werde...

Verwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS)

Der Begriff **Computeralgebrasystem** oder abgekü… **CAS** w… für Computerprogramme verwendet, mit denen … ielsw… algebraische Ausdrücke symbolisch umgeformt w… en, mit denen man eine beliebige Gleichung l…en kan… de… denen sich auch Ableitungen berechnen … n. Als … ware kann man hier auf dem PC das Programm … amA… nutzen.

Wie bei einem Taschenrechner wird hier ebe… s nicht die „… Schreibwe… (x)“ verwendet, sondern die „Differenzialschreibweise“ $\frac{d}{dx} f(x)$. Man … hier au… nach einer a… n Variab… z.… t oder z ableiten lassen.

Beispiel für die Berechnung … Ab… von … x) = $3x^2 + x^3$

Aufgabe 2.6

Berechnung… wählten Funktionen.

Di… Differenzialquotienten, also deren … (x), im Rahmen von … ts ermittelt wurden bzw. deren … ktionen den Angaben der Übung 2.1 c) … können.

… n Sie die Tabelle ohne Einsatz des Taschenrechners aus … ie anschließend den …chfolgenden Text. Falls Sie über einen Taschenrechner verfüg… ung bzw. Ableitung einer Funktion an einer gegebenen Stelle x numerisch berechnen kann, k… Übung des Umgangs mit dem Taschenrech… h ermittelten Wert der Steigun… chenrechner überprüfen.

Funk…	…Ableitung…ion	Stelle x	**y-Wert** an … Stelle x	…**eigung** an der Stelle x
f…	$f'(x) = 3x^2$	–3		
	$f'(x) = 6x$	5…		

Funktion	Ableitungsfunktion	Stelle x	**y-Wert** an de… Stelle x	S… ung an der …le x
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$	–1		
$f(x) = 5x^2$	$f'(x) = 10x$	2,5		
$f(x) = 4x^3$	$f'(x) = 12x^2$	–2		
$f(x) = 2x$	$f'(x) = 2$	…		
$f(x) = 3x^2 + x^3$	$f'(x) = 6x + 3x^2$	1		

Wenn man den **Funktionswert**, … einer Funktio… n der Stelle x b… hnen will, muss man den Wert von x in die ______________ f(x) ein…tz…

Wenn man … g … **Funktion** od… Tangente … Stelle x berechnen will, muss man den W…rt … x in die ______________ $f'(x)$ einsetzen.

Aufgab… .7

Ableitungsregeln

Wie Sie bei den vorangegangenen Aufgaben sicherlich bemerkt haben, ist die Berechnung des Differenzialquotienten meistens sehr aufwendig und mühsam. Wenn man allerdings für die berechneten Beispiele jeweils die F… sfunktion vergleicht, kann man eine Gesetzmäßigkeit für das Ableiten … ßigkeiten vereinfacht sich der Vorgang des Ableit… die Herleitung weiterer Gesetzmäßigkeiten od…

… ie mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufg… 2.5 sowie Übung 2.1 selbst … mäßigkeiten für das Ableiten von Funktionen z… ergleichen Sie Ihre …mutung dann mit den im Schulbuch bzw. anderen geeig… ngegebenen Regeln.

Elementar…

Pot… … **x^n** **Ableitungsfunktion:** ______

… **Funktion: f(x) = a x^n** **Ableitungsfunktion: f** ______

…**regel:** **Funktion: f(x) = u(x)+v(x)** …**gsfunktion: f '(x**______

b) Berechnen Sie in den folgenden Aufgaben die Ableitungen jeweils genauso ausführlich wie in den zugehörigen Beispielen und ergänzen Sie die Texte in den Sprechblasen.

Funktion	Ableitungsfunktion
(1) $f(x) = x^6 \Rightarrow$ $g(x) = x^5 \Rightarrow$ (2) $f(x) = 7x^3 \Rightarrow$ $g(x) = 6x^4 \Rightarrow$	$f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$ $g'(x) =$ ______ $f'(x) =$ … $= 21x$… $g'(x) =$ ______ ______ … Term ax^n wird nach x ab-…leitet, indem man den vor-…ndenen Exponenten n als Faktor ___ das x schreibt und mit … multipliziert. Der ne… E…ponent entsteht, in-…em man vom vorhandenen Exponenten … subtrahiert.
(3) $f(x) = 5x = 5x^1 \Rightarrow$ $g(x) = 2x =$ ___ … $= ax =$ ___ $\Rightarrow$ $i(x)$ … ___ $\Rightarrow$	$f'(x) = 1 \cdot 5x^{1-1} = 5x^0 =$ … $g'(x) =$ ___ $=$ ___ $=$ ___ $h'(x) =$ ______ $=$ ___ $i'(x) =$ ______ $=$ ____ $=$ ___ Wenn der abzuleitende Term die Form ax hat, fällt das x nach dem Ableiten ______, da der neue Exponent von x den Wert __ annimmt und „irgendwas" hoch null immer __ ergibt. Es bleibt nur der Vorfaktor übrig.
(4) $f(x) = 4 = 4 \cdot 1 = 4 \cdot x^0$ $g(x) = 5 =$ ____ $=$ ____ $\Rightarrow$ … $\Rightarrow$	$f'(x) = 0 \cdot 4x^{-1} = 0$ $g'(x) =$ ______ $=$ __ $f'(t) =$ … Ein Term, der die Variable, nach der abgeleitet wird, nicht enthält, fällt ______, da er nach dem Ableiten den Wert __ annimmt.
(5) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5$ $g($…	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$ …$(x) =$ ___________ …ht der Funktionsterm …hreren Summanden, … der Summanden …trachtet und …von den anderen S…bgeleitet.

c) In der folgenden Tabelle sind weitere elementare Funktionen angegeben. L… Sie di… Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln ab. Formen Sie die Funktionsterme dazu ggf. so um, dass die Potenzregel für die Ableitung angewandt werden kann. Geben Sie die Ableitungsfunktion an… …ße… ohne gebrochene oder negative Exponenten an. Überprüfen Sie Ihre Erg… durch …lagen in geeigneter Literatur oder mit Hilfe von CAS

Funktion	Ableitungsfunk…
(1) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $g(x) = \frac{a}{x} =$ ____	$f'(x) =$ … $= -x$ … $\frac{1}{\ldots}$ …$) =$ ______ ______ $=$ ______
(2) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{\ldots}$ $g($…	… $2 \cdot x^{-2-\ldots}$ … $= -\frac{2}{x^3}$ $g'(x)$ ______ $=$ ______ $=$ ______
(3… $f(x) =$ … $x^{\ldots}$ $f(x) = a\sqrt{x} =$ ______	$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\ldots}$ … $\frac{\ldots}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $g'(x) =$ ______ $=$ ______ $=$ ______ $=$ ______

d) Berechnen … $\frac{1}{\ldots}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \sqrt{x}$ durch die Anwendung d… …g Ü1.11 im Arbeitsbuch „Grundlegendes …

Übungen

Ergänzende Übungsaufgaben zur Wiederholung und Vertiefung

Ü2.1: Erklären Sie unter Einbeziehung einer Skizze, was der Ausdruc… $\frac{…h) - f(…}{…}$ bedeutet und welcher Zusammenhang zwischen diesem Ausdruck u… …er Abl… …(x) einer Funktion besteht.

Ü2.2: Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{x}{…}$ …it Hil… … Differ…zialquoti…te…

Ü2.3: Berechnen Sie die Ableitung der Funk… f(x) = 2… - 4x -2 unter Ve…wendung des… Differenzialquotienten und üb…fen …as E…nis mit Hilf… Ableitungs…

Ü2.4: Berechnen Sie di… …ung der Fu… …n $f(x) = \frac{2}{…}$ mit Hilfe der Ab…ngsregeln.

Ü2.5: Ber… …die A…tung der Fu… …f(x) = $\sqrt[3]{x}$ mi… …lfe der Ableitungsregeln.

…6: …timmen Sie die Ab…ng der folge… Funktionen mit Hilfe von Potenz-, Summen- und …regel.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 + x^6 - 4…$ b) $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$

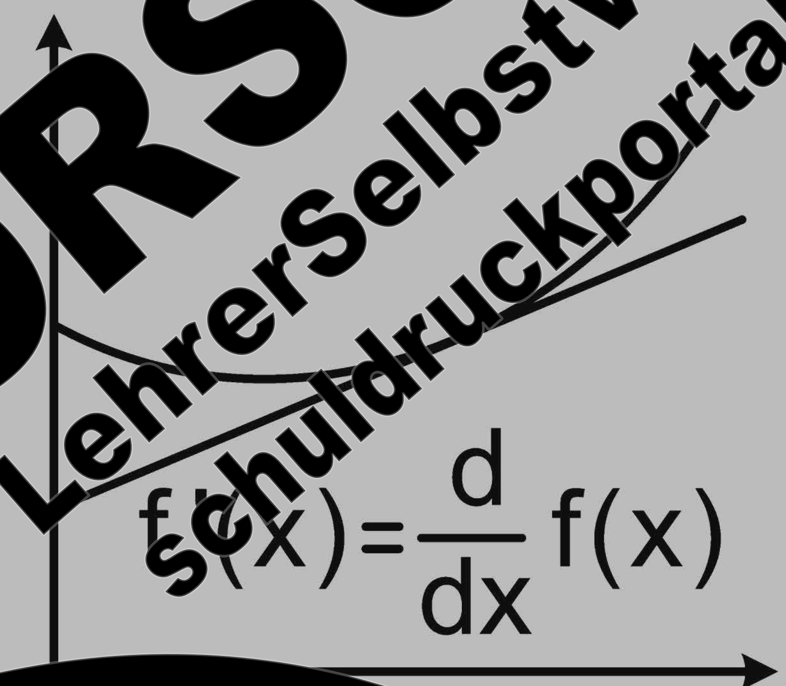
c) $v(t) = \frac{1}{t^2} - \sqrt{t} + x$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

Ü2… …der Stelle $t = \frac{1}{4}$

…Übungen: ____________________

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrech…ng selbstorganisier… …le…en



Kapit…

Grundlegende Anwen… …erenzialrechnu…

02-036-288

Gesamtw hnung selbstorganisiert erl
(Best
S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung

Aufgabe 3.1

Grundlegende Aufgabentypen

Wiederholen Sie die bisher gelernten Zusammenhänge hinsic h der Kurven, indem Sie die folgenden Sätze vervollständigen.

In einem Berührpunkt x_0 haben eine Funktion f(x) und i die ______________

Steigung. Wenn man den Wert x_0 in die Gleichu Fun f(x) ei setzt, erh en

___________________________. Wenn ma en Wert x_0 in leichung d bleitungsfunktion f´(x)

einsetzt, erhält man den Wert der ______________________ der Fu und der Ta te an der

Stelle x_0.

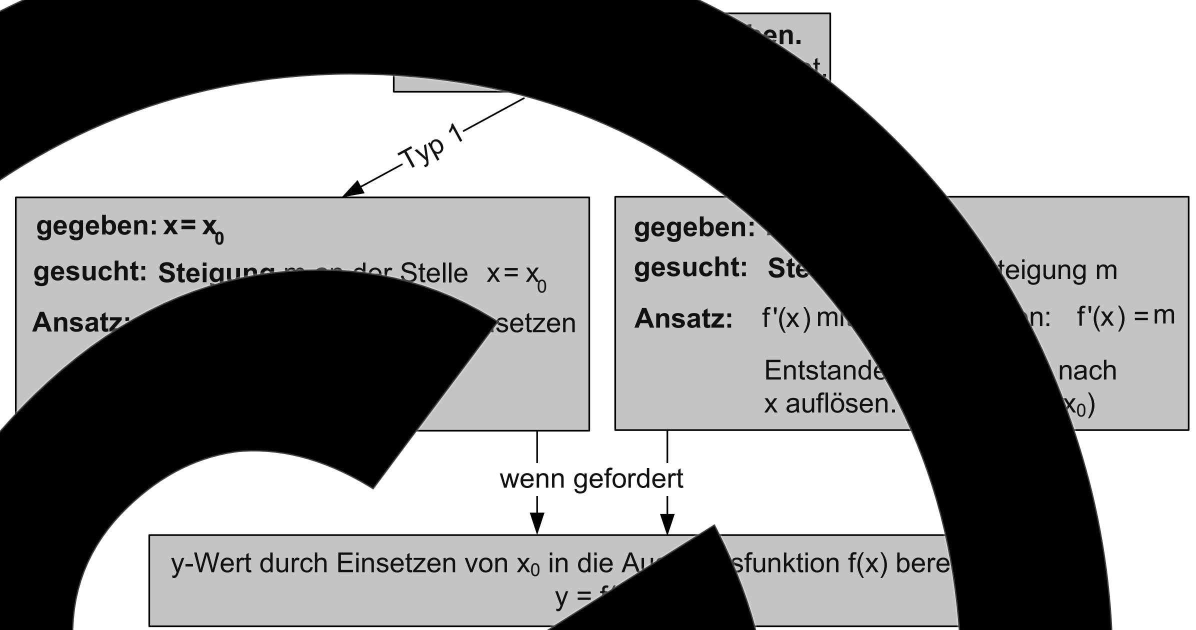
Dieser Zusammenhang zwischen einer Kurve, de Steigung einer ente und dem Wert der Ableitungsfunktion spiel viel nwen gsaufgaben Differenzia g eine zentrale Rolle. Prägen Sie sich daher d im fol Kaste ein.

Steig Funkti (x) an S e x_o	⇔	**Ste m_t der Tangen der Funktion (x) der Stelle x**	⇔	**Funktionswert der ersten Ableitung von f(x) an der Stelle x_o, also f '(x_o) = m bzw. f '(x_o) = m_t**

Infor 3.1

Die Aufgabenstellungen bei der A ndung der Differenzialrechnung führen im Wesentlichen auf zwei Aufgabentypen, die im Rahmen dieser Unterlagen mit Typ 1 und Typ 2 bezeichnet werden sollen. Verdeutlichen Sie sich die folgende Abbildung.

Überbl i der Anwendung der Differenzialrechnung



Aufgabe 3.2

Beispiel zu den grundlegenden Aufgabentypen der Differenzialrechnung

Verdeutlichen Sie sich das folgende Beispiel zu den Aufgabentypen 1 … d bea… Sie die nachfolgenden Übungen.

Beispiel:

Gegebene Funktion: **3f… + …**

1. Ableitung: **f '(x) = …**

Aufgabenstellung Typ 1:

Berechnen Sie die S…ung … Funkt… f(x) an der Stelle x = 2

Damit ist … Stelle … geg… mit: x = 2

Ans…

…set… von 2 in die erst… Ableitung f '(x) … Steigung m der F…ktion an d… geg…n Stelle bzw. d… Tangenensteigung m_t.

f '(2) = 2+1

f '(2) = 3

…ert berechnen (nur wenn gefordert)

$y = f(2) = \frac{1}{2}2^2 + 2 = 4$

Antwortsa…

Die F… die Stei…

Aufg…nstellung Typ 2:

…mitteln Sie die Stelle, an der die Funktion f(x) die Steigung 5 hat.

Damit ist die Steigung gegeben mit: m = 5

Ansatz:

Gleichsetzen von f '(x) mit m, denn die Steigung entspricht dem Funktionswert der ersten Ableitung (s. Kasten oben). Auflösen der entstandenen Gleichung nach x.

f '(x) = m
f '(x) = 5
x + 1 = 5
x = 4

y–We… wenn gefordert)

$y = f(4) = \frac{1}{2}4$…

Antwortsatz:

Die Funktion f(x) hat i… (12) die Steigung 4

Übung 3.1

Aufgabe zu Typ 1

Steigung m_t an der bekannten Stelle x_0 der Funktion f gesucht

Verfahren Sie bei der Berechnung der Steigung m wie im Beispiel zu Aufgabe 3.2

In der Abbildung unten ist die Funktion $f(x) = x^3 + x$ und Ihre Tangente an der Stelle … 3 abgebildet. Berechnen Sie die Koordi…ten d… Berührpunktes und die Steigung … Tange… bzw. die Steigung der Funktion … dies… …lle. Formulieren Sie einen Antwortsa…

Berechnen der Ablei… f '(…) = ______

1. Ansatz: m… (__) ______ =

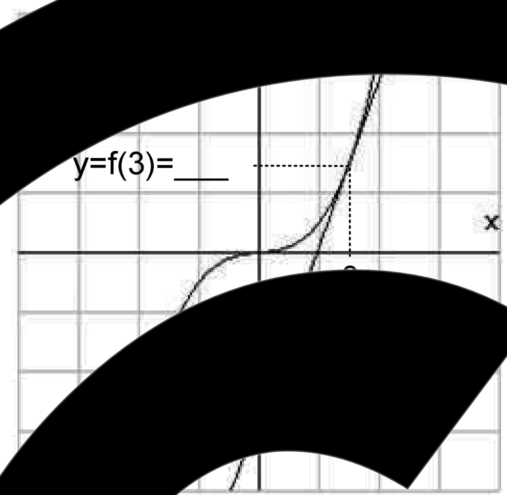
2. y-Wert: … = ______ = ___

… Antw…tsatz:

______

______

______



Aufgabe zu Typ 2

Stelle x der Fun… der bekannten Steigun… gesu…

Ve…fahren … bei de… Berechnung der Stelle x wie i… Beispiel … Aufgabe 3.2

a) Bere… Sie die Koordinaten, an der die …ktion u(x) = 2.5…² +5 die Steigung m = 8 hat.

…rechnen der Ableitung: u'(x) = ______

1. Ansatz Gleichung: u'(x) = m
   u'(x) = ____
2. Lösen der Gleichung
   ______=______
   ______=______
3. y-Wert: y = ______=________________
4. Antwortsatz:

______

______

b) Berechnen Sie die Stelle*, an der die Funktion u(x) eine Tangente mit der Steigung 0 hat.

…Gleichung: u'(x) = m
u'(x) = _____

2. Lös…
   ______
   ______
3. Antwortsatz:

______

______

*: 1. Wenn die Koordinaten gesucht … der x- und y-W… …et werden.
2. Wenn die Stelle gesucht wird, … ert berechnet w…

Übung 3.2

Die folgenden Aufgabenstellungen können ebenfalls mit den Ansätzen von Typ … Typ 2 …echnet werden. Allerdings ist hier der Wert x_0 bzw. die Steigung m nicht mehr e…lizit geg… Di… Werte müssen mit Hilfe von Zusatzüberlegungen bzw. Nebenrechnungen au… …gabe… …gabe bestimmt werden. Überlegen Sie jedoch jeweils, wenn nicht angegeben, …elc… …ufgabentyp vorliegt.

a) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $g(x) = x^2 - 6x$ an… … Null…

Hinweis: Aufgabe vom Typ 1

Ableitung berechnen: g'(x) = ________________

Nebenrechnung: Nullstellenberechnung … Bestim…ng von …

B…chn…g der g…uchten Steig… m und Antw…atz

b) Berechnen Sie di… …n dem die Funktion $k(x) = 2x^2 - 1$ die gleiche Steigung hat wie d…

D… …lizit gegeben, sondern hier ist die Infor… …ersteckt. Die Steigung wird anhand eine… … ermittelt.

…zuberlegung:

Da k(x) die gleiche Steigung wie die Gerade haben soll, gilt f… ___

Ableitung von k(x) … …'(x) = ________

Ansatz: …

Rec…

c) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $h(x) = 3x^2 - x + 2$ am y-Achsenabschnitt.

Ableitung berechnen: h'(x) = ________________

Aufgabe vom Typ __

Zusatzüberlegung zur Bestimmung von x: x = ____

Berechnung der Steigung m:

d) Berechnen Sie die K… …n des … P, an … die Funktion p(…) = …2x² + 4 die gleiche Steigung hat wie … …nkt… q(x) = 7x… + 2x – 5 … …n y-Achse…schnitt.

Hilfe: In di… …fgab… …d beide Aufga… …enthalt… Die …ufgabe muss daher in zwei Te… …erle… …rden.

E… Te… …gabe …m Typ 1:

Bes…nung der Steigung de… Funktion q(x) i… …em y-Achsenabschnitt.

…abe vom Typ 2:

…nnen, für welche Koordinaten die Funktion p(x) die … berechnete Steigung hat.

e) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = x^3 + 2x - 1$ im Schnittpunkt mit der G... n $g(x) = -x + 3$

Aufgabe vom Typ ____

Nebenrechnung zur Bestimmung von x:

...ng der Steigung m: m = f'(____) = ________________

...rgebnis: Für die Steigung gilt m = 5

f) Gegeben sind die Funktionen $u(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x$ und $v(x) = 2x - \frac{2}{3}x^3$.

An welchen Stellen haben beide Funktionen die gleiche Steigung?

Hilfe: Hier ist die Stelle x mit einer bestimmten Steigung gesucht, al... ine A... e vom Typ ___. Da m jedoch nicht direkt ermittelt werden kann, aber ... de S... gen gleich sein sollen, liefert der folgende Ansatz die Lösung.

Steigung u(x) = S...igung ...

u'(x) = v'(...

...rgebnis: $x_1 = 1$ und $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

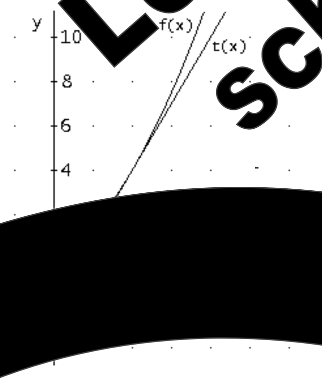
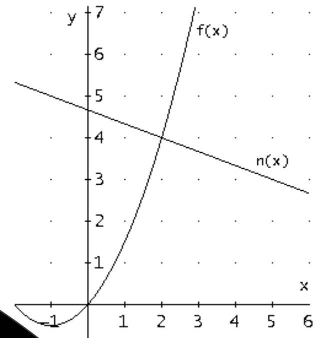
Aufgabe 3.3

Ermitteln der Tangente / Normale in einem bekannten Punkt der Funktion

Information:
Die **Normale** ist eine Gerade, welche orthogonal z... ...e bzw. im Berührpunkt von Tangente und Kurve orth...onal z... Kurv... ...ft.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die Gleichung ei...er Tang... zu e...teln. Die hier verwendete Methode entspricht von der Struktur dem Vorgehen, da... ...der rechnerischen Ermittlung von Geradengleichungen angewendet haben, wenn Sie das ... im ...itsbuch „G...legendes zu Algebra und Funktionen“ durchgearbeitet habe...

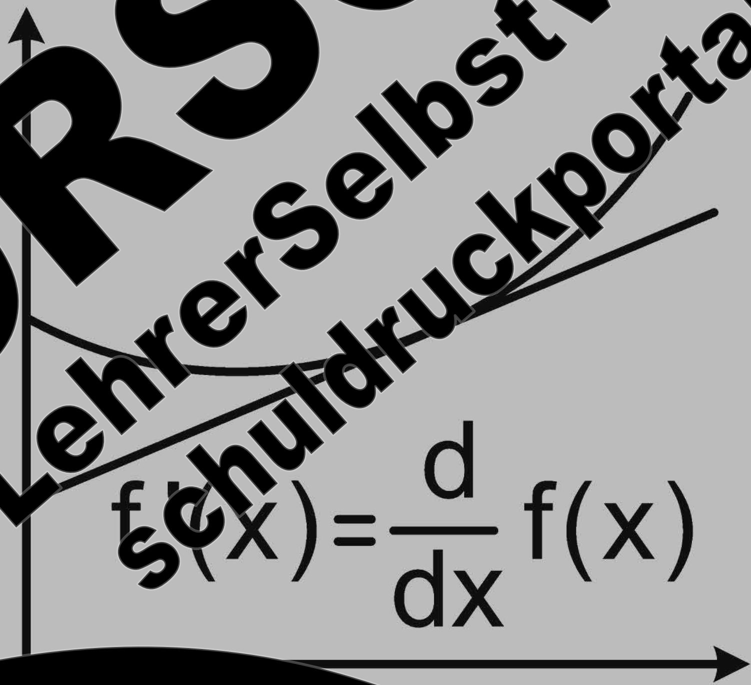
Verdeutlichen Sie sich jeweils die Vorgehens...se zur B...immung der Ta...ten und N...malen für die Ausgangsfunktion $\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x}$. Erl... Sie ... ...ch ... Bedeutu... ...Angaben d... ...en (1) bis (4).

Tangente: $y = m_t x + b_t$ an der ... x = ...	**Nor...le: $y = m_n x + b_n$ ... der Stelle x = 2**
(1) x = 2	(1) x = 2
(2) y = f(2) = 2 + 2 = ...	(2) y = f(...) ... + 2 = 4
(3) m_t ... (2) = ... = 3	(3) $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{3}$
(4) ... = y ... x = ... 3·2 = –2	(4) $b_n = y - m_n x = 4 - (-\frac{1}{3}) \cdot 2 = \frac{14}{3}$
Tangente: t(x) = 3x – 2	Normale: $n(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$
	
(1) ______	(1) ______
(2) ______ ______	(2) ______ ______
(3) ______ ______	(3) ______ ______
(4) ______ ______	(4) ______ ______

Übungen:______

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrech...ung selbstorganisier... ...rle...en



$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kapit...

Anwendung der Differenziall... – ...n Funktionsgrap...

02-036-288

Gesamtw[...]hnung selbstorganisiert erl[...]
(Best[...]
St[...]

[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[...]
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

Kapitel 4: Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von F[...]ktio[...]raphen

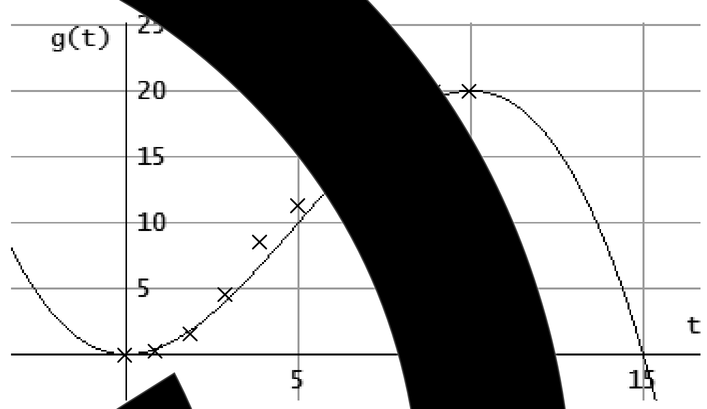
Anhand des Wachstums von Blattgemüse wurden in Aufgabe 2.1 die grundlege[...] Zusam[...]hänge zwischen der Steigung einer Funktion, ihrer Tangenten und der Bedeut[...] der Ste[...] [...]aß für den täglichen Zuwachs, also der **Wachstumsrate** der Pflanzen, mit zeichn[...] Meth[...] [...]arbeitet.

Zur Erinnerung:
In Aufgabe 2.1 wurde mit zeic[...] [...]den festge[...]t:
- Die Steigung der T[...]te b[...]er Kurv[...] gibt die Zu[...]rate der Funktionswe[...]
- Die Zuwachsra[...]er Funktio[...]swe[...] ist dann [...] größten, wenn die Steigung de[...]nktion a[...] größten ist.
- Die Ku[...]elch[...] Zu[...]srate de[...] F[...]ionswerte dars[...], hat ihren h[...] Punkt b[...] größten S[...]eigung der Aus[...] (vgl. Kasten Zus[...]menfassung der [...]rken[...]se au[...] Aufgabe 2.1)

Im Folgenden soll dies[...] [...]g unter d[...] Gesichtspun[...] [...]ass die Bewässerung der Pflanzen aut[...] d[...] [...]inen Compute[...] [...]ert werde[...] [...]ll, nun erneut aufgegriffen werden. Für eine Comp[...] [...] m[...] [...]in Program[...] [...]chrieben w[...]n. Das bedeutet, dass es nun nicht mehr aus[...]t eine [...] zu untersuchen, für die lediglich [...] Wertetabelle vorliegt, sondern man ben[...] fü[...] Progra[...]ierung eine[...] [...]ktionsterm, d[...] as Wachstum beschreibt. Eine mögliche Funkt[...] für d[...]stum u[...] [...]flanzen ist i[...] relevanten Bereich durch $g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$ [...]be[...] Die Ermittlung die[...] [...]nktion, also [...] Vorgang für einen anwendungsbezogenen Prozess ei[...]atisches Modell [...]ntwick[...] [...] in der Mathematik auch als Modellierung bezeichnet. Die Modell[...]g der Funkt[...] [...](t) wird spät[...] in Kapitel 5 aufgegriffen und soll an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden, da nun zunächst di[...] [...]tersuchung des Verlaufs von Funktionen mit Hilfe der neu erlernten Methoden der Differenzi[...]chnung im Fokus steht.

Aufgab[...]

[...] Graph der Funktion $g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$ ist in Abb. 4.1.1 dargestellt.



[...]. 4.1.1

a) Vergleich[...]
und 4.1[...]

Ma[...] [...]) im [...]rvall [0;10] einigermaßen [...]auf der modellierten Kurve

b) Berechnungen zur Steigung der Kurven

In Aufgabe 2.1 wurde die Kurve für das Wachstum mit den Werten der Tabel… …1 gez…net und die Steigung der Funktion näherungsweise mit Hilfe der eingezeichn…n Tange… …bzw. …en zugehörigen Steigungsdreiecken zeichnerisch ermittelt. Die Differe… …ung … …n die Möglichkeit, die Steigungen der modellierten Funktion g(t) rechneris… …zu … …men. Zeichnen Sie dazu zunächst an den Stellen t = 0, t = 0,5, t = 5 und t = 10 T…gente… …ellierten Graphen g(t) und berechnen Sie anschließend die Steigung… …einge… …eten Tangenten und damit gleichzeitig der Kurve an diesen Stellen.

Funktion: $g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$

Ableitung: $g'(t) =$ ________________

Steigung an der Stelle t = 0: g'(0) = ________________ = ___

Steigung an der Ste… g'(____) = ________________ = ___

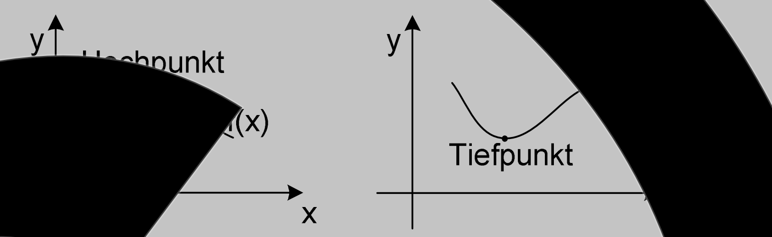
Ste…gu… …n der S… …t = 5: g'(____) = ________________ = ___

Stei…g an der Stelle t = 10: g'(____) = ________________ = ___

Information 1

…ktion

…t sich an den …llen x = 0 und x… …'(x) jeweils der Wert 0. Man kann solche, fü… …teristische Stellen, mit den Begriffen **Hochpu…** …**nkt TP** bezeichnen.



c) Untersuchung von Funktionen auf Hoch- und Tiefpunkte

(1) Lesen Sie zunächst die Informationen in den Sprechblasen und erläutern… …warum… …n die Begriffe Minimum und Maximum durch den Zusatz lokal bzw. rel… …ergänz… …em Sie den nachfolgenden Text vervollständigen.

Information 2:
Wenn eine Funktion an einer Stelle mit einer waagerechten Tangente einen **Tiefpunkt TP** besitzt, bezeichnet man das auch als lokales oder relatives **Minimum** oder **Extremwert** einer Funktion.

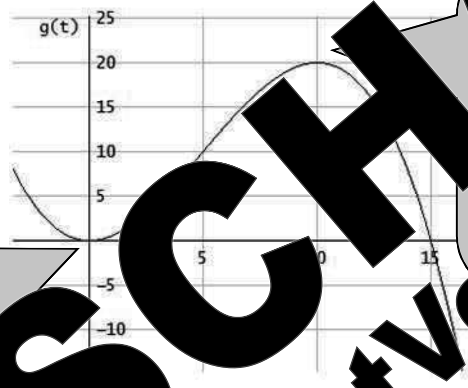


Abb. 4.1.2

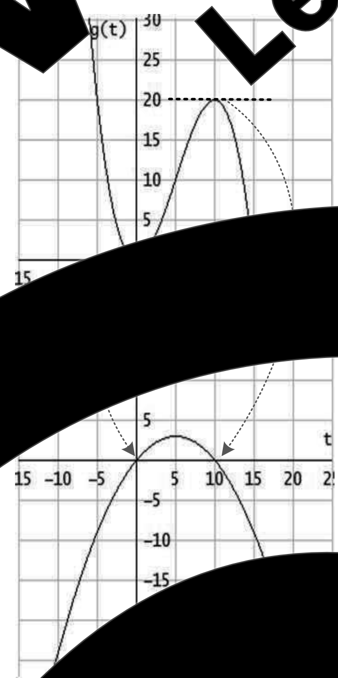
…for… …3:
…e …unktion an einer S… mit einer waagerechten Ta… …nte einen **Hochpunkt** **…P** besitzt, b… …ichnet man das auch… …es oder rela… **…ximum** oder **Ext…wert** einer Funktion.

Der Zusatz lo… …zw. … …tiv be… …Begriffe… …um und M… …m ist notwendig, da

____

____

(2) …erde… …e sich Ab… …1.3 und erg… …Sie den Lückentext sowie den nachfolgenden …rksatz.



…den Hoch- und Tiefpunkten der Funktion g(t), also an den Stellen t = ___ und t = ___, verlaufen die Tangenten ________________ und der Graph von g(t) hat hier die Steigung _____. Genau an den Stellen t = 0 und t = 10 liegen …stellen der Ableitungsfunktion g'(t). Das bedeutet, … …Hoch- und Tiefpunkte bei der Funktion g(t) … …stellen der Funktion _______ kennt. Mathem… …deutet das:
Man kann bei der Fun… …len mit Hoch- und Tiefpunkten, d.h. die Extre… …ktion g(t) berechnen, …dem man die Nullstellen der … …ermittelt.

…tremwerte von g(t): g'(t) =

…z Berechnung Extremwerte einer Funktion
…kann die Stellen, an denen eine Funktion f(x) **E…remwerte**, d.h. **H…** …**efpunkte** …tzt, berechnen, indem man die ________________ der Funktio… …Null setzt … die entstandene Gleichung **f'(x) = 0** …t.

(3) Berechnung der Hoch- und Tiefpunkte am Beispiel der Funktion g(t)

$g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$

$g'(t) = \_\_\_\_ t^2 + \_\_\_ t$

Extremwert: $g'(t) = 0$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$

$3t(-t+10) = 0$ $t_1 = 0$

$-t = -10$

…echnung der y-Werte

…) = 0 …P(0/0)

g(10) = … 40 + 60 = … HP(10/20)

d) Unters… lok… lsten Stellen einer Funkti…

N… de… ie nun … annt haben, d… man über die Berechnung der Nullstellen einer A… ung… e Extremwe… der ursprün… en Funktion berechnen kann, soll im Folgenden unt… ucht …, wie ma… rerisch die S… findet, an der die Gemüsepflanzen die größte Zuw… srate haben, also die größte Wass… zufuhr benötigen. Dazu werden erneut die …sgraphen von g… und von g'(t) … angezogen. Vervollständigen Sie den Lückentext.

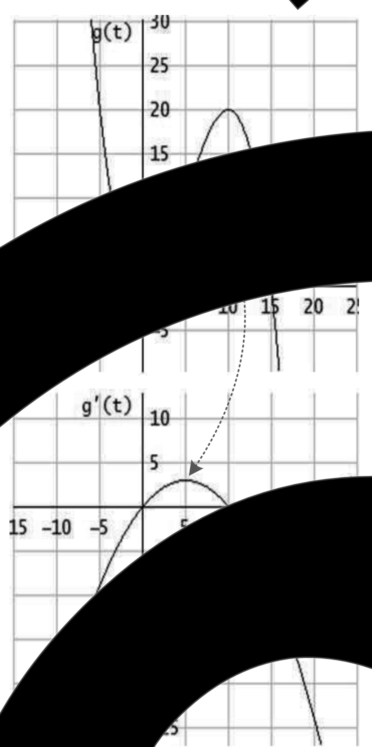
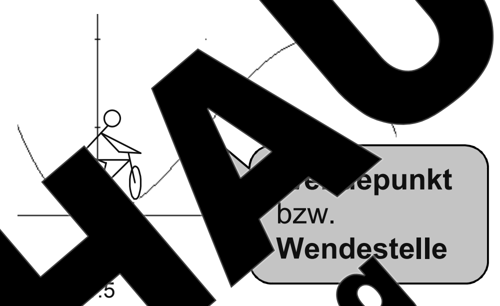


Abb. 4.1.4

Sie wissen bereits aus Aufgabe 2.1, dass die Pflanzen im Intervall [0; 10] an der Stelle mit der ________________ Steigung der Funktion g(t) auch die größte Zuwachsrate haben. Das ist am … also zum Zeitpunkt t = __ der Fall. Wenn man nun die … Ableitungsfunktion g'(x) untersucht, stellt man … ktion g'(x) genau an dieser Stelle einen ________ … enn man die x-Koordinate des Hochpunkts von g … t man also gleichzeitig die Stelle mit dem ________ von g(t). Laut Merksatz auf der vorangegangenen Se… lie Stellen, an denen …tremwerte vorliegen, indem ma… ________ einer …on Null setzt. Das bedeutet h… die …leitungsfunktion von g'(x) ________ …ss, d.h. man muss nun g'(x) ableiten. Damit hat man …sfunktion g(x) ______mal abgeleitet. Man bezeichn… nun entstandene Funktion … die **zweite Able…** …(x) und kennzeichnet d… Strichen als **g''(…** (Sprich: „g… …")

Ergänzende Information zur Stelle mit der größten Steigung

Stellen Sie sich vor, dass das Koordinatensystem in der Abbildung rechts auf der ebenen Erdoberfläche liegt (kein Berg!), und die eingezeichnete Kurve den Verlauf einer ebenen Straße darstellt, auf der Sie mit einem Fahrrad entlang fahren. Sie fahren gerade durch die Linkskurve auf die Rechtskurve zu. Markieren Sie die Stelle, an der sich der Einschlag des Lenkers von links nach rechts ändert, und vergleichen Sie die Position der Stelle mit der größten Zuwachsrate in Abb. 4.1.4



Vergleich: Die Stelle mit der größten Zuwa… rate un… e Stelle, an der die Kurve von einer Links- in eine Rechtskurve übergeht, sind ________________. Da sich das **Krümmungsverhalten** der Kurve hier wend… man diesen Punkt als **Wende…** oder **Wendestelle**.

Berechnung des … epu… am Beispiel von g…

$g(t) = -\ldots$

…$) = \ldots t^2 + \frac{6}{5}\ldots$

$g''(\ldots = \_\_\_\_ t + \_\_\_$

Wendepunkt: $g''(t) = 0$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$ Berechnung des y-Wertes

…) = _____ + _____ = 10 WP(5/10)

… bestätigt den abgelesenen Wert.

…erksatz Berechnung von Wendepunkten

Man kann den **Wendepunkt WP** einer Funktion f(x) berechnen, … ________________ Ableitung de… …ll setzt und die entstandene… ________ = 0, nach x … ändert die Funktion ihr Krümmung… und geht von ei… ________kurve, bzw. von einer Rechts________ …urve über. Liegt der Wendepunkt zwischen zwei Extremwerte… e Kurve im …nkt lokal die ________________ Steigung … die Funktionswe… …er die ________________rate.

Aufgabe 4.2

Die Wendetangente

Sie haben anhand des Bewässerungsproblems der Gewächshauspfla[...]nnt, [...]sichtlich des Wachstums der Pflanzen die Hoch- und Tiefpunkte, sowie der We[...]pu[...] eine zentrale Rolle spielen und gelernt, wie man diese Punkte rechnerisch bestim[...]n kann[...]h[...]olgenden, nun rein formalen, Aufgabenstellung sollen die bisher gewonnenen [...]nntni[...] Themenbereich Differenzialrechnung wiederholt, gefestigt und erweitert [...]erden.

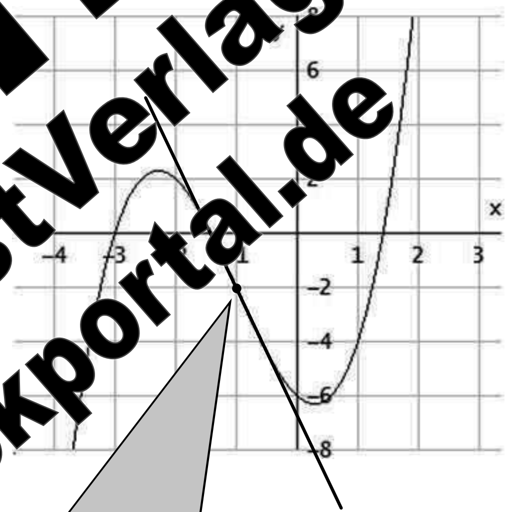
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$ [...]

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funkti[...]f zwei Dezimalstellen genau.

b) Berechnen Sie die Koordinate[...]verte auf zwei Dezimalstellen gen[...]

c) Zeigen Sie, dass [...]Wen[...]unkt [...]ordinat[...] WP(–1 / –2) hat.

d) Ermitteln [...]leic[...] der Wendeta[...]te mit einem [...]neris[...] Ve[...]en. Verwe[...]den Sie dazu ggf. da[...]eispiel [...]Aufgabe 3.3. al[...]fe.



Eine [...]ade, welche im Wendepunkt tang[...]tial zur Kurve verläuft, wird als **[...]detangente** bezeichnet, obwohl sie [...]ie Kurve nicht nur berührt, sondern schneidet. (Vgl. Aufgabe 2.1 g))

Abb. 4.2.1

Raum für Rechnungen:

Aufgabe 4.3

Die Bedeutung der zweiten Ableitung als hinreichendes Kriterium für das ... gen v... Hoch- und Tiefpunkten

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0{,}25x^3 + 0{,}75x^2$. Bearbeiten Sie die Aufgabenteile a) bis e) und fertigen Sie anschließend mit den Hinweisen in f) ein Zeichnung des Graphen von f(x) an.

Abb. 4.3.1

a) Begründen Sie, dass bei f(x) für für $x \to \pm\infty$ gilt:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to +\infty$

Die Funktion f(x) verhält sich f... x ...

die Funktion f(x) ...

b) Ermittel... rste... zweite Ableit... der Fu... on f(x)...

... = ____________________

f''(x) ____________________

c) Zeigen Sie durch Rechnung, da... die Funktion f(x) an den Stellen 0 und 3 jeweils eine Nullstelle hat. Tragen Sie die Punkte im Koordinatensystem in Abb. 4.3.1 ein und ergänzen Sie anschließend den nachfolgenden Satz.

Nullstell...

____________ = 0 ⇒ $x_{1,2} = 0$

⇒ ____________ = 0

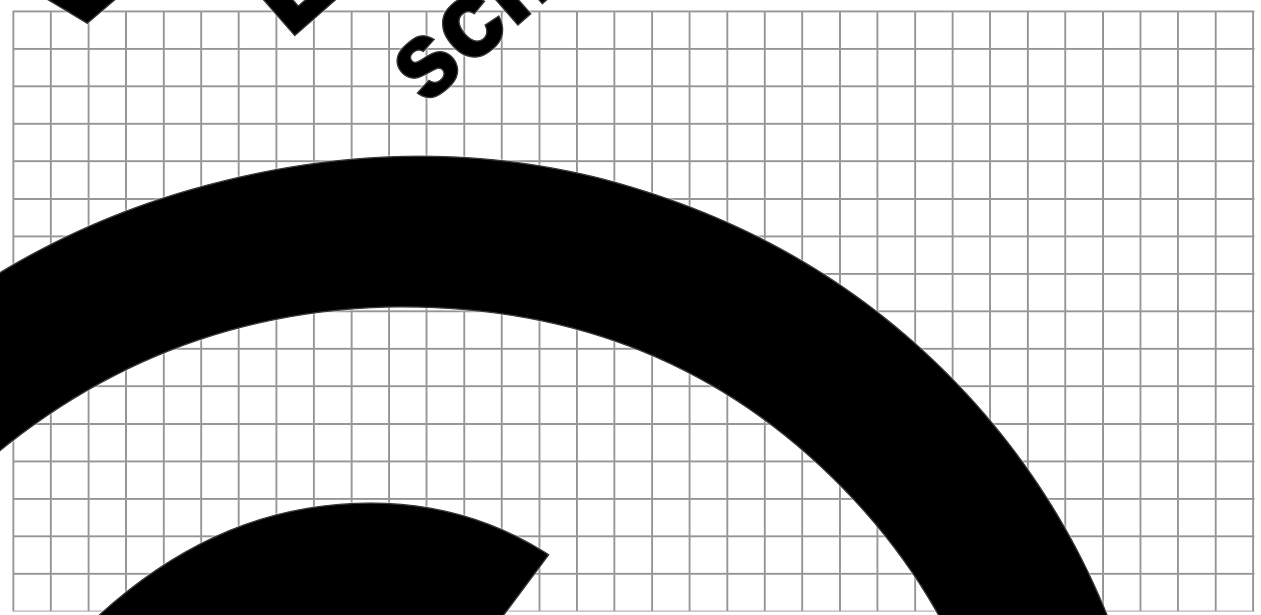
⇒ ____________ Koordinaten de...

⇒ $N_{1,2}$(___ / ___) un... ___)

...ng der Nullstellen liefert an der Stelle x = 0 eine ____________ ...sung. Damit ... bereits bei der Berechnung der Nullstellen ...formation, dass h... ...hrpunkt und ... ____________wert vorliegt.

d) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion, außer im Ursprung, im Pu... (2/1) ei... ...eiteren Extremwert besitzt. Tragen Sie die Koordinaten als Punkte im Koordinatensy... in Abb... .1 ein.

... Best... en Sie durch Rechn..., dass der ... depunkt die Koordinaten WP(1/0,5) hat, und tragen ... n Punkt ebenfa... ...m Koordinat... ...tem ein.



f) Ze... ...ktion

...ge aller eingetragenen Punkte und einer Betrachtung des Verhalte... ±∞ kann ...erkennen, dass der Extremwert im Ursprung ...efpunkt und der E... ...an der Stelle ... Hochpunkt sein muss. Wie man rechne... ...eisen kann, ob ... TP vorliegt, ...ufgabenteil g) erläutert. Zeichnen Sie ...er Funktion, inde... Punkte ...binden.

g) Die Bedeutung der zweiten Ableitung für das Vorliegen von Hoch- und Tiefpun

In den folgenden Abbildungen sind die Funktion f(x) = – 0,25x³ + 0,75x² sow i weit beliebig gewählte Funktionen abgebildet. Zu jeder Funktion ist im gleichen Di amm d ite eitung dargestellt. Vergleichen Sie in allen Abbildungen, welches Vorzeich Wert iten Ableitung an den Stellen haben, an denen die jeweilige Ausgangsfu on och- und Tiefpunkte hat.

$f(x) = -0{,}25x^3 + 0{,}75x^2$

$f'(x) = -0{,}75x^2 + 1{,}5x$

$f''(x) = -1{,}5x + 1{,}5$

Am Tiefpunkt der Funktion f(x) hat der Fu nswert

f ''(x) ein ____________________ eich

Am Hochpunkt der Funktion f(tionswert von

f ''(x) ein ____________________ Vorzeic .

f(x) = x³ 2x

f '(x) = +6x

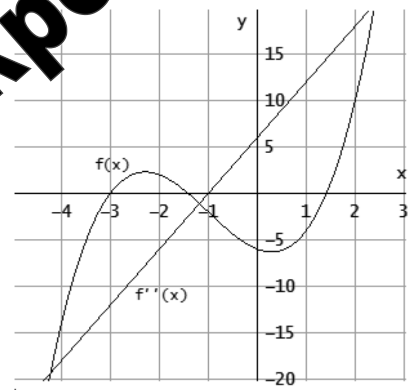
f '' +6

A efp ktion f(x) hat der Funktionswert von

f ''(in ____________________ Vorzeiche

punkt der Funk f(x) hat Funktionswert von

f ''(x) ein ____________________ rzeichen.



$f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1$

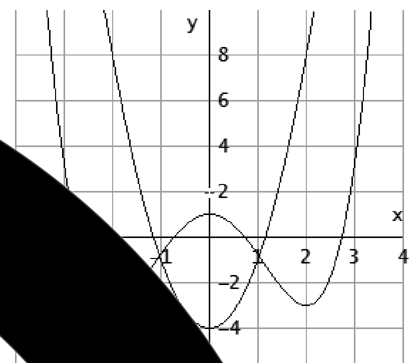
$f'(x) = x^3 - 4$

f ''(

jeweils ein ____________________ Vor

Hochpunkt der Funktion f(x) hat der Funktionswert von

f ''(x) ein ____________________ Vorzeichen.



Aus den drei B ende Zusammenhang zwis liegen von Hoch- und Tiefpu Vorzeichen der zweiten Ablei Stellen erkenn

M
le mit waagerechter Tangente bzw. mit der Steigung Null liegt der vor, wenn die folgenden **hinreichenden Bedi ungen** erfüllt sind
punkt einer Funktion ist der Funktionswe bleitung ____________________.
unkt einer Funktion ist der Funktio itung ____________________.

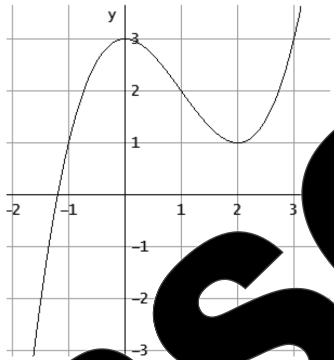
Aufgabe 4.4

Zusammenfassung und Vertiefung bisheriger Erkenntnisse zur Bedeutung Ablei en

Ermitteln Sie die x-Koordinaten der charakteristischen Stellen jeweils Ablese eichnung und ergänzen Sie anhand der Ergebnisse fehlende Angaben bzw. ma richtig Angaben. Vervollständigen Sie anschließend den Merksatz auf der folgen en Sei

Funktion:

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3$



Charakte che en von f(x)

Nu x = –1,2

relative imum (HP von f x): x = ______

rela es Minimum (T von f(x): x = ______

rgang - in Links rve bzw. We punkt (WP) vo f : x = ______

1. Ableitung

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2$

C akteristisch Stellen von f '(x)

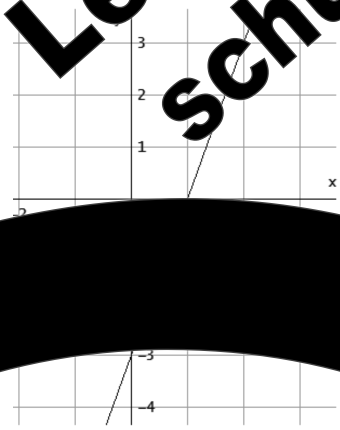
Nullstelle 1 vo (x): x = ______

Nullst e 2 von f '(x): x = ______

rela es Minimum(TP) von f '(x) x = ______

2.

f ''(x) = 3x – 3



Charakteristische Stellen von f ''(x)

Nullstelle von f ''(x): x = ______

Vergleich der charakteristischen x–Werte:

- Wenn die Funkti Funktionswerte von f '(x) posi ull.
- Wenn di nktionswerte von f '(x) positiv / n
- Die nd die Nullstellen von ____________.
- nkt von f(x) ist die Nullstelle von ____________.
- punkt von f(x) sind die Funktionswerte von f sitiv / negativ / nu
- unkt von f(x) sind die Funktionswerte / negativ / null.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Die Bedingung, dass an Extremwerten die 1. Ableitung den Wert null annehmen muss, wird auch als **notwendige Bedingung** für einen Extremwert bezeichnet.

Die Bedingung, ... bei Vo... en eines Extremwerts die 2. ...leitung ... iner oder g... ...ull sein ... d auch als **hin... ...Bedingung** für einen Extremw... be...

Merke:

An den Hochpunkten einer Funktion f(x) gi... ...(x) = ____ und f ''(x) ____

An den Tiefpunkten einer Funktion f(x) g... f '(x) ____ und f ''(...) ____

Am Wendepunkt einer Funktion ... gilt: ... = ____

Sie k... ...n jet... ...ichtige Kriterien, mi... de... man den Verlau... ...untersuchen ... Mit den b... ...nden ...spielen in Aufg... 4... ...ird jedo... ...ch, da... ...se ... ien, insbesond... bei ganzrat... ...en Funk... ...n 4. ...nd höheren Grades, **nicht a...chen**.

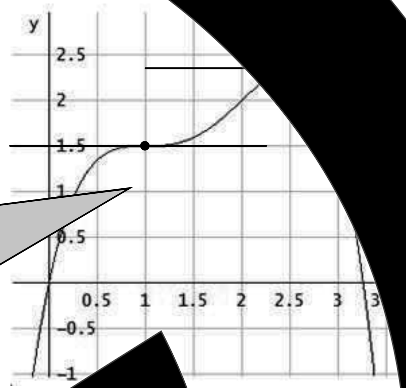
Aufga... ...5

Erweiterung der Betrachtungen ... Funktionen mit Sattelpunkten und „topfförmigen Extremwerten"

a) Funktionen ...

... ...ph der Funktion einschließlich der ... Tangenten ist in Abb. 4.5.1 darge...

Die Funktion hat an der Stelle x = 1 zwar eine waagere... keinen Ho... einen ... We... W... ...e oder ...kte.



(1) Ermitteln Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f(x)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 5x$$

$f'(x) =$ ____________________

$f''(x) =$ ____________________

(2) Berechnung von Extrema bzw. Stelle... ...t waagerechte... ...angente. ...rgänzen Sie die Rechnungen und den Text.

Extremstellen : $f'(x) =$ ____

$-2x^3 + 9x^2 - 12x$ ...

Da $x_1 = 1$ die G...chun... ...st, e... ...ie Poly...division durch (x – 1).

$(-2x^3 + ... x + 5) : (x - 1) = -2x^2 + 7x - 5$

$-2x^2 + 7x - 5 = 0$

____ $= 0$

$x_{2,3} = \text{—} \pm \sqrt{\text{—}} = \text{—} \pm \sqrt{\text{—}}$

$x_{2,3} = \text{—} \pm \text{—}$

$x_2 = 2{,}5$

$x_3 = 1$

Zur Erinnerung ... Der N... ... ...g an einem HP kleiner al... ...an einem TP größer als null ist.

Hinreichende Bed.: $f''(2{,}5) = -6 \cdot 2{,}5^2 + 18 \cdot 2{,}5 - 12 = -$ ... liegt ein HP vor.

$f''(1) = -6 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 12 = 0$ ... ...re Untersuchung ... Stelle notwendig.

... ...stelle x = 1 nimmt den Wert null an. D... ...e ...g für einen Hoch- oder Tiefpunkt nicht e... ... muss diese Stelle weiter untersuchen.

...erkung: Ein Hinweis auf das Vorliegen eines Sattelpunktes bes... bei dieser Aufgabe darin, dass d... ...ung x = 1 bei der Berechnung der Extremwert... ...uftritt.

(3) Berechnung von Wendestellen bzw. Wendepunkten. Ergänzen Sie die Rechnung und den Text.

$\text{Wendestellen}: f''(x) = \_\_\_$

$-6x^2 + 18x - 12 = 0$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$

$x_{1,2} = \text{—} \pm \sqrt{\quad} = \text{—} \pm \sqrt{\text{—}} = \ldots$

$x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 1$

Da das ... wendige Kriterium für einen Wendepunkt erfüllt ist, ... besitzt ... die Funktion an den Stellen $x_1 = 2$ und x_2 ... jeweils einen Wendepunkt besitzt. Da Sie unter Punkt (2) bereits festgestellt haben, dass an der Stelle $x_2 = 1$ die 1. Ableitung den Wert ... annimmt, und die Tangente an dieser Stelle damit waagerecht verläuft, besitzt die Kurve an dieser Stelle einen Sattelpunkt, also einen Wendepunkt mit waagerechter Wendetangente. Dass dieses Untersuchungskriterium allein nicht ausreicht, um eindeutig auf einen Wendpunkt zu schließen, sondern dass man auch hier noch ein hinreichendes Kriterium benötigt, werden Sie anhand der folgenden Aufgabe erkennen.

b) ...en mit „topfförmigem" Hoch- oder Tiefpunkt

Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^4 - 1$. Das ist eine um 1 nach unten verschobene Parabel 4. Grades, die man anhand der Regeln zum Verschieben von Funktionen skizzieren kann und die in Abb. 4.5.2 dargestellt ist.

... lauf der Funktion ... einem Topf ähnelt, wird in diesen Unterlagen der Begriff „topfförmiger" Tief- bzw. Hochpunkt verwendet.

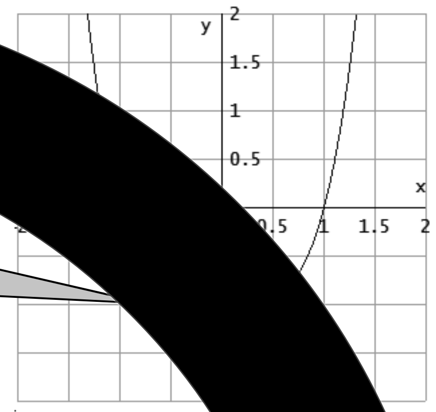


Abb. 4.5.2

(1) B... ...ungen der Funktion h(x).

$h(x) = x \ldots$

$h'(x) = \_\_\_\_\_\_$

$h''(x) = \_\_\_\_\_\_$

(2) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion sowie die Extremalstellen und Wende...en, in dem Sie die folgenden Rechnungen vervollständigen. Vergleichen Sie die E...nisse je...s mit Abb. 4.5.2, und ergänzen Sie den Ergebnistext.

$\text{Nullstellen}: h(x) = 0$

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$

$x^4 = 1$

$x = \pm\sqrt[4]{1}$

$x = \pm 1$

Vergleich:

Das Erg...nis sti... ...eichnung ______________.

$\text{Extremwerte}: h'(x) = 0$

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$

$x^3 = \ldots$

$x_{1,2,3,} = \ldots$ (D... Lösung)

hin...ende Bedingung:

$h''(0) \ldots 0 \Rightarrow$ kein... Bestätigung ... für den TP

Vergleich:

Das Ergebnis stimmt mit der Zeichnung überein ... zeigt, dass die Funktion an der Stelle x = 0 die Steigung ______ hat. Die hinreichende Bedingung für einen Extremwert ist jedoch mit f''(x) = 0 nicht erfüllt, obwohl die Funktion bei x = 0 tatsächlich einen _________punkt besitzt. D.h. man muss die Stelle weiter untersuchen.

$\text{Wendepunkte}: h''(x) = 0$

$x_{1,2} = \_\_$ (Doppelte Lösung)

Vergleich:

... Ergebnis zeigt, dass die notwendige ... für einen Wendepunkt an der Stelle x ... _______ ist, obwohl kein Wende...

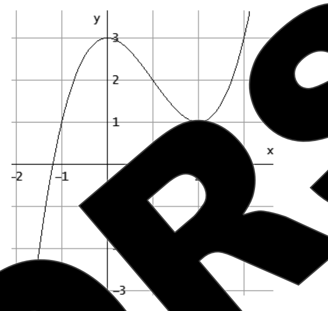
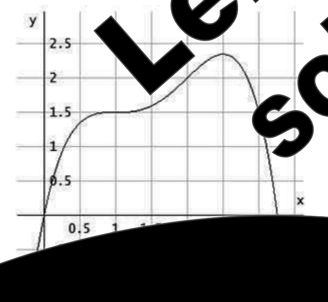
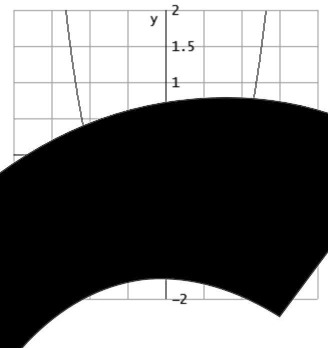
Ergebni... ... Untersuchungsmethoden re... in dieser Aufgabe ... nicht aus, um Hoch-, Tief- und ... eindeutig zu ... müssen die Kriterien ergänzt werden ... bisher:

Ermittlung E...mwerte:	h'(x)	= 0	Testen mit de...	...g f''(x)
Ermittlung Wendepunkte:	h''(x)	= 0	Testen mit ?	

Es liegt nahe ... 3. Ableitung zu t... Wendepu... Tiefpunkt bzw. H... vorliegt.

c) Die 3. Ableitung als Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunkts

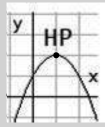
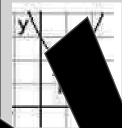
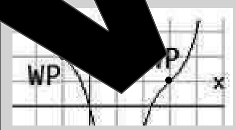
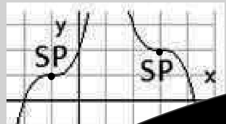
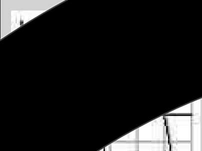
Die Verwendung der 3. Ableitung zur Bestätigung des Vorliegens von Wendp… n soll … rein empirisch anhand der bisher in Aufgabe 4.4, 4.5 a) und 4.5 b) unters… ten Fu… vorgenommen werden. Markieren Sie jeweils die Wende- bzw. Sat… in de… ungen, bilden Sie für die Funktionen jeweils die dritte Ableitung und setzen … an… ßend die x-Werte der Wende- und Sattelpunkte in die 3. Ableitung ein. Vergleiche… Sie ans… Ergebnisse, indem Sie den Lückentext auf der folgenden Seite ergänzen.

Aufgabe	Abbildung	Wende- bzw. Sat… kt an der St…	…bleitungen / … der dritten Ableitung … Stelle x
4.4		We… epunkt bei x = 1 ⇒	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 …$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$ $f''(x) = …x - 3$ $f'''(x) = \_\_\_\_$ $f'''(1) = 3$
4.5 …		… x = 1 ⇒	$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 5x$ $f'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$ $f''(x) = -6x^2 + 18x - 12$ $f'''(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_$ $f'''(1) = \_\_\_\_ \cdot 1 + \_\_\_\_ = 6$ $f'''(2) = \_\_\_\_ \cdot 2 + \_\_\_\_ = -6$
…5 b)		„topfförmiger" Tiefpunkt bei x = 0 ⇒	…$x^4 - 1$ $f'''(…$ $f'''(0) = …$

Vergleich:

Bei allen Funktionen, bei denen ein Wendepunkt bzw. auch ein Sattelpunkt v… t, ergi… ch beim Einsetzen der entsprechenden x-Werte in die 3. Ableitung der Fun… Wert, … ________________ Null ist. Für die Funktion h(x), die an … ser Ste… ein … örmigen Tiefpunkt besitzt, ergibt sich der Wert _________. Da dieser Zu… mme… für … ere Funktionen gleichermaßen gezeigt werden kann, soll der folgende … atz fo… iert werde…

Überblick charakteristische Pun… Fun…

Charakteristischer Punkt		1. Ablei…	2. Abl…	3. Ableitung
	…m … n …pu… gilt:	**…twendige** Be…ngung: **f '(x) = 0**	**h…reichende** Be…ngung: **f ''(x) < 0**	
	…m normalen **Tiefpunkt** … gilt:	**notw… ige** B…ngung: **…(x) = 0**	**hinreichende** Bedingung: **f ''(x) > 0**	
	Am **Wendepunkt** WP gilt:	**f´(x) ≠ 0**	**notwendige** Bedingung: **f ''(x) = 0**	**hinreichende** Bedingung: **f '''(x) ≠ 0**
	Am **Sattelpunkt** SP gilt:	**f '(x) = 0**	**notwendige** Bedingung: **f ''(x) = 0**	**hinreichende** Bedingung: **f '''(x) ≠ 0**
	… **Hochpunkt** und **Tiefpunkt** gilt:		**…''(x) = 0**	**f '''(x) = 0**

…wichtig:

…werte, die sich bei den **hinreich… …ngungen** …nsetzen der x-Werte von Hoch- und … in die zweite …ng und der x-Werte von Wendepunkte… Ableitung …ben, sind reine **Testparameter** und werde… Nachweis für das Vorliegen dieser charakteristischen Pu… det.

Diese Werte dürfen auf kei… Fall mit dem Fun… (x) an der Stelle x verwechselt w… nktionswerte erh… wenn man einen x-Wert i… gsfunktion einse…

Ergänzende Informationen zum Nachweis von chararakteristischen Stellen:

Bei komplizierteren Funktionen ist es oftmals sehr aufwendig, den Nachweis für ... Hoch... er Tiefpunkt bzw. für Wendepunkte über die hinreichenden Bedingungen ... f ''(x) bz... (x) ... hren. Dies gilt vor allem, wenn bei der zweiten bzw. dritten Ableitung umfan... echn... uftreten. Im Prinzip lassen sich die obigen Beispiele im Polynomgrad immer wei... so dass zum Nachweis – also der hinreichenden Bedingung für das Vorlieg... von HP ... die vierte, fünfte usw. Ableitung benötigt werden. Es ist auch möglich, den Nac... wie ... u führen:

(1) Wenn für die Ableitungsfunktion f '(x) an der Stelle x_o ...
f '(xₒ) = 0 und die **Funktionswerte der A... gsfunk... an xₒ**

- einen **Vorzeichenwechsel von – na...** haben, ... liegt bei x_0 ... **latives Minimum** von f(x) vor
- einen **Vorzeichenwechse...** ... haben, so liegt ... x_0 ein **rela... Maximum** von f(x) vor
- **keinen Vorze...** ... haben, so liegt ... ein **Sattel...** von f(x) vor

(2) Argu... tative B... ndungen für das ... orliegen von Ex... mwerten, Wendepunkten bzw. ... ten un... Anwendung e... mathemati... rrekten Fachterminologie, wenn aus bereits ... gte ... ungen eind... tig auf den V... f der Funktion geschlossen werden kann. ... ben... ann au... ertetab... ückgegriffen werden.

Übung 4.1

Anhand der dieser Übung sollen die oben formulierten Zusammenhänge zwischen dem Verlauf einer Funktion, den Ableitungen sowie notwendigen und hinreichenden Bedingungen geübt und vertieft werden.

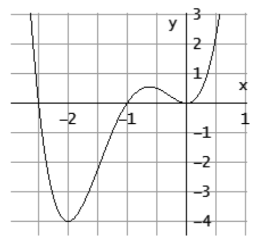
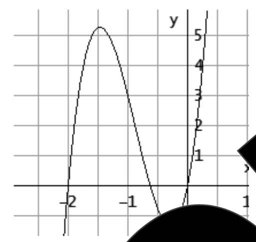
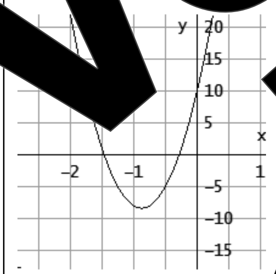
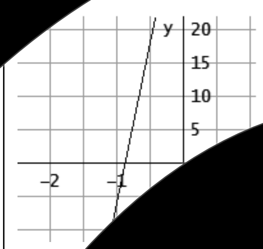
Wen... uchung des Verlaufs von Funktionen an. ... leitungen dargestellt und die Stellen ... Hoch-, Tief- und Wendest... ktionen liegen, sind jeweils ... d müssen **nicht erneut berechnet** wer... für jede der gegebenen ... die folgende Aufgabenstellung.

a) Berechnen Sie jeweils die Ableitungen der gegebenen Funktione... e h(x) und tragen Sie die Funktionsterm... nen Stellen ein.

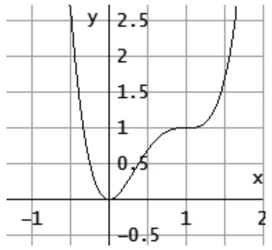
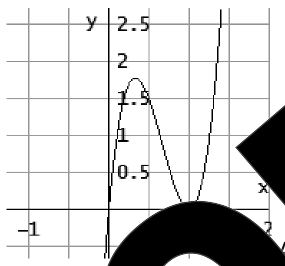
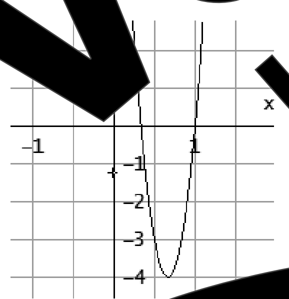
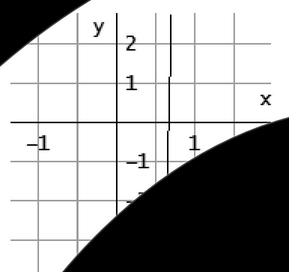
b) Markieren ... und ggf. Sattelpunkte jeweils in ... 3a, 4.5.4a und 4.5.5a...

c) P... Einsetzen d... ereits gegebenen Werte in die entspreche... ungen, ob die ... Bedingungen erfüllt sind. Kreuzen Sie danach an, welche Sch... gen aus dem ... on Hoch-, Tief-, Wende- bzw. auch Sattelpunkten aus dem Ergeb... hinreichenden ... gezogen werden können. Runden Sie dab... sinnvoll.

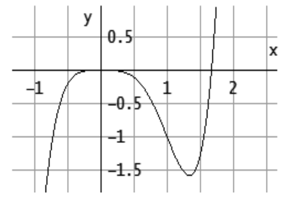
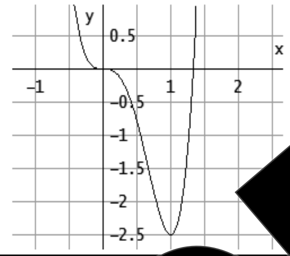
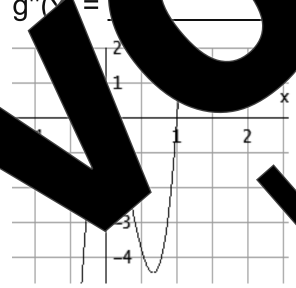
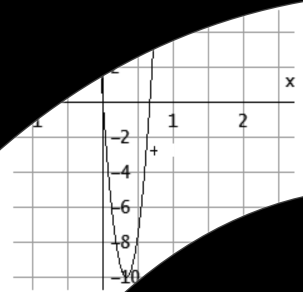
... ren Sie jeweils ein Ergebnis, indem S... xt ausfüllen.

Funktion	Bereits vorgebene bzw. berechnete Werte
f(x) = 2x⁴ + 7x³ + 5x²  Abb.4.5.3a	f '(x) = 0 ergibt $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -\frac{5}{8} = -0$... f ''(x) = 0 ergibt $x_1 \approx$ ...66; $x_2 \approx -$ ...4 Markieren S... die H... ief- u... Wendepu... Abb. 4.5.3a.
1. Ableitung f '(x) = ______________  Abb. ...	**Die no... ndige Be... g für Extre... rte ist:** f '(–2) ______ ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt f '(–0,62...) = ______ ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt f '(0) ______ ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt
2. Ablei... f ''(... ______________  Abb.4.5.3...	**Über... üfung hinre... de Bedingung für Extremwerte:** f ''(–2) = ______ ⇒ ❍TP ❍HP ❍ Vermut. SP f ''(–0,625) = ______ ⇒ ❍TP ❍HP ❍ Vermut. SP f ''(0) = ______ ⇒ ❍TP ❍HP ❍ Vermut. SP **... notwendige Bedingung für Wendepunkte ist:** Runden Sie sinnvoll. f '''(–1,466) = ______ ≈ 0 ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt ______ ≈ 0 ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt
______________ 	**Überp... dingung für Wendepunkte:** f '''(–1,466) ≈ ______ ... WP und ❍SP f '''(– 0,284) ≈ ______ ... und ❍SP

E... sprechend zur Abbildung zeigen die Berechnungen, dass die Fu... den Stellen ... d x = ______ jeweils einen Tiefpunkt, an d... x = ______ eine... kt und an ... x = ______ sowie x = ______ eine... besitzt.

Funktion **$g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$**  Abb.4.5.4a	Bereits berechnete Werte: $g'(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $g''(x) = 0$ ergibt $x_1 = \frac{1}{...}$ x_2 ... Markieren Sie die H... ...endepunkt... Abb. 4.5.4a.
1. Ableitung g'(x) = ______________  Abb.	**Die notw... ...dige Bedingu... für Extre...te ist:** g '(0)... ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt g '(... ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt
2. ...leit... g''(x)... 	**Ü...prüfung hin...chende Bedingung für Extremwerte:** g ''(0) = ________ ⇒ ❍TP ❍HP ❍ Vermutung SP g ''(1) = ________ ⇒ ❍TP ❍HP ❍ Vermutung SP **...notwendige Bedingung für Wendepunkte ist:** $g''(\frac{1}{3})$ = ____________ ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt
	**Überp... ...ingung für Wendepunkte:** $g'''(\frac{1}{3})$ __________ ...P und ❍SP g '''(1) __________ ...d ❍SP

E... ...sprechend zur Abbildung zeigen die Berechnungen, dass die Fu... ...n der Stelle ... ...nen Tiefpunkt, an der Stelle x = _____ ein... ...epunkt und an de... ______ ...punkt besitzt.

Funktion **$h(x) = 1{,}5x^5 - 2{,}5x^4$**  Abb.4.5.5a	Bereits berechnete bzw. vorgegebne Werte... $h'(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{4}{3}$ $h''(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ Markieren Sie die ... ...endepunkte ... Abb. 4.5.5a.
1. Ableitung g'(x) = ______________ 	**Die notwe... ...edin... für Extremw... ist:** ...(0) = ... ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt $h'(\frac{4}{...})$ = ... ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt
2. Ableitu... g''(x) = ...  Abb.4.5.5c	**Überpr... ...hinreichende Bedingung für Extremwerte:** h''(0)... ⇒❍TP ❍HP ❍Vermutung SP $h''(\frac{4}{3})$... ⇒❍TP ❍HP ❍Vermutung SP **Die ...twendige Bedingung für Wendepunkte ist:** h''(0) = __________ ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt h''(1) = __________ ❍ erfüllt ❍ nicht erfüllt
3. Ableitu... 	**...eichende Bedingung für Wendepunkte:** h'''(0)... ❍WP und ❍SP h'''(1) __________ ...P und ❍SP

Ergeb... ...g zeigen die Berechnungen, dass die F... ...an der Stelle x = ...iefpunkt und an der Stelle x = _____ einen Wendepunkt besi... ...ung hat die F... ...waagerechte Tangente. Die hinreichende Bedingung für Wendep... ...dass hier ______________ vorliegen kann. Es ... daher nur um ei... ...nigen" ...handeln.

Übung 4.2

Anzahl von Hoch-, Tief- und Wendepunkten bei ganzrationalen Funktionen [illegible] 4. Ordnung

Im Folgenden sind jeweils die Funktionsterme ganzrationaler Funktionen [illegible] gegeben.

Ermitteln Sie jeweils die geforderten Ableitungen und ergänzen Sie den [illegible]:

a) Ganzrationale Funktionen 2. Grades

f(x) = $ax^2 + bx + c$

f'(x) = ________________

f''(x) = __________

- Bei der Berechnung der Nullstellen entsteht eine Gleichung __.Grades. Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 2. Grades max. __ Nullstellen.
- Bei der Berechnung der Extremwerte entsteht eine Gleichung __.Grades. Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 2. Grades max. __ Extremwerte.
- Bei der Berechnung der Wendepunkte entsteht eine Gleichung __.Grades. Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 2. Grades max. __ Wendepunkte.

b) Ganzrationale Funktionen 3. Grades

f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$

f'(x) = ____________________________

f''(x) = ______________________

f'''(x) = ____________

- Bei [illegible]chung __.Grades. Da diese Gleichung [illegible] 3. Grades max. __ Nullstellen.
- [illegible]nung der Extremwerte entst[illegible]rades. Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben kann, existieren bei ein[illegible]des max. __ Extremwerte.
- Bei der Berechnung der Wendepunkte entsteht eine Gleich[illegible] Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktio[illegible]x. __ Wendepunkte.

Begründ[illegible]. Grades immer genau einen We[illegible]sitzt:

____

____

____

____

c) Ganzrationale Funktionen 4. Grades

f(x) = $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

f'(x) = ____________________________

f''(x) = ______________________

- Bei der Berechnung der Nullstellen entsteht eine G[illegible]ades. Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben kann, existier[illegible] einer Funktion 4. Grades max. __ Nullstellen.
- Bei der Berechnung der Extremwerte en[illegible]t eine Gleich[illegible]__.Grades. Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben kann, exist[illegible] bei ei[illegible] Funktion 4. Grades max. __ Extremwerte.
- Bei der Berechnung der Wend[illegible]e ents[illegible]leichung __.Grades. Da diese Gleichung maximal __ Lösungen haben [illegible]n bei einer Funktion 4. Grades max. __ Wendepunkte.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Aufgabe 4.6

Graphisches Differenzieren

a) Ermitteln des Graphen der Ableitungsfunktion durch graphisch[...] [...]renzi[...]

Ergänzen Sie anhand der Abbildungen 4.6.1 und 4.6.3 zun[...]st die [...] [...]rauen Kästen und skizzieren Sie danach die drei Ableitungsfunktionen in Abbi[...] 4.6.2 [...] 4.6.4. Als Hilfestellung können Sie auch die Abbildungen von Aufgabe 4.4 u[...]d Übun[...] hera[...] [...]hen.

Dort, wo [...]ine Funktion fällt, s[...] die Funktion[...]werte der nächsten Able[...]tu[...] [...]funktion ____________________.

D[...]rt, wo eine Funktion steigt, sind die Funktionswerte der nächsten Ableitungsfunktion ____________________.

Die Extremwerte einer Funktion liefern die _______ _________ der nächsten Ableitungsfunktion.

[...]endepunkte einer [...] liefern die [...]_________ der üb[...] Ableitungs- funk[...]

Abb. 4.6.1 [...].2

De[...] [...]elpunkt einer F[...]ktion liefert einen Berührpunkt d[...] nächsten Ableitungs[...] [...]n mit der ____ Ach[...]

A[...] Abb. 4.6.4

Anm[...] [...] hier vorgestellt[...] graphische Differenzieren kann auf beliebi[...] [...]unktionen, wie [...]eispielsweise trigonometrische Funktionen oder Exponential- u[...] [...]musfunktionen übertragen werden.

b) Ermittlung der Ableitungsfunktion von f(x) = sin(x) und g(x) = cos(x) durch grap hes Ableiten

Verdeutlichen Sie sich die Abbildungen und ergänzen Sie die Texte i den Spre se

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f(x) =$ sin(x)

$f'(x) =$ ________

f

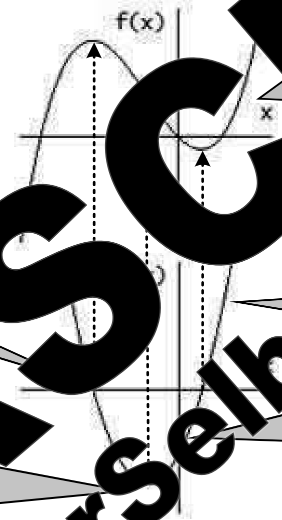
f''''(x) = ________

Die Funktione sin(x) und cos(x) reproduzieren sich beim Ableiten.

c) Aus der Ableitungsfunktion auf graphischem Weg eine mögliche Funktion erm von der die Ableitungsfunktion abstammt.

Ermitteln Sie, wie im Beispiel erläutert, jeweils aus dem gegebenen G phen, d inzi en Verlauf einer Funktion, von dem dieser Graph abstammen kann.

Beispiel:



Die Nullstellen der Ableitungsfunktion sind dort, wo die Ausgangsfunktion bzw. die sog. **Stammfunktion** Extremwerte hat.

Ein Extremwe Ableitungsfunkti aus ei nde der n

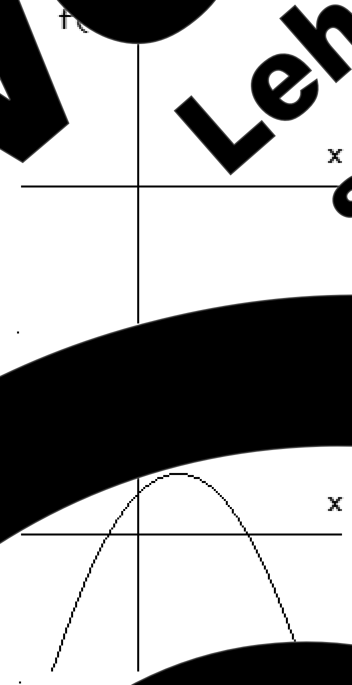
nmer

Abbil zeigt einen möglichen en d Stammfunktion. Weitere ra kann man h Strecken, Stauc n und V n dieses Graphen in Ric ng erhalten.

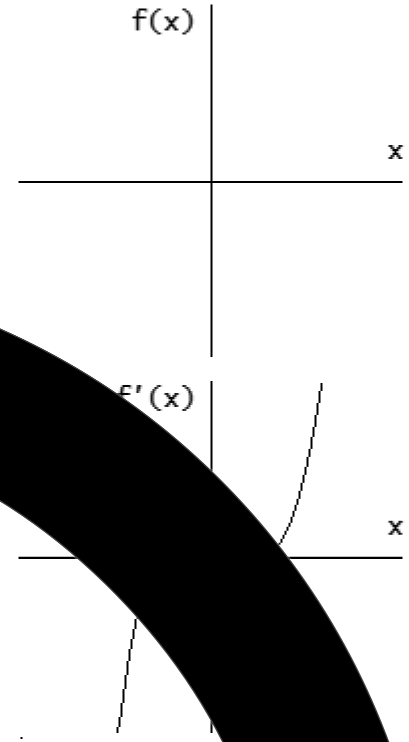
enn die Ableitu nktion sitive Funkt werte hat, steigt die ktion, von der sie ab t.

Wenn d bleitungsfunktion ne Funktionswerte hat, Funktion, von der sie abstammt.

(1)



(2)



Übungen________________________________

Aufgabe 4.7

Vollständige „Kurvendiskussion“

Anhand dieser Musteraufgabe soll dargestellt werden, wie man schritt … vorgehen … um eine Funktion, ohne Einsatz von Graphikprogrammen oder der Erstellung ei… W… tabelle zu zeichnen. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - x^3$.

(1) Ableitungen

$f(x) \;= 3x^2 - x^3$

$f'(x) \;= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$f''(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$f'''(x)$ … ____

…s ist … voll, … erst die … leitungen z… ermitteln.

(2) …me…

Da … Exponenten von ____ und ________________ sind, liegt ________ …trie zur y-Achse … der zum U… vor.

(3) Verhalten für $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to$ …

Die Funktion verhält sich für große negative und positive Werte wie die Funktion $f(x) = -x^3$.
Markieren Sie im Koordinatensystem … Quadranten, in denen die Funktion … Werte verläuft.

… $f(0) = 0$

Der y-Achse… …zeitig eine Nullstelle. M… Punkt im Koordinate…

…ullstellen: $f(x) = 0$

$3x^2 - x^3 = 0$

___(… …der $x_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow$ Hinweis auf ________

$x_3 = 3$

…agen Sie alle Nullstellen im Koordinate… …n. Anhand der bisherigen Ergebnisse können Sie die de… …er Funktion schon annähernd bestimmen. Beisp… …ann man den Berührpunkt im U… …g mit einem nach… …neten Bogen kennzeich… …eine Zeichnung … Lage von Extremwerten … …kte benötigt wer… …n diese charakteristisc… …noch ermittelt w…

(6) Extremwerte: f‘(x) = 0

$6x - 3x^2 = 0$

$\_\_\_(\_\_\_\_\_\_\_) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = \_\_$

f(0) … t Nullst… … sch… …ekann… …s also nicht … …chne… …rden.

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

$x_2 = \_\_\_$

Hinreichende Bedingung: $f''($… ________ ___ $> 0 \quad$ … TP(0/0)

$f''(2) =$ … ____ $< 0 \quad \Rightarrow$ HP(… ___)

Funktionswerte: $f(2$ … ____ …4

Notieren S… die berech… …Funktionswerte und tragen Sie de… Punkt oder die Punkte im Koordinatensystem … …chten Sie hie… …arauf, dass die Lage von Ho… und Tiefpunkten und die Lage der Nullstellen …inen sinnvoll… Funktionsverlauf ergeben. Sollte dies nicht der Fall sein, überprüfen Sie Ihre Lösungswege bei den G… …ngen auf Rechenfehler.

(7) …punkte: f… …) = 0

$6 - 6x = 0$

$\_\_\_ = \_\_\_$

Bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades ist die 3. Ableitung immer ungleich null. Daher haben diese Funktionen immer einen Wendepunkt.

…edingung: $f'''(1) = \_\_\_\_$ … $\Rightarrow$ WP(1/___)

…nktionswert: $f(1) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 2$

…swert notieren und den …oordinatensystem

(8) Zeichnung

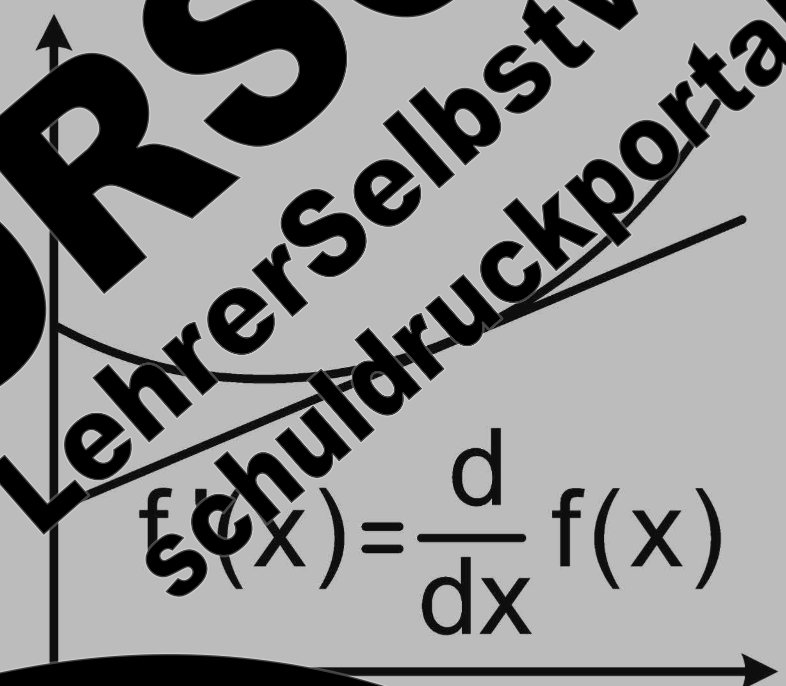
Zeichne… …au wie möglich, in dem Sie beim … …er Punkte alle Erge…

E… …bungen: ________________________________

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrechnung selbstorganisiert erlernen



Kapit…

Rekonstruktion vo… …onalen Funktion…

02-036-288

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 5: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen

Prinzipiell kann man die Rekonstruktion von Funktionen als Umkehrun... ...er Kurv... ...n betrachten. Während man bei der Kurvendiskussion den Funktionste... ...nd d... ...tion anhand von charakteristischen Punkten zeichnet, wird bei der Rekonstruktion d... Fu... ...term aus bekannten Eigenschaften ermittelt, wie der Lage von Koordinaten, Extre... ...rten u... ...kten sowie aus Informationen zum Steigungsverhalten.

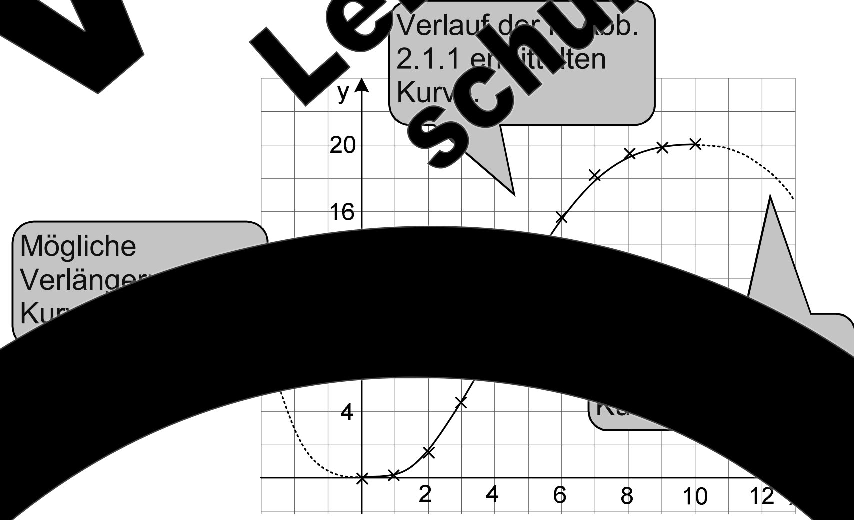
Die Rekonstruktion von Funktionen spielt insbesonder... ...odellierun...saufgaben eine Rolle. Die Aufgabenstellungen stammen hier in der Rege... ...dem B...ch der Wirt..., Architektur und Technik aber auch den Naturwissenschaf... ...den fo... ...len zwei Beispi... ...ansatzweise jeweils in Grundzügen eine solche Modellier... durchgeführt.

Aufgabe 5.1

Als Beispiel für diese Aufgabe wi... ...n bekannte W...tum der Ge...pflanzen zurückgegriffen und gez... ...die in Aufg... 4.1 verwen... Funktion e... werden kann. Verdeutlichen Sie sic... ...e bei... ...gehens... und Ergänze... Sie dabei fehlende Angaben und Begründungen.

Herleitung ... ...gem...n Funktionsg...

Auf der B... der au... ...n Messdaten für ... Pflanzenw... ...m ermittelten Funktionsgraphen in Abb... 1. ...rden Ü...egungen ang...stellt, mit welche... ...nzrationalen Funktion man den Verlauf der emp...h e... ...rve **möglichst einfach** a... ...ern kann.



Begründen Sie, wa... ...5.1.1 entstandene Kurve durc... ...onale Funktion 3. Grades ann... ...olgenden Satz ergänzen.

Der dur... ...ntstandene Graph hat _______ Ext... ...r einfachste

Fun... ...r ganzrationa... Funktion mit diesen Eigenschaften ist ein... ___.Grades.

...erm: $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

Dies is... Möglichkeit, den ... all... ...funktionsterm ei... Funktion 3. Gra...

Formulieren von Bedingungen, welche die Funktion erfüllen muss.

Anhand von Abb. 5.1.1 erkennt man, dass die gesuchte Funktion eine ganzrati... Funkti... Grades sein kann. Auf der Basis der Messwerte und aus dem Verlauf der Kurv... kann ma... ...herung annehmen, dass die Funktion im Ursprung und in Punkt P(10/20) jew... Extre... hat. Diese beiden Informationen reichen als Bedingungen aus, um den möglichen ...nk... ...rm zu bestimmen.

Die Bedi...ungen ...den, ...eser oder ähnlicher Form, h... ...abe...stellungen zur Rekonstru... ...on Fu...onen vorge... ...n. Mit ...er Bed...ngen werden d... ...effizienten ...b, c und d d... ...gemeinen ...onsterms ...)= at^3 + ... + c... + d ermitt... Wie man da... ...gehen ...nn, wird ...in ...nun folgen... ...zeigt.

Rekonstruktion

1. Schritt: Dem Text ... ...ntnehmen, ...n welchen allg... ...nen Funktionsterm es sich h... ...notw... ...ge Ableitungen ...ilde...

Man entnimmt dem Text zunächst, welchen Grad die Funktion haben soll und welche Ableitungen benötigt werden. Da hier nur Koordinaten und Extremwerte genannt werden, kommen nur die allgemeine Ausgangsfunktion und ihre erste Ableitung in Frage.

Funktionsterm: f(t) = $at^3 + bt^2$ + ... + d

1. Ableitung: f'(t) = $3at^2 + 2bt + c$

2. ... ...ntnehmen, welche die Funktion ...muss.

Hinweis:
We... ...t die Bedingung, die sich auf t = ...wendet, vereinfacht sich die... ...nnt man bei dieser Rekonstruk... ...dass die Kurve im Ursprung einen ...

Die Funktion hat im Ursprung einen Extremwert.

Bedingung A:
Der Punkt O(0/0) liegt auf dem Graph der Funktion.

$\Rightarrow$ f(0) = __

Beding...
Die Fun... ...n ha... ...der Stelle t = 0 ...Steig... ...0.
...) = __

Einsetz... ...von t = ... in den ...ktionsterm f(t) = a... ...bt^2 + c...

Hier e... ...eint eine ... da ...0) = 0 ist.

Ansatz für die Bedingung A.

$$\mathbf{A:}\ \ldots) = 0 \Rightarrow \ldots 0^{\ldots} + b\cdot 0^2 + c\ldots + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$\ldots f'(0) = 0 \Rightarrow \ldots 3a\cdot 0^2 \ldots 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

...z für... Be... ...ng ...

...nsetzen von t ... in den Fun...sterm f'(t) = 3... ...t + c.

Hier erscheint eine 0, da f'(0) = 0 ist.

1. Zwischenergebnis:

Man kennt nun c und d und setzt die beiden Werte in ...Ausgangsgleichung und ihre Ableitung ein. Man ...ein erstes Zwischenergebnis.

... t + ___ = __________

f_1'(t) ... __________

Man rechnet a... ...Schritt mit diesen vereinfachten Fun... ...en weiter.

3. Sch... ...rgebnisses einschließlich der noch n... ...bleitungen.

...ktionsterm: $f_1(t) = at^3 + bt^2$

...1. Ableitung: $f_1'(t) = 3at^2 + 2bt$

...e erste Ableitung ... ...t, da ... die zweite Bedi... ...nen ...emwert bezieht.

4. Schritt: Wenn vorhanden, dem Text die zweite Information zu den Beding... entn...n, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat im Punkt P(10/20) einen Extremwert.

Bedingung C:
Der Punkt P(10/20) liegt auf dem Graphen der Funktion.

$\Rightarrow f(10) =$ ___

...edingung D:
...Fun... hat an der Stelle t = 10 ...eig...g 0.

$\Rightarrow f'(10) =$ ___

Eins...en v... = 10 in ...
...isch...gebnis

$f_1(t) = at^3 + ...$

Hier erscheint nun 20, da f(10) = ___ gilt.

Ansatz f... Bedingu...

$f_1(10) = 20 \quad a \cdot \_\_\_ + b \cdot \_\_\_ = 20 \Rightarrow 1000a + 100b = 20$

$f_1'(10) ... \Rightarrow 3a \cdot \_\_\_ + 2b \cdot \_\_\_ = 0 \Rightarrow 300a + 20b = 0$

A... für die Bedingung D

Einsetzen v... = 10 in die Ableitu... ersten Zwis...ergebnisses

$f_1'(t) = 3at^2 + 2bt$

Hier erscheint wieder eine 0, da f'(10) = ____ gilt.

Man erhält nun zwei Gleichungen für zwei Unbekannte und kann damit im nächsten Schritt a und b berechnen.

...ritt: Wenn keine weiteren Bedingungen benötigt werd... ...en sind, die gesuchten Parameter berechnen.

I $1000a + 100...$

II

Lösen des Gleichungssyst...
Durch das Einsetzen der Bedin... ...ehen meist Gleichungssysteme, die entwede... ...s **Einsetzungsverfahrens**, des **Gleichset... ...rens** oder eines **Additionsverfahrens** gelöst ...nen. Hier wird das Einsetzungsverfahren gewä...

Gleichung II nach b auflösen: $20b = -...$

b in Gleichung I einsetzen: $1000a + 100 \cdot (-15a) = 20$

$1000a \_\_\_\_\_\_ = 20$

$\_\_\_\_\_\_ = 20$

$a ... \frac{1}{...}$

für b ergibt sich damit: $b = ... \frac{3}{...}$

...s Er...is vo... ...in b = ...n.

Schritt 6: ... der ge...chten Funktio...chung

$f(t) = -\frac{...}{2...} + \frac{3}{5}t^2$

Man setzt nun a und b in das Zwis...ergebnis ein und erhält ge... Funktion, welche in Kapitel 4 für das Wachstum des Blattge...uses verwendet wurde.

...ungen.

... meinen Funktionsgleichung zu ermitteln, werden mit Hilfe der g... ...en __________________ aufgestellt. Bei dieser Rekonstruktion wa... ...zienten ___, ___, ___ und ___ zu bestimmen. Mit den _____ gegeben... ...n wurden vier Gl... Wir werden in den folgenden ... ...en, dass bei ...gabe die **Anzahl der Bedingu...** ...nit der ... **...mmenden Koeffizienten übereinsti...**

Aufgabe 5.2

Modellierungsaufgabe zum Ermitteln eines funktionalen Zusammenhangs … das Pr… einer Skater-Bahn

Herleitung einer allgemeinen Funktionsgleichung

Eine Baufirma möchte für den Bau von Skater-Bahnen … Spie…arks pass…genaues und vorgefertigtes Schalungsmaterial anbieten, das vor Ort n… mit … ausgego… werden muss. Die Schalungen … so ge… sein, dass ver… Module miteinander k…biniert werde… …nen.

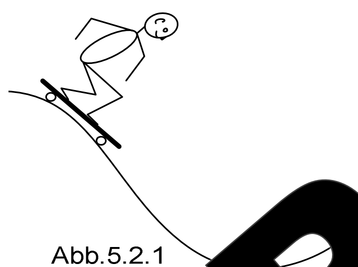


Abb.5.2.1

In der Skizze … 5.2… ein solch… Modul abgeb… bei dem die Üb… zu d… …chten An…stücken (ge…chelte Linien) k…frei …ufen.

Für den autom…sierten Zus… der Schal…g…eile benötigt man zur …rstell… …s Steue…programms für die Maschinen eine …rmelmäßige Beschr… des Bahn…aufs. Aus der Abb. 5.2.2 kann man entnehmen, dass … Bahn einer …rationalen F…tion ähnelt. Aus den Angaben in der Abbildu… …un e… …assende Funk…gleichung er…elt …erden.

Um d… Gleic… …ermittel… …s man …nächs… die folgenden Fragen …aren:

(1) … …en Grad …uss die Polynom… …destens habe… …amit die g… …rte Form entstehen kann?

(2) Wie fügt man am besten ein Koordinatensystem ein, so dass ein möglichst geringer Rechen…

(3) W… …en?

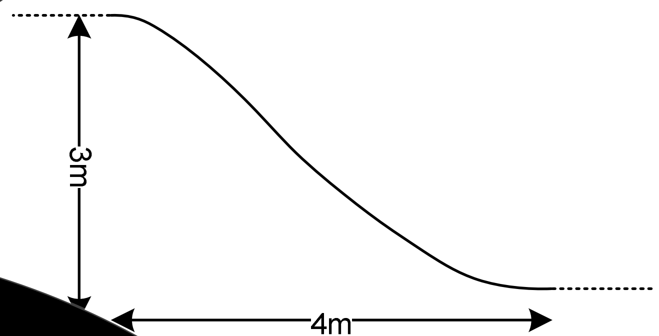


Abb.5.2.2

…(1) Begründen Sie, warum die gesuchte ganzrationale Fun… …s den Grad 3 haben muss und verlängern Sie dazu auf Grund Ihrer bisher erw… …tnisse zum Verlauf von ganzrationa… …en in der Skizze den dargestellt… …dieser möglichen ganzrati… …und nach rechts.

zu (2) In die Skizze von Abb.5.2.2 soll nun ein Koordinatensystem eingefügt werden. … gibt es mehrere Alternativen. Ziel ist es hier, das Koordinatensystem so einz…en, das… Funktion mit einer möglichst einfachen Funktionsgleichung beschrieben werden … In de… Abbildungen unten sind zwei Varianten für das Einfügen eines …ordinat… …argestellt.

a) Erstellen Sie für beide Varianten in Abb. 5.2.3 und 5.2.4 au… …Maßangaben in Abb. 5.2.2 eine Skalierung für die Achsen.

b) Geben Sie für jede der zwei dargestellten Varianten … …llgem… …e Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades an … …ie, …arum ma… sich bei der Rechnung für die Variante 2 entscheidet.

Variante …

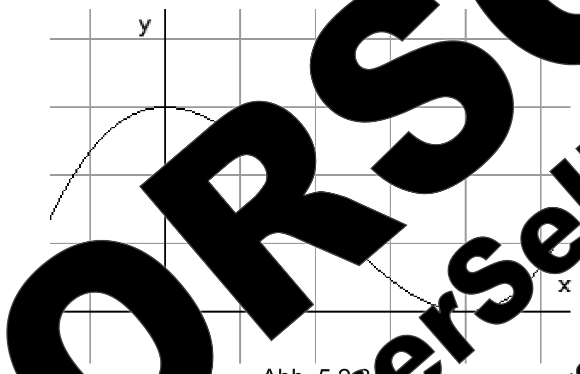


Abb. 5.2.3

…lgemeiner …ktionsterm

f(x) = ____________

…ariante 2

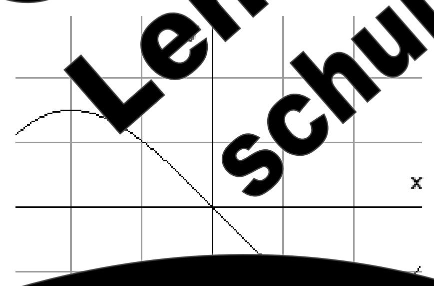


Abb.5.2.4

Allgemeiner Funktionsterm

f(x) = ____________

Begründung: ____________

…llgemeinen … bx werden auch als …meter bezeichnet.

z… …wei Koeffizienten zu bestimmen sind, benötigt man ________ Be… Man kann hier … Koordinaten des Hochpunktes HP(___ … …der die Koordina… …fpunktes TP(____ / ____) verwend… …on, dass die Fu… …sprung

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

einen ___________________________ besitzt, ist ungeeignet, da jede punktsy… …trische

Funktion 3. Grades diese Eigenschaft hat.

Zusatzinfo:
Ein Wendepunkt im Urspr… führt z… …nsetzen f(0) = 0 und f‘‘(x) = 0. Daraus ergeben s… …leich… …n der Form 0 = 0, mit denen man keine K…ffizien… …mitte… …ann.

Formulieren von Bedingungen, welche di… …nktion …füllen muss.

Die Funktion ist eine zum Urspru… …pun… …metr… …e ganzr…tiona… Funktion 3. Grades und hat einen Tiefpunkt TP(2/–1,5).

Man l… …n Zuge… Modell… …ng auch … …rdinaten … Hochpunkten … …nden.

Rek…stru…on

Ergä… …n Sie … …folgend… …ekonstrukti… f… …de Angaben und Rechenschritte. Erläutern Sie …f. d… …folgten Rechnungen.

1. Schr…: Dem Text d… Information… …ent…ehmen, um welchen allgemeinen Funktionsterm es sich handelt; notwendige A… …gen bilden.

Funktion: $f(x) = ax^3 + bx$

1. Able…

2… …ntnehmen, welche die Funktion … …uss.

Die Funktion hat einen Tiefpunkt TP(2/–1,5).

Bedingung A:
Der Pu… …(2/–1,5) liegt auf …

Beding…
Die Funkt… …Stelle x = 2 die Steigung …
$\Rightarrow$ f‘(2) = __

$f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot \_\_\_ + b = 0$

$\_\_\_ a + b = 0$

A: $f(2) = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \_\_\_\_ + b \cdot$ …

3. Schritt: Da keine weiteren Bedingungen vorhanden und notwendig sind, ber…chnen … Parameter.

Erläutern Sie wie sich die die Zeile (1) ergibt bzw. die angegebenen …formung…

(1) $b = -12a$ (1) ______________________

(2) $8a - 24a = -1{,}5$ (1)… ______________________

(3) $-16a = -1{,}5$ …→(3) ______________________

(4… (3)→(______________________

… $b = -\frac{9}{…}$ (4)→(… ______________________

4. Schritt: Endergebnis für f(x) f…mu…eren

Oben berechnete Werte für a und b in $f(x) = ax^3 + bx^2$ einsetzen.

$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{8}x$

…s Funktionsterms einer ganzrationale… …wendungsbezug.**

…ganzrationale Funktion 4. Grades hat im Ursprung einen S… …unkt P(3 / –27) einen Extremwert. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

Rekonstruktion

1. Schritt: … …ehmen, um welchen allgemeine… …rm es sich … …ungen bilden.

Es ha… …m eine ganz-rationa… 4. Grades

…sterm: f(x) … $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

…leitungen: f‘(x) = ______________________

f‘‘(x) = ______________________

Da d… …text die Bedir… …punkt enthä… …man die 1. un… …g.

2. Schritt: Dem Text die erste Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat im Ursprung einen Sattelpunkt.

Bedingung A: Der Graph geht durch den Punkt O(0/0).
$\Rightarrow$ f(0) = __

Bedingung B: Ein Sattelpunkt hat eine waagerechte Tangente. Daher ist in O(0/0) der Wert der Ableitung null.
$\Rightarrow$ f'(0) = __

Bedingung C: Der Sattelpunkt ist gleichzeitig ein Wendepunkt:
$\Rightarrow$ f''(0) = __

A: $f(0)=0 \quad \Rightarrow a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0 \quad \Rightarrow e = 0$

B: $f'(0)=0 \quad \Rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0 \quad \Rightarrow d = 0$

C: $f''(0)=0 \quad \Rightarrow 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0 \quad \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

Information: Wie bereits in Aufgabe 5.1 erwähnt, vereinfacht sich die Rechnung, wenn man zuerst die Bedingungen, welche Null enthält, verwendet. Hier fallen drei Koeffizienten weg, da sie den Wert Null annehmen.

In der Ausgangsfunktion wird für c, d, und e jeweils 0 eingesetzt. Dadurch entsteht hier im 3. Schritt eine Funktionsgleichung, die nur noch die Koeffizienten a und b besitzt. Diese neue Funktionsgleichung wird hier als „erstes Zwischenergebnis $f_1(x)$" bezeichnet

3. Schritt: Erstes Zwischenergebnis für die gesuchte Funktion und ggf. ihre Ableitungen angeben.

Da in den weiteren Bedingungen die Information zu einem Extremwert vorhanden ist, wird die erste Ableitung gebildet.

1. Ableitung: $f_1'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$

4. Schritt: Dem Text die zweite Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat im Punkt P(3/–27) einen Extremwert.

Bedingung D: Die Funktion verläuft durch P(3/–27).
$\Rightarrow$ $f_1(3)$ = ______

Bedingung E: Die Funktion hat an der Stelle x = 3 die Steigung 0.
$\Rightarrow$ $f_1'(3)$ = __

E: $f_1'(3)=0 \quad \Rightarrow 4a \cdot \_\_^3 + 3b \cdot \_\_^2 = 0 \quad \Rightarrow 4 \cdot \_\_\_ a + \_\_\_ b = 0$
$\Rightarrow$ 4a + b = 0

D: $f_1(3)=0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \_\_^4 + b \cdot \_\_^3 = -27 \quad \Rightarrow$ 81a + 27b = –27
3a + b = –1

5. Schritt: Berechnen der Parameter

I $\quad 4a + b = 0$
II $\quad 3a + b = -1 \quad |\,\mathrm{I} - \mathrm{II}$
$a = \_\_\_$

Hier bietet sich das Additionsverfahren an.

$a = 1$ in Gleichung I einsetzen: $4 \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow b = -4$

6. Schritt: Angeben der gesuchten Funktionsgleichung

Ergebnis: f(x) $= x^4 - 4x^3$

Aufgabe 5.4

Ermitteln des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion ohne Anwendungsbezug. Im Rahmen dieser Aufgabe werden ... Lösungsverfahren für die Berechnung der Parameter a, b und c bet...

Ei... hat im Punkt WP(1/2) einen ... den Punkt ... Funktionsterm.

Rekonstruktion

1. Schritt: Formelmäßige Umsetzung der Bedingungen durch Text...

Funkti... bx² + d

...ymmetrie zur y-... bedeutet, dass es ... gradzahlige ... gibt.

Da der Aufgabentext die Bedingung ... Wendepunkt enthält, ben... die 2. Ableitung...

Verfahren 1

Schrittweises Ersetzen der Variablen

Dieses Verfahren bietet sich an, wenn man das Lösen linearer Gleichungssysteme umgehen will, bzw. später Bedingungen ... sich auf die Integr... beziehen.

2. Schritt: Dem Text die erste Information zu den Bedingungen ...ehm..., welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat im Punkt WP(1/... ...nen Wendep...

Bedingung A:
Der Punkt WP(1/2) ... dem Graph der Fu...

$\Rightarrow$ f(1) = __

...g B:
An der Stelle x = 1 gibt es einen Wendepunkt.

$\Rightarrow$ f''... = __

... 0 ... $2a \cdot \_\_^2 + 2b$ ... __ $\Rightarrow 12a + 2b = 0$

$2b = \_\_\_\_$

$b = -6a$

Informatio...
Es ist häufig von Vorteil beim Verwenden der Bedingungen ggf. mit der zweiten Ableitung zu beginnen. Da durch das Ab... im Funktionsterm Summanden weggefallen, wird die Rechnung ...facher.

...s aus der Bedingung B in f(x) ein, erhält man als ... Funktionsterm, bei dem die Anzahl der ...nommen hat. Mit diesem Zwischen-...ergebnis rech... ...r die Bedingung A ein.

Funktionsterm erstes Zwischenergebnis: ... $6ax^2$ +c

...s erste ...enden.

$f_1(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \_\_^4 - 6a \cdot \_\_^2 + c = 2 \quad \Rightarrow \quad a - 6a + c = 2$

$\_\_\_\_ + c = 2$

$c = 5a$

Man setzt nun die Variable c ... in das erste Zwischenerge... ein und ...hält damit ein zweites Zwi...erge...s.

Funktionsterm zweites Zwischenergebnis: $f_2(x) = \ldots + 5a + 2$

3. Schritt: Dem Text die zweite Information zu den Be... e...hmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion geht durch den Pu... P(2/–1).

Be...g C:
De... ...1) liegt auf de... Funktion.

$f_2(2)$ ...

Durch ...setzen der Bedingung C in das ...e ...ebnis läss... der Param... bestimmen.

C: $f_2(2) = -1 \quad \ldots a \cdot \_\_\_^4 - 6a \ldots 5a + 2 = -1 \quad \Rightarrow 16a - 24a + 5a = -3$

$\_\_\_\_\_ = -3$

$a = 1$

4. Schritt: Angeben der gesuchten Funktionsgleichung

Durch Einsetzen von a = 1 in das zweite Zwischenergebnis, also ...rhält man den gesuchten ...term für f(x).

...gebnis: $\mathbf{f(x) = x^4 - 6x^2 + 7}$

Verfahren 2

Erstellen eines linearen Gleichungssystems

Dieses Verfahren … sich in… sondere a…, wenn da… system … weise … Taschen… werden …n.

1. Schritt: Siehe Verfahren 1

2. Schritt: Dem Text die erste Informationen zu den B… entnehmen und in den im Schritt 1 ermittelten Ansatz bzw. die entsprechenden A…ungen …setzen.

Die Funktion hat im Punkt WP(1/…) einen W…epunkt.

Bedingung A:
Der Punkt WP(1/2) … dem Grap… …nktion.
$\Rightarrow$ f(1…

Bedingung B:
An der Stelle x… 1 gibt es einen Wen…punkt.
$\Rightarrow$ …(1) = __

f(1) … $\Rightarrow$ a · … c · __^{2} + c = 2 … $\Rightarrow$ $a+b+c=2$

B: $f''(1)=0$ $\Rightarrow$ 12a · __^{2} + 2b … = 0 $\Rightarrow$ ___a + __b = 0

$6a+b=0$

3. Schritt: Wenn vorhanden, dem Text die zweite Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Bedingung C:
Der Punkt P(2/–1) liegt auf dem Graph der Funktion.
$\Rightarrow$ f(2) = __

… b · __^{2} + c = ___ $\Rightarrow$ 16a + 4b + …

4. Schritt: Erstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems zur Berechnung der …meter.

I	$6a+b=0$	übernehmen
II	$a+b+c=2$	
III	$16a+4b+c=-1$	II – III
I	$6a+b=0$	
IV	$-15a-3b=$ ___	$\mathrm{I}+\frac{1}{3}\mathrm{IV}$
	$a=1$	

G…ungen … A, … C e…and… zu einem lin… …ungssystem (LG…) zusammenfassen, und … LGS lösen.

a einsetzen in I: 6 · … b = 0 $\Rightarrow$ ______ = 0 $\Rightarrow$ … 6

a und b einsetzen in … 1 … 6 … $\Rightarrow$ ______ = 2 $\Rightarrow$ … = 7

5. Schritt: Angeben d… …unktionsglei…ng:

…nsetzen der berechneten Werte in f(x) liefert den gesuchten Funktionsterm.

…rgebn…: $f(…) = x^4 - 6x^2 … 7$

Information 5.1

a) Festlegen des allgemeinen Funktionsterms in polynomialer Form

Da das Lösen des Gleichungssyste… …ritt 2 a… …g werden kann, wenn viele Koeffiziente… …en sind, sollte man darauf achten, eine mö… …hst ein… …ne Funktion zu verwenden. Vor allem füh… Berü… …tigung von Symmetrieeigenschaft… zu ve… …chte… …unktionstermen.

Ergänzen Sie nachfolgende Sätze und fehl… …gabe… der folgenden T…

Eine ganzrationale Funktion ist achsensy… …etrisch … y-Achse, wenn … Exponente… von x

______________________ …d pu… …sch zum …sp…ng, wenn

____.

Grad der Funktion	…tionst… ohne Symmetrie	Funktionsterm … Vorliegen … Achse… …trie zur y-A…	Funktionsterm bei Vorliegen von Punktsymmetrie zum Ursprung
2	$f(x) = \ldots + bx + c$	$f(\ldots) =$ ______	
	$f(x) = ax^3 + bx^2 + \ldots x + d$		$f(x) =$ ______
	$f(x) = a\ldots + \ldots x^3 + cx^2 + d\ldots e$	$f(x) =$ ______	
5	$f(x) = ax^5 + bx^4 + c\ldots dx^2 + ex + f$		$f(x) =$ ______

b) Funkti… …Parabeln

…abel der Scheitelpunk… …r Punkt P bekannt sind, kann man …**punktform** der Parabel verwenden. … Koordinaten von Punkt P lässt …nn in einem Schritt der Parameter a bestimme…

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

c) Functions… …unktionen mit Grad n, bei de… …stellen x_1, x_2, … x_n sow… …t sind

W… …ktion a… …stellen bekannt sind, kann man die **Funk… …ung in … Form** verwenden. Das Einsetzen der Koordinaten von Punkt… …nn einen Wert … …meter a.

$\ldots(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

Übungen

In den folgenden Übungen soll die Vorgehensweise bei der Rekonstruktion, oh… …ganzen Erläuterungen, an weiteren Beispielen geübt werden, wobei die beiden …ternative… …erfahren dargestellt werden. Vervollständigen Sie dazu im Folgenden ggf. fehl… …aben …chenschritte.

Übung 5.1

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades schneidet die x-Achse a… …Stel… = –1 mit der Steigung 3 und hat an der Stelle x = 1 einen Sattelpunkt.

Verfahren 1: Schrittweises Ersetzen der P…meter

1. Schritt: Allgemeine Funktion

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \ldots$

$f'(x) =$ ______________

$f''(x) =$ ______________

2. Sc… …rste Info…tion aus Text …nehmen

…e x = 1 gib… …einen Sattel… D.h., es liegt ein Wendepunkt mit einer waagerechten Tan… vor. Som… die Steigung bzw. die erste Ableitung an der Stelle 1 den W… an.

Mit der Bedingung …nnen, die Informationen z… …nem Wendepunkt an der Stelle x = 1 enthält

…0 $\Rightarrow$ $b = -3a$

…$(x) = ax^3 -$ ____ $x^2 + cx + d$

…$3ax^2 - 6ax + c$

Die Information zur Steigung an der Stelle x = 1 in das 1. Zwischen-ergebn…

______________ $= 0$ $\Rightarrow$ $c = 3a$…

$\Rightarrow$ 2. Zwischenergebnis: $f_2(x) = ax^3$ … $x + d$

$f_2'(x) = 3ax^2$ …

3. Schritt: Zweite Information aus Text entnehmen

x = –1 ist Nullstelle. Die Steigung an der dieser Nullstelle ist 3.

Mit der Bedingung beginnen, die eine Information zu einer Ableitung enthält. Werte in das 2. Zwischenergebnis einsetzen.

C: $f_2'(-1)=3 \quad \Rightarrow \quad 3a\cdot \_\_\_\_\_\_ \quad \cdot \_\_\_\_ + 3a = \quad \Rightarrow \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

$=3$

$a=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Zwis...ergebnis: $f_3(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+d$

...rma... zur Nullstelle ... Zw...energebnis ei...zen.

D: $f_3(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \cdot \_\_\_\_\_\_ - \frac{3}{4}\cdot \_\_\_\_\_\_ + \frac{3}{4}\cdot \_\_\_\_\_\_ + d = 0 \quad \Rightarrow \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

$-\frac{7}{4}+d=0$

$d=-$

4. Schritt: Gesuchte Funktionsgleichung angeben.

$=\frac{1}{4}(x^3-3x^2+3x+7)$

Verfahren 2: Ermitteln der Parameter mit einem linearen Gleic...

1. Schritt: Allgem...

Dieser Schritt ist mit dem Verfahren 1 identisch.

$6ax+2b$

2. Schritt: Erste Information aus Text entnehmen

x = –1 ist Nullstelle. Die Steigung ist 3.

Sofern keine Bedingu...gen en...n sind, die sich auf die Stel... 0 bezi..., spielt die Reihenfolge, in de... die Informatione... dem ...nt, bei diesem Ver... Ro...

C: $f(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad a\cdot \_\_\_\_\_\_ + b\cdot \_\_\_\_\_\_ + c\cdot \_\_\_\_ \; d = \_\_\_\_ \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$

D: $f'(-1)=3 \quad \Rightarrow \quad 3a \quad + 2b \quad + c = \_\_\_\_ \Rightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 3$

3. Schritt: Zweite Information aus T...entn...n

An der Stelle x = 1 gi...s ei...ttelpunkt (Wen...punk... mit waage...cher Tangente).

A: $f''(1) \quad \Rightarrow \quad a\cdot \_\_ + \_\_ b \quad \Rightarrow \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

$3a+b=0$

$f'(1) \quad \Rightarrow \quad \_\_a\cdot \quad \_\_ + c = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

4. S...: ...eichungssy... lösen

I	$-a+b$	=	
II	$3a+b$		0
III	$3a \; 2b+c$	=	0
IV	$3a-2b+c$	=	3

Die Reihenfolge, in der man die aus den Bedingungen hergeleiteten Gleichungen anordnet, spielt prinzipiell keine Rolle. Hier wurde unter dem Aspekt der Übersichtlichkeit darauf geachtet, dass die Gleichungen III und IV direkt untereinander stehen, da c eliminiert werden soll. Auf diesem Weg lässt sich dieses lineare Gleichungssystem auch ohne Computerunterstützung mit wenig Aufwand lösen.

III – V: $\quad 3 \quad \Rightarrow \quad b = \_\_\_\_$

$\Rightarrow$

a,b in III: $\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{3}{4}$

a,b,c in I: $\quad = 0 \quad \Rightarrow \quad d=\frac{7}{4}$

5. Schritt

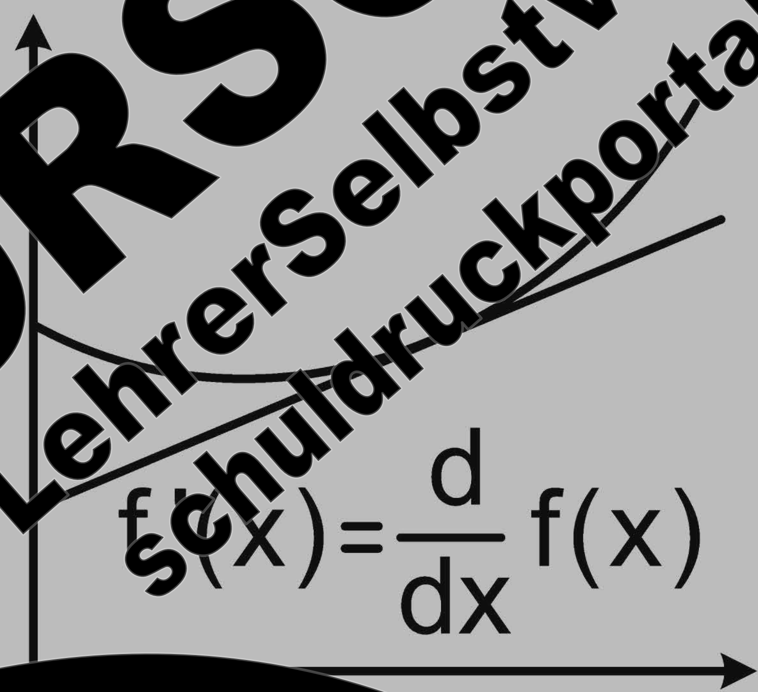
$\frac{}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{}{4}\quad+\frac{7}{4}$ oder $f(x)=\frac{1}{4}(x^3-3x^2+3x+7)$

...e Übungen: ____________________

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrech… selbstorganisiert …le…en



Kapit…

Extremwertaufgab…

02-036-288

Gesamtw[...] [...]hnung selbstorganisiert erl[...]
(Best[...]

[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[any])
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

Kapitel 6: Extremwertaufgaben

Neben der Rekonstruktion von Funktionen bieten **Extremwertaufgaben** eine we[itere] Mögli[chk]eit, anwendungsbezogene Aufgabenstellungen zu betrachten. Da man in [...] Vielza[hl von] [...]en Beispiele zu diesem Aufgabentyp findet, soll im Rahmen dieser Unter[...] [...]an zw[...]ischen Beispielen die grundlegende Idee und der prinzipielle Lösungsweg bei [die]sen [...]ben erläutert werden.

Aufgabe 6.1

Grundlegendes zur Bearbeitung von Extrem[wer]taufg[aben]

Angrenzend an eine bestehende Mauer soll [...] größtmögliche rechteckige Fläche ei[nge]zäun[t wer]den.
Der gewünschte Zaun kann im Ba[umar]kt als G[...] für 75 Meter Zaunlänge erworbe[n we]rd[en].

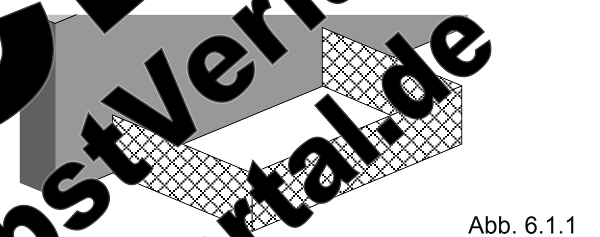


Abb. 6.1.1

a) Die Bildse[quenz] [...]6.1.2[...] [bi]s 6.1.2.6 zeigt [je]de[s in A]ufsicht [...] jeweils die Mauer und das Rechte[ck] [...]eite[n a u]nd b, das be[i der] Einzäunung e[nt]steht. Verdeutlichen Sie sich anhand dieser [Ab]bildung [d]ie gr[un]dlegende [Pr]oblemstellung, [in]dem Sie den Satz auf der folgenden Seite e[rgänz]en.

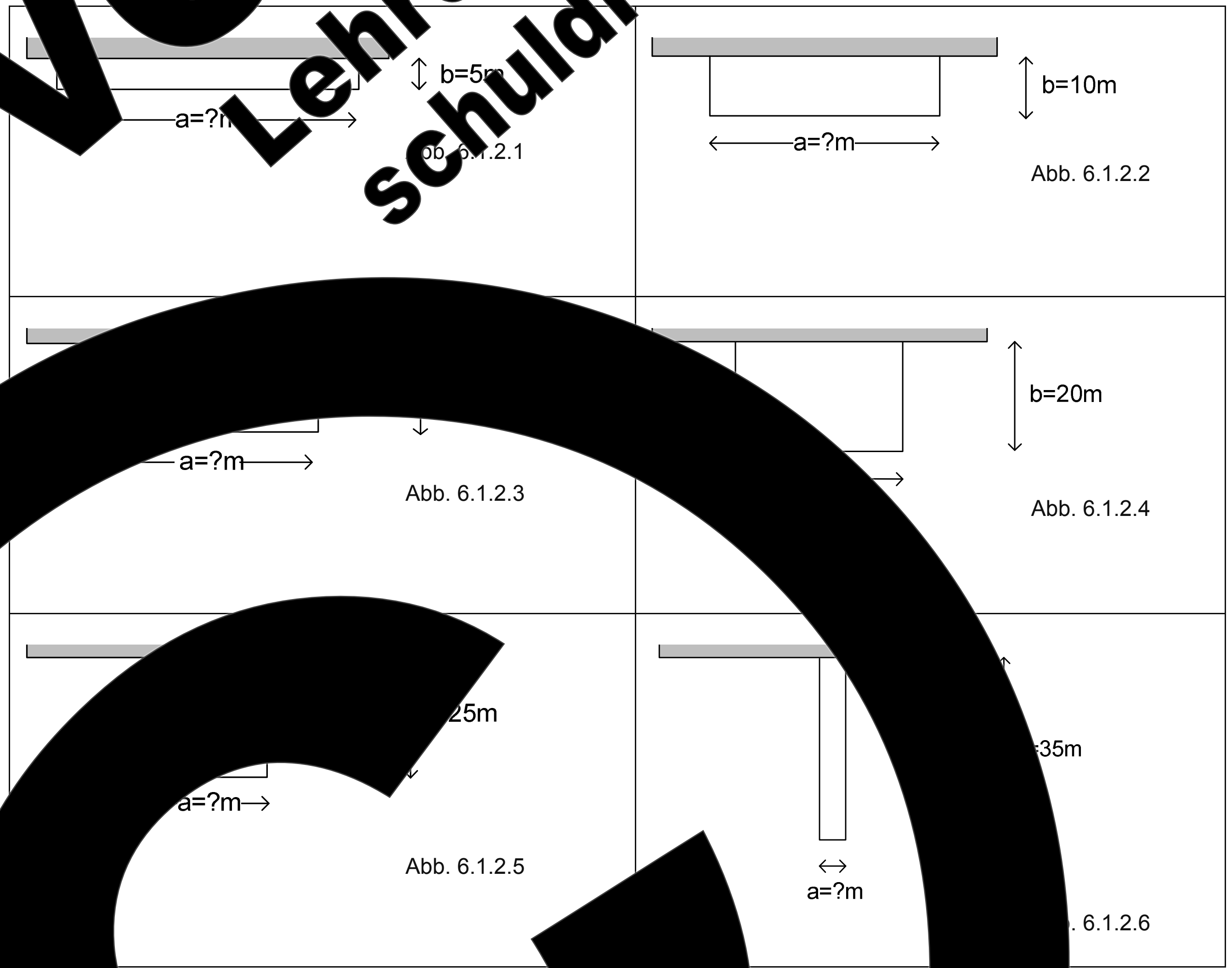


Abb. 6.1.2.1 Abb. 6.1.2.2 Abb. 6.1.2.3 Abb. 6.1.2.4 Abb. 6.1.2.5 [Abb]. 6.1.2.6

Die Länge der Seite a ist abhängig von der Länge der Seite ____. Je größer die Bre[illegible] wird, desto ____________ wird die Länge a. Die Länge a kann man mit der Formel a = ____________ berechnen. Verwendet man diese für a ermittelte Formel für die Fl[illegible]echn[illegible] Rechtecks, so ergibt sich für die Rechteckfläche der folgende Ansatz: [illegible] = a · b = [illegible]____________ .

b) Berechnen Sie für das eingezäunte Rechteck die Läng[illegible] Seite [illegible]nd die Rec[illegible]läche A für die in der Tabelle angegebenen Werte von b.

b [m]	0	[illegible]	[illegible]	1[illegible]	20	[illegible]5	30	[illegible]	37,5
a = 75 – 2b [m]									
A = ab [m²]									

c) [illegible] Ve[illegible] der Fu[illegible]on f(b) = 75b[illegible] ist in Abb. [illegible] dargestellt.

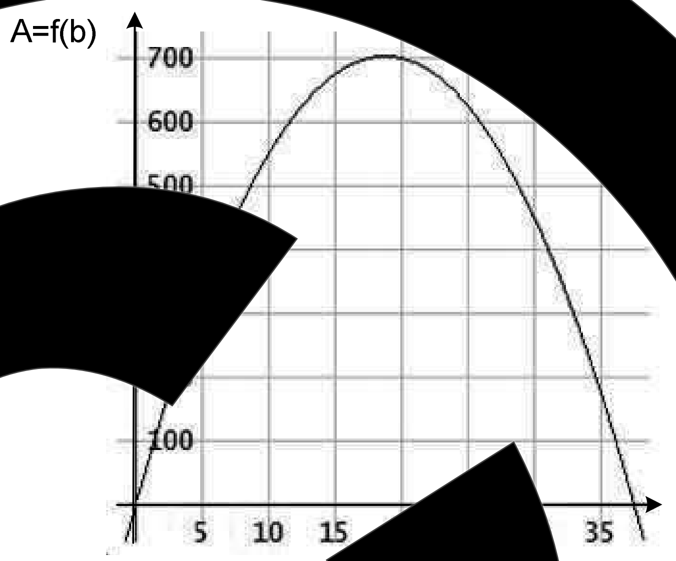
(1) [illegible]estätig[illegible], dass d[illegible]ion f(b) [illegible]ße der Rechteckfläche A beschreibt, indem Sie die [illegible]sprechenden Wert[illegible] aus der [illegible]lle in Aufgabenteil b) als Punkte im Diagramm unten [illegible]ragen.

(2) Erläutern Sie die [illegible]berlegung[illegible] die der Bildung des Funktionsterms von f(b) zu Grunde liegen.

____

____

____



Abb[illegible]

d) Ergänzen Sie den folgenden Satz einschließlich der Berechnungen.

Die Größe der eingezäunten Rechteckfläche hängt von den Werten ab, we[illegible] die Sei[illegible]änge b annimmt. Für b = 0 und b 37,5 m entsteht ________ Rechteck, d[illegible]he d[illegible] ____ annimmt. Die Fläche wird dort am größten, wo sich der ________ [illegible]er Funktion f(b) befindet, mit der die Fläche berechnet wurde. Dami[illegible] kann m[illegible]en W[illegible] von b, für den die Fläche am größten wird, ermitteln, in dem man die Koordina[illegible]s Ho[illegible]nktes der [illegible]ion ____ ermittelt. Verwendet man für die Ermittl[illegible] des Hochpun[illegible] der Parab[illegible] di[illegible] Differenzialrechnung, so ergibt sich der Ansatz: ________.

[illegible] sich die [illegible]ßtmögliche bzw. [illegible]tremale Fläche [illegible] den Wert von [illegible], für den die P[illegible] einen H[illegible]p[illegible]t oder Extrem[illegible] [illegible]tzt, werde[illegible] A[illegible]fgaben dieses Typs a[illegible] als **Extrem[illegible]aufgaben** bezeichnet.

e) Berech[illegible] Sie d[illegible]ert [illegible] b, für de[illegible] eingezäunt[illegible]kteckfläche maximal bzw. extremal wird, u[illegible]ge[illegible] Sie die[illegible]ßzahl für de[illegible]remwert die[illegible]läche an, indem Sie die folgende Rechnung v[illegible]ls[illegible]en.

f(b[illegible] 75b – 2b²

f'(b[illegible] = ________

Hochpunkt: f'(b) = ___

b = _____

f''(b) = _______ < 0 ⇒ Es liegt ein _______punkt v[illegible]

Größe der Fläc[illegible] ____________ = ______

Das hinreichende Kriterium für einen Hochpunkt ergibt [illegible]h hier schon bei der [illegible]ng der Ableitungen.

[illegible]satzinformation Optimierung:

Da man mit dem zur Verfügung stehend[illegible] maximal mögliche oder auch optimale Fläche einz[illegible]te, werden Extremwertaufgaben auch als **Op[illegible]** **probleme** oder **Opti[illegible]ungsaufgaben** b[illegible]

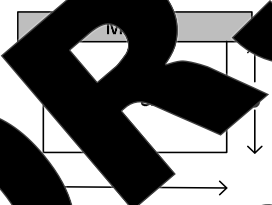
Aufgabe 6.2

Prinzipielle Vorgehensweise bei Extremwertaufgaben.

Obwohl es für Extremwertaufgaben eine Fülle von unterschiedlichen … stellu… t, kann man die Betrachtungen aus Aufgabe 6.1 zu einer prinzipiellen Abfolge von … chri… usammenfassen. Damit entsteht ähnlich zur Vorgehensweise bei Kurvendiskus… nen un… ionsaufgaben eine Art „Kochrezept“, das bei der Bewältigung der Aufgabenstellu… zum … z kommt. Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte und wenden Sie das Ve… hren a… folg… en Übungen an.

1. Schritt Analyse der Aufgabenstellung

(1) Zeichnen einer Skizze, w… die p… zipielle Au… benstellung veranschaulich…



Bei der Skizze darauf achten, dass nur die für die Rechnung wesentlichen Größen und Bedingungen einfließen. Unwichtige Details können weggelassen werden. Grundlegende Formeln für die Lösung des Problems kann man bereits hier angeben.

(2) Festlegen, w… che Größe ex… mal werden soll.

Rechteckfläche A → …

2. Schritt Ermitteln der Zielfunktion

… angs für die zu optimierende Größe, … n soll.

$f(a,b) = a \cdot b$

Info 1: …
Die Fläche wir… a · b berechnet. Wir wissen aus Aufgab… a ändert, wenn man b verändert. Das drückt … den Ausdruck **A(a,b)** (sprich: A von a und b) a… ch bedeutet das, dass eine Funktion gleichz… **Variablen** **abhängt**. Bei Extremwertauf… man in diesem Fall **Nebenbedingungen** (s.u.) … eachten.

…fo 2: Neben… ingung
Ergibt sich aus dem Ansatz für die zu optimierende Größe ei… **Funktion**, die nur von **einer Variablen ab… ngt**, dann ist das bereits die gesuchte **Zielfunktion**. Da… den von **Nebenbedingungen entfällt** und man … m Schritt 3.

(2) Formulieren der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe erforder…

$a = 75 - 2b$

Um den Extremwert mit Hilfe der D… ialrech… zu berechnen, muss man die ermittelte F… ktio… eiten. Das geht aber nicht, wenn die Funk… gleich… ei Variablen abhängt. Das heißt, man m… für ei… beiden Variablen eine sog. Nebenbedingu… ermit… iese … benbedingung kann dem Text entnomm… …steckt hier in d… Angabe, dass maximal 75 m Zaun z… fügung … hen. Aus … be 6.1 kann man die N… dingu… a entnehmen.

(3) Formulieren d… Zielf… ion u… Einbindung … er Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe e…

$f(… 75 - …) \cdot b$

$… - 2b …$

Durch das Einsetzen d… Nebenbedingung … a in die Funktion f(a,b) entsteh… Zielfunktion f(b), die nur noch … der Variablen b abhängt und dan… in Schritt 3 abgeleitet werden kann.

3. Schritt Berechnen des Ex… wertes

(1) Bilden der ersten beiden Ableitungen der Zielfunktion

(2) Erste Ableitung null setzen u… hung auflösen.

$f'(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 18{,}75$

(3) Durch Einsetzen des Ergebnisses bzw. der Er… der gelösten Glei… der zweiten Ableitung prüfen, … um oder ein

… Maximum

4. … Falls gefordert, die Maßzahl der zu optimie… enden Größe ber…

Für die maximale Fläche gilt: $A_{max} = 7… - 2 \cdot 18{,}75^2 m^2 = …$

Übungen

In der folgenden Extremwertaufgabe soll untersucht werden, inwiefern man bei [illegible]erpac[illegible] von Lebensmitteln und Getränken in Dosen dem rein mathematischen Opti[illegible]rungsg[illegible], indem man bei vorgegebenem Doseninhalt versucht, den Materialbedarf für [illegible] zu [illegible]en.

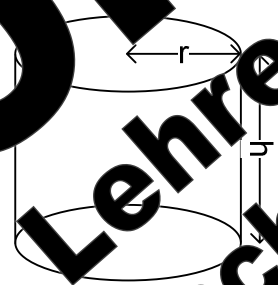
Wie häufig bei solchen Anwendungsproblemen werden verein[illegible]ende [illegible] [illegible]etroffen. Hier wird angenommen, dass für alle Bestandteile der Dose Metall glei[illegible] Dicke [illegible]ndet wird.

Übung 6.1

Handelsübliche Dosen haben beispielsweise [illegible]üse, [illegible]hten, Katzenfutt[illegible]tc. Füllmengen von 850 ml und 425ml, während man bei Geträn[illegible]sen in der [illegible] Füllmenge[illegible] 0,33 l bzw. 0,5 l findet.
Es soll nun ermittelt werden, welche Höhe u[illegible]lchen [illegible]rchmesser [illegible] Getränkedo[illegible] einem vorgegebenen Volumen von 0,5 L[illegible]en s[illegible] Materi[illegible]rauch bei d[illegible]erstellung minimal wird, also Ressourcen g[illegible]ont [illegible]en.

1. Schritt Analyse d[illegible]gabenstellu[illegible]

(1) Zeic[illegible]ze, welch[illegible] prinzipiell[illegible]gabenstellung [illegible]rans[illegible]ulicht.



Nur die we[illegible]chen Größen skizzier[illegible] Dosen haben die F[illegible]nes Zylinders.

Formeln für den Zylinder können hier notiert werden.

Volumen: V = Grundfläche · Höhe ⇒ V = ________________

O[illegible]fläche + Mantel ⇒ O = _______ $+ 2\pi r \cdot h$

[illegible]ll.

Oberfläche des Zylinders: $O \rightarrow$ m[illegible]

2. Schritt Ermitteln der Zielfunktion

[illegible]nalen Zusammenhangs für d[illegible]rende Größe, [illegible]en Extremwert annehmen soll.

$[illegible](r,h) = \pi r^2 + 2[illegible]$

Wenn beispielsweise die Höhe h kleiner [illegible] unter der Bedingung, dass da[illegible]olumen der Dose [illegible]tragen soll, die Grundfläch[illegible]mit der Radius gr[illegible]. D.h. die Funktion f i[illegible] von den Größen [illegible]hängig und man ben[illegible]edingung.

(2) Formulieren der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe e[illegible]lert.

$V = 0{,}5\ l =$ ______ cm^3

Die Informatio[illegible]das Volumen 0,5 L[illegible] soll, legt di[illegible]ebenb[illegible]

$500 = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{500}{\pi r^2}$

A[illegible]n der Form[illegible]für die Nebenbeding[illegible]nach einer der Größen vo[illegible]n die Funktion f abhängt[illegible]also nach r oder h. K[illegible]n für die Wa[illegible]ichst we[illegible]ufwand für [illegible] U[illegible]ormungen.

Einsetzen von V in die For[illegible] für das [illegible]lumen des Zylinders. Die E[illegible]t cm^3 [illegible] zwecks Vereinfa[illegible]hier w[illegible]. Damit beziehe[illegible]ch i[illegible] Längenmaße a[illegible]m.

(3) Fo[illegible] Zielfunktion unt[illegible]bindung d[illegible]ebenbedingung, wenn es die A[illegible]rt.

$f(r) [illegible] \pi r^2 + \frac{500}{\cancel{\pi} r^2} \cdot 2[illegible]$

D[illegible]das Einsetzen der Nebenbe-[illegible]ingung h in die Funktion f(r,h) entsteht die Zielfunktion f(r), die nur noch von der Variablen r abhängt und damit in Schritt 3 abgeleitet werden kann.

$f(r) = 2\pi$[illegible]________

3. Schritt Berechnen des Extremwertes

[illegible]n der Zielfunktion

[illegible] r [illegible]

$f'(r) =$ ________________

$f'(r)$ [illegible]________

____

$f''(r) =$ ________________

(2) Erste Ableitung null setzen und entstandene Gleichung auflösen

$f'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$

$4\pi r =$ ______

$4\pi r^3 =$ ______

$r^3 = \frac{1000}{4\pi}$

4,3

(3) Durch... zen des Erg... nisses bzw. ... Ergebniss... aus der gelösten Gle... ung ... hand ... eiten Ab... g prüfen, ob ein Minimum oder ein Ma... um ... iegt.

$f''(4{,}3) ... \frac{200}{4{,}3^3} > 0$ ... inimum

Der genaue Wert von f''(4,3) wird nicht benötigt. Es reicht eine Abschätzung, ob das Ergebnis negativ oder positiv ist. Hier kann der Wert nicht negativ werden.

4. Schritt Falls gefordert, di... Maßzahl der zu optimierenden Größen berechnen.

Für den D... $\approx 8{,}6$cm

Die Einheit cm ergibt sich aus den Überlegungen zur Einheit im 2. Schritt.

... die Höhe gilt: $h \approx$

... itt unter (2) ermi... h einsetzen.

Das F... die Fertigung von Getränkedos... Optimierungs-... Material zu verbrauchen folg... in der Praxis ... praktische Entscheidungen getro... n Sie mögliche ... ndelsüblichen Form von Getränked... haben könnten.

______

______

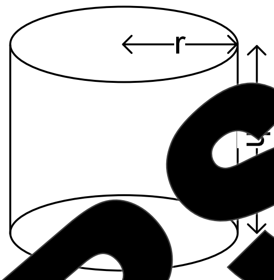
______

Übung 6.2

Sie haben in Übung 6.1 festgestellt, dass man für die untersuchte Getränkedos... n am ... gsten Verpackung benötigt, wenn der Durchmesser und die Höhe gleich sind. ... soll nu... der f... enden Aufgabe geprüft werden, ob dieses Verhältnis von Durchmesser und ... alle zy... en Dosen gilt. Vervollständigen Sie dazu unter Bezugnahme auf Übung 6.1 die F... und Überlegungen.

1. Schritt Analyse der Aufgabenstellung

(1) Zeichnen einer Skizze, welche die ... gab... stellung veranschaulicht.



... die we... chen Größe... skizzieren. D... osen haben die For... ines Zylinders.

Forme... für den Zylind...

Vo... Grundfläche · Höhe ⇒ ______

...erfläche: O = 2 · Grundfläche + Ma... ⇒ ______

(2) Fe... gen, welche Größe extre... werden soll.

Oberfläche des Zylinders: O = ______

2. Sc... Ermitte... der Zielfunktio...

(1) Ermitteln eine... ktionalen Zusammenhangs für die zu optimierende Größe, d.h. die Größe, die den Extremwert annehmen soll.

... Aufgabe erfordert.

V = const.

Die Inf... Volumen gleich blei... Nebenbedingu... ird nun kein Zahlenwert ...

$\frac{V}{\pi r^2}$

(3) Formulieren der Zielfunktion unter Einbindung der Nebe..., wenn es die Aufgabe erfordert.

f(r) = ______

3. Schritt Berechnen des Extremwertes

(1) Bilden der ersten beiden Ableitungen der Zielfunktion

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$f'(r) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$f'(r) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$f''(r) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$f''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} \ldots$$

(2) Erst... g null... und e... ne Gleich... auflösen.

$$f'(r) \ldots \Rightarrow \ldots \frac{\ldots V}{r^2} = 0$$

$$\_\_\_\_ = \ldots$$

$$\_\_\_\_ = 2V$$

$$r \ldots \_\_\_\_ \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{\_\_\_\_}$$

Setzt man für ... dem Ziehen der dritten Wurzel den Ausdruck $\pi r^2 h$ ein, folgt:

$$r^3 = \frac{\cancel{\pi} r^2 \cdot h}{2\cancel{\pi}} \quad |: r^2$$

Die Division durch die Lösungsvariable ist hier erlaubt, da die mögliche Lösung r = 0 nicht sinnvoll ist und damit wegfällt.

(3) Durch Einsetzen des Ergebnis... isse aus der gelösten Gleichung anhand der zweiten Able... in Minimum oder ein Maximum vorliegt.

De... von f''(r) wird nicht beno... ist, wird hier f''(r) eb...

$f''(r) \ldots$ Minimum

Schritt 4...

... Herstell... n zylindrischen Dosen ist der Materialver... hängig vom vorgegebenen Volumen dann am geringsten, wenn der Durchme... e Höhe der Dosen ________________________

Aufgabe 6.3

Häufig beziehen sich Extremwertaufgaben auf Problemstellungen, bei denen si... ktiona... Zusammenhänge ergeben, die sich in einem Koordinatensystem darste... lasse... ... tretende Standardaufgabe ist hier, dass zwischen einer Kurve und der x-Achs... hteck ... efügt werden soll, dass die Rechteckfläche maximal wird. Erarbeiten Sie sich die Lö... ... Aufgabe, indem Sie fehlende Angaben ergänzen.

Aufgabenstellung

Abb. 6.1.3 zeigt ein reetgedecktes Dach mit einer Dachg... Das Fenster in der Dachgaube ist dem Eigentü... kle... und er möchte es bei anstehenden Renovier... arbeiten durch ein rechteckiges Fenster ersetzen, da... ne möglichst große Fläche hat.

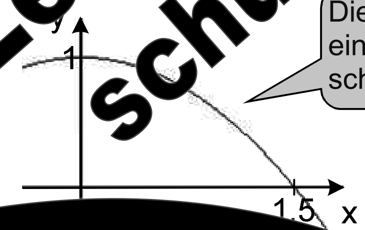
a) Ermitteln Sie anhand der ange... benen Maße ... Gleichung einer Funktion, wel... ler Dachgaube beschreibt. Als stark ve... fach... Anna... e bei diese... Modellierung soll hie... ausgegangen we... das... ie Form ... Dachga... durch eine P... bel 2. Ordnung beschrieben werden kann, obw... Realität kompli... re Funktion ... grunde liegen.

b) Berechn... lche ... e der rechte... eil des Fens... ben sollte.

a) M... ons... tion

Sc... 1: Allgemeine Fun... ion

Skizze



Die Parabel so in ein Koordinatensystem einfügen, dass man Symmetrieeigenschaften ausnutzen kann.

...lpunkt S(b/c) der Parabel ... der Ansatz über die S... (x) = a(x – b) + c den e... r Ermittlung der Gleichung...

$p(x) = ax^2 + 1$

Schritt 2: ... 0) den Parameter a ermitteln.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

$$a = \_\_\_$$

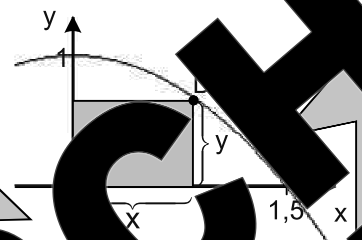
...: Ergebnis $p(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 1$

b) Extremwertaufgabe

1. Schritt Analyse der Aufgabenstellung

(1) Zeichnen einer Skizze, welche die prinzipielle Au… veranschaulicht.

Die Seiten des Rechtecks kann man anstatt mit a und b auch mit x und y bezeichnen.



Tipp: …achten von …mmetrieeigenschaften
A…ch bei de… Ext…wertaufgabe nutzt m… die …chsensymmetrie, um die Au…gabe zu vereinfachen und betrachtet für die Rechnung nur den 1. Quad…nten.

Fläche des ha… $A = x \cdot y$

(2) Fest… lche G… Extrema… den soll.

A …

2. Schrit… Ermit… der Zielfunktion

(1) E…teln eines …nktionalen Z…mmenhangs für die zu optimierende Größe, … die Größe, die den Extre…rt annehmen soll.

$A(x,y) = x \cdot y$

W… man x ändert, verschiebt sich der P…nkt P. Damit ändert sich auch y und die Fläche ist gleichzeitig von x und y abhängig.

(2) Formulier… N…enbedingung, wenn es die Aufgabe erfordert.

…m Funktions-

(3) Einsetzen der Nebenbedingung in A(x,y)

$A(x) = x \cdot (-\frac{4}{3}x^2 + 1)$

3. Schritt Berechnen des Extremwertes

(1) Bilden der ersten beiden Ableitungen der Zielfunk…n

$A'(x) =$ ____________________

$A''(x) =$ _______

(2) Erste Ableitung Null setzen … entst… …ne Gleichung a…lösen

$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow$ ____________ = 0

____ = ____

Da s… der Ansatz für die F… auf den ersten …uadranten bezieht, fällt die …egative Lösung hier weg.

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

(3) Hinreichend… Bedingung: $A''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$ Maximum

Der genaue Wert spielt keine Rolle. Das Ergebnis ist hier eindeutig negativ.

4. Schritt Ergeb…

Höhe des Fensters: $h = y = p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ ____________ 0,67

Das F… von etwa 0,67 m und eine B… m.

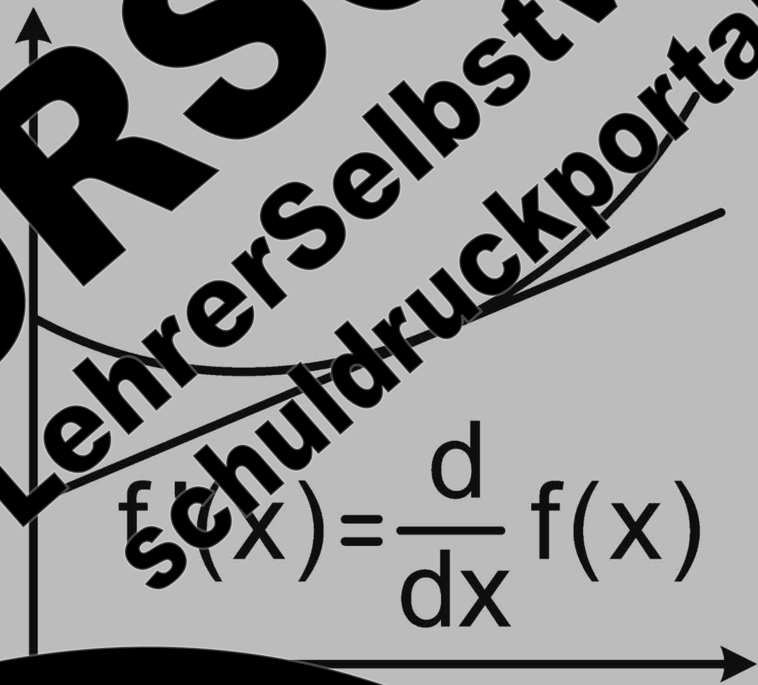
Ergä…gen: ________________________________

____

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrechnung selbstorganisiert erlernen



Kapit

Produkt- Quotienten-
Kettenregel

02-036-288

Gesamtw[illegible]hnung selbstorganisiert erl[illegible]
(Best[illegible]
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 7: Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Neue Ableitungsregeln werden erforderlich.

Bisher wurden im Rahmen der Differenzialrechnung nur ganzrationale [illegible]nd einfache Wurzelfunktionen, sowie einfache trigonometrische Funktione[illegible]etrach[illegible]

Allerdings können beispielsweise bei der Beschreibung von Schwingungen mit Hilfe der Sinusfunktion auch Funktionen auftreten, die formelmäßig eine kompliziertere Struktur hab[illegible] Jeder hat schon beobachtet, dass die Ampli[illegible] (Ausschlag) eines Pendels mit der Zeit klein[illegible]ird und das Pendel letztendlich zu Ruhe [illegible]mt. [illegible]r Abbildung rechts ist ein Verlauf s[illegible]r gedämpften Schwingung aussch[illegible] dargestellt. Die abgebildete Schw[illegible]it Hilfe der Funktion f(t) [illegible]athem[illegible] beschrieben werden.

Eine Ableit[illegible] Fu[illegible] ist mit den b[illegible]ekannten A[illegible]sregeln nicht möglich. Daher ist es notwendi[illegible] solch[illegible]nkt[illegible] neue Abl[illegible]sregeln zu[illegible]eiten.

Hinw[illegible] [illegible]gend betra[illegible]eten Regeln [illegible] später auch in der Integralrechnung Anwe[illegible]ung, da es [illegible] korrespon[illegible] Integrationsregeln gibt.

Aufgabe 7.1

Die Produktregel der Differenzialrechnung

Anhand der Fun[illegible]g oben) soll die **Produktregel** zunächst anschaulich verde[illegible]

[illegible] f(x) setzt sich [illegible]em Produkt der Faktoren $\frac{1}{x}$ und $\sin(x)$ zusammen. Es ist üblich einen Faktor mi[illegible] einen Fakto[illegible] bezeich[illegible]

$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$

v(x)

f(x) = u(x) · v(x)

a) Geben Sie die Ableitung der beiden Funktionen u(x) und v(x) an.

$u(x)=\frac{1}{x}$ ⇒ $u'(x)=$ ____________________

$v(x)=\sin(x)$ ⇒ $v'(x)=$ ________

Z... g von sin(x) vgl. Kapitel 4 ...fgabe 4.6 b)

b) Verwendet man ein **Computeralgebrasystem** (vgl. ... e Ableitung v... f(x) zu bestimmen, so erkennt man, dass f '(x) sich nicht direkt ... dem P...dukt der abg...ten Funktionen u'(x) und v'(x) ergibt, sondern dass hier ein... kompl...tere Regel zugrun...e liegen muss. Erläutern Sie, warum sich aus dem angez...ten Ergebnis ... Tafelwerk angegebene Formel ableiten lässt, in dem Sie die Sprechblase... und den ...kentext ergänze...

Ergebnis CAS ... : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(...) + \frac{1}{x}\cos(x)$

cos(x) ist die Ableitung von v(x)=______, also v'(x).

$-\frac{1}{x^2}$ ... di... ...g vo... ...x)= , ... u'(x)

sin(x) ist der Funktions-term von __(x).

$\frac{1}{x}$ ist der Funktions-term von __(x).

W...n sich eine Funk... aus den Fakto... u(x) und v(x) zusammensetzt, entsteht bei der ...ung eine Summ...

Der erste Summand der Ableitungsfunktion ist das Produkt aus: __(x) und __(x)

Der zweite Summand der Ableitungsfunktion ist das Produkt aus: __(x) und __(x)

M...

f(x) = u(x)·v(x)

...itungsfunktion f '(x) = u'(x)·v(x) + u(x)·v'(x) ode... + v'u

Hinweis: Di... ...roduktregel mit Hilfe des Diff... ...nten kann in ... weise Wikipedia, nachgeschlage... ...rt gibt es einen ...alen Beweis der Produktregel.

Beispiele zur Anwendung der Produktregel

Anhand der folgenden Beispiele, bei denen man nach geeigneter Umformung a... die ber... bekannten Ableitungsregeln anwenden kann (ist einfacher), also streng... ...ommen ...ine P...uktregel benötigt, soll die Regel nun verifiziert werden. Ergänzen Sie fehlende...

Anwenden der Produktregel

Beispiel 1:

$f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{x^3}_{v(x)}$

u(x) bzw. u und v(x) bzw. v jeweils einen Faktor des Funktionsterms zuordn...

u = x² v = x³

u'= ___ v'= ___

T... u(x) ...d v(x) ...rennt vone... ...leiten ... Einzelergebnis... ...in die Produkt-formel einsetzen

f '(x) = u'v + ·v'u

f '(x) = 2x·___ + 3x²·... + 3x⁴

f '(x) = 5x⁴

A... ...bekannte Regel

Überprüfung mit der bekannten Regel:

f(x) = x²·x³

f(x) = x⁵

f'(x) = 5x⁴

A...ndu... ...r Pro...ktregel

Beisp... 2:

u(x) und v(x) die ent...prechenden Funktionsterm... zuordnen und getrenn... ...einander ableiten.

$f(x) = \underbrace{...}_{u(x)} \underbrace{(2x+1)}_{v(x)}$

u = x² ... = 2x+1

u'= ___ v'= ___

f '(x) = u'v +·v'u

f '(x) = 2...

____

Anwenden bekannte Regel

Überprüfung mit bekannter Regel:

f(x) = x²·(2x+1)

f(x) = 2x³ + x²

... = 6x² + 2x

Übungen zur Produkt...

Übung 7.1

Leiten ... ...e der Produktregel ab. (Raum für Rec... ...Folgeseite)

a) ... b) f(t) = sin(t)·sin(t) c) f(z...

...x²)sinx e) $f(t) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{...}$ f) f(t) = ...x²

...(x) h) h(x) = g... i) f(t) = ...

Aufgabe 7.2

Empirische Herleitung der Kettenregel

Die Herleitung der Kettenregel kann wie auch die Produktregel allgemei[illegible]mit Hilfe [illegible] Diff[illegible]zialquotienten erfolgen und somit in der gängigen Fachliteratur bzw. [illegible]edia n[illegible]sen werden. Zur Verdeutlichung der Kettenregel soll im Rahmen dieser Unterlagen [illegible] formale Weg beschritten, sondern eine Sequenz von Beispielen herangezo[illegible] werd[illegible] Di[illegible]enen Funktionen kann man dazu beispielsweise von einem Computeralgebrasy[illegible] (Wo[illegible]pha) ableiten lassen.

1. $f(x) = ax + b$ mit CAS $f'(x)$ [illegible]
2. $f(x) = (ax + b)^2$ mit CAS [illegible] $= 2a$[illegible]$b)$
3. $f(x) = (ax + b)^3$ mit CAS $f'(x) = 3$[illegible]$(ax$[illegible]
4. $f(x) = (ax + b)^4$ mit CA[illegible] [illegible]$(ax+b)^3$
5. $f(x) = (ax + b)^5$ mi[illegible]AS [illegible]$5a(ax+b)$[illegible]
6. $f(x) = (ax^2 + b)^5$ mit [illegible] $f'(x) = 10a$[illegible]$(ax$[illegible]$b)^4$
7. $f(x) = (ax^3 + b)^5$ [illegible]t CAS $f'($[illegible] [illegible]$x^2(ax^3+b)^4$
8. $f(x) = (ax^4 + b)^5$ [illegible] $f'(x)$ [illegible]$20ax^3(ax^4+$[illegible]
9. $f(x) = (a$[illegible] mit CAS [illegible]$(x) = 5(4a$[illegible]$)(a$[illegible]$+bx)^4$

a) [illegible]lei[illegible] Sie je[illegible]s die Funk[illegible] [illegible]d die zuge[illegible]ge Ableitung und versuchen Sie herauszufinden b[illegible]zu f[illegible] welche Sy[illegible]matik sich a[illegible] Beispielen für die Ableitung dieser Funktionen erk[illegible]en lässt, indem Sie d[illegible]lgenden Sa[illegible]rgänzen.

[illegible]leitungsf[illegible]tion [illegible]eibt der [illegible] in der Klammer ________________________.

Die Potenz der Klammer wird um [illegible] verringert und die ursprüngliche Potenz erscheint als Faktor

_____ der Klammer. Das entspricht der _____________regel beim Ableiten von $f(x) = x^n$. Als

weiterer Faktor vor d[illegible] [illegible]t die ______________________ des Ausdrucks, der in der

Klam[illegible]

[illegible]en Sie mit Hilfe ihrer in a) formulierten Verm[illegible] der folgenden Funktion:

$f(x) = (ax^4+b)^3$

$f'(x) =$ [illegible] = _______________

[illegible]rsprung-
liche Potenz
der Klammer

Klammer mit um
1 verringerter
Potenz

Zusammenge-
fasstes Ergebnis

c) Begriffe **Verkettung**, **innere-** und **äußere Funktion**

Äußere Funktion

Die **äußere Funktion** s… inner… ktion ein und besteht hier aus de… …ch 3" also **(…)³**, wobei es egal i… was in … steht. Da man den Term in der …mer …(x) substituiert (ersetzt), kann ma… uch s… en (…)³ oder kurz **(u)³**. Wie man an … eise erkennt …t die äußere Funktion n… nt me… irekt von x a…gig, … n von … der u. Man be… …net die **äußere Funktion** dahe… ist mit **v(u(x))** oder einfach mit **v(u).**

Äußere Funktion

v(u… (u(x))³ … v(u)= (…)³

Innere Funktion

Den in der Klammer eingeschlossenen Ausdruck, hier also **$ax^4 + b$,** nennt man **innere Funktion.** Meist wird die innere Funktion mit **u(x)** bezeichnet. Abkürzend kann man auch nur **u** verwenden.

Innere Funktion

$u(x) = ax^4 + b$ oder u = … + b

f(x) = (ax^4 + …

Verkett…

…n kann … den Begriff Verkettung eine …fache und anschauliche …tell… entwickeln. Man stellt sich die innere Funktion u(x) als Ge… k vor und … äußere Funktion als das Packpapier. Wenn das Päckchen fertig gepackt ist, schließt das Packpapier das Päckchen, unabhängig von dessen Inhalt, vollständig ein.

d) Formulierung der **Kettenregel**

Betrachten wir n… Aufgabenteil b) unter Verwendung der neuen Begriffe innere F… …h folgende Zuordnungen treffen.

… $+b)^2$

innere Ableitung … äußere Ableitung

…rgänzen Sie den folgenden Satz:

Bei verketteten Funktionen wird die Ableitung von f(x) berechnet, … e Ableitung der

______ …itung der ________ …ultipliziert.

…e Darstellung	Kurze Darstellung	Sprachli… …ierung
…v(u(x))	f(x) = v(u)	
…'(x)·v'(u)	f '(x) = …	**f'(x) = in… Abl… äußere Ableitung**

Übung 7.2

Verdeutlichen Sie sich anhand der Beispiele die Anwendung der Kettenregel u… …gänzen… dabei fehlende Angaben.

Beispiel 1: $f(x) = (5x^2 + x)^4$

1. Schritt: Zuordnen der inneren und äußeren Funktion

$$f(x) = \underbrace{(5x^2+x)^4}_{v(u(x))}$$

Äußere Funktio…

v(u) = (…

Innere Funktion:

u(x) = ________

2. Schritt: Voneinander …ntes Ableiten …r inneren u… äußeren Fun…ion

A…iten innere …(x) nach x | **…bleiten äu…e Funktion …) nach u**

…$5x^2 + x$ | v = (u)…

u'= ____ | v' = ___$(u)^3$

v'= $4(5x^2 + x)^3$

Rücksubstitution des Ausdrucks für u

Nur die äußere Funktion, also die Klammer, wird abgeleitet, egal was in der Klammer steht.

Eselsbrücke:
v = $(\text{egal})^4$
v' = $4(\text{egal})^3$

3. Schritt: Zusammenfassen der …zelnen Ableitungen zum Ergebnis, entsprechend zu 7.2 b)

$f'(x) =$ ________ · ________ = ____________________

…usammenfassen …Ergebnisses.

Beispiel 2: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$. Kontrollergebnis: $f'(x) = \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}}$.

1. Schritt: f(…

Äußere Funktion:

$v = \sqrt{\_\_\_}$

Innere Funktion:

u =______________

2. Schritt: Innere Ableitung äußere Ableitung

$u = x^2 + 4x$ $v = \sqrt{u}$

$u' =$ ______ $v' =$ ______

Rücksub-stitution

3. Schritt: $f'(x) =$ ______

Beispiel 3: Ableitung von f(x) = c… (2…

$f(x) = \cos(2-3x)$

$f'(x) = u' \cdot v'$

…cos(u)

Rücksub-stitution

u… ____ $v' =$ ______ $=$ ______

$f'(x) =$ ______ $= -3\sin$…(2…x)

Übung…

Berechnen Sie die folgenden Abl…ngen mit der Kettenregel und stellen Sie die Ergebnisse so einfach wie möglich dar.

a) $f(x) = (5x - x^2)^3$ …in (2x + 3) c) $f(x) = \cos(x^2)$

d) f(x)… f) $f(x) = \cos^2(t)$

i) $f(x) = 3\sin(1 - 0{,}5t^2)$

k) $f(x) = \frac{…}{1 + x^3}$ …$f(x) = \frac{1}{\sin x}$

…) $s(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ n) $v(t) = A\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ …$\sqrt{\sin(x)}$

Lösungen in uns…

$f'(x) = -2x$… …(x)cos(x) $f'(x) = 2\sin(x$…

$f'(x) =$… …$-2x$ / $2\sqrt{x - x^2}$ $f'(t) = A\frac{2\pi}{T}\cos$…

f'(… $f'(x) = 0$ $f'(x) = \sin(1-t)$

…x^2 $f'(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$ …$(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

…π^2… $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ $f'(x) = 2\cos(2x +$… …$= 3(5-2x)(5x -$…

Aufgabe 7.3

Quotientenregel

Die Quotientenregel kommt zum Einsatz, wenn der Funktionsterm als ... aus z... ktionen dargestellt werden kann, also die Form $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ hat.

Diesen Funktionsterm kann m... ch oh... enner in d... rm $f(x)=u(x)\cdot(v(x))^{-1}$ ... llen. D... wäre es m... li... Ableitung ohne die Anwend... dieser ... leitungsr... mit einer Kombination aus ... ukt- u... ettenregel ... itteln. D... satz der Quo... rege... edoch o... Rechenaufw... und ist daher ... eist ... gl. Aufga... 4 Beispiel ...

Die Herleitung und d... ewe... er Gü... der Quo... regel könn... allen gängigen Fachbüchern und bei Wikipedia na... en. Es wird hier ... nur die Re... selbst angegeben. Die Anwendung wird an ei... gezeigt u... eübt.

Quo... regel:

Fu... n $f(x)=\frac{u(x...}{...(x)}$

Abl... funktion $f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v... (x)\cdot u(x)}{...v(x))^2}$ oder kurz: $f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Beispiel 1:

Erläuterungen

$u=x \qquad v=x-3$

$u'=1 \qquad v'=1$

(3) $f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

(4) $f'(x)=\frac{1\cdot(x-3)-1...}{...}$

(5) $f'(...$

(6) $...(x-3)^2$

(3) ______

(3)→(4) ______

______

(4)→(5) ______

(5)→(6) ______

Beispiel 2:

Erläutern Sie die Bedeutung der angegebenen Zeilen und der Rechenschritte in Stichworten.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2} = \frac{u}{v}$$

(1) $u = x$ $v = x^2 + 2$
(2) $u' = 1$ $v' = 2x$

(3) $f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

(4) $f'(x) = \frac{1\,(x^2 + 2) - 2x \cdot x}{(x^2 + 2)^2}$

(5) $f'(x) = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2}$

Erläuterungen

(1) ____________________

(2) ____________________

(3) ____________________

(3)→(4) ____________________

____

(4)→(5) ____________________

____

Übung 7

Ein Computerprogramm ermittelt für die Funktion $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ die Ableitungsfunktion

$f'(x) = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}$. Prüfen Sie, ob dieses Ergebnis richtig ist.

Übung 7.5

a) Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion $f(t) = \frac{1}{\sin(t)}$ mit Hilfe der Quotientenregel. Vergleichen Sie dazu auch Übung 7.3.

b) Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion $f(t) = \frac{t}{\sin(t)}$.

Zur Kontrolle (eines der beiden Ergebnisse trifft zu): $f'(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{\sin^2(t)}$ oder $f'(t) = \frac{t\cos(t)}{\sin^2(t)}$

c) Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \tan(x)$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis beispielsweise anhand eines geeigneten Tafelwerks, dem die Ableitungen von Standardfunktionen entnommen werden können.

Hinweis: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Aufgabe 7.4

Kombination mehrerer Ableitungsregeln

Es ist häufig notwendig, bei einer Ableitung mehrere Ableitungsregel[illegible] Aufga[illegible]wenden. Man muss dann zuerst entscheiden, welche Regeln übergeordnet und [illegible]lch[illegible]el untergeordnet angewendet werden. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Bei[illegible]iele un[illegible] danach die Vorgehensweise auf die nachfolgenden Übungen an.

Beispiel 1: $f(x) = x\sin(2\pi x)$

Übergeordnete Regel
Die Funktion f(x) lässt sich in ein Pro[illegible] aus $u(x)=x$ und $v(x)=\sin(2\pi x)$ [illegible]gen. [illegible] die **Produktregel** die übe[illegible]ord[illegible] Regel.

Unte[illegible]ordnete Re[illegible]:
Die Funktion v(x) [illegible]verkettet. Daher benötigt man [illegible] die **Kettenregel.** Zwecks Übersichtlichkeit, ist es günstig für die B[illegible]chnung dieser Verkettung nicht noch einmal u und v verwenden. [illegible] werden die Funktionen a(x) als innere und b(a) als äußere Funktion gewählt.

$$f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin(2\pi x)}_{v(x)}$$

Ableitung u(x) [illegible]

$u = $ [illegible] $v = $ [illegible] $\underbrace{(2\pi x)}_{b(a(x))}$

$a = 2$[illegible] $b = \sin(a)$

$a' = 2\pi$ $b' = \cos$[illegible]$= \cos(2\pi x)$

$v' = a$[illegible]

v[illegible]$\cos(2\pi x)$

[illegible] 1

$f'(x) = $[illegible]$v + v'u$

$f'(x) = \sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x)$

Beispiel 2: $f(x) = x + x\cos x$

Übe[illegible]
[illegible] $x\cos(x)$ zerlegen. [illegible]
[illegible]**regel** die übergeordnete Regel.

[illegible] **Regel**:
Pro[illegible]
a(x) = [illegible]
b(x) = co[illegible]

$$f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} + \underbrace{x\cos x}_{v(x)}$$

Ableitung [illegible]

$u = $ [illegible]

$a = x$ $b = \cos(x)$

$a' = 1$ $b' = -\sin(x)$

$v' = a'b + b'a$

$v' = \cos(x) - x\sin(x)$

[illegible]'

[illegible]$s(x) - x\sin(x)$

Beispiel 3: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ ist bereits in Aufgabe 7.3 mit Hilfe der Quo[illegible]egel ab[illegible] worden.

Wie dort in der Sprechblase erwähnt, kann man hier auch die P[illegible]dukt- [illegible] Ke[illegible]el zu Anwendung bringen, wenn man die Funktion wie folgt umformt: $f(x) = x\cdot($[illegible]$)^{-1}$. E[illegible] Sie die Rechenschritte unten und vergleichen Sie anschließend den Rechenau[illegible]wand d[illegible]den [illegible]ungswege.

Übergeordnete Regel:
Die Funktion lässt sich [illegible]erstes in das Produkt u(x) und v(x) [illegible]rlegen. Damit ist die **P**[illegible]**reg**[illegible] übergeordne[illegible] Regel.

[illegible]**ergeordnete Regel:**
Die Funktion v(x) ist eine verkettete [illegible]ktion. Damit ist die **K**[illegible]**regel** die unt[illegible]geordnete Regel.

(1) $f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(x^2+2)}_{v(x)}$[illegible]

(2) [illegible] $= \underbrace{(}_{b(a(x))}$[illegible]$)^{-1}$

(3) [illegible] $a = x^2+2$ [illegible] $= (a)^{-1}$

(4) $a' = $[illegible] $b' = -\dfrac{1}{a}$[illegible]$\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$

(5) [illegible]$' = 1$ [illegible]$= a$[illegible]$= -\dfrac{2x}{(x^2+2}$[illegible]

(6) $f'(x) = u'v + v'u$

(7) $f'(x) = 1\cdot(x^2+2)^{-1} + \left(-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}\right)\cdot x$

(8) $f'(x) = \dfrac{1}{}$[illegible]

[illegible] $= \dfrac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$

Ergänzender Tip:
[illegible] Sie, weder bei der Anwendung der [illegible]regel noch bei dem hier gezeigten [illegible]om im Nenner auf, sondern [illegible]nern bei. Das bringt bei der [illegible] beim Vereinfachen des Quotiente[illegible] dazu Übung 7.5

Erläuterungen zum [illegible]

(1) ____________________

(2) ____________________

(3[illegible] ____________________

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

(5) ______

(6) ______

(6)→(7) ______

(7)→(8) ______

(8)→(9) ______

(9)→(10) ______

Vergleich des Rechenaufwands:

______

______

Aufgabe

In de… …ung wird die zweite Ableitung der Funktion $f'(x) = \frac{x}{x^2+2}$ gebildet (vgl. Beispiel … Aufgabe 7.3 und Beispiel … Aufgabe 7.4). Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der Rechnung, u… …den Sie, warum es für die Berechnung der zweiten Ableitung günstig ist, die Klammern des Binoms im Nenner von $f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$ nicht aufzulösen.

Übergeordnete Regel:
Quotientenregel, da die …

$= \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$

…et:

(2) $u = 2 - x^2$ $v = (x^2+2)^2$

(3) … $b =$ ______

(4) … ______ $b' = 2(a) =$ ______

(5 … $=$ ______ $v' =$ ______

(6) $f''(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

(7) $f''(x) = \frac{-2x(x^2+2)^{\cancel{2}} - 4x\cancel{(x^2+2)}(2-x^2)}{(x^2+2)^{\cancel{4}\,3}}$

Hinweis zum Kürzen
Man darf bei einem Bruch … in S… …en kürzen, wenn … …ie hier, … Summand im Z… …im Nenner den Faktor (…² + 2) e… …al …

(8) $f''(x) =$ ______

(9) $f''(x) = \frac{2x^3 - 10x}{(x^2+2)^3}$

Begründung:

______

______

______

Übu… 7.6

…mitte… Sie für die folgend… …nktionen die erste und zweite Ableitung. Beachten Sie dabei, dass Sie … …isse gegebenenfalls algebraisch umformen müssen, um das angegebene Vergleichsergeb… zu erhalten.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$

b) $f(x) = \frac{3-x}{1-3x} \Rightarrow f''(x) = \frac{48}{(1-3x)^3}$

c) $f(x) = \frac{t}{\ldots}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$

Übung 7.7

Bei den folgenden Aufgaben müssen mehrere Ableitungsregeln in einer Aufgab[illegible] [illegible]gewen[illegible] werden. Legen Sie, wie im Beispiel, zunächst immer fest, welche Regel die übe[illegible]ordnete [illegible]itun[illegible]egel ist und welche Regel untergeordnet angewendet werden muss. Wenden [illegible] [illegible]ukt-, [illegible]ten- und Kettenregel an, um die Funktionen abzuleiten

a) $f(x) = x \cdot \sin(2x)$
b) $f(x)=(2x-1)(3x+4)^2$
c) f[illegible]in 2x cos 2x
d) $f(x) = 3x\sqrt{1+3x}$
e) $f(x) = x+2\sin^3 x$
f[illegible] f(t[illegible] + 2t + cos³x
g) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
h) $g(z) = \frac{\cos^2 z}{z}$
i) [illegible](t) = $\frac{2\pi}{t}$ sin[illegible]c)

Übung 7.8

Bestimmen Sie f '(x), wenn g und h differenzierbare Funktionen sind:

a) $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ b) $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ c) [illegible]

d) $f(x) = \sqrt{h(x)}$ e) $f(x)=\left(g(x)\cdot h(x)\right)^2$ f) [illegible] $h(x)$ [illegible]

Ergänzende und vertiefende Übungen zu den Ableitungsregeln

Übung 7.9

Bei den folgenden Funktionen liegen Dreifachverkettung f(x) = w(v(u([illegible] Verde[illegible] Sie sich die Vorgehensweise im folgenden Beispiel und verfahren Sie in den folge[illegible] analog dazu.

Der Ausdruck wird von innen heraus schrittweise in innere und äußere Funktionen zerlegt. Die jeweiligen Funktionen werden durch u(x), v(u) und w(v) substituiert.

u(x) = x [illegible] die innere [illegible] [illegible]es Sinus.

v(u) [illegible] (u) ist äuße[illegible] Funktion von x^3 und [illegible] innere Fun[illegible] der Wurzel.

$w=\sqrt{v}$ ist äuß[illegible] Funktion [illegible]us v(u).

Beispiel: $f(x)=\sqrt{\sin(x^3)}$

$v = \sin(u)$ [illegible] $\cos(u)$ [illegible] $= \cos(x^3)$

$w = \sqrt{v}$

$w' = \frac{1}{2\sqrt{v}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(u)}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$

[illegible] v'· w'

$f'(x) = 3x^2\cdot\cos(x$ [illegible] $\frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$ [illegible] $\frac{\ldots\cos(x^3)}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$

Nach der Berechnung der Ableitungen wird schrittweise zurücksubstituiert.

Anmerkung:

Da die Schreibweise „… Strich von … “ für die Ableitung nach x vereinbart wurde (vgl. Kapitel 2 Information 2.1), jedoch die äußeren Funktionen v hier nach u und w hier nach v abgeleitet werden, ist die in diesem Beispiel verwendete Schreibweise v‘ und w‘ stre[illegible] einwandfrei, ermöglicht jedoch eine übersichtliche [illegible] maler Sicht ist die folgende Darstellung

[illegible] $=\sqrt{\sin(x^3)}$

$u(x) = x^3$

$\frac{du(x)}{dx} = 3x^2$

[illegible] du

$w = \sqrt{v}$

$\frac{dw(v)}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(u)}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$

[illegible] dx · [illegible] du · [illegible] dv

$f'(x) = 3x^2\cdot\cos(x^3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}} = \frac{3x^2\cos(x^3)}{2\ldots}$ [illegible]

Verfahren Sie analog zum Beispielen

a) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$

b) $f(x) = \sin(1+x)^2$

c) $f(x) = (\ldots x^2))^{-1}$

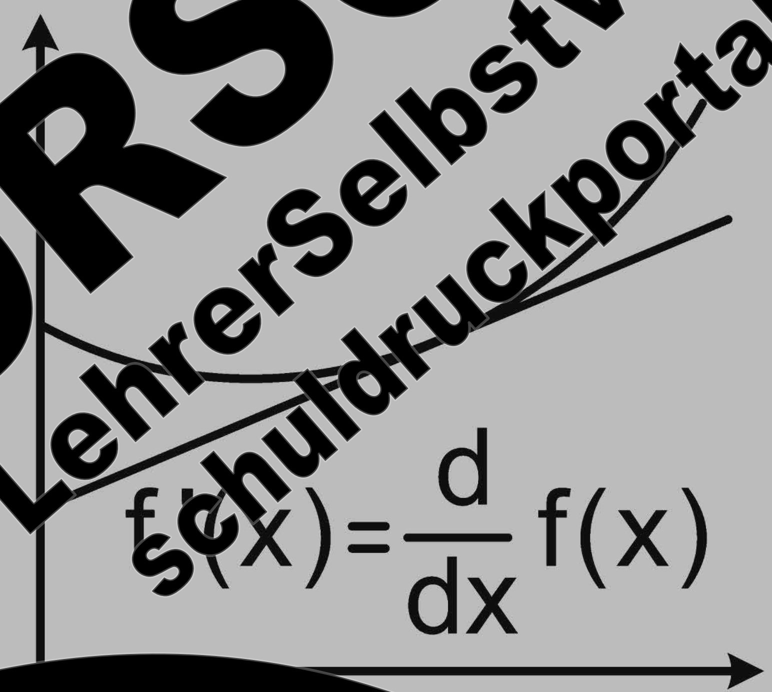
d) $f(x) = (\sin(2x))^2$

e) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

f) ...

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrechnung selbstorganisiert lernen



Kapite

Ableitung von
entialfunktionen

02-036-288

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 8: Ableitung von Exponentialfunktionen

Die Ableitung von Exponentialfunktionen kann, wie alle weiteren Funktionen (sin(x), cos(x), ln(x) usw.), mit Hilfe des Differenzialquotienten und den dazu notwendigen Grenzwertbetrachtungen berechnet werden. Diese Beweise findet man in den Fachbüchern und ... in ... Quellen. Zudem gehören die Beweise dieser Ableitungsregeln zum Inhalt ... der Mathematik-vorlesungen an Hochschulen und Universitäten. Im Rahmen ... vorliegenden ... sollen derartige Beweise nicht herangezogen und die Ableitung lediglich empirisch bestimmt werden.

Aufgabe 8.1

Ermittlung der Ableitung von $f(x) = e^x$ mit Hilfe der Steigung von Tangenten

In den Abbildungen unten ist jeweils die Funktion $f(x) = e^x$ in verschiedenen Ausschnitten im Koordinatensystem einschließlich ... angen... ...ellt.

a) Ergänzen Sie in jeder Abbildung ... Achsenbeschriftung mit x und y.

b) Berechnen Sie für jede Abbildung ... des gegebenen x-Wertes den Funktionswert im Berührpunkt von Tangente und Funktion auf eine Dezimalstellen gerundet und tragen Sie den Wert in der Tabelle auf der ... ein.

c) Ermitteln Sie die Steigung der Tangenten, indem Sie in jede Abbildung ein geeignetes Steigungsdreieck zeichnen und daraus die Werte für Δy und Δx ablesen. Tragen Sie die ... Werte ... der Tabelle ... der folgenden Seite ein; beachten Sie jeweils die Skalierung. V... ...nschließend die abgelesenen Werte von Δy und Δx, um damit die Steigung in den Berührpunkten zu berechnen. Geben Sie diese Werte auf eine Dezimalstelle gerundet an. Arbeiten Sie dabei so sorgfältig und genau wie möglich.

x-Koordinate Berührpunkt x_o	Funktionswert im Berührpunkt $y = f(x_o) = e^{x_o}$	Steigung im Be… punkt m… (x_o) = …
$x_0 = -1$	$f(x_0)$ = ______	$f'(x_0)$ … = ______
$x_0 = -0{,}5$	$f(x_0)$ = ______	…) = … ——— = ______
$x_0 = 0$	$f(x_0)$ = ______	$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ______
$x_0 = 0{,}5$	… = ______	f'… = ——— = ______
$x_0 = 1$	…) = ______	… $(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ——— = ______
x_0 = …	…(x_0) = ______	f'… $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ——— = ______

d) V…gle… Sie d… Werte von $f(x_o)$ … den Werten … $f'(x_o)$.

e) F…ren Sie ei… Ergebnis, indem … den Merksatz im Kasten vervollständigen.

Merke: Für den Zusammenhang zwischen der Funktion $f(x) = e^x$ und ihrer Ableitung gilt:

… **f '(x) = _____**

…usammenhang ist nur … im Exponent … die Variable, … t wird, also hier … n anderen Fällen … regel beachtet …

Ergä…

G… Stammfunktion von f(x) an, falls Sie schon mit den Grundlagen … echnung v…

…**ktion** zu $f(x) = e^x$: **F(x) = _____**

Aufgabe 8.2

Anwendung der Ableitungsregeln bei e-Funktionen.

E… ere Ve… egt da… en der Exponent de… nkt… hier, aus eine… n Funktion besteht.

a) Kettenregel bei linear verketteten Funktionen der … (x) = …

$f(x) = e^{ax+b}$

$f'(x) = \boxed{\text{innere Ableitung}} \cdot \boxed{\text{äußer… Ablei…}}$

$f'(x) = \quad u' \quad \cdot \quad v'$

… Funktion … äußere Funktion

$u = ax + …$

u' … $= e^{(u)} = e^{ax+b}$

$f'(…) = a \cdot e^{a…}$

Da v n… u abge… ird, gilt … ur oben fo… rten Regel
Aus $v(u) = e^u \Rightarrow v'(u) = e^u$

Zusatz…ormation
… Tafelwerken fin… man für dies… Ableitung auch die …lgende Angabe:
$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(…)$…

Verdeutlichen Si… im Ableiten der e-Funktion am Beispiel (1) und ergänz…

$u = -x + 3 \quad v = e$…

$u' = -1 \quad v' = e^u = e^{-x+3}$

$f'(x) = u' \cdot v'$

$f'(x) = -e^{-x+3}$

(2) f(…

v = _____

u' = _____ v' = _____

…) = u'· v'

…(x) = ___ e———

b) Konstantenregel am Beispiel $f(x) = ce^{ax+b}$

$f(x) = ce^{ax+b}$

$f(x) = c \cdot u(x)$

$f'(x) = \boxed{\text{Konstante}} \cdot \boxed{\text{Ableitung } u(x)}$

$f'(x) = c \cdot u'(x)$

$f'(x) = a \cdot ce^{ax+b} = ace^{ax+b}$

Bemerkung: Wie bei der A… …ler ganzratio- nalen Funktio… wi… …onstante beim …ferenz… …s nicht berüc…tigt. L… …onstante wird …diglic… …lem… …m der inneren … …pliziert.

Verdeutlichen Sie sich die Reg… …eispie… …gänzen S… d… Beispiele (2… …d (3).

(1) $f(x) = 4e^{-x+3}$

… $= -x + 3$ … $v = 4e^{…}$

… $v' = 4…$

$f'…$

…$) = -1$ … $x+3$ … $= …4e^{-x+3}$

(2) $f(…$

$u = \_\_\_\_$ $v = \_\_\_\_$

$u' = \_\_\_\_$ $v' = \_\_\_\_$

$f'(x) = u' \cdot v'$

$f'(x) = \_\_\_\_ \cdot e^{\_\_\_\_} = \_\_\_\_ \cdot e^{\_\_\_\_}$

(3) …

$u = \_\_\_\_$ $v = \_\_\_\_$

u' … $v' = \_\_\_\_$

$f'(x…$

… $\cdot e$ … $= \_\_\_\_ \cdot e^{\_\_\_\_}$

c) Summenregel am Beispiel $f(x) = x^n + ce^{ax+b}$

$f(x) = \underbrace{x^n}_{u(x)} + \underbrace{ce^{ax+b}}_{v(x)}$

$f'(x) = \boxed{\text{Ableitung 1.Summand}} + \boxed{\text{Ableitung 2. Summand}}$

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

$f'(x) = nx^{n-1} + ace^{ax+b}$

Bemerkung: Die Sum… …el wird …det, wenn zw… …ei… …beiden Funktionen … und v… ein… – Zeichen … Man … ggf. bei dem S… …nde… …noch die Kettenregel … H… wurde für v'(x) das …gebn… …s Aufgabe… …b) von oben …ernommen.

Verdeutlichen Sie sich die Re… am Beispiel … ergänzen Sie die Beispi…e (2) …nd (3). Versuchen Sie hier die Ableitu… …nktionen ohne …hriftliche Zwisc…schritte zu ermitteln.

(1) $f(x) = \underbrace{2x}_{u(x)}$ … $e^{…2}$

…$) = 2…$ $v(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x+…}$

$u'…$ 2 $v'(x) = -2…e^{-\frac{1}{2}x…}$

$f'(…$ … $- v'(x)$

…$'(x) = 2 - (-2 \cdot e^{-\frac{1}{…}…}$

…$'(x) = 2 + 2e^{-\frac{1}{…}x+…}$

…schenschritte f… die Ableitung v… $v(x)$ ggf. im …pt berechnen.

$v(x) = 4e^{…}$

$a = -\frac{1}{2}x + 3 \quad b = 4e^{(a)}$

$a' = -\frac{1}{2} \quad b' = 4e^{(a)}$

$v'(x) = a' \cdot b'$

$= -\frac{1}{2} \cdot 4e^{-\frac{1}{2}x+3} = -2e^{-\frac{1}{2}x+3}$

(2) $f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} - \underbrace{3e^{2x+5}}_{v(x)}$

… $(x) + v'(x)$

$f'(x) = 2x - 6e^{2x+5}$

Zwischenschritte für $v'(x)$

$v(x) = \underbrace{3e^{2x+5}}_{b(a(x))}$

$a = \_\_\_\_$ $b = \_\_\_\_$

… $\_\_\_\_$ $b' = \_\_\_\_$

(3) $f(x) = 1…$

… $= \_\_\_\_$ $v(x) = \_\_\_\_$ $w(x…$

…$(x) = \_\_\_\_$ $v'(x) = \_\_\_\_$ $w'(x) = …$

…$(x) = u'(x) + v'(x) - w'(x)$

…$(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_ = e^{-x}(e^{2x} + …$

d) Produkt- und Kettenregel am Beispiel $f(x) = x^2e^{-x}$ (vgl. das Vorgehen mit Kapitel 7 ... gabe 7.4)

Übergeordnete Regel:
Produktregel mit
$u(x) = x^2$ und $v(x) = e^{-x}$

Untergeordnete ...gel:
Kettenregel be...

$f(x) = x^2e^{-x} = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v(x)}$

$u = x^2 \quad v = e^{-x}$

$u' = 2x \quad v' = ...$

$f'(x) = u'v + v'u$

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (-e^{-x}) \cdot x^2$

$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$

$= (2x - x^2)e^{-x}$

...enn die zweite Ableit... verlangt ...d, ist es sinnvoll ... auszuklammern, ... ein rationaler Faktor und ein exponentieller Faktor entsteht. Diese Umformung erleichtert in der Regel auch das Lösen einer Gleichung, die aus dem Ansatz f'(x) = 0 entsteht.

Ergänzen Sie in de... den fehlenden Angaben.

(1) ... $= \underbrace{...}_{u(x)} \underbrace{e^{-x+1}}_{v(x)}$

$u = 3x \quad v = e^{-x+1}$

$u' = \_\_\_\_ \quad v' = \_\_\_\_$

$f'(x) = u'v + v'u$

$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$f'(x) = 3e^{-x+1}(1-x)$

Zwischenschritte für $v'(x)$

$v(x) = \underbrace{e^{-x+1}}_{b(a(x))}$

$a = \_\_\_\_ \quad b = \_\_\_\_$

$a' = \_\_\_\_ \quad b' = \_\_\_\_$

(2) ...

$u = \_\_\_\_ \quad v = \_\_\_\_$

$u' = \_\_\_\_ \quad v' = \_\_\_\_$

$f'(x) = u'v + v'u$

f'...

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= 4e^{-2x}(x-1)$

...chenschritte für $v'(x)$

... e^{-2x}

... $\_\_\_\_ \quad b = \_\_\_\_$

... $\_\_\_\_ \quad b' = \_\_\_\_$

Ergänzende und vertiefende Betrachtungen

Aufgabe 8.3

Ableiten einer e-Funktion mit nichtlinearer Verkettung

Die in Aufgabe 8.2 erarbeiteten Ableitungsregeln können direkt auf e-Funktionen mit nichtlinearen Exponenten übertragen werden. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (s. Abbildung Abb. 8.3.1) an den Stellen x = 1 und x = –1 Wendepunkte besitzt.

(Kontrollergebnis 2. Ableitung: $f''(x) = (x^2 - ...$

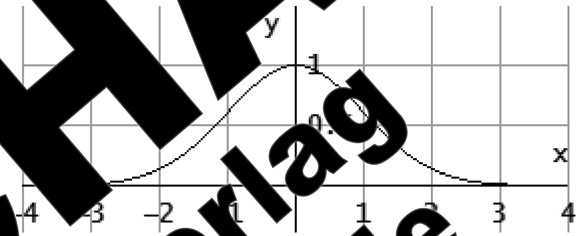


Abb.8.3.1

Aufgabe 8.4

Ableiten einer beliebigen Exponentialfunktion zur Basis a

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise bei der Ableitung der allg... Expon... ...nktion zur Basis a. Vollziehen Sie anschließend die Umformungen anhan... der Fu...on ... $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nach und zeigen Sie, dass diese Funktion die zweite Ableitung $f''(x) = (\ln$ ... e^{-x} ...zt.

$f(x) = a^x$

Vgl. Band ...gendes zu ...lgebra u... ...unktionen“

Umformen der gegebenen Funktion zu einer ...unktio...

$e^{z(x)} = a^x$

$\ln(e^{z(x)}) = \ln(a^x)$

$z(x)\ln e = x$ ...

$z($ ... $\ln($ ...

$f(x) = e^{x\ln(a)}$

Ermitteln ... Abl... ...:

$f'(x)$ ... u' ...

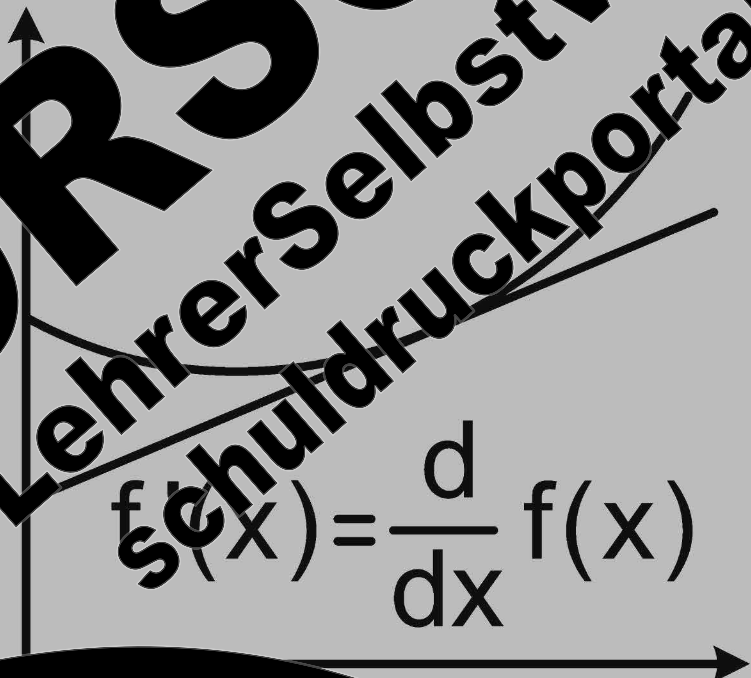
... $x\ln(a)$ ... v ...

... $u' = \ln(a)$ ... $v' = e^u = e^{x\ln(a)}$

... $= \ln$ ... $\cdot\, e^{x\ln(a)}$

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Differenzialrech... selbstorganisier... ...rle...en



Kapit...

Ableitung der ...ithmusfunktion

02-036-288

Gesamtw... ...hnung selbstorganisiert erl...
(Best...

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

Kapitel 9: Ableitung der Logarithmusfunktion

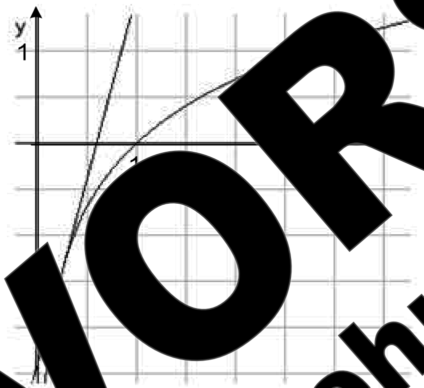
Aufgabe 9.1

Ermittlung der Ableitung von f(x) = ln(x) mit Hilfe der Steigung vo... ...ten

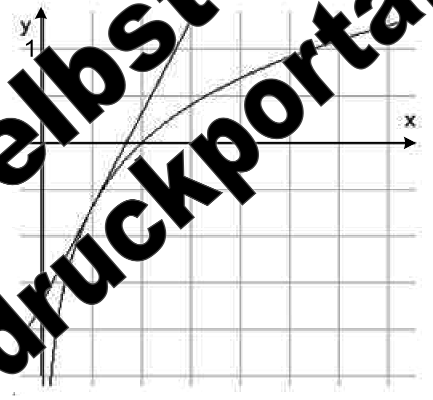
Entsprechend zur Vorgehensweise bei der Exponentialfunkti... ...(x) = e... ...ung der Funktion f(x) = ln(x) anhand graphischer Überlegungen empirisch herge... ...werd... ...m Zeichenungenauigkeiten weitgehend zu vermeiden, werden in den folgen... Abb... ...en je... ...s die Funktion f(x) = ln(x) und eine Tangente dargestellt.

a) Ermitteln Sie die Steigung der Tangenten ... ...it der ...tion f(x) an ...en ...gebenen Stellen mit Hilfe eines geeigneten Steigungsdreie... und tragen ... Werte i... ...abelle auf der folgenden Seite ein. Arbeiten Sie so sorg... wie m...ch.

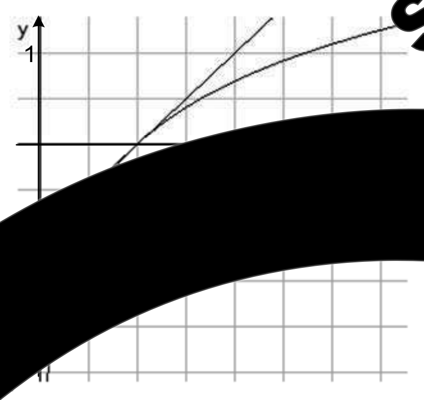
Tangente an der Stelle $x = \frac{1}{4}$



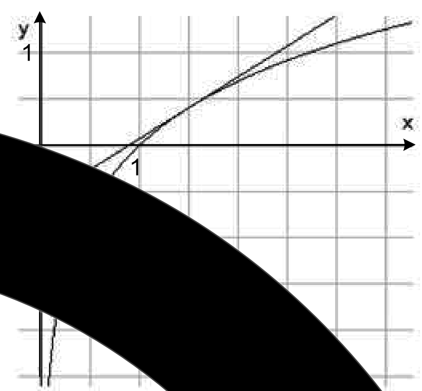
...gente an ...elle $x = \frac{1}{2}$



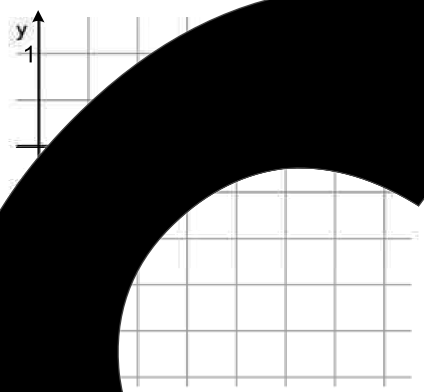
Tang...te an der Ste... = 1



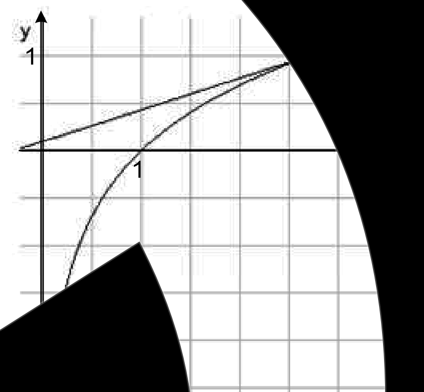
Tangente an der Stelle $x = \frac{3}{2}$



Tangente an der Stelle x = 2



Tangente an der...



b) Berechnen Sie die Steigung, indem Sie die abgelesenen Werte von Δy und Δx eins[illegible] und geben Sie das Ergebnis sinnvoll gerundet als Dezimalzahl an.

x-Koordinate im Berührpunkt x_0	Δy	Δx	Ste[illegible] Berühr[illegible] $m = f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$x_0 = \frac{1}{4}$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ ____ $\approx$ ____
$x_0 = \frac{1}{2}$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ ____ $\approx$ ____
$x_0 = 1$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ ____ $\approx$ ____
$x_0 = \frac{3}{2}$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ ____ $\approx$ ____
[illegible]			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ ____ $\approx$ ____
$x_0 = 3$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ ____ $\approx$ ____

c) Fo[illegible]ren Sie ei[illegible] Erg[illegible]bnis, indem [illegible] den Merksatz im Kasten vervollständigen.

Merke: Für den Zusammenhang zwischen der Funktion f(x) = ln(x) und ihrer Ableitung gilt:

f '(x) = —

Ergänzung Integralrechnung:

Geben Sie di[illegible] $\frac{1}{x}$ an, falls Sie schon mit den G[illegible]er Integralr[illegible]

St[illegible] zu $f(x) = \frac{1}{x}$: **F(x) =** ___________

Aufgabe 9.2

Anwendung der Ableitungsregeln bei ln-Funktionen.

a) Erläutern Sie die Umformungsschritte bei der Ermittlung der Ableit[illegible] f(x) = l[illegible] die beiden dargestellten Rechenwege.

Rechenweg 1:

(1) $f(x) = \ln(ax)$ (1)→(2) ____________________

(2) $f(x) = \ln(a) + \ln(x)$ (2)→([illegible] ____________________

(3) $f(x) = u(x) + v($[illegible] ____________________

(4) f'[illegible] $u'(x)$ [illegible] (4)→(5) ____________________

(5) [illegible]$x) = \frac{}{x}$

Rechenweg 2:

(1) $f(x) = \ln(ax)$ (1)→(2) ____________________

[illegible]

(3) $u = ax$ $v = \ln u$ (3)→(4) ____________________

(4) [illegible])→(5) ____________________

$v = \frac{}{ax}$

[illegible] $\frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

b) Zeigen Sie mit beiden unter Aufgabenteil a) verwendeten Rechenwegen, dass für di… eitung von $f(x) = \ln(ax^n)$ gilt: $f'(x) = \frac{n}{x}$ und $f''(x) = -\frac{n}{x^2}$. Berücksichtigen Sie dabei das …nzgese… $\ln(a^b) = b\ln(a)$ (vgl. Band „Grundlegendes zu Algebra und Funktion…

c) Zeigen Sie mit beiden unter Aufgabenteil a) verwendeten Rechenwegen, dass für di… eitung von $f(x) = \ln\left(\frac{a}{bx^n}\right)$ gilt: $f'(x) = -\frac{n}{x}$ und $f''(x) = \frac{n}{x^2}$.

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen